UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Formulación Hamiltoniana de la Teoría B-F en dimensión 3+1 e Invariantes Topológicos

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Nancy Torres** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Lorenzo Leal.

Cotutora: Dra. Mariela Castillo.

Caracas, Venezuela
Marzo 2012

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado " **Formulación Hamiltoniana de la teoría B-F en dimensión 3+1 e invariantes topológicos**", presentado por el **Br. Nancy Torres**, titular de la Cédula de Identidad **18537976**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Lorenzo Leal
Tutor

Mariela Castillo
Cotutor

Ernesto Contreras
Jurado

Tomás Guardia
Jurado

Índice general

Notación

Durante todo este trabajo consideraremos que el rango de un índice griego es de 0 a n-1, donde n es la dimensión del espacio-tiempo. Los índice latinos numeran las dimensiones estrictamente espaciales (Así por ejemplo, para el espacio-tiempo de Minkoski n=4, $\mu = 0, 1, 2, 3$; i=1,2,3).

Además usaremos el convenio de suma de Einstein, el cual consiste en que si un índice griego está repetido uno arriba y otro abajo entonces se asume una sumatoria en ese índice. Para índices latinos no hace falta que los índices repetidos esten uno arriba y otro abajo.

Ejemplo:

En el espacio-tiempo n=3

$A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2$

Como es un índice griego el recorrido incluye la variable temporal.

Usaremos la siguiente notación para indicar el rotor, la divergencia y el gradiente: Sea A una función vectorial y B una escalar, entonces

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})^i = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k = \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i A_i = \partial_i A_i$$

$$(\vec{\nabla} B)^i = \frac{\partial B}{\partial x^i} = \partial_i B$$

Siendo

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{(i,j,k)=(1,2,3) o permutaciones pares de esta combinación} \\ -1, & \text{permutaciones impares de la combinación (i,j,k)=(1,2,3)} \\ 0, & \text{i=j o j=k o k=i.} \end{cases}$$

Introducción

Las teorías clásicas de campos son modelos matemáticos que permiten describir la evolución de sistemas físicos a través de funciones del espacio- tiempo (campos). Estas teorías se pueden estudiar desde dos perspectivas equivalentes, una es la formulación Lagrangeana y otra es la Hamiltoniana. En este trabajo nos enfocaremos en la última de ellas. En la formulación Hamiltoniana usual, se presupone que las varibles del espacio de fases (los campos y sus momentos conjugados) son independientes. Ahora bien, si el sistema posee restricciones, el paso de la formulación Lagrangeana a la Hamiltoniana suele realizarse con el método de Dirac. Sin embargo, existen ciertos tipos de sistemas (incluida la acción B-F), en los cuales se puede tomar un camino alternativo que consiste en descomponer la acción en espacio-tiempo y reconocer, en el Lagrangeano de primer orden, la estructura canónica subyacente. En este trabajo seguiremos este camino. Finalmente, a través de un principio variacional se pueden determinar las ecuaciones de movimiento que gobiernan el sistema, tanto en la formulación Lagrangeana como en la Hamiltoniana.

Existen ciertas teorías de campos que son independientes de la métrica [**13**] [**5**] [**7**][**4**](teorías topológicas) las cuales permiten obtener resultados interesantes acerca de las propiedades de la variedad donde se definen, como por ejemplo, expresiones para invariantes de nudo. Los invariantes de nudo se pueden hallar por medio del Hamiltoniano *on shell*, que consiste en introducir en el Hamiltoniano las soluciones de las ecuaciones de movimiento, con ciertas fuentes externas asociadas a objetos geométricos.

En un trabajo previo [**2**] a este se han hallado invariantes topológicos a partir del Hamiltoniano de la teoría B-F en dimensión 2+1, cuya acción es

$$S_{B-F} = \int d^3x \, (\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu B_\rho + J^\mu_A A_\mu + J^\mu_B B_\mu) \, ,$$

con las siguientes fuentes externas

$$J_A^\nu = \begin{cases} \delta^2(\vec{x}_2 - \vec{c}_2), & \nu = 0; \\ 0, & \nu = i, \end{cases}$$

y

$$J_B^\nu = \begin{cases} 0, & \nu = 0; \\ \int_\Omega dy^i \delta^2(\vec{x}_2 - \vec{y}_2), & \nu = i. \end{cases}$$

