

*Reducción dimensional de
vectores y escalares en dimensión*

$$D = 5$$

BR.: FERNANDO C. ÁLVAREZ R.

TUTOR: JOSÉ ANTONIO LÓPEZ R.

Trabajo Especial de Grado



2013

Caracas - Venezuela



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.

FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE FÍSICA.

REDUCCIÓN DIMENSIONAL DE VECTORES Y ESCALARES EN DIMENSIÓN $D = 5$

BR. FERNANDO C. ÁLVAREZ R.

TUTOR: JOSÉ ANTONIO LÓPEZ R.

2013

Caracas - Venezuela

*Reducción dimensional de vectores y
escalares en dimensión $D = 5$*

Br. Fernando C. Álvarez R.

*Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Física.*

José Antonio López R., Tutor

Fecha: / / 2013

Caracas, 16 de mayo de 2013

Caracas - Venezuela

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por el **Br. Fernando C. Álvarez R., C.I. V.13.777.829**, titulado: *Reducción dimensional de vectores y escalares en $D = 5$* , para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos **APROBADO** en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

Prof.: José Antonio López R., Tutor _____

Fecha: / / 2013

Prof.: Pío Arias, Jurado _____

Fecha: / / 2013

Prof.: Jorge Stephany, Jurado _____

Fecha: / / 2013

Caracas, 16 de mayo de 2013

Dedico este trabajo a mis padres y hermanos.

Agradecimientos

- A mi tutor, José Antonio López, además de la razón obvia, por haber tenido la infinita paciencia de responder $2n + 1$ veces las mismas preguntas, pero siempre de manera tal que parecía ser la primera vez en ser respondidas.
- A los profesores Mario I. Caicedo, Universidad Simón Bolívar y Pío Arias, Universidad Central de Venezuela, por sus valiosos comentarios e invaluable aportes a este trabajo.

Índice general

Agradecimientos	XI
Resumen	XIX
1. Introducción	1
2. Sistemas singulares.	5
2.1. Método de Dirac.	7
2.1.1. Hamiltoniano de un sistema singular.	8
2.1.2. Vínculos de primera clase.	10
2.2. Simetría de calibre.	10
3. Ejemplos de sistemas singulares.	13
3.1. Partícula relativista.	13
3.2. Partícula no relativista.	17
3.3. Campo de Maxwell libre.	18
4. Reducción dimensional o compactificación.	22
4.1. Reducción dimensional del campo de Klein-Gordon en $D = 4+1$. . .	24
4.2. Reducción dimensional del campo de Maxwell en $D = 4+1$	26

5. Sector Bosónico del multiplete vectorial D=5 con supersimetría	
$\mathcal{N}=1$.	30
5.1. La acción en su forma general	30
5.2. a) Caso no abeliano	31
5.3. b) Caso abeliano	33
6. Compactificación y simetría de calibre de la acción 5D abeliana.	34
6.1. Simetría de calibre de la acción 5D.	34
6.1.1. Término tipo Maxwell.	35
6.1.2. Término tipo Klein-Gordon.	36
6.1.3. Término de Chern-Simons.	36
6.2. Simetría de calibre de la acción compactificada.	37
7. Compactificación y simetría de calibre de la acción no abeliana.	40
7.1. Simetría de calibre de la acción 5D.	41
7.1.1. Término tipo Yang-Mills.	41
7.1.2. Término tipo Klein-Gordon (no abeliano)	43
7.2. Compactificación de la acción no abeliana.	45
7.2.1. Término tipo Yang-Mills	46
7.2.2. Término de Klein-Gordon (no abeliano)	47
7.2.3. Definición del campo escalar complejo “z”	48
7.3. Simetría de la acción compactificada	49
8. Chern-Simons no abeliano en D=5	52
8.1. Definición	52
8.2. Compactificación	55

9. Conclusiones	60
9.1. Análisis de la acción abeliana	60
9.2. Análisis de la acción no abeliana	62
9.3. Análisis de Chern-Simons no abeliano	64
A. Tablas Resumen	66
Bibliografía	68

Índice de figuras

3.1. Línea de Mundo de la partícula relativista.	16
4.1. Representación de la cuarta dimensión espacial.	23
8.1. Definimos $\partial\Omega^6$ como la frontera del 6-espacio Ω^6	55
8.2. Tomamos x^4 como la dimensión compacta	56

Resumen

Nos interesa el estudio de la *reducción dimensional* de una acción que consiste en el sector bosónico de un multiplete vectorial con supersimetría $\mathcal{N} = 1$, en $D = 4 + 1$, *abeliana* y no *abeliana*. Dicha acción cuenta con un término tipo Yang-Mills, otro tipo Klein-Gordon y Chern-Simons acoplados a un campo escalar ϕ (ver ecu. 1.1). La idea es compactificar y expresar dicha acción en $D = 3 + 1$ a través del método de Kaluza-Klein. Se hace particular énfasis en la forma en la que se manifiesta la *simetría de calibre* en ambos casos (*abeliano* y *no abeliano*), donde se observa que la *invariancia de calibre* se preserva de una forma sencilla a pesar de la presencia del término de Chern-Simons y de la aparición de nuevos campos escalares no masivos ($A_4^{(0)I}$) que son producto de la compactificación. En el caso *no abeliano* aparece, además, un término de potencial cuártico $g^2/8[z, z^*]^I[z, z^*]^J z^K C_{IJK}$, donde z^I es un campo escalar complejo definido como: $z^I = \phi^I + iA_4^{(0)I}$. Este potencial preserva la invariancia de calibre y debe ser considerado en la acción por criterios de simetría que permiten generalizarla incluyendo aquellos términos que conservan la simetría de calibre.

Capítulo 1

Introducción

La *reducción dimensional o compactificación* de una teoría permite el estudio de la misma en dimensiones inferiores. Por ejemplo, si se parte de la idea de Kaluza-Klein, la compactificación de la gravitación en $D = 5$ sobre un círculo de radio R genera como resultado una teoría 4D, pero con la aparición de un campo vectorial extra que puede interpretarse como un fotón. Este tipo de riqueza es, en parte, lo que hace de la reducción dimensional una técnica matemática interesante, sobre todo para aquellas teorías que requieren de la existencia de dimensiones adicionales a las 3+1 habituales. En el capítulo 4 se explorará sobre la técnica a lo Kaluza-Klein.

Por otro lado, son de particular interés aquellas teorías que poseen en su estructura algunas simetrías peculiares; estas son: las *simetrías de calibre o invariancias de gauge*. Estos sistemas son ampliamente estudiados en teoría de campos ya que, según el teorema de Nöther, las simetrías implican la conservación de la carga del campo en cuestión. Dichos sistemas son también llamados *singulares*, pues el determinante de la matriz hessiana del lagrangiano es nulo y, por tanto, las velocidades y posiciones no están unívocamente determinadas como unas en función de las otras. El capítulo

2 está destinado a un corto repaso de estos sistemas, así como también se hará una breve introducción al método de Dirac para tratarlos. El capítulo 3 dedica un espacio a algunos ejemplos de sistemas singulares tales como: la partícula relativista, la partícula no relativista y el campo de Maxwell -entre otros- así como también el uso del método de Dirac.

A partir del capítulo 5 en adelante, el estudio se enfocará, entonces, en la compactificación de una acción 5D que consiste en un campo vectorial acoplado a un campo escalar y un término de Chern-Simons. La acción, en su forma general *no abeliana*, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} \phi^K C_{IJK} - \frac{1}{2}\mathcal{D}_\gamma \phi^I \mathcal{D}^\gamma \phi^J \phi^K C_{IJK} \\ & - \frac{1}{24}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} A_\mu^I (F_{\nu\lambda}^J F_{\rho\sigma}^K + \frac{1}{2}g[A_\nu, A_\lambda]^J F_{\rho\sigma}^K + \frac{1}{10}g^2[A_\nu, A_\lambda]^J [A_\rho, A_\sigma]^K) C_{IJK}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ésta representa el sector bosónico de un multiplete vectorial $D = 5$ mucho más general (ver ecuación 5.1), con supersimetría $N = 1$. Por ser una teoría 5D, los índices espaciales cumplen: $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$; y los índices del grupo de calibre $I = 1, 2, 3, \dots, n$, donde n es la dimensión del grupo. Los dos primeros miembros de la expresión (1.1) son los términos de Yang-Mills y Klein-Gordon respectivamente, acoplados a un campo escalar; el último término es Chern-Simons en $D = 5$. En particular, este trabajo se enfocará en la reducción dimensional de dicha acción (abeliana y no abeliana), con el fin de verificar y estudiar la forma en la que la simetría de calibre se manifiesta en la teoría 4D. También se dedicará un capítulo especial al estudio del término de Chern-Simons (capítulo 8) donde se discute, a partir de la definición

de dicho término y el teorema de Stokes, la simetría de calibre del mismo y de su compactificación.

Como es usual en teorías de campos, las unidades elegidas para trabajar las ecuaciones son las *unidades naturales*; esto es, se toma la velocidad de la luz y la constante de Planck como unitarias y adimensionales ($c = \hbar \equiv 1$), lo que trae como consecuencia las siguientes equivalencias entre unidades:

- De la velocidad de la luz (c) adimensional se deduce la equivalencia entre las unidades de longitud y tiempo, esto es: $[L]=[T]$; por lo que las distancias se pueden medir en segundos ($1s = 3 \cdot 10^8 m/c$).
- Por otro lado, la constante de Planck adimensional implica una equivalencia entre las unidades de energía y el inverso del tiempo, es decir, la energía se expresa como $[T]^{-1}$ o, lo que es igual, como inverso de longitud ($[L]^{-1}$).
- Por último, de la ecuación de Einstein, $E = m \cdot c^2$, si c es adimensional, las unidades de masa y energía son equivalentes; es decir $[E] = [M]$ y así las masas también se expresan como $[L]^{-1}$.

Esto último es importante pues, producto de la reducción dimensional, aparecen en la teoría campos con masas del orden de $[R]^{-1}$ (donde R es el radio de la dimensión compacta) las cuales son extremadamente grandes para ser medidas, ya que R es del orden de la longitud de Planck y así, las masas pueden ser tan grandes como 10^{19} GeV ó 10^{16} TeV, es decir, dieciséis órdenes de magnitud superiores a los medibles con el mayor colisionador de partículas existentes hoy en día: el LHC (7 TeV).

Es importante, además, señalar que en algunas ocasiones será necesario redefinir la notación utilizada para tratar las ecuaciones, pues no siempre el sistema elegido se ajusta cómodamente a las necesidades; sin embargo, en cada capítulo se advertirá oportunamente al lector a fin de evitar inconvenientes con la lectura de las ecuaciones y su posible interpretación.

Capítulo 2

Sistemas singulares.

En este capítulo se hará un bosquejo general de los llamados sistemas singulares, los cuales, tal como veremos, son sistemas con vínculos y además están asociados a las simetrías de calibre.

Un buen punto de partida para el análisis lo encontramos en el formalismo lagrangiano, el cual servirá de base para hacer posteriormente la transición a la definición Hamiltoniana. Así, partimos de la acción [4]

$$S = \int dt \mathcal{L}(p^i, \dot{q}^i), \quad (2.1)$$

donde p^i, \dot{q}^i son las variables dinámicas y $\mathcal{L}(p^i, \dot{q}^i)$ es el lagrangiano. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}. \quad (2.2)$$

Desarrollando la derivada total con respecto al tiempo y reorganizando términos se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j, \quad (2.3)$$

ecuación que se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}_{ij} \ddot{q}^j = \mathcal{K}_i, \quad (2.4)$$

con $\mathcal{M}_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$ y $\mathcal{K}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j$.

Visto de esta forma, podemos analizar lo siguiente[8]: si la matriz \mathcal{M}_{ij} es tal que su determinante es distinto cero, esto es, si $\det(\mathcal{M}) \neq 0$, entonces las aceleraciones están unívocamente determinadas como función de las q 's y \dot{q} 's, debido a que \mathcal{M} es invertible y se puede escribir

$$\ddot{q}^j = (M^{-1})^{ij} \mathcal{K}_i. \quad (2.5)$$

Por el contrario, si el determinante de la matriz \mathcal{M} es cero ($\det \mathcal{M} = 0$), entonces las soluciones para la expresión (2.5) son ambiguas, por lo que las aceleraciones no están unívocamente determinadas y en general las soluciones de las ecuaciones de movimiento podrían contener funciones arbitrarias del tiempo. Así pues, aquellos sistemas que cumplen con esta condición se llaman *sistemas singulares*.

Ahora bien, el paso al formalismo Hamiltoniano se obtiene al definir la variable canónica

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \quad (2.6)$$

y el Hamiltoniano se escribe como:

$$\mathcal{H} = \dot{q}^i p_i - \mathcal{L} \Big|_{\dot{q}^i = \dot{q}^i(q,p)} . \quad (2.7)$$

Sin embargo, esta expresión representa un problema para los sistemas singulares, pues no todas las velocidades pueden escribirse en términos de las posiciones y los momenta. Así, surge la necesidad de buscar un método que permita el tratamiento de estos sistemas.

2.1. Método de Dirac.

El hecho de que la matriz \mathcal{M} tenga por determinante cero, implica que existe un número de filas o columnas que no son linealmente independientes. Dicho de otra manera: sea la matriz \mathcal{M}_{ij} , con $i = 1, 2, \dots, N$. El máximo número de filas o columnas que son linealmente independientes viene dado[8] por : $rank \mathcal{M}_{ij} = n$, donde $n < N$. Llamemos m al número de filas o columnas que no son linealmente independientes ($N - n$) de esa misma matriz. Desde este punto de vista y usando la definición (2.6) podemos escribir:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \quad | \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

y

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \quad | \quad j = n + 1, \dots, N \quad (2.9)$$

Debido a que el $rank(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}) = n$, podemos encontrar n velocidades en términos de la q 's, p 's y \dot{q} 's restantes, esto es,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \implies \dot{q}^i = \dot{q}^i(q^i, p_{n'}, \dot{q}^j) \quad (2.10)$$

y de donde se puede escribir

$$p_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \equiv 0 ; \quad (2.11)$$

por otro lado, sustituyendo (2.10) en (2.9) se tiene

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \implies \phi_j(q, p) \equiv p_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \Big|_{\dot{q}^i = \dot{q}^i(q^i, p_{i'}, \dot{q}^j)} = 0. \quad (2.12)$$

Es decir, aunque hay m variables que no pueden despejarse en términos de las $q's$, $p's$ y $\dot{q}'s$, existen unas relaciones $\phi_j(q, p)$; con $j = 1, \dots, m$, que cumplen $\phi_j(q, p) = 0$ y, además, por inspección puede verse que hay una independencia explícita de las $\dot{q}'s$ porque, de lo contrario, podría utilizarse (2.12) para conseguir otras velocidades en términos de las posiciones y momenta, lo cual es contrario a la suposición inicial.

Las relaciones $\phi_j(q, p)$ se llaman *vínculos primarios*, y las ecuaciones $\phi_j(q, p) = 0$ son superficies implícitas que representan una subvariedad en el espacio de fase.

2.1.1. Hamiltoniano de un sistema singular.

Definimos, entonces, la densidad Hamiltoniana del sistema como la cantidad [2, 4]

$$\mathcal{H} = \dot{q}^\alpha p_\alpha - \mathcal{L} \Big|_{p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}}. \quad (2.13)$$

Esta expresión es, por construcción, independiente de las velocidades ($\dot{q}'s$). Por ser el sistema singular, el Hamiltoniano no está unívocamente determinado pues

siempre se puede agregar funciones de p y q sin que esto modifique el sistema. En particular se puede escribir

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} + \lambda^j \phi_j(q, p), \quad (2.14)$$

donde los λ_m son multiplicadores de Lagrange.

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p} \quad y \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial q} \quad (2.15)$$

y si utilizamos la expresión (2.14) tenemos

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} + u^j \frac{\partial \phi_j}{\partial p} \quad y \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - u^j \frac{\partial \phi_j}{\partial q}. \quad (2.16)$$

Se puede escribir, entonces, de forma general el Hamiltoniano total:

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H} + u^j \phi_j. \quad (2.17)$$

Ahora bien, los ϕ_m son cantidades conservadas, entonces $\dot{\phi}_j = 0$. En términos de corchetes de Poisson se escribe

$$\{\phi_j, \mathcal{H}_T\} = 0, \quad (2.18)$$

lo cual puede reescribirse utilizando (2.17) de la forma

$$\{\phi_j, \mathcal{H}\} + u^{j'} \{\phi_j, \phi_{j'}\} = 0. \quad (2.19)$$

De esta ecuación se desprenden dos posibles situaciones interesantes: 1) que (2.19)

se satisfaga exactamente o genere relaciones que son combinaciones lineales de los ϕ_j , en cuyo caso se dice que los vínculos están completos; 2) que (2.19) genere relaciones que no son combinaciones lineales de los ϕ_j . En esta última situación se tiene un nuevo conjunto de vínculos $\chi = 0$ los cuales se denominan *vínculos secundarios*.

2.1.2. Vínculos de primera clase.

Definimos los vínculos de primera clase como aquellos que cumplen [2]

$$\{\phi_j, \phi'_j\} = C_{jj}^i \phi_i \approx 0 \quad (2.20)$$

y, en general, cualquier variable dinámica g se definirá de primera clase si

$$\{g, \phi_j\} = C_j^i \phi_i \approx 0. \quad (2.21)$$

2.2. Simetría de calibre.

Como se dijo al inicio del capítulo, los sistemas singulares están estrechamente ligados a las simetrías de calibre. Una forma interesante de ver esto es haciendo el siguiente análisis: [2]

Dada una variable dinámica g en general y de primera clase, cuyo valor inicial es g_0 , su valor en un δt se puede escribir:

$$g_{(\delta t)} = g_0 + \dot{g}\delta t$$

$$g_{(\delta t)} = g_0 + \{g, \mathcal{H}_T\} \delta t \quad (2.22)$$

$$g_{(\delta t)} = g_0 + \delta t(\{g, \mathcal{H}_0\} + u^j \{g, \phi_j\}).$$

Si tomamos ahora otro valor u'^j arbitrario, de manera que $g_{(\delta t)}$ sea diferente, podemos calcular $\Delta g_{(\delta t)}$:

$$\Delta g_{(\delta t)} = \delta t(u^j - u'^j) \{g, \phi_j\} \quad (2.23)$$

ó

$$\Delta g_{(\delta t)} = \epsilon^j \{g, \phi_j\} \quad \text{con} \quad \epsilon^j = \delta t(u^j - u'^j). \quad (2.24)$$

Así podemos cambiar, por ejemplo, todas las variables del Hamiltoniano usando la expresión (2.24) y éste permanecerá invariante, pues estos cambios consisten en transformaciones locales cuyas funciones generadoras son los $\epsilon^j \phi_j$. En otras palabras, los vínculos de un sistema singular son las funciones generadoras de las transformaciones de calibre; luego, un *sistema singular* tiene *simetrías de calibre*.

Capítulo 3

Ejemplos de sistemas singulares.

3.1. Partícula relativista.

A continuación estudiaremos algunos sistemas singulares a modo de ejemplo de lo tratado en el capítulo anterior.

En primer lugar estudiaremos la partícula relativista en $D = 2 + 1$, para la cual tomaremos como densidad lagrangiana la siguiente expresión [3]:

$$\mathcal{L} = -m(-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

Usando la ecuación (2.6), podemos calcular el momento

$$p_\mu = m \frac{\dot{x}_\mu}{(-\dot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.2)$$

donde hemos supuesto $\mu = 0, 1, 2$, y usamos la métrica definida como:

$\eta = \text{diag}(-1, +1, +1)$. Por otro lado, calculamos la matriz

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\mu \partial \dot{q}^\nu} = \frac{\partial p_\mu}{\partial \dot{q}^\nu} = \frac{m}{\dot{x}^{\frac{3}{2}}} [\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu - \dot{x}^2 \eta_{\mu\nu}] = \frac{m}{\dot{x}^{\frac{3}{2}}} \tilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Escribimos $\tilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}$ explícitamente:

$$\tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_0^2 + \dot{x}^2 & \dot{x}_0 \dot{x}_1 & \dot{x}_0 \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \dot{x}_0 & \dot{x}_1^2 - \dot{x}^2 & \dot{x}_1 \dot{x}_2 \\ \dot{x}_2 \dot{x}_0 & \dot{x}_2 \dot{x}_1 & \dot{x}_2^2 - \dot{x}^2 \end{pmatrix},$$

matriz cuyo determinante, al ser desarrollado, se escribe:

$$\det \tilde{\mathcal{M}} = \dot{x}^4 (\dot{x}_0^2 - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 + \dot{x}^2) \quad (3.4)$$

y se anula ya que: $\dot{x}^2 = -\dot{x}_0^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2$. Así, pues, el sistema es singular y además vemos que

$$p^\mu p_\mu = -m^2 \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{\dot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha} = -m^2; \quad (3.5)$$

así reconocemos de forma inmediata el vínculo

$$\phi = p^\mu p_\mu + m^2 = 0. \quad (3.6)$$

Luego, el cálculo de la cantidad \mathcal{H}_0 arroja: $\mathcal{H}_0 = \dot{q}^i p_i - \mathcal{L} = 0$, por lo que el hamiltoniano queda expresado en términos de puro vínculo:

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_0 + u\phi = u(p^2 + m^2). \quad (3.7)$$

Una propiedad interesante de esta acción es que es invariante bajo reparametri-

zaciones. Esto es, al redefinirla usando un parámetro arbitrario t' que, en este caso, puede interpretarse como el tiempo propio de la partícula, la forma de la acción no cambia. Esto es: sea el parámetro t' función del tiempo como

$$t' = f(t) \quad | \quad f(t) \text{ diferenciable} \quad (3.8)$$

y, por otro lado, la transformación de x'_μ se escribe:

$$x'_\mu = \frac{dx_\mu}{dt'} = \frac{dx_\mu}{dt} \frac{dt}{dt'}; \quad (3.9)$$

vemos que al sustituir $x \rightarrow x'$ en la integral

$$\int -m(-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (3.10)$$

la acción es invariante pues, de igual forma, el diferencial dt cambia como

$$dt' = \frac{dt'}{dt} dt, \quad (3.11)$$

lo que conserva la expresión.

Así, pues, una reparametrización en este caso es una transformación local que preserva la acción, y vemos que dichas reparametrizaciones son transformaciones asociadas a las simetrías de calibre.

Esto supone que la partícula relativista puede estudiarse como una teoría de campo en una dimensión descrita por la línea de mundo.

Otra forma de tratar este problema es tomando una densidad lagrangiana diferente. Sea

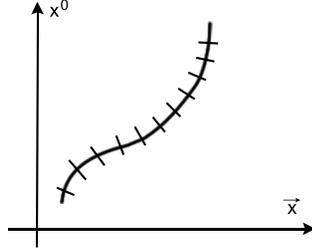


Figura 3.1: Línea de Mundo de la partícula relativista.

$$\mathcal{L} = \eta^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - \eta m^2, \quad (3.12)$$

donde η , la métrica del espacio de Minkowski, aquí es considerada un campo.

Usando (2.6) se puede escribir

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 2\eta^{-1} \dot{x}_\mu \quad (3.13)$$

y la matriz hessiana se escribe:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\mu \partial \dot{q}^\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & 2\eta^{-1} \delta_{\alpha\beta} & \\ 0 & & & \end{array} \right),$$

cuyo determinante es claramente cero. Luego, el sistema es singular.