Nuestro objetivo será estudiar una extensión de ese trabajo a la acción B-F en dimensión 3+1

$$S_{B-F} = 2k_1 \int d^4x (\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu} \partial_\lambda A_\rho) + k_2 \int d^4x (J^\mu A_\mu) + k_3 \int d^4x (\mathcal{K}^{\mu\nu} B_{\mu\nu}),$$

con las siguientes fuentes externas:

Caso 1

$$J^\eta(\vec{y}) = \begin{cases} \int_{c_1} dz^i \delta^3(\vec{y} - \vec{z}), & \eta = i \\ 0, & \eta = 0 \end{cases}$$

y

$$K^{\eta\alpha}(\vec{y}) = \begin{cases} K^{i0}(\vec{y}) = \int_{c_2} dx^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ K^{00}(\vec{y}) = 0, \\ K^{ij}(\vec{y}) = 0, \end{cases}$$

donde c_1 y c_2 son curvas cerradas.

Caso 2

$$J^\mu(\vec{x}) = \begin{cases} \delta^3(x \vec{-} x_0), & \mu = 0 \\ 0, & \mu = i \end{cases}$$

y

$$K^{\mu\lambda}(\vec{x}) = \begin{cases} K^{ij}(\vec{x}) = \int_\Sigma d\Sigma_y^{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ K^{00}(\vec{x}) = 0, \\ K^{oi}(\vec{x}) = 0, \end{cases}$$

siendo Σ una superficie cerrada.
Para ambos casos obtendremos los invariantes correspondientes. El trabajo se organiza de la siguiente manera:

En el capítulo 1 resumiremos aspectos básicos de variedades elementales, pasando por conceptos cruciales para el cumplimiento de los objetivos de este trabajo como tensores, cambio general de coordenadas, entre otros. Esto nos permitirá explorar cuándo una acción es topológica.

En el capítulo 2 desarrollaremos brevemente las formulaciones Lagrangeana e ilustraremos su uso con las acciones de Maxwell, B-F, Chern Simons y Klein Gordon

Dedicaremos un espacio en este capítulo para describir las características de las teorías topológicas de las cuales se obtienen los invariantes de nudo. Finalizaremos esta parte estudiando la acción *on shell* de la teoría de Chern Simons.

En el capítulo 3 se explicará de manera resumida la formulación Hamiltoniana, presentando ciertos ejemplos y desarrollando el caso especial que se presenta cuando el sistema tiene resticciones, como es el caso de la teoría B-F. Por último daremos un ejemplo de obtención de invariantes topológicos con el Hamiltoniano de la acción B-F en dimensión 2+1.

En el capítulo 4 nos abocaremos al estudio completo de la acción B-F en dimensión 3+1; primero describiendo brevemente su formulación Lagrangeana y luego con más detalle realizaremos su formulación Hamiltoniana. Después integraremos las ecuaciones obtenidas para hallar el Hamiltoniano *on shell* con las fuentes externas, dadas en el caso I y II antes mencionado. Finalmente obtedremos los invariantes de nudo correspondientes y daremos sus interpretaciones.

Capítulo 1

1. Variedades elementales

Sea M una colección abstracta de objetos P que denominaremos " puntos". Supondremos que estos puntos pueden ponerse en correspondencia biunívoca con un conjunto S de n-uplas de números reales $(x^1, x^2, ..., x^n)$ que llamaremos las coordenadas de P. La correspondencia, $P(x^1, x^2, ..., x^n)$, entre los puntos que pertenecen a M y el conjunto S de n-uplas, recibira el nombre de *sistema de coordenadas* de M. Cualquier otro sistema de coordenadas de $\bar{P}(x^1, x^2, ..., x^n)$ de M, definido en un conjunto de n-uplas, determinará una correspondencia biyectiva entre los dos conjunto de n-uplas, S y $\bar{S}$, que se llamará *transformación de coordenadas*. Esta correspondencia puede expresarse como $\bar{x^\mu} = \bar{x^\mu}(x^1, x^2, ..., x^n)$ con μ=1,..,n y tiene las ecuaciones inversas $x^\mu = x^\mu(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^n)$. Aquí, las x^μ son funciones numéricas reales de $\bar{S}$ y $\bar{x}^\mu$ son funciones numéricas reales de S.