El primer vínculo se reconoce, pues

$$p_\eta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} = 0 = \phi_1 \quad (3.14)$$

y al calcular la cantidad $\mathcal{H}_0 = \dot{x}^\mu p_\mu - \mathcal{L}$ se obtiene:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{4}\eta(p^2 + m^2), \quad (3.15)$$

donde, finalmente, podemos escribir un segundo vínculo:

$$\eta(p^2 + m^2) = u_2\phi_2; \quad (3.16)$$

Aquí es importante hacer notar que la métrica η es un multiplicador de Lagrange, lo que la convierte a toda la expresión que lo multiplica en un candidato perfecto para ser un vínculo; como en efecto lo es. Así, obtenemos el hamiltoniano

$$\mathcal{H}_T = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 = u_1p_\eta + \eta(p^2 + m^2). \quad (3.17)$$

Por otro lado, es fácilmente verificable que las ligaduras están completas, pues $\{\phi_1, \phi_2\} = \{p_\eta, p^2 + m^2\} = 0$, según la propiedad de los corchetes de Poisson $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$.

3.2. Partícula no relativista.

El siguiente ejemplo trata el problema para una partícula libre no relativista y en una dimensión. El lagrangiano, también invariante bajo reparametrizaciones, se escribe de la siguiente manera [3]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\frac{\dot{x}^2}{\dot{t}}. \quad (3.18)$$

El tratamiento de este problema es similar al anterior: se plantea el estudio de

la partícula no relativista como una teoría de campo, al considerar a x y t como campos que dependen de un parámetro τ y la partícula queda descrita por la línea de mundo.

Los momenta conjugados (p_0, p_1) corresponden a (E, p) y se escriben:

$$E = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m\frac{\dot{x}^2}{\dot{t}^2}, \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\frac{\dot{x}}{\dot{t}} \quad (3.19)$$

y el determinante de la matriz

$$\det\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = m^2\frac{\dot{x}^2}{\dot{t}^4} - m^2\frac{\dot{x}^2}{\dot{t}^4} = 0. \quad (3.20)$$

El vínculo se obtiene al escribir:

$$p^2 - 2mE = 0 = \phi \quad (3.21)$$

y finalmente

$$\mathcal{H}_\tau = u\phi = u(p^2 - 2mE). \quad (3.22)$$

La partícula relativista está regida por la ecuación de Klein-Gordon, mientras que la no relativista se expresa en términos de la ecuación de Shroedinger.

3.3. Campo de Maxwell libre.

Por último veamos cómo funciona este tratamiento con el campo libre de Maxwell. Comenzamos definiendo la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.23)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; $\mu = 0, 1, 2, 3$ y la métrica $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Las velocidades \dot{q}^μ se escriben $\dot{q}^\mu = \partial_0 A^\mu$, con lo que se puede calcular los momentos

$$\begin{aligned} \pi_\alpha &= -\frac{1}{4} \frac{\partial F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_0 A^\alpha)} = \frac{1}{2} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \frac{\partial(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}{\partial(\partial^0 A^\alpha)} \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\eta_{\mu 0} \eta_{\nu \alpha} - \eta_{\nu 0} \eta_{\mu \alpha}) \\ &= (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \eta_{\mu 0} \eta_{\nu \alpha} = (\partial_0 A_\alpha - \partial_\alpha A_0); \end{aligned} \quad (3.24)$$

así podemos escribir:

$$\pi_\mu = (\partial_0 A_\mu - \partial_\mu A_0) = F_{0\mu} = E_\mu. \quad (3.25)$$

Con esto obtenemos el primer vínculo primario, pues

$$\pi_0 = F_{00} = 0 = \phi_1. \quad (3.26)$$

Ahora, la densidad Hamiltoniana se escribe:

$$\mathcal{H} = \dot{q}^\mu \pi_\mu - \mathcal{L}, \quad (3.27)$$

pero los $\dot{q}^\mu = \partial_0 A^\mu$; $\pi_\mu = E_\mu$ y $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$. Sustituyendo todo en (3.27) y despejando los $\partial_0 A^\mu$ de (3.25), finalmente se obtiene:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) + (\partial^\mu A_0)E_\mu. \quad (3.28)$$

Al integrar apropiadamente en todo el espacio la densidad \mathcal{H} se tiene el Hamiltoniano $H = \int \mathcal{H} d^4q$. El primer término es

$$H = \frac{1}{2} \int (E^2 + B^2) d^4x \quad (3.29)$$

y el segundo término de la densidad puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$(\partial^\mu A_0)E_\mu = \partial^\mu(A_0 E_\mu) - A_0 \partial^\mu E_\mu. \quad (3.30)$$

Usando el teorema de la divergencia y exigiendo que los campos sean cero en el infinito, la integral del primer término se anula mientras que, del segundo término, reconocemos el segundo vínculo:

$$\partial^\mu E_\mu = \nabla \cdot E = \phi_2, \quad (3.31)$$

ya que $A_0 \neq 0$ es un multiplicador de Lagrange pues \dot{A}_0 es una variable cíclica, de la misma forma que η es un multiplicador y $\dot{\eta}$ una variable cíclica en el caso de la partícula relativista. Luego $A_0 \nabla \cdot E \equiv u^2 \phi_2 = 0$ y $\nabla \cdot E = 0$ es la ley de Gauss en un espacio libre de cargas.

Capítulo 4

Reducción dimensional o compactificación.

Este capítulo se enfocará en el estudio de la reducción dimensional o compactificación sobre un círculo de un campo en cinco dimensiones ($D = 4 + 1$) [7] [6]. El estudio se hace a partir de la idea de Kaluza-Klein, la cual considera la existencia de una cuarta dimensión espacial que se encuentra enrollada sobre sí misma en un círculo de radio R muy pequeño.

Publicado por primera vez en 1921, este modelo fue pionero en el intento de unificar la gravitación con el electromagnetismo, ya que el tratamiento de la gravitación en 5D, al ser compactificado sobre un círculo, se reduce a la teoría 4D pero con la aparición de una campo vectorial que puede ser interpretado como un fotón.

En la figura 4.1 se puede ver una representación gráfica donde los x^μ , con $\mu = 0, 1, 2, 3$, representa el espacio 4D tradicional y la dimensión espacial adicional “ y ” que se encuentra enrollada sobre el círculo. El radio de dicho círculo es tan pequeño (del

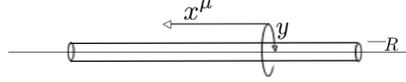


Figura 4.1: Representación de la cuarta dimensión espacial.

orden de la longitud de Planck; $R \sim 10^{-32} \text{cm}$) que a nuestra escala es imperceptible e imposible de medir experimentalmente.

El intento de unificar la gravitación con el electromagnetismo de esta forma ha sido hoy en día descartado, pues la teoría no incorpora partículas cargadas sin masa; sin embargo, el formalismo matemático detrás de ella sigue vigente, así como la motivación (ahora presente en muchas teorías) de considerar más de cuatro dimensiones.

Sea S_5 la acción de un campo en 5D:

$$S_5 = \int \mathcal{L}(\phi_{(x^\mu, y)}, \partial\phi_{(x^\nu, y)}, \dots) dt. \quad (4.1)$$

Ya que la dimensión extra está cerrada sobre un círculo de radio R , se puede identificar y con $y + 2\pi R$, por lo que podemos expandir los campos en términos de soluciones periódicas de la siguiente manera:

$$\phi(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{iny}{R}} \phi^{(n)}(x^\mu), \quad (4.2)$$

o bien,

$$\phi(x^\mu, y) = \phi^{(0)} + \sum_{n \neq 0} e^{\frac{iny}{R}} \phi^{(n)}(x^\mu) \quad (4.3)$$

y al sustituir estas expresiones en (4.1) rápidamente observamos que se puede escribir como:

$$S_5 = S_4^{(0)} + S_4^{(n)}, \quad (4.4)$$

donde llamaremos los $S_4^{(0)}$ *modos cero* y los $S_4^{(n)}$ *modos Kaluza-Klein* (o modos KK).

Es decir, la expresión (4.4) nos dice que, en efecto, el campo en 5D se puede expresar en términos de una sumatoria infinita de objetos en 4 dimensiones. Sin embargo, en general, en este trabajo estaremos interesados en los modos cero, ya que los campos correspondientes a los modos KK, tal y como veremos en ejemplos a continuación, están constituidos por partículas extremadamente masivas (del orden de $1/R \sim 10^{32}cm^{-1}$ ó $10^{19}GeV$) y por ende imposibles de medir.

A continuación, y a modo de ejemplo, aplicaremos este tratamiento a algunos de los campos conocidos.

4.1. Reducción dimensional del campo de Klein-Gordon en $D = 4+1$

Partimos, entonces, para nuestro primer ejemplo con la densidad lagrangiana correspondiente a un campo de Klein-Gordon masivo en 5D. Se quiere expresar dicho campo en 4D mediante la compactificación Kaluza-Klein, para lo cual escribimos lo siguiente:

$$\mathcal{L}_5 = \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi + m^2 \phi^2, \quad (4.5)$$

donde los índices $M = 0, 1, 2, 3, 4$; $\mu = 0, 1, 2, 3$ y la dimensión extra se expresa $x^4 = y$.

Expandiendo los campos:

$$\phi(x^\mu, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi_{(x^\mu)}^{(n)} e^{\frac{iny}{R}} \quad (4.6)$$

y por otro lado se tiene que

$$\partial_\mu \phi(x^\mu, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \partial_\mu \phi_{(x^\mu)}^{(n)} e^{\frac{iny}{R}}; \quad (4.7)$$

además

$$\partial_y \phi(x^\mu, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{in}{R} \phi_{(x^\mu)}^{(n)} e^{\frac{iny}{R}}. \quad (4.8)$$

Al introducir estas expresiones en (4.5) finalmente se puede escribir la acción (4.1):

$$\begin{aligned} S_5 = & - \int d^4x 2\pi R \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_{(0)} \partial^\mu \phi_{(0)} + m^2 \phi_{(0)}^2 \right] \\ & - \sum_{n \neq 0} \int d^4x 2\pi R \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_{(n)} \partial^\mu \phi_{(n)} + (m^2 + (n/R)^2) \phi_{(n)}^2 \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

de donde podemos reconocer los modos

$$S_0 = - \int d^4x 2\pi R \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_{(0)} \partial^\mu \phi_{(0)} + m^2 \phi_{(0)}^2 \right] \quad (4.10)$$

y

$$S_n = - \sum_{n \neq 0} \int d^4x 2\pi R \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_{(n)} \partial^\mu \phi_{(n)} + (m^2 + (n/R)^2) \phi_{(n)}^2 \right]. \quad (4.11)$$

Como puede observarse, los modos cero, en este caso, conservan la forma del campo original pero ahora expresados en 4 dimensiones. Por otro lado, los modos KK ($n \neq 0$) contienen ahora unos campos $\phi_{(n)}$ con masas $m^2 + (n/R)^2$, muy grandes para ser medidas. Así, pues, será necesario truncar la sumatoria únicamente hasta los términos $n = 0$ para garantizar que las partículas estén dentro de los rangos de energía manejables.

Es interesante notar que, aún al compactificar el campo no masivo (es decir, si en la ecuación 4.5 tomamos $m = 0$), el resultado arroja campos con masa, evidenciado en el término (n/R) que, como se ha discutido, representa la masa de las partículas nuevas debido a la compactificación.

En el siguiente ejemplo se manifiesta algo mucho más interesante.

4.2. Reducción dimensional del campo de Maxwell en $D = 4+1$

Tomemos nuevamente la lagrangiana del campo libre de Maxwell, pero esta vez en $D=5$, es decir:

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN}, \quad (4.12)$$

donde $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$; $M = 0, 1, 2, 3, 4$ y $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Como se dijo anteriormente, hacemos uso de la periodicidad en y los campos pueden expandirse de la siguiente manera:

$$A_\mu = \sum_n A_\mu^{(n)} e^{\frac{iny}{R}} \quad (4.13)$$

$$A_4 = \sum_n A_4^{(n)} e^{\frac{iny}{R}}. \quad (4.14)$$

También debemos expresar $F_{MN}F^{MN} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2F_{\mu 4}F^{\mu 4}$ a fin de facilitar el cálculo y , de esta forma, al introducir todo en (4.12) se puede escribir la acción

$$\begin{aligned} S_5 = & - \int d^4x 2\pi R \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{\mu\nu}_{(0)} + \frac{1}{2} \partial_\mu A_4^{(0)} \partial^\mu A_{(0)}^4 \right] \\ & - \sum_{n \neq 0} \left\{ \int d^4x 2\pi R \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(n)} F^{\mu\nu}_{(n)} + \frac{1}{2} \partial_\mu A_4^{(n)} \partial^\mu A_{(n)}^4 \right] \right. \\ & \left. - \int d^4x 2\pi R (n/R)^2 A_\mu^{(n)} A_{(n)}^\mu \right\} \\ & + (n/R)^2 T_{(FA, F\partial A, A\partial A, etc...)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Rápidamente podemos extraer los modos cero:

$$S_0 = - \int d^4x 2\pi R \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{\mu\nu}_{(0)} + \frac{1}{2} \partial_\mu A_4^{(0)} \partial^\mu A_{(0)}^4 \right] \quad (4.16)$$

y

$$\begin{aligned} S_n = & - \sum_{n \neq 0} \left\{ \int d^4x 2\pi R \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(n)} F^{\mu\nu}_{(n)} + \frac{1}{2} \partial_\mu A_4^{(n)} \partial^\mu A_{(n)}^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{R}\right)^2 (A_4^{(n)})^2 \right] \right. \\ & \left. + \int (n/R)^2 T_{(FA, F\partial A, A\partial A, etc...)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ahora, es claro de la expresión (4.17) que los campos $A_4^{(n)}$ tienen masa (n/R) , pues obedecen a Klein-Gordon masivo y por ello debemos truncar la sumatoria únicamente hasta los modos cero; igual que en el ejemplo anterior, las masas, del orden de 10^{16} TeV, no son medibles. Por otro lado se tiene que los campos $A_4^{(0)}$ son campos sin masa ya que, al contrario de los $A_4^{(n)}$, éstos obedecen a Klein-Gordon no masivo.

Así, pues, vemos que la expresión de interés es únicamente (4.16), donde podemos notar que el problema, ahora reducido a 4 dimensiones, consiste en el campo electromagnético tradicional más un campo escalar no masivo adicional $A_4^{(0)}$. Este campo escalar se manifiesta al hacer la reducción dimensional del campo de Maxwell libre y evidencia la riqueza de la compactificación.

Capítulo 5

Sector Bosónico del multiplete vectorial D=5 con supersimetría $\mathcal{N}=1$.

5.1. La acción en su forma general

Sirva el siguiente capítulo para introducir la acción en cuyo estudio se enfocará el objetivo principal de este trabajo: Compactificar y estudiar la simetría de calibre de una teoría 5D.

La densidad lagrangiana general de partida es la siguiente: [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[\left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} - \frac{1}{2} \bar{\psi}^I \mathcal{D} \psi^J - \frac{1}{2} \mathcal{D}_\alpha \phi^I \mathcal{D}^\alpha \phi^J + Y_{ij}^I Y^{ij J} \right) \phi^K - \right. \\ & \left. - \frac{1}{24} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} A_\mu^I (F_{\nu\lambda}^J F_{\rho\sigma}^K + \frac{1}{2} g [A_\nu, A_\lambda]^J F_{\rho\sigma}^K + \frac{1}{10} g^2 [A_\nu, A_\lambda]^J [A_\rho, A_\sigma]^K) - \right. \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$-\frac{1}{8}i\bar{\psi}^I \gamma \cdot F^J \psi^K - \frac{1}{2}i\bar{\psi}^{iI} \psi^{jJ} Y_{ij}^K + \frac{1}{4}ig\bar{\psi}^L \psi^H \phi^I \phi^J f_{LH}^K] C_{IJK},$$

donde los índices espaciales son: $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$; y los índices del grupo: $I = 1, 2, 3, \dots, n$. Sin embargo, para este trabajo restringiremos el análisis únicamente al sector bosónico del multiplete; incluso sólo se considerarán los términos cinéticos de los campos vectoriales y escalares. Así, eliminando aquellos términos correspondientes a los campos fermiónicos así como también los Y_{ij} que, aunque son campos auxiliares de la teoría supersimétrica completa, no serán considerados en este trabajo. Conservando el término de Chern-Simons, la acción se reduce a lo siguiente:

5.2. a) Caso no abeliano

Escribimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} \phi^K C_{IJK} - \frac{1}{2}\mathcal{D}_\gamma \phi^I \mathcal{D}^\gamma \phi^J \phi^K C_{IJK} \\ & - \frac{1}{24}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} A_\mu^I (F_{\nu\lambda}^J F_{\rho\sigma}^K + \frac{1}{2}g[A_\nu, A_\lambda]^J F_{\rho\sigma}^K + \frac{1}{10}g^2[A_\nu, A_\lambda]^J [A_\rho, A_\sigma]^K) C_{IJK}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Los dos primeros términos representan los campos tipo Yang-Mills y Klein-Gordon no masivo; y el último no es más que el término topológico de Chern-Simons. En su forma general, los campos son elementos de un grupo no conmutativo (no abeliano) que están definidos por un álgebra cuyas constantes de estructura vienen dadas por el tensor antisimétrico f_{JK}^I ; estos es, los campos cumplen:

$$[\phi^I T_I, \phi^J T_J] = \phi^I \phi^J [T_I, T_J] = \phi^I f_{IJ}^K \phi^J T_K, \quad (5.3)$$

y lo mismo se puede decir de los vectores A_μ^I .

El término C_{IJK} es un tensor simétrico constante y la condición necesaria para garantizar la simetría de calibre es: [1]

$$f_{M(L}^K C_{IJ)K} = 0; \quad (5.4)$$

Ahora bien, debido a que los campos están en la representación adjunta, la variación de los mismos viene dada por el conmutador de los generadores de la transformación con el campo; por ejemplo, la transformación de un campo escalar ϕ es:

$$\delta\phi^I = -g[\Lambda, \phi]^I \quad (5.5)$$

y, por otro lado, la variación del campo vectorial A_μ^I se escribe:

$$\delta A_\mu^I = \partial_\mu \Lambda^I + g[A_\mu, \Lambda]^I. \quad (5.6)$$

El tensor $F_{\mu\nu}$ en su forma no abeliana se expresa:

$$F_{\mu\nu}^I = \partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I + g[A_\mu, A_\nu]^I \quad (5.7)$$

y la derivada covariante \mathcal{D}_μ se define como:

$$\mathcal{D}_\mu \phi^I = \partial_\mu \phi^I + g[A_\mu, \phi]^I. \quad (5.8)$$

5.3. b) Caso abeliano

En este caso el grupo es conmutativo y por lo tanto las constantes de estructura f_{JK}^I son cero. Así, la acción dada por la expresión (5.2) se reduce a lo siguiente:

$$\mathcal{L}_5 = \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} \phi^K - \frac{1}{2} \mathcal{D}_\gamma \phi^I \mathcal{D}^\gamma \phi^J \cdot \phi^K - \frac{1}{24} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} A_\mu^I F_{\nu\lambda}^J F_{\rho\sigma}^K \right) C_{IJK}, \quad (5.9)$$

donde los índices latinos en mayúscula ($I = 1, 2, 3, \dots, n$) pasan a enumerar n campos abelianos.

De igual forma, considerando que los conmutadores se anulan, las variaciones de los campos, el tensor de $F_{\mu\nu}$ y las derivadas quedan escritas de la siguiente manera:

$$\delta\phi^I = 0 \quad (5.10)$$

$$\delta A_\mu^I = \partial_\mu \Lambda^I \quad (5.11)$$

$$F_{\mu\nu}^I = \partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I \quad (5.12)$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi^I = \partial_\mu \phi^I \quad (5.13)$$

Así, una vez definida la acción y las transformaciones, el objetivo de este trabajo se enfocará en reconocer la forma en la que se manifiesta las simetrías de calibre tanto en la acción abeliana como no abeliana y en sus formas 5-dimensional y compactificada.

Capítulo 6

Compactificación y simetría de calibre de la acción 5D abeliana.

A partir de aquí nos enfocaremos en la reducción dimensional y la simetrías de calibre del siguiente campo en $D = 4+1$ dimensiones:

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} \phi^K C_{IJK} - \frac{1}{2}\partial_\gamma \phi^I \partial^\gamma \phi^J \phi^K C_{IJK} - \frac{1}{24}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} A_\mu^I F_{\nu\lambda}^J F_{\rho\sigma}^K C_{IJK}. \quad (6.1)$$

6.1. Simetría de calibre de la acción 5D.

Tomemos, pues, esta acción y estudiemos la invariancia de calibre. Por simplicidad, y ya que estamos en el caso abeliano, podemos tomar sólo un campo; esto es $I = J = K = 1$ y además fijamos $C_{111} = 1$. Así tenemos:

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \phi - \frac{1}{2}(\partial_\gamma \phi \partial^\gamma \phi) \phi - \frac{1}{24}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} A_\mu F_{\nu\lambda} F_{\rho\sigma}. \quad (6.2)$$

Podemos comprobar que posee simetrías de calibre si calculamos la variación $\delta\mathcal{L}_5$ y por resultado obtenemos que dicha variación es nula o a lo sumo una divergencia.

Por razones de escritura y para no trabajar con expresiones muy largas, realicemos el estudio término a término:

6.1.1. Término tipo Maxwell.

Tomemos, pues, el primer término

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\phi. \quad (6.3)$$

Ahora, sea la transformación

$$T : A \rightarrow A', \quad \text{con} \quad A' = A + \partial\Lambda, \quad (6.4)$$

es decir, la variación de A se escribe $\delta A = \partial\Lambda$, donde Λ es una función escalar arbitraria. Ahora, queremos verificar $\delta(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\phi)$ de la siguiente manera:

$$\delta\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\phi\right) = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} \cdot \phi + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \cdot \delta\phi. \quad (6.5)$$

En el caso abeliano, la variación de un campo escalar cumple $\delta\phi = 0$, por lo que sólo nos queda verificar el término:

$$\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} \cdot \phi = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\partial_\mu\delta A_\nu - \partial_\nu\delta A_\mu) \cdot \phi = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu\Lambda - \partial_\nu\partial_\mu\Lambda) \cdot \phi = 0. \quad (6.6)$$

En efecto, se cumple.

6.1.2. Término tipo Klein-Gordon.

La variación del término $\frac{1}{2}(\partial_\gamma\phi\partial^\gamma\phi)\phi$ se anula de manera trivial, pues $\delta\phi = -g\Lambda^J f_{JK}^I \phi^K$, pero justamente en el caso abeliano los $f_{JK}^I = 0$ y así $\delta\phi = 0$.

6.1.3. Término de Chern-Simons.

Por último veamos la variación del término de Chern-Simons:

$$\delta(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} A_\mu F_{\nu\lambda} F_{\rho\sigma}) = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} (\delta A_\mu \cdot F_{\nu\lambda} F_{\rho\sigma} + 2A_\mu F_{\nu\lambda} \delta F_{\rho\sigma}); \quad (6.7)$$

pero $\delta F_{\rho\sigma} = 0$ y así sólo nos queda

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} \delta A_\mu \cdot F_{\nu\lambda} F_{\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} \partial_\mu \Lambda F_{\nu\lambda} F_{\rho\sigma}, \quad (6.8)$$

expresión que se puede reescribir como:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} \partial_\mu \Lambda \cdot F_{\nu\lambda} F_{\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} [\partial_\mu (\Lambda F_{\nu\lambda} F_{\rho\sigma}) - 2\Lambda (\partial_\mu F_{\nu\lambda}) F_{\rho\sigma}]. \quad (6.9)$$

El segundo término se anula, pues los términos del tipo $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} (\partial_\mu F_{\nu\lambda})$ obedecen a la identidad de Bianchi $(\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\rho\sigma}) = 0$ y, finalmente, el único término que sobrevive es $\partial_\mu (\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} \Lambda F_{\nu\lambda} F_{\rho\sigma})$, con lo cual podemos concluir que

$$\delta\mathcal{L}_5 = \partial_\mu (\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} \Lambda F_{\nu\lambda} F_{\rho\sigma}). \quad (6.10)$$

Es decir, la variación de la densidad lagrangiana en este caso es una divergencia que no afecta la teoría.