Supongamos, por otra parte, que las transformaciones $\bar{x^\mu} = \bar{x^\mu}(x^1, x^2, ..., x^n)$ y sus inversas $x^\mu = x^\mu(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^n)$, tienen derivadas parciales continuas $\frac{\partial \bar{x^\mu}}{\partial x^\nu}$ y $\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu}$ con μ,ν=1,..,n y sus jacobianos son no nulos y estan dados por

$$\frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^n)}{\partial(x^1, x^2, ..., x^n)} = det \left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) \neq 0$$

y

$$\frac{\partial(x^1, x^2, ..., x^n)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^n)} = det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \right) \neq 0.$$

La colección fundamental de puntos M conjuntamente con la totalidad de los sistemas de coordenadas admisibles, definidos como se planteó antes, recibe el nombre de *Variedad elemental de dimensión* n .

1.1. Tensores. Dada una variedad coordenada, es posible considerar que un tensor T en un punto P de la variedad, es cierto "ente" geométrico que se asocia al punto y que cumple las siguientes propiedades:

a) Dado el sistema de coordenadas $P(x^1, x^2, ..., x^n)$ en la variedad, T se representa por medio de un conjunto C de escalares que recibe el nombre de componentes de T respecto del sistema de coordenadas $P(x^1, x^2, ..., x^n)$.

b) Si $P(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^n)$ es cualquier otro sistema de coordenadas de la variedad, las componentes $\bar{C}$ de T respecto de $P(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^n)$ se relacionan con las componentes C segun ciertas leyes de transformación que dependen de las transformaciones de coordenadas $\bar{x^\mu} = \bar{x^\mu}(x^1, x^2, ..., x^n)$, μ=1,...,n y de su inversa, $x^\mu = x^\mu(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^n)$.

De acuerdo a sus correspondientes leyes de transformación, los tensores se clasifican del siguiente modo:

1) Un tensor se llama *tensor contravariante de orden 1* (vector contravariante), si tiene n componentes A^1,......,A^n que transforman de acuerdo con la siguiente ley:

$$\bar{A}^\alpha \quad = \quad A^\beta \frac{\partial \bar{x^\alpha}}{\partial x^\beta}. \tag{1.1}$$

2) Un tensor recibe el nombre de *tensor covariante de orden 1* (vector covariante), si tiene n componentes B_1,......,B_n que transforman de acuerdo con la siguiente ley:

$$\bar{B}_\alpha = B_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha}. \tag{1.2}$$

3) Un tensor se llama *tensor contravariante de orden m*, si tiene n^m componentes $C^{\alpha_1.....\alpha_m}$ con $\alpha_1, ..., \alpha_m$=1,..,n, que transforman de acuerdo con la siguiente ley:

$$\bar{C}^{\alpha_1.....\alpha_m} = C^{\beta_1.....\beta_m} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\beta_1}} .... \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_m}}{\partial x^{\beta_m}}. \tag{1.3}$$

4) Un tensor se llama *tensor covariante de orden m*, si tiene n^m componentes $D_{\alpha_1.....\alpha_m}$ con $\alpha_1, ..., \alpha_m$=1,..,n, que transforman de acuerdo con la siguiente ley:

$$\bar{D}_{\alpha_1.....\alpha_m} = D_{\beta_1.....\beta_m} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^{\beta_1}} .... \frac{\partial x^{\alpha_m}}{\partial \bar{x}^{\beta_m}}. \tag{1.4}$$

5) Un tensor se denomina *tensor mixto o densidad tensorial contravariante de orden r y contravariante de orden s de peso N*, si tiene n^{r+s} componentes del tipo $E^{\alpha_1.....\alpha_m}_{\beta_1.....\beta_m}$ que transforman de acuerdo con la ley:

$$\bar{E}^{\alpha_1.....\alpha_r}_{\beta_1.....\beta_s} = \left(det\left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}\right)\right)^N E^{\kappa_1.....\kappa_m}_{\nu_1.....\nu_m} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\kappa_1}} .... \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_r}}{\partial x^{\kappa_r}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^{\beta_1}} ..... \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial \bar{x}^{\beta_s}} \tag{1.5}$$

6) Un escalar F es un tensor de orden 0 que tiene 1 elemento y se transforma de acuerdo a la siguiente ley:

$$\bar{F} = F. \tag{1.6}$$

Se dice que un conjunto de *componentes* de un tensor es *simétrico* respecto a dos índices contravariantes (superíndice) o respecto a dos índices covariantes (subíndices), si las componentes no varían al permutar estos dos índices. Por ejemplo, $A^{\alpha\beta\gamma}_{\delta\epsilon}$ es simétrico respecto del primer índice y del segundo índice contravariante si $A^{\alpha\beta\gamma}_{\delta\epsilon} = A^{\beta\alpha\gamma}_{\delta\epsilon}$ para cualquier α yβ .