6.2. Simetría de calibre de la acción compactificada.

A continuación haremos este mismo análisis pero con la acción compactificada, pues interesa estudiar cómo se expresa la simetría de calibre de dicha acción. Tomemos entonces la acción dada en la expresión (6.2) y reescribámosla de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}\phi - \frac{1}{2}(\partial_A\phi\partial^A\phi)\phi - \frac{1}{24}\varepsilon^{MNLRS}A_MF_{NL}F_{RS}, \quad (6.11)$$

donde simplemente hemos retomado la notación: $M = 0, 1, 2, 3, 4$ y $\mu = 0, 1, 2, 3$ para poder escribir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2F_{\mu 4}F^{\mu 4})\phi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \partial_4\phi\partial^4\phi)\phi \\ & -\frac{1}{24}(\varepsilon^{4\nu\lambda\rho\sigma}A_4F_{\nu\lambda}F_{\rho\sigma} + 4\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho 4}A_\mu F_{\nu\lambda}F_{\rho 4}), \end{aligned} \quad (6.12)$$

ecuación mucho más fácil de manipular al reemplazar los campos

$$\begin{aligned} A_\mu &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_\mu^{(n)} e^{\frac{iny}{R}} \quad | \quad A_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_4^{(n)} e^{\frac{iny}{R}} \\ \phi(x^\mu, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{(x^\mu)}^{(n)} e^{\frac{iny}{R}} \quad | \quad \partial_y\phi(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in}{R} \phi_{(x^\mu)}^{(n)} e^{\frac{iny}{R}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Introduciendo (6.13) en (6.12), integrando en y desde 0 hasta $2\pi R$ y tomando

sólo los modos $n = 0$, se tiene acción en 4 dimensiones:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_4^{(0)} = & \int d^4x 2\pi R \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{\mu\nu} \phi^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\alpha A_4^{(0)} \partial^\alpha A_4^{(0)} \phi^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi^{(0)} \partial^\alpha \phi^{(0)} \cdot \phi^{(0)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{24} (\varepsilon^{4\nu\lambda\rho\sigma} A_4^{(0)} F_{\nu\lambda}^{(0)} F_{\rho\sigma}^{(0)} + 4\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} A_\mu^{(0)} F_{\nu\lambda}^{(0)} \partial_\rho A_4^{(0)}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

La variación del primer término se verifica de forma similar a (6.6) aunque en este caso hay que considerar que

$$\delta A_M = \partial_M \Lambda, \quad \text{ó} \quad \delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda \quad y \quad \delta A_4 = \partial_4 \Lambda = \partial_y \Lambda \quad (6.15)$$

y los $\partial_M \Lambda$ se escriben usando la expansión de la siguiente manera:

$$\partial_\mu \Lambda(x^\mu, y) = \sum_n \partial_\mu \Lambda_{(x^\mu)}^{(n)} e^{\frac{iny}{R}} \quad | \quad \partial_y \Lambda(x_\mu, y) = \sum_n \frac{in}{R} \Lambda_{(x^\mu)}^{(n)} e^{\frac{iny}{R}}; \quad (6.16)$$

al tomar sólo el modo cero ($n = 0$), nos queda

$$\partial_M \Lambda(x^\mu, y) = \partial_M \Lambda^{(0)}(x^\mu), \quad (6.17)$$

el cual, al ser sustituido en el primer término de (6.14) nos conduce, como se había mencionado, al resultado expresado en (6.6).

Los términos 2 y 3 son campos escalares abelianos ($A_4^{(0)}$ y $\phi^{(0)}$) cuya variación es nula según lo visto en la subsección 6.1.2. Así, sólo nos queda analizar el último término, que no es sino el remanente que proviene de la expresión de Chern-Simons (recordemos que no existe C-S en dimensiones pares):

$$-\frac{1}{24}(\varepsilon^{4\nu\lambda\rho\sigma}A_4^{(0)}F_{\nu\lambda}^{(0)}F_{\rho\sigma}^{(0)} + 4\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}A_\mu^{(0)}F_{\nu\lambda}^{(0)}\partial_\rho A_4^{(0)}). \quad (6.18)$$

Integrando por partes el segundo término y al notar que $\partial_\rho A_\mu = \frac{1}{2}(\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho)$, gracias a la antisimetría de ε , podemos reescribir (6.18) de la siguiente manera:

$$-\frac{1}{24}\varepsilon^{4\nu\lambda\rho\sigma}[3A_4^{(0)}F_{\nu\lambda}^{(0)}F_{\rho\sigma}^{(0)} + 4\partial_\rho(A_\nu^{(0)}F_{\lambda\rho}^{(0)}A_4^{(0)})] \quad (6.19)$$

El segundo término es familiar, pues no es sino una divergencia, mientras que el primero se trata de un término topológico tipo $A_4\tilde{F}F$ y cuya variación bajo estas transformaciones es nula pues $\delta A_4^{(0)} = 0$, ya que $A_4^{(0)}$ es un campo escalar abeliano ¹ y, por otro lado $\delta(F_{\nu\lambda}^{(0)}F_{\rho\sigma}^{(0)}) = 2(\partial_\nu\partial_\lambda\Lambda^{(0)} - \partial_\lambda\partial_\nu\Lambda^{(0)})F_{\rho\sigma}^{(0)} = 0$.

De esta forma, la acción compactificada conserva la simetría de calibre.

¹En el capítulo 7, sección 7.3 se explica por qué los $A_4^{(0)}$ transforman como un campo escalar.

Capítulo 7

Compactificación y simetría de calibre de la acción no abeliana.

En este capítulo haremos el mismo análisis realizado en el capítulo anterior, pero esta vez con la lagrangiana en su forma no abeliana y enfocando la atención únicamente en el estudio de los términos cinéticos. Al término de Chern-Simons dedicaremos un capítulo aparte (capítulo 8), pues el análisis no se hará de forma variacional, como hasta ahora, y además la sutileza del asunto así lo amerita. Por ahora consideremos la acción:

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} \phi^K C_{IJK} - \frac{1}{2}\mathcal{D}_\gamma \phi^I \mathcal{D}^\gamma \phi^J \phi^K C_{IJK} \quad (7.1)$$

Tal como se mencionó en el capítulo 5, los campos son ahora elementos de un grupo G cuyas constantes de estructura f_{JK}^I definen el álgebra de dicho grupo. Las

constantes C_{IJK} son las componentes de un tensor simétrico que cumple

$$f_{M(L}^K C_{IJ)K} = 0, \quad (7.2)$$

a fin de preservar las simetrías de calibre.

Ahora bien, será necesario cambiar nuevamente la notación de los índices, pues en esta oportunidad enumeraremos los elementos de grupo haciendo uso de las letras latinas en mayúscula: $I = 0, 1, 2, \dots, n$; lo cual nos deja con las letras griegas en minúsculas para trabajar con los índices espaciales: $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$.

7.1. Simetría de calibre de la acción 5D.

De la misma forma que se ha procedido en el caso abeliano, calcular la variación $\delta\mathcal{L}_5$ nos da información sobre la simetría de calibre al realizar las transformaciones de los campos $T : A^I \rightarrow A'^I$, con $A'^I = A^I + \delta A^I$ y aquí $\delta A_\mu^I = \partial_\mu \Lambda^I + g A_\mu^J f_{JK}^I \Lambda^K$, así como también $\delta\phi^I = -g \Lambda^J f_{JK}^I \phi^K$.

7.1.1. Término tipo Yang-Mills.

Tomemos, pues,

$$\delta\left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} \phi^K\right) C_{IJK}. \quad (7.3)$$

Para calcular la variación de este término, hallemos primero δF_{JK}^I :

$$\delta F_{JK}^I = \delta(\partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I + g f_{JK}^I A_\mu^J A_\nu^K) = \partial_\mu(\delta A_\nu^I) - \partial_\nu(\delta A_\mu^I) + g\delta[A_\mu, A_\nu]^I. \quad (7.4)$$

Ahora,

$$g\delta[A_\mu, A_\nu]^I = g\delta(A_\mu^J f_{JK}^I A_\nu^K) = g\delta A_\mu^J f_{JK}^I A_\nu^K + gA_\mu^J f_{JK}^I \delta A_\nu^K. \quad (7.5)$$

Sustituimos los $\delta A_\mu^I = \partial_\mu \Lambda^I + gA_\mu^J f_{JK}^I \Lambda^K$ en (7.4) y (7.5) y además, usando la identidad de Jacobi del grupo ($f_{MN}^J f_{JK}^I + f_{MJ}^I f_{KN}^J = f_{KM}^J f_{NJ}^I$), podemos escribir:

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}^I &= [\partial_\mu A_\nu^M - \partial_\nu A_\mu^M] f_{MN}^I \Lambda^N + g[A_\nu^M \partial_\mu(\Lambda^N) - A_\mu^M \partial_\nu(\Lambda^N)] f_{MN}^I \\ &\quad + g[A_\mu^M \partial_\nu(\Lambda^N) - A_\nu^M \partial_\mu(\Lambda^N)] + g^2 A_\mu^O A_\nu^K \Lambda^N f_{OK}^M f_{MN}^I, \end{aligned} \quad (7.6)$$

pero el segundo y tercer término se anulan; así sólo queda

$$\delta F_{\mu\nu}^I = [\partial_\mu A_\nu^M - \partial_\nu A_\mu^M] f_{MN}^I \Lambda^N + g^2 A_\mu^O A_\nu^K \Lambda^N f_{OK}^M f_{MN}^I; \quad (7.7)$$

Sacando como factor común $f_{MN}^I \Lambda^N$, finalmente se tiene

$$\delta F_{\mu\nu}^I = g(\partial_\mu A_\nu^M - \partial_\nu A_\mu^M + gA_\mu^O f_{OK}^M A_\nu^K) f_{MN}^I \Lambda^N = gF_{\mu\nu}^M f_{MN}^I \Lambda^N, \quad (7.8)$$

o, en notación de corchetes:

$$\delta F_{\mu\nu}^I = g[F_{\mu\nu}, \Lambda]^I. \quad (7.9)$$

Usando (7.9) se simplifica el cálculo de (7.3), pues permite escribir esta expresión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} \phi^K\right)C_{IJK} &= -\left[\frac{1}{2}(gF_{\mu\nu}^M f_{MN}^I \Lambda^N)F^{\mu\nu J} \cdot \phi^K \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} (-g\Lambda^L f_{LO}^K \phi^O)\right]C_{IJK}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Simplificando (7.10) se obtiene

$$\delta\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} \phi^K\right)C_{IJK} = -\frac{g}{2}F_{\mu\nu}^M F^{\mu\nu J} \Lambda^N \phi^K (2f_{MN}^I C_{IJK} - f_{NK}^I C_{MJI}), \quad (7.11)$$

expresión que se anula si reescribimos, considerando la simetría en los índices MJ , el paréntesis del lado derecho de (7.11) de la forma

$$\begin{aligned} 2f_{MN}^I C_{IJK} - f_{NK}^I C_{MJI} &= 2\left(\frac{f_{MN}^I C_{IJK} + f_{JN}^I C_{IMK}}{2}\right) - f_{NK}^I C_{MJI} \quad (7.12) \\ &= -f_{NM}^I C_{JKI} - f_{NJ}^I C_{KMI} - f_{NK}^I C_{MJI} \\ &= -f_{N(M}^I C_{JK)I} = 0, \end{aligned}$$

y donde, además, se ha reorganizado los índices considerando que los C_{IJK} son simétricos y los f_{JK}^I antisimétricos.

7.1.2. Término tipo Klein-Gordon (no abeliano)

Una vez comprobado que la variación del término tipo Maxwell es nula, centremos el estudio a la siguiente expresión:

$$\delta\left(\frac{1}{2}\mathcal{D}_\gamma\phi^I\mathcal{D}^\gamma\phi^J\phi^K\right) \cdot C_{IJK}. \quad (7.13)$$

De igual forma, y para simplificar, debemos desarrollar primero $\delta(\mathcal{D}_\gamma\phi^I)$:

$$\delta(\mathcal{D}_\gamma\phi^I) = \delta(\partial_\gamma\phi^I + gA_\gamma^J f_{JK}^I \phi^K); \quad (7.14)$$

aplicando la δ a cada miembro de la ecuación, sustituyendo $\delta\phi = -g\Lambda^M f_{MN}^I \phi^N$, $\delta A_\mu^I = \partial_\mu\Lambda^I + gA_\mu^J f_{JK}^I \Lambda^K$ y reorganizando términos se obtiene que

$$\delta(\mathcal{D}_\gamma\phi^I) = -g\Lambda^J f_{JK}^I \mathcal{D}_\gamma\phi^K. \quad (7.15)$$

Con este resultado podemos analizar (7.13). Escribimos:

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{1}{2}\mathcal{D}_\gamma\phi^I\mathcal{D}^\gamma\phi^J\phi^K\right) \cdot C_{IJK} &= -g\Lambda^O f_{OP}^I \phi^P (\mathcal{D}^\gamma\phi^J) \cdot \phi^K C_{IJK} \\ &\quad - \frac{1}{2}\mathcal{D}_\gamma\phi^I \mathcal{D}^\gamma\phi^J \cdot (g\Lambda^N f_{NM}^K \phi^N) C_{IJK}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

expresión que al ser reorganizada y tratada de forma similar a (7.12) se expresa como

$$-\frac{g}{2}\Lambda^O \phi^K \mathcal{D}_\gamma\phi^J \mathcal{D}^\gamma\phi^P (2f_{OP}^I C_{IJK} + f_{OK}^I C_{PJI}) = -\frac{g}{2}\Lambda^O \phi^K \mathcal{D}_\gamma\phi^J \mathcal{D}^\gamma\phi^P f_{O(P}^I C_{JK)I} = 0 \quad (7.17)$$

Nuevamente se observa que la simetría se cumple término a término debido a (7.2), lo cual era de esperarse. A continuación veamos cómo se manifiesta la simetría en la acción compactificada.

7.2. Compactificación de la acción no abeliana.

Tomemos pues la acción y compactifiquemos sobre un círculo de radio \mathcal{R} .

En su forma general, la acción $D = 4+1$ se escribe:

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{4}F_{\hat{M}\hat{N}}^I F^{\hat{M}\hat{N}J} \phi^K C_{IJK} - \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\hat{G}}\phi^I \mathcal{D}^{\hat{G}}\phi^J \phi^K C_{IJK}, \quad (7.18)$$

donde las letras latinas en mayúsculas con acento circunflejo representan los índices espaciales que cumplen: $\hat{M} = 0, 1, 2, 3, 4$, mientras que las letras latinas mayúsculas son los índices del grupo.

Tal como puede observarse, la notación es complicada, poco práctica y confusa; por lo que será necesario adoptar la siguiente convención:

1. Se usarán los caracteres griegos en minúscula para denotar los índices espaciales pero en una dimensión menos; es decir: $\mu = 0, 1, 2, 3$, por lo que será necesario reescribir cada término de la acción 5D como la suma explícita de una parte 4D más la dimensión faltante. Es decir, si tomamos, por ejemplo, el término de Yang-Mills, debemos escribir $-\frac{1}{4}F_{\hat{M}\hat{N}}^I F^{\hat{M}\hat{N}J} \phi^K C_{IJK} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} + 2F_{\mu 4}^I F^{\mu 4 J})\phi^K C_{IJK}$, de la misma forma que se trató la ecuación (6.11) para expresarla como la (6.12).
2. Las letras latinas en mayúsculas denotarán los índices del grupo: $I = 0, 1, 2, 3, \dots$

3. Las letras latinas en minúscula y entre paréntesis (n) se usarán para la sumatoria de la expansión en serie del campo en la dimensión espacial y .

7.2.1. Término tipo Yang-Mills

De acuerdo a lo anterior este término se escribe:

$$\mathcal{L}_{5(M)} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} + 2F_{\mu 4}^I F^{\mu 4 J})\phi^K C_{IJK} \quad (7.19)$$

Siguiendo el mismo procedimiento aplicado en el capítulo 4, se propone la expansión de los campos aprovechando la naturaleza periódica en y de la siguiente manera:

$$A_\mu^I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_\mu^{(n)I} e^{\frac{iny}{R}} \quad | \quad \phi^I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{(n)}^I e^{\frac{iny}{R}} \quad (7.20)$$

Sin embargo, y para simplificar los cálculos, se puede expandir de la misma forma el tensor $F_{\mu\nu}$ en términos de los coeficientes $F_{\mu\nu}^{(n)I}$:

$$F_{\mu\nu}^I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\mu\nu}^{(n)I} e^{\frac{iny}{R}}, \quad (7.21)$$

donde $F_{\mu\nu}^{(n)I}$ están bien determinados gracias a las propiedades de las sumatorias al sustituir los campos A_μ^I por sus respectivas expansiones en la definición del tensor $F_{\mu\nu}^I$.

Por otro lado, recordando que $\partial_4 A_\mu = \partial_y A_\mu$, la expansión del término $F_{\mu 4}^I$ se escribe:

$$F_{\mu 4}^I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\partial_{\mu} A_4^{(n)I} - \frac{in}{R} A_4^{(n)I}) e^{\frac{iny}{R}} + g \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_{\mu}^{(n)}, A_4^{(m)}]^I e^{\frac{i(n+m)y}{R}}. \quad (7.22)$$

Así, sustituyendo (7.20), (7.21) y (7.22) en (7.19), integrando en y y truncando la sumatoria hasta los modos cero, se puede escribir finalmente el término tipo maxwell reducido:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{4(M)}^{(0)} = & \int d^4x - 2\pi R \left\{ \frac{1}{4} F(0)_{\mu\nu}^I F(0)^{\mu\nu J} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} (\partial_{\mu} A_4^{(0)I} + g[A_{\mu}^{(0)}, A_4^{(0)}]^I) (\partial^{\mu} A_{(0)}^{4J} + g[A_{(0)}^{\mu}, A_{(0)}^{4J}]) \right\} \phi_{(0)}^K C_{IJK}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

en cuyo último término se reconoce la expresión $\partial_{\mu} A_4^{(0)I} + g[A_{\mu}^{(0)}, A_4^{(0)}]^I$ como una derivada covariante, y así

$$\mathcal{S}_{4(M)}^{(0)} = \int d^4x - 2\pi R \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)I} F_{(0)}^{\mu\nu J} + \frac{1}{2} \mathcal{D}_{\mu} A_4^{(0)I} \mathcal{D}^{\mu} A_{(0)}^{4J} \right\} \phi(0)^K C_{IJK}. \quad (7.24)$$

7.2.2. Término de Klein-Gordon (no abeliano)

De la misma forma podemos escribir el término tipo Klein-Gordon (K-G):

$$\mathcal{L}_{5(K-G)} = -\frac{1}{2} \{ \mathcal{D}_{\mu} \phi^I \mathcal{D}^{\mu} \phi^J + \mathcal{D}_4 \phi^I \mathcal{D}^4 \phi^J \} \phi^K C_{IJK}; \quad (7.25)$$

donde la expansión de los campos viene dada según las expresiones (6.13) y la derivada covariante se escribe:

$$\mathcal{D}_\mu\phi^I = \partial_\mu\phi^I + g[A_\mu, \phi]^I \quad | \quad \mathcal{D}_4\phi^I = \partial_4\phi^I + g[A_4, \phi]^I. \quad (7.26)$$

Sustituyendo (7.20) en (7.26) y organizando términos obtenemos la expansión de dichas derivadas. Escribamos explícitamente el término $\mathcal{D}_4\phi^I$:

$$\mathcal{D}_4\phi^I = \sum_n \frac{in}{R} \phi(n)^I e^{\frac{in}{R}y} + g \sum_n \sum_m [A_4^{(n)}, \phi(m)]^I e^{\frac{i(n+m)y}{R}}. \quad (7.27)$$

Así, sustituyendo todo en (7.25), integrando en y , reorganizando y tomando sólo los modos cero, finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{4(K-G)} = & - \int d^4x \pi R \{ \mathcal{D}_\mu\phi(0)^I \mathcal{D}^\mu\phi(0)^J \phi^K C_{IJK} \\ & + g^2 [A_4^{(0)}, \phi(0)]^I [A_{(0)}^4, \phi(0)]^J \phi^K C_{IJK} \} \end{aligned} \quad (7.28)$$

7.2.3. Definición del campo escalar complejo “z”

Una forma interesante de escribir la acción completa es haciendo uso de la definición de un campo complejo que reúna ambos campos escalares ($A_4^{(0)}$ y $\phi_{(0)}$); de esta forma se construye un nuevo campo escalar z . Escribamos entonces dicho escalar de la siguiente manera:

$$z = \phi_{(0)} + i\varphi; \quad (7.29)$$

el campo $\phi_{(0)}$ es el mismo que aparece en la expresión (7.28); solamente se ha redefinido $A_4^{(0)} \equiv i\varphi$. Así, es fácil verificar que

$$[z, z^*] = 2i[\phi_{(0)}, \varphi]; \quad (7.30)$$

y, por otro lado

$$\mathcal{D}_\mu \phi_{(0)} \mathcal{D}^\mu \phi_{(0)} + \mathcal{D}_\mu A_4^{(0)} \mathcal{D}^\mu A_4^{(0)} = \mathcal{D}_\mu z \mathcal{D}^\mu z^*, \quad (7.31)$$

con lo cual (7.24) y (7.28) pueden reescribirse en una sola expresión ($\mathcal{S}_{4(M)} + \mathcal{S}_{4(K-G)}$) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_4^{(0)} = & \int d^4x \pi R \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)I} F_{(0)}^{\mu\nu J} (z + z^*)^K C_{IJK} - \frac{1}{2} \mathcal{D}_\mu z^I \mathcal{D}^\mu z^{*J} (z + z^*)^K C_{IJK} \right. \\ & \left. - \frac{g^2}{8} [z, z^*]^I [z, z^*]^J (z + z^*)^K C_{IJK} \right\} \end{aligned} \quad (7.32)$$

Ahora sólo resta verificar la simetría de calibre de (7.32).

7.3. Simetría de la acción compactificada

La acción (7.32) resulta interesante por dos razones fundamentales: el campo escalar z que conserva los $\phi_{(0)}$ originales más los $A_4^{(0)}$ que provienen de la compactificación y, en segundo lugar, el término de potencial cuártico ($[z, z^*]^2$) que también es una manifestación de la compactificación de la acción no abeliana. A estas alturas, comprobar la simetría de calibre resulta casi trivial para los dos primeros miembros de la acción, pues la relación (7.2) sigue siendo válida sin importar la dimensión de la teoría. Esto es, calcular las variaciones de los términos $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)I} F_{(0)}^{\mu\nu J} (z + z^*)^K C_{IJK}$ y $-\frac{1}{2} \mathcal{D}_\mu z^I \mathcal{D}^\mu z^{*J} (z + z^*)^K C_{IJK}$ resulta en un cálculo prácticamente idéntico a los

realizados para las expresiones (7.3) y (7.13), con la única sutileza de observar que los campos $A_4^{(0)I}$ transforman como un campo escalar por la siguiente razón: la transformación del A_4^I vendría dada, según la expresión (7.33) por:

$$\delta A_4^I = \partial_4 \Lambda^I + g[A_4, \Lambda]^I, \quad (7.33)$$

pero al expandir los campos según la relación (6.13) y (6.17), la transformación queda expresada en términos de una sumatoria que, al ser limitada únicamente a los modos $n = 0$, el término $\partial_4 \Lambda^I$ (donde $\partial_4 = \partial_y$) desaparece porque es proporcional a n ; de manera que sólo queda el término $g[A_4^{(0)}, \Lambda_{(0)}]^I$ y así se tiene:

$$\delta A_4^{(0)I} = g[A_4^{(0)}, \Lambda_{(0)}]^I, \quad (7.34)$$

ecuación que, al reescribirse como

$$\delta A_4^{(0)I} = -g[\Lambda_{(0)}, A_4^{(0)}]^I, \quad (7.35)$$

la reconocemos como la transformación de un campo escalar dada por la expresión (5.5). Es importante señalar que para $n \neq 0$, (7.35) no es cierta.