Se dice que las *componentes* de un tensor son *antisimétricas* respecto a dos índices contravariantes, o respecto de dos índices covarariantes, si al permutar estos dos índices cambia el signo algebraico de la componente. Por ejemplo $A^{\alpha\beta\gamma}_{\delta\epsilon}$ es antisimétrico respecto de los dos primeros índices contravariantes si $A^{\alpha\beta\gamma}_{\delta\epsilon} = -A^{\beta\alpha\gamma}_{\delta\epsilon}$ para cualquier α yβ [**9**].

1.2. Ejemplos de transformaciones de coordenadas. Consideremos dos observadores w y $\bar{w}$ en el espacio 3+1 dimensional ubicados en los origenes de los sistemas de referencia P y $\bar{P}$ respectivamente; supongamos además que el observador $\bar{w}$ se mueve en dirección del ejes x del sistema de referencia P y tiene velocidad constante v. En el sistema de referencia P cada evento estará determinado por el siguiente cuadrivector $x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

(suele denotarse $x^\mu = (t, x, y, z)$). Con relación al sistema de referencia $\bar{P}$ los eventos estarán descrito por el cuadrivector $\bar{x}^\mu = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Las transformaciones que relacionan los sistemas de referencia P y $\bar{P}$, en física no relativista, son denominadas **transformaciones de Galileo** y están dadas explícitamente por las siguientes igualdades

$$\bar{x} = x - vt, \tag{1.7}$$

$$\bar{y} = y, \tag{1.8}$$

$$\bar{z} = z, \tag{1.9}$$

$$\bar{t} = t. \tag{1.10}$$

Si v es del orden de la velocidad de la luz el tiempo ya no es un parámetro universal, por lo cual los eventos se representarán como cuadrivectores del espacio de Minkowski M_4, que es un espacio vectorial (con la suma componente a componente y la multiplicación por un escalar tradicional) con un pseudo producto interno bajo el campo de los números reales asociado a la métrica dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\nu\mu}.$$

En este caso las transformaciones no serán de Galileo sino de Lorentz, y se habla de física relativista.

Una **transformación de Lorentz** es un endomorfismo sobre el espacio M_4

$$L : M_4 \to M_4,$$

Que cumple con la siguiente condición. Sean u y v pertenecientes al espacio de Minkowski, entonces [**11**]

$$L(\vec{u}) \cdot L(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}, \tag{1.11}$$

Con

$$u \cdot v = g_{\mu\nu} u^{\mu} v^{\nu}. \tag{1.12}$$

Se define la siguiente notación para la inversa de la métrica $g_{\mu\nu}$

$$(g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu}. \tag{1.13}$$

Con esto se tiene

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}. \tag{1.14}$$

Por medio de la métrica se establecen las siguientes relaciones entre cuadrivectores covariantes y contravariantes

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} \tag{1.15}$$

$$x^{\lambda} = g^{\mu\lambda} x_{\mu}. \tag{1.16}$$

Para el caso particular en que un observador se mueve en dirección del eje x con respecto al otro las transformaciones de Lorentz están dadas por:

$$\bar{t} = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.17}$$

$$\bar{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.18}$$

$$\bar{y} = y \tag{1.19}$$

$$\bar{z} = z. \tag{1.20}$$

En los casos en los cuales la velocidad v es mucho menor que c las transformaciones de Lorentz se reducen a las transformaciones de Galileo [**10**]

$$\bar{t} = \lim_{\frac{v}{c}\to 0} \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t \tag{1.21}$$

$$\bar{x} = \lim_{\frac{v}{c}\to 0} \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = x - vt \tag{1.22}$$

En función de los cuadrivectores las transformaciones de Lorentz se escriben (en forma matricial) como

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c\gamma & 0 & 0 & \frac{-v\gamma}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v\gamma}{c} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

y en general

$$\bar{x}^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \tag{1.23}$$

Entonces:

$$\frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = L^{\mu}_{\ \nu} \tag{1.24}$$

y

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\nu}} = (L^{-1})^{\mu}_{\ \nu} \tag{1.25}$$

y pueden reescribirse entonces las reglas de transformación de tensores mixtos (ecuación (1.5)), bajo transformaciones de Lorentz, de forma inmediata.

Capítulo 2

En este capítulo resumiremos aspectos básicos de las teorías clásicas de campos. Un *campo* es una aplicación de los puntos del espacio tiempo en algún espacio asociado a ciertas propiedades físicas. Por ejemplo, si se trata de estudiar la temperatura en cada punto del espacio, entonces el campo será escalar, si es la velocidad de un fluido, el campo asociado será vectorial y si es la métrica $g_{\mu\nu}$ en relatividad general entonces trataremos con un campo tensorial. Los campos obedecen ecuaciones diferenciales que los determinan, y que en general pueden obtenerse de un principio variacional.

Existen dos formulaciones equivalentes de gran importancia en la teoría clásica de campos: la formulación Lagrangeana y la Hamiltoniana o Canónica. En este capítulo estudiaremos la primera de ellas: Dedicaremos especial atención a las teorías topológicas, por ser la herramienta para el estudio de invariantes topológicos en este trabajo.

1. Formalismo Lagrangeano

Iniciemos nuestro estudio con una breve explicación de la formulación Lagrangeana. Para ello asociaremos a cada punto del espacio una función $\theta_m(\vec{x}, t) = \theta_m(x)$ que corresponde a los distintos campos involucrados en el modelo físico, el índice m numera los diferentes campos y x (o x^μ) denota las coordenadas espacio - temporales.

Una teoría de campos se caracteriza por su densidad Lagrangeana

$$\mathcal{L}[\theta_m(\vec{x}, t), \nabla\theta_m(\vec{x}, t), \dot{\theta}_m(\vec{x}, t)], \tag{2.1}$$

que es una función que depende de los campos y sus derivadas. Se define el *Lagrangeano* L (en n dimensión espacio-temporales) como

$$L \;=\; \int d^{n-1}x\mathcal{L}. \tag{2.2}$$

La *acción* S viene dada por

$$S = \int dtL = \int d^n x\mathcal{L}, \tag{2.3}$$

y es entonces un funcional a partir del cual la dinámica del modelo viene dada según el siguiente *principio variacional*:

El movimiento del sistema es tal que, bajo variaciones infinitesimales $\delta\theta_m$, independientes y arbitrarias de los campos, que inducen en las derivadas variaciones dadas por $\delta(\partial_\mu\theta_m) = \partial_\mu(\delta\theta_m)$, y que se anulan en el infinito espacio temporal, la variación δS que se produce en la acción es nula. Este principio se instrumenta así

$$\begin{aligned}
\delta S \;&=\; \int d^n x\delta\mathcal{L} \\
&=\; \int d^n x \sum_m \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_m}\delta\theta_m + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_m)}\delta\partial_\mu\theta_m \right) && (2.4) \\
&=\; \int d^n x \sum_m \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_m}\delta\theta_m - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{(\partial\partial_\mu\theta_m)}\right)\delta\theta_m \right] + \int d^n x \sum_m \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_m)}\delta\theta_m\right). && (2.5)
\end{aligned}$$

El último término, siendo la integral de una derivada total, puede escribirse como el flujo de un campo J^μ (usando el teorema de la divergencia)

$$J^\mu = \sum_m \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_m)}\delta\theta_m, \tag{2.6}$$

a través de un hiperplano en el infinito espacio temporal. Pero como las variaciones $\delta\theta_m$ se anulan en el infinito, este término es nulo. Usando que $\delta S = 0$, según el principio variacional, y utilizando la arbitrariedad e independencia de los $\delta\theta_m$, se tiene finalmente

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_m} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_m)}\right) = 0, \tag{2.7}$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange. Veamos en seguida algunos ejemplos que ilustran la aplicación del principio variacional.

1.1. Formulación lagrangeana de la acción de Klein Gordon. La teoría de Klein-Gordon describe del modo más elemental posible, la evolución de partículas masivas que cumplen con la relatividad especial. Es por ello que se considera una teoría modelo dentro de la física. Su acción viene dada por

$$S = \int d^4x \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2\phi^2). \tag{2.8}$$

Deseamos hallar las ecuaciones de movimiento del sistema a través de la formulación Lagrangiana. En este caso como tenemos un solo campo, entonces habrá una sola ecuacion de movimiento. Debemos para este campo hallar las siguientes derivadas parciales

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial(\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2)}{\partial \phi} = -m^2\phi.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = \frac{\partial(\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2)}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi.$$

Con esto

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = -m^2\phi - \partial \mu \partial^\mu \phi = -m^2\phi - \partial_0\partial^0\phi - \partial_i\partial^i\phi = 0$$

Así las ecuaciones de movimiento son

$$\partial_0\partial^0\phi = -m^2\phi - \partial_i\partial^i\phi = -m^2\phi + \nabla^2\phi, \tag{2.9}$$

mostrando entonces que se trata de la ecuación de ondas con un término de masa.