Ahora bien, el nuevo término que aparece debido a la reducción dimensional es:

$$-\frac{g^2}{8}[z, z^*]^I [z, z^*]^J (z + z^*)^K C_{IJK}, \quad (7.36)$$

La simetría de calibre de (7.36) se comprueba fácilmente si se tiene en cuenta que el campo complejo z transforma de la siguiente manera:

$$\delta z = -g[\Lambda, z], \quad (7.37)$$

lo que es fácil de ver, y si, por otro lado, recordamos la relación (7.2). Esto es, calcular $\delta(-\frac{g^2}{8}[z, z^*]^I[z, z^*]^J(z + z^*)^K C_{IJK})$ nos conduce a lo siguiente:

$$= \frac{g}{16}[z, z^*]^I[z, z^*]^M \Lambda^B (z + z^*)^K \{2f_{BM}^J C_{IKJ} + f_{BK}^J C_{MIJ}\}, \quad (7.38)$$

donde rápidamente observamos que (7.38) es simétrica en los índices MI , lo que permite reescribir el primer término dentro de las llaves (y teniendo en cuenta que el tensor C_{IJK} es simétrico en todos sus índices) como:

$$2f_{BM}^J C_{IKJ} = 2 \cdot \frac{f_{BM}^J C_{IKJ} + f_{BI}^J C_{MKJ}}{2} = f_{BM}^J C_{IKJ} + f_{BI}^J C_{KMJ}, \quad (7.39)$$

para finalmente obtener:

$$\frac{g}{16}[z, z^*]^I[z, z^*]^M \Lambda^B (z + z^*)^K \{f_{BM}^J C_{IKJ} + f_{BI}^J C_{KMJ} + f_{BK}^J C_{MIJ}\} = 0, \quad (7.40)$$

gracias a (7.2)

Este resultado era de esperarse, pues los demás términos de la acción (7.32) tienen simetrías de calibre por sí solos, lo que deja como única opción la ecuación (7.40) para garantizar la simetría de calibre de la acción.

Capítulo 8

Chern-Simons no abeliano en $D=5$

8.1. Definición

El estudio de la simetría de calibre del término de Chern-Simons (CH-S) no abeliano puede ser complicado cuando se realiza de la forma en la que se ha trabajado hasta ahora. Si bien es cierto que el término por definición tiene simetrías de calibre, realizar el análisis anteriormente hecho sobre los términos de Yang-Mills y Klein-Gordon puede no ser la forma más conveniente de estudiar CH-S, sobretodo cuando se estudia la compactificación, pues se obtienen términos que no son directamente identificables como divergencias o alguna otra forma que garantice la simetría. Además, el álgebra puede ser tediosa y poco elegante. Así pues, realizaremos dicho estudio a partir de un enfoque desde la definición de Chern-Simons.

En $D = 3$, por ejemplo, el término de Chern-Simons \mathcal{K} se puede construir a partir de la siguiente 4-forma:

$$P = Tr[F \wedge F], \tag{8.1}$$

donde se ha introducido el producto wedge que, por definición, permite escribir de forma compacta la expresión:

$$A_\mu A_\nu (dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu) = A_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = A \wedge A. \quad (8.2)$$

Ahora bien, (8.1) es invariante de calibre bajo las transformaciones [9]:

$$A \rightarrow A' = g^{-1} A g + g^{-1} dg \quad (8.3)$$

y

$$F \rightarrow F' = g^{-1} F g, \quad (8.4)$$

y donde $F = dA + A \wedge A$

Así, como $dP = 0$, es decir, (8.1) es cerrada; haciendo uso del lema de Poincaré podemos escribir P como la derivada exterior de \mathcal{K} :

$$P = d\mathcal{K}, \quad (8.5)$$

siempre que se cumpla, por supuesto, las condiciones del lema; esto es: si una vecindad U de puntos pertenecientes a la variedad M se pueden contraer en un punto $p_0 \in M$ [5]; o dicho de otra forma: si todos los puntos de la subvariedad están contenidos en M y la topología es sencilla.

De (8.1) y (8.5) se puede escribir entonces:

$$Tr[F \wedge F] = d\mathcal{K}, \quad (8.6)$$

En general, el término de Chern-Simons es la $(2n-1)$ -forma cuya derivada exterior es la traza de la $2n$ -forma

$$\overbrace{F \wedge F \wedge F \wedge F \dots \wedge F}^{n\text{-veces}}. \quad (8.7)$$

En 3D, por ejemplo, la 3-forma \mathcal{K} se puede escribir:

$$\mathcal{K}_3 = Tr[A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A], \quad (8.8)$$

y en 5D se tiene:

$$\mathcal{K}_5 = Tr[A \wedge F \wedge F - A \wedge A \wedge A \wedge F + \frac{3}{5}A \wedge A \wedge A \wedge A \wedge A], \quad (8.9)$$

ya que, en efecto, se puede comprobar:

$$tr[F \wedge F \wedge F] = dTr(A \wedge F \wedge F - A \wedge A \wedge A \wedge F + \frac{3}{5}A^5). \quad (8.10)$$

Al integrar (8.10) en un espacio 6-dimensional Ω^6 se obtiene:

$$\int_{\Omega^6} tr[F \wedge F \wedge F] = \int_{\Omega^6} dTr(A \wedge F \wedge F - A \wedge A \wedge A \wedge F + \frac{3}{5}A^5), \quad (8.11)$$

donde Ω^6 debe tomarse como el semi-volumen $x^\mu \in \mathcal{R}^6 \mid x^5 \geq 0$, a fin de poder tomar el plano $x^5 = 0$ como frontera.

Así, utilizando el teorema de Stokes, es decir, evaluando el flujo de \mathcal{K} en la frontera de Ω^6 , la ecuación (8.11) puede reescribirse:

$$\int_{\Omega^6} \text{tr}[F \wedge F \wedge F] = \int_{\partial\Omega^6} \text{Tr}(A \wedge F \wedge F - A \wedge A \wedge A \wedge F + \frac{3}{5}A^5). \quad (8.12)$$

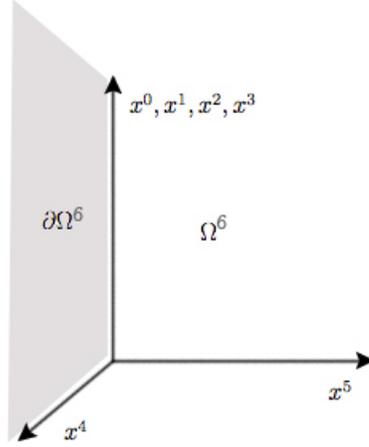


Figura 8.1: Definimos $\partial\Omega^6$ como la frontera del 6-espacio Ω^6

Ahora bien, como se ha dicho, el término de la izquierda es invariante de calibre ante las transformaciones (8.3) y (8.4), gracias a la propiedad cíclica de la traza[9]; por tanto, la igualdad garantiza que el término de la derecha también lo es. Así, por definición, la acción de Chern-Simons tiene simetría de calibre.

8.2. Compactificación

Bajo esta premisa, el estudio de la compactificación se enfoca en evaluar la ecuación (8.12) al hacer la reducción dimensional del integrando de ambos miembros de la ecuación y ver si la igualdad se conserva, lo cual es no trivial.

Esquemáticamente esto se resume como sigue:

$$\begin{array}{ccc}
 \int_{\Omega^6} P_6 & = & \int_{\partial\Omega^6} \mathcal{K}_5 \\
 \text{Reduc. } \downarrow & & \downarrow \\
 \int_{\Omega^5} P_5 & = & \int_{\partial\Omega^5} \mathcal{K}_4
 \end{array} \tag{8.13}$$

donde $P_6 = \text{tr}[F \wedge F \wedge F]$ y P_5 su reducción dimensional.

En efecto, al compactificar la 5-forma \mathcal{K}_5 en la dirección x^4 (ver figura 8.2) se expresa como:

$$\mathcal{K}_4 = \text{Tr}[2d\varphi \wedge dA \wedge A + \varphi dA \wedge dA + d\varphi \wedge A^3 + 3\varphi dA \wedge A^2 + 3\varphi A^4], \tag{8.14}$$

donde φ es el campo escalar $A_4^{(0)}$ que resulta de la compactificación y los vectores A son los modos cero $A^{(0)}$ que quedan al restringir la sumatoria.

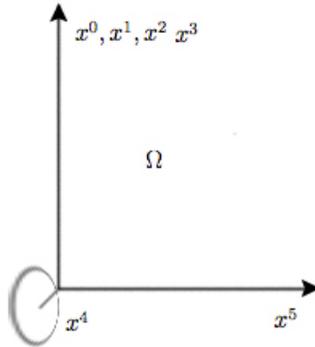


Figura 8.2: Tomamos x^4 como la dimensión compacta

Por otro lado, al reducir dimensionalmente la 6-forma $F \wedge F \wedge F$ se obtiene:

$$3d\varphi \wedge dA \wedge dA + 6d\varphi \wedge dA \wedge A \wedge A + 6\varphi dA \wedge dA \wedge A + 3d\varphi \wedge A^4 + 12\varphi dA \wedge A^3, \quad (8.15)$$

o de manera más compacta y definiendo la cantidad P_5 podemos escribir:

$$P_5 = 3tr[d\varphi \wedge F \wedge F + 2\varphi F \wedge A \wedge dA + 2\varphi dA \wedge A^3] \quad (8.16)$$

Luego, es fácil comprobar que la derivada exterior de \mathcal{K}_4 es exactamente igual a (8.16). Es decir, al compactificar, la igualdad $3tr[d\varphi \wedge F \wedge F + 2\varphi F \wedge A \wedge dA + 2\varphi dA \wedge A^3] = d\mathcal{K}_4$ sigue siendo válida y por ende

$$3 \int_{\Omega^5} tr[d\varphi \wedge F \wedge F + 2\varphi F \wedge A \wedge dA + 2\varphi dA \wedge A^3] = \int_{\partial\Omega^5} \mathcal{K}_4 \quad (8.17)$$

es cierta.

Ahora bien, comprobar la simetría de calibre de (8.17) nuevamente se reduce a comprobar que el lado izquierdo de la ecuación es invariante de calibre. En $D = 3$, por ejemplo, esto se ilustra de la siguiente manera: La cantidad $Tr[F \wedge F]$ es invariante bajo la transformación $g^{-1}Fg$ y gracias a la propiedad cíclica de la traza. Ahora, su reducción dimensional $Tr[F \wedge F] \rightarrow Tr[d\phi \wedge F]$ es invariante bajo las transformaciones $d\phi' = g^{-1}d\phi g$ y $F' = g^{-1}Fg$, con lo que es posible escribir $Tr[d\phi' \wedge F'] = Tr[d\phi \wedge F]$ nuevamente usando la propiedad cíclica de la traza. Esto garantiza que la reducción dimensional de Chern-Simons $3D$ sea simétrico también. Sin embargo, realizar el análisis de la compactificación de Chern-Simons $5D$ es mucho más compleja, toda vez que, al aplicar las transformaciones $\phi \rightarrow \phi'$, $d\phi \rightarrow d\phi'$, $A \rightarrow A'$ y $F \rightarrow F'$ al término

P_5 , se obtiene en efecto P_5 más términos que pueden escribirse con la derivada exterior de la traza de un polinomio de grado 5 en ϕA y $g^{-1}dg$ y otro término que es proporcional a un polinomio de grado 5 de $g^{-1}dg$ que dependen de la topología de la variedad compactificada. Por lo tanto, la simetría de calibre de término de Chern-Simons \mathcal{K}_5 y, por ende, de su compactificación \mathcal{K}_4 , está garantizada por las condiciones topológicas del lema de Poincaré, pues gracias a éste las igualdades (8.12) se cumplen. Sin embargo, en general, si la topología es complicada, el término de Chern-Simons no tiene simetría de calibre. Veamos, por ejemplo, la expresión general para el término de Chern-Simons de dimensiones $2n - 1$ al aplicar las transformaciones ($A \rightarrow A'$) a los campos del mismo [9]:

$$\int_M \mathcal{K}_{2n-1}(A') = \int_M \mathcal{K}_{2n-1}(A) + \int_{\partial M} \beta + (-1)^{n-1} \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!} \int_M [(g^{-1}dg)^{2n-1}], \quad (8.18)$$

donde β es una función de A y depende de g como combinaciones de $g^{-1}dg$. La ecuación (8.18) ilustra como la transformación del término de Chern-Simons conduce a una expresión que no satisface la condición de simetría, pues de otra forma las integrales proporcionales a β y $g^{-1}dg$ no aparecerían en la ecuación. Sin embargo, si las condiciones en la frontera de M son las adecuadas y si la topología es trivial, entonces la integral proporcional a β se anula y la última, que son los **winding numbers** o **números de enrollamiento** del mapa $g : M \rightarrow G$, garantizan la simetría de calibre sólo si dichos números son cero.