1.2. Formulación Lagrangeana de la acción de Maxwel. El campo de Maxwell describe los fenómenos electromagnéticos [**6**], a través de las ecuaciones que obedece, que son las famosas ecuaciones de Maxwell. Aparte de este importante hecho, debe subrayarse que la teoría de Maxwell presenta dos simetrías que son fundamentales en la física contemporánea: la simetría de Lorentz y la invariancia de calibre. En relación a la primera, hay que decir que fueron las ecuaciones de Maxwell y las observaciones electromagnéticas las que condujeron a la teoría de la relatividad especial. En cuanto a la segunda, es un hecho que todas las interacciones fundamentales gozan de invariancia de calibre; de ahí su gran importancia.
La expresión matemática para la acción de Maxwel esta dada por

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \right), \tag{2.10}$$

con

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{2.11}$$

A continuación se halla la primera ecuación de movimiento (ecuación no homogénea) de Maxwell al hacer variaciones en el campo vectorial A

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\eta} = \frac{\partial(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu)}{\partial A_\eta} = -\frac{\partial(g^{\mu\theta}A_\theta g_{\mu\lambda}J^\lambda)}{\partial A_\eta} = -\delta^\eta_\lambda J^\lambda.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\eta)} = \frac{\partial(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu)}{\partial(\partial_\beta A_\eta)} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\frac{\partial(F^{\mu\nu})}{\partial(\partial_\beta A_\eta)} + F^{\mu\nu}\frac{\partial(F_{\mu\nu})}{\partial(\partial_\beta A_\eta)} \right) = F^{\beta\eta},$$

ya que

$$F_{\mu\nu}\frac{\partial(F^{\mu\nu})}{\partial(\partial_\beta A_\eta)} = F^{\mu\nu}\frac{\partial(F_{\mu\nu})}{\partial(\partial_\beta A_\eta)}.$$

Con esto se tiene

$$-J^\eta + \partial_\beta F^{\beta\eta} = 0. \tag{2.12}$$

La otra ecuacion de Maxwell (ecuacion homogénea) se obtiene de la siguiente manera. Definamos el dual de F como

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\theta}F_{\rho\theta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\theta}(\partial_\rho A_\theta - \partial_\theta A_\rho). \tag{2.13}$$

Tomando la derivada parcial de este dual

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} \quad = \quad \partial_\mu(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\theta}(\partial_\rho A_\theta - \partial_\theta A_\rho)), \tag{2.14}$$

se tiene que la derivada del dual es cero en vista de que la contracción de un tensor simétrico y uno antisimétrico es nula.

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} \;=\; 0. \tag{2.15}$$

A continuación se explica la invariancia de calibre que posee esta acción. Consideremos el siguiente cambio para el campo A

$$\bar{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda, \tag{2.16}$$

con Λ un campo escalar. Se introduce este cambio en la acción

$$S(\bar{A}) = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} \bar{F}^{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu} - J_\mu \bar{A}^\mu \right).$$

Primero estudiaremos el efecto de esta transformación en el campo tensorial $F^{\mu\nu}$, según la ecuación (2.16):

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \bar{A}^\nu - \partial^\nu \bar{A}^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu \partial^\nu \Lambda - \partial^\nu \partial^\mu \Lambda = F^{\mu\nu},$$

suponiendo que las derivadas de primer y segundo orden de Λ existen y son continuas. Por lo tanto tenemos

$$S(\bar{A}) = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J_\mu (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) \right) = S(A) - \int d^4x \left(\frac{1}{4} J^\mu (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) \right).$$

Pero se tiene que

$$-\int d^4x J_\mu (\partial^\mu \Lambda) = -\int d^4x \partial^\mu (J_\mu \Lambda) + \int d^4x (\partial^\mu J_\mu) \Lambda.$$

Finalmente empleando el teorema de la divergencia, suponiendo que los campos tienden a cero suficientemente rápido en el infinito y considerando que la corriente es conservada $(\partial^\mu J_\mu = 0)$ tenemos que

$$S(\bar{A}) = S(A).$$

2. Teorías topológicas

Como mencionamos en la introducción de este trabajo las teorías topológicas permiten obtener resultados interesantes acerca de las propiedades geométricas de la variedad donde se definen [**13**][**7**][**4**]. Ahora bien, para que una teoría sea topológica debe cumplir las siguientes propiedades [**5**]:

a) Ser invariante bajo transformaciones de coordenadas generales.

b) Ser independiente de la métrica.

A continuación recordaremos cómo cambian los objetos que aparecen en nuestras acciones bajo cambios generales de coordenadas y estableceremos como serán sus derivadas:

1) Si A es un campo escalar sabemos del capitulo 1 que transforma así

$$\bar{A}(\bar{x}) = A(x).$$

Ahora bien por la regla de la cadena la derivada de este campo transformará del siguiente modo

$$\frac{\partial \bar{A}(x)}{\partial \bar{x}^{\mu}} = \frac{\partial A(x)}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}}. \tag{2.17}$$

2) Supongamos A_i un campo vectorial, sabemos que transforma bajo un cambio general de coordenadas de la forma,

$$\bar{A}_{\mu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}} A_{\nu}(x).$$

Luego

$$\frac{\partial \bar{A}_{\mu}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{\nu}} = \frac{\partial A_{\rho}(x)}{\partial x^{\theta}} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\mu}} + A_{\kappa}(x) \frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial \bar{x}^{\nu}}. \tag{2.18}$$

Por lo tanto la combinación antisimétrica transforma como un tensor de segundo rango

$$\frac{\partial \bar{A}_{\gamma}}{\partial \bar{x^{\alpha}}} - \frac{\partial \bar{A}_{\alpha}}{\partial \bar{x_{\gamma}}} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\gamma}} \partial_{\mu} A_{\nu} \tag{2.19}$$

3) El elemento de volumen se transforma con un cambio general de coordenadas

$$d^n\bar{x} = det\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right) d^n x. \tag{2.20}$$

4) El símbolo de Levi- Civita cumple con

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n} = det\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \bar{x}^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial \bar{x}^{\nu_2}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial \bar{x}^{\nu_m}} \varepsilon^{\nu_1\nu_2 \ldots \nu_n} \tag{2.21}$$

Probaremos esta propiedad para n=3. En más dimensiones la prueba es similar.

Demostración:

Consideramos a_i^j con i,j=1,..,3 entonces

$$det(a_i^j) = det\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} = a_1^1a_2^2a_3^3 + a_2^1a_3^2a_1^3 + a_3^1a_1^2a_2^3 - a_3^1a_2^2a_1^3 - a_1^1a_3^2a_2^3 - a_2^1a_1^2a_3^3$$

Del modo como fueron arreglados los índices, sólo los subíndices son permutaciones de (123). Estudiemos en detalles estas.

Primero será necesario relacionar los términos del desarrollo del determinante con el símbolo de Levi-Civita del siguiente modo (ver definición de Levi-Civita en el capítulo de notación)

$$\begin{aligned}
&+a_1^1a_2^2a_3^3 = \varepsilon^{123}a_1^1a_2^2a_3^3 \\
&+a_2^1a_3^2a_1^3 = \varepsilon^{123}a_2^1a_3^2a_1^3 = -\varepsilon^{213}a_2^1a_3^2a_1^3 = \varepsilon^{231}a_2^1a_3^2a_1^3 \\
&+a_3^1a_1^2a_2^3 = \varepsilon^{123}a_3^1a_1^2a_2^3 = -\varepsilon^{132}a_3^1a_1^2a_2^3 = \varepsilon^{312}a_3^1a_1^2a_2^3 \\
&-a_3^1a_2^2a_1^3 = -\varepsilon^{123}a_3^1a_2^2a_1^3 = \varepsilon^{132}a_3^1a_2^2a_1^3 = -\varepsilon^{312}a_3^1a_2^2a_1^3 = \varepsilon^{321}a_3^1a_2^2a_1^3 \\
&-a_1^1a_3^2a_2^3 = -\varepsilon^{123}a_1^1a_3^2a_2^3 = \varepsilon^{132}a_1^1a_3^2a_2^3 \\
&-a_2^1a_1^2a_3^3 = -\varepsilon^{123}a_2^1a_1^2a_3^3 = \varepsilon^{213}a_2^1a_1^2a_3^3.
\end{aligned}$$