Capítulo 9

Conclusiones

9.1. Análisis de la acción abeliana

La verificación de que, en efecto, la acción *abeliana* en 5 dimensiones tiene simetrías de calibre es bastante trivial. Término a término se obtuvo la variación de la misma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\cdot\phi\right) &= 0 \\ \delta\left(\frac{1}{2}\partial_\gamma\phi\partial^\gamma\phi\cdot\phi\right) &= 0 \\ \delta(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}A_\mu F_{\nu\lambda}F_{\rho\sigma}) &= \partial_\mu(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\Lambda F_{\nu\lambda}F_{\rho\sigma}),\end{aligned}$$

con lo cual la transformación de \mathcal{L}_5 es simplemente una divergencia heredada del término de Chern-Simons que no cambia las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, el problema de interés se centra en el estudio de la acción compactificada (6.14), en este caso, la reducción dimensional del término de Chern-Simons deja como re-

manente en la acción 4D (si bien no existe C-S en dimensiones pares) dos términos que a primera vista lucen algo exóticos, pero en realidad son bien conocidos (6.19): en primer lugar, un término tipo $A_4 \tilde{F} F$ cuya variación $\delta(A_4 \tilde{F} F) = 0$ se ve de forma inmediata, pues

$$\begin{aligned}\delta A_4^{(0)} &= 0 \\ \delta(F_{\nu\lambda}^{(0)} F_{\rho\sigma}^{(0)}) &= 2(\partial_\nu \partial_\lambda \Lambda^{(0)} - \partial_\lambda \partial_\nu \Lambda^{(0)}) F_{\rho\sigma}^{(0)} = 0,\end{aligned}$$

y en segundo lugar una divergencia

$$\partial_\rho (A_\nu^{(0)} F_{\lambda\rho}^{(0)} A_4^{(0)})$$

cuya presencia, como se ha dicho, no altera la física. El campo no masivo $A_4^{(0)}$ que aparece en la acción reducida, producto de la compactificación, transforma como un campo escalar (ver sección 7.3)

$$\delta A_4^{(0)} = -g[\Lambda_{(0)}, A_4^{(0)}],$$

que en este caso es nulo ($\delta A_4^{(0)} = 0$) por ser abeliano y su presencia no altera la simetría de calibre. Luego

$$\delta\left(\frac{1}{2}\partial_\mu A_4^{(0)}\partial^\mu A_{(0)}^4 \cdot \phi\right) = 0$$

y, por último,

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(0)}F^{\mu\nu}\cdot\phi^{(0)}\right) &= 0 \\ \delta\left(\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi^{(0)}\partial^\alpha\phi^{(0)}\cdot\phi^{(0)}\right) &= 0\end{aligned}$$

Así, pues, la acción *abeliana* compactificada (6.14) conserva la invariancia de gauge también de una forma bastante simple.

9.2. Análisis de la acción no abeliana

Por otro lado, se esperaba que la acción *no abeliana* aportara algo más de riqueza al estudio; y en efecto, la reducción dimensional de dicha acción se expresa como un vector acoplado a un campo escalar complejo z no masivo que se define como la combinación de los campos ϕ y los $A_4^{(0)}$ que surgen de la compactificación. Por otro lado la acción reducida contiene un potencial cuántico que se escribe

$$-\frac{g^2}{8}[z, z^*]^I[z, z^*]^J(z + z^*)^K C_{IJK}$$

y que, como se dijo en el capítulo 7, es invariante de gauge por si solo (ver 7.40) pues tanto Yang-Mills como Klein-Gordon también lo son individualmente. En términos generales se tiene un resultado no trivial que implica la necesidad de incluir en la acción el término del potencial debido a criterios de simetría; es decir, la acción general debe contener todos los términos posibles que preservan la simetría de calibre.

En resumidas cuentas podemos ver cómo se efectuó la verificación de la simetría de calibre de la acción *no abeliana* :

Para la acción 5D se verifica

$$\begin{aligned}\delta\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^IF^{\mu\nu J}\phi^K\right)C_{IJK} &= \frac{g}{2}F_{\mu\nu}^MF^{\mu\nu J}\Lambda^N\phi^K f_{N(M}^I C_{JK)I} = 0 \\ \delta\left(\frac{1}{2}\mathcal{D}_\gamma\phi^I\mathcal{D}^\gamma\phi^J\phi^K\right) &= -\frac{g}{2}\Lambda^O\phi^K\mathcal{D}_\gamma\phi^J\mathcal{D}^\gamma\phi^P f_{O(P}^I C_{JK)I} = 0\end{aligned}$$

gracias a la condición $f_{M(L}^K C_{IJ)K} = 0$ la cual, además, se cumple independientemente de la dimensión de la acción; por lo tanto, para la acción compactificada (7.32) también se puede escribir:

$$\begin{aligned}\delta\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(0)I}F^{\mu\nu J}(z+z^*)^K C_{IJK}\right) &= 0 \\ \delta\left(-\frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu z^I\mathcal{D}^\mu z^{*J}(z+z^*)^K C_{IJK}\right) &= 0,\end{aligned}$$

y finalmente, la variación del potencial que se escribe (7.40):

$$\frac{g}{16}[z, z^*]^I [z, z^*]^M \Lambda^B (z+z^*)^K \{f_{BM}^J C_{IKJ} + f_{BI}^J C_{KMJ} + f_{BK}^J C_{MIJ}\} = 0,$$

donde el campo z transforma de la siguiente manera:

$$\delta z^I = -g[\Lambda, z]^I.$$

9.3. Análisis de Chern-Simons no abeliano

Es claro que la ecuación:

$$\int_{\Omega^6} tr[F \wedge F \wedge F] = \int_{\partial\Omega^6} (A \wedge F \wedge F - A \wedge A \wedge A \wedge F + \frac{3}{5}A^5), \quad (9.1)$$

implica la simetría de calibre de Chern-Simons en $D = 5$, pues $tr[F \wedge F \wedge F]$ es invariante de calibre ante las transformaciones (8.3) y (8.4). De igual forma, la reducción dimensional:

$$3 \int_{\Omega^5} tr[d\varphi \wedge F \wedge F + 2\varphi F \wedge A \wedge dA + 2\varphi dA \wedge A^3] = \int_{\partial\Omega^5} \mathcal{K}_4, \quad (9.2)$$

tiene simetría de calibre ya que al compactificar, la igualdad $P_5 = d\mathcal{K}_4$ sigue siendo válida y por ende (9.2) también. Sin embargo, aquí es interesante notar que la simetría de calibre del término del Chern-Simons y su compactificación están condicionados por la topología de la variedad, pues el lema de Poincaré así lo requiere y, en general, Chern-Simons no conmutativo no tendrá simetría de calibre sino para ciertos valores discretos que dependen de los números de enrollamiento.

Así, mientras Chern-Simons conmutativo es simétrico ante estas transformaciones locales sin restricción alguna, el término no abeliano requiere de una condición topológica para cumplir con la simetría de calibre.

Apéndice A

Tablas Resumen

A continuación se presenta unas tablas donde se presenta un resumen del contenido tratados desde el capítulo 5 al capítulo 7:

Cuadro A.1: Resumen acción abeliana. $M = 0, 1, 2, 3, 4$. y $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Abeliana	Yang-Mills	Klein-Gord.	Chern-Simons	Vector	Escalar
Acción 5D	$\frac{1}{4}F^{MN}F_{MN}\phi$	$\frac{1}{2}\partial_G\phi\partial^G\phi\phi$	$\varepsilon^{MNLRS}A_MF_{NL}F_{RS}$	A_M	ϕ
Transfor.	$\delta = 0$	$\delta = 0$	$\delta = Div$	$\delta = \partial_M\Lambda$	$\delta = 0$
Acción 4D	$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(0)}F_{(0)}^{\mu\nu}\phi^{(0)}$	$\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi^{(0)}\partial^\alpha\phi^{(0)}\phi^{(0)}$ $\frac{1}{2}\partial_\alpha A_4^{(0)}\partial^\alpha A_4^{(0)}\phi^{(0)}$	$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}A_4^{(0)}F_{\nu\lambda}^{(0)}F_{\rho\sigma}^{(0)}$	$A_\mu^{(0)}$	$\phi_{(0)}$ y $A_4^{(0)}$
Transfor.	$\delta = 0$	$\delta = 0$	$\delta = 0$	$\delta = \partial_\mu\Lambda_{(0)}$	$\delta = 0$

Cuadro A.2: Resumen acción no abeliana. $\hat{M} = 0, 1, 2, 3, 4$; $\mu = 0, 1, 2, 3$; e $I = 1, 2, 3\dots n$.

No Abeliana	Yang-Mills	Klein-Gord.	Potencial	Vector	Escalar
Acción 5D	$\frac{1}{4}F_{\hat{M}\hat{N}}^IF_{\hat{M}\hat{N}}^{\hat{M}\hat{N}J}\phi^K$	$\frac{1}{2}\mathcal{D}_{\hat{G}}\phi^I\mathcal{D}^{\hat{G}}\phi^J\phi^K$	—	$A_{\hat{M}}^I$	ϕ
Transfor.	$\delta = 0$	$\delta = 0$		$\delta = \partial_{\hat{M}}\Lambda^I$ $+g[A_{\hat{M}}, \Lambda]^I$	$\delta = -g[\Lambda, \phi]^I$
Acción 4D	$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(0)I}F_{(0)}^{\mu\nu J}z^{+K}$	$\frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu z^I\mathcal{D}^\mu z^{*J}z^{+K}$	$\frac{g^2}{8}[z, z^*]^2z^{+K}$	$A_\mu^{(0)I}$	z^I
Transfor.	$\delta = 0$	$\delta = 0$	$\delta = 0$	$\delta = \partial_\mu\Lambda^I$ $+g[A_\mu^{(0)}, \Lambda]^I$	$\delta = -g[\Lambda, z]^I$

NOTA: en el cuadro A.2 todos los términos de la acción deben ser multiplicados por C_{IJK} y, por otro lado, se ha escrito $(z + z^*)^K$ como z^{+K} por razones de espacio.

Bibliografía

- [1] Eric Bergshoeff et al. Superconformal $N = 2$, $D = 5$ matter with and without actions. *JHEP*, 10:045, 2002.
- [2] Paul A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, 1984.
- [3] M. B. Green et al. *String Theory. Loop Amplitudes, Anomalies and phenomenology*, tomo 1. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1987.
- [4] Marc Henneaux y Claudio Teitelboin. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1991.
- [5] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing. Bristol and Philadelphia, 2003.
- [6] Joseph Polchinski. *An Introduction to the Bosonic String*, tomo 1. Cambridge University Press, 1999.
- [7] Alex Pomarol et al. Extra Dimensions. *VIII Escuela La Hechicera. Relatividad, Campos y Astrofísica*, 2002.
- [8] Bruno Ferreira Rizzuti. Busca de Simetrias Locais em Teorias Lagrangeanas Singulares. *Universidad Federal de Juiz de Fora. Maestrado em Física.*, 2008.
- [9] Jorge Zanelli. Chern-Simons Gravity: $2+1$ to $2n+1$ Dimensions. *Brazilian Journal of Physics.*, 30, 2000.