De aquí tenemos que

$$det(a_i^j) = \varepsilon^{klm}a_k^1a_l^2a_m^3. \tag{2.22}$$

Ahora queremos estudiar la expresión $\varepsilon^{klm}a_k^p a_l^q a_m^r$ con (p q r) una permutación fija de (123), para ello veremos qué hace una permutación de dos índices a la expresión relacionada con el determinante; intercambiaremos q y r

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{klm}a_k^p a_q^r a_m^3 &= a_1^p a_2^r a_3^q + a_2^p a_3^r a_1^q + a_3^p a_1^r a_2^q - a_1^p a_3^r a_2^q - a_2^p a_1^r a_3^q - a_3^p a_2^r a_1^q \\
&= a_1^p a_3^q a_2^r + a_2^p a_1^q a_3^r + a_3^p a_2^q a_1^r - a_1^p a_2^q a_3^r - a_2^p a_3^q a_1^r - a_3^p a_1^q a_2^r \\
&= -\varepsilon^{klm}a_k^p a_l^q a_m^r
\end{aligned}$$

De esto se establece que la diferencia entre una permutación par e impar de la combinación (p q r) es de un signo algebraico. Ahora bien, es fácil probar que para las permutaciones pares obtenemos

$$\varepsilon^{klm}a_k^1 a_l^2 a_m^3 = \varepsilon^{klm}a_k^2 a_l^3 a_m^1 = \varepsilon^{klm}a_k^3 a_l^1 a_m^2 = det(a_j^i),$$

de esta manera tenemos

$$\varepsilon^{klm}a_k^2 a_l^1 a_m^3 = \varepsilon^{klm}a_k^1 a_l^3 a_m^2 = \varepsilon^{klm}a_k^3 a_l^2 a_m^1 = -det(a_j^i),$$

con esto podemos concluir que

$$\varepsilon^{klm}a_k^p a_l^q a_m^r = \varepsilon^{pqr} det(a_i^j)$$

Por otro lado si consideramos un cambio general de coordenadas $\bar{x} = \bar{x}(x)$ y tomamos $a_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$ resultando lo que sigue

$$det\left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\right) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix}$$

Por propiedades del determinante tenemos que $(det(A))^{-1} = det(A^{-1})$, y considerando la transformación inversa

$$\left(det\left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\right)\right)^{-1} = det\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right).$$

Luego

$$\varepsilon^{pqr} = det\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right)\varepsilon^{klm}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m},$$

lo cual concluye la prueba.

2.1. Formulación Lagrangeana de la acción B-F en dimensión 2+1. La teoría B-F junto con la de Chern- Simons [**8**] , que se presenta en la próxima subsección, son ejemplos sencillos e importantes de teorías topológicas. Con estos dos ejemplos podremos ver que estas teorías se caracterízan por que la métrica del espacio-tiempo no tienen influencia en la evolución de los campos, pues de hecho no aparece explícitamente ni en la acción ni en las ecuaciones de movimiento. A continuación demostraremos que la teoría B-F es topológica.

La acción B-F en dimensión 2+1, está dada por la ecuación

$$S_{B-F} = \int d^3x \left(\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu B_\rho + J^\mu_A A_\mu + J^\mu_B B_\mu\right). \tag{2.23}$$

Para este modelo el recorrido de los índices griegos es de 0-2.
Primeramente veamos que esta acción es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas

$$\bar{S}_{B-F} = \int d^3\bar{x}\left(\varepsilon^{\mu\nu\rho}\bar{A}_\mu\partial_\nu\bar{B}_\rho + \bar{J}^\mu_{\bar{A}}\bar{A}_\mu + \bar{J}^\mu_{\bar{B}}\bar{B}_\mu\right)$$

Usando las ecuaciones (1.1) , (2.19) , (2.20) y tomando en cuenta que el tensores B es antisimétrico tenemos la siguiente igualdad

$$\bar{S}_{B-F} = \int d^3x det\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right)\left(\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\delta\partial_\rho B_\eta\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu}\frac{\partial x^\eta}{\partial \bar{x}^\lambda} + J^\nu_A\frac{1}{det\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right)}\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}A_\kappa\frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^\mu} + J^\kappa_B\frac{1}{det\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right)}\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\kappa}B_\nu\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu}\right)$$

además se ha considerado que las corrientes J_A, J_B son tensores mixtos (ver ecuación (1.5)).
Finalmente aplicando la ecuación (2.21) para dimensión 3 obtenemos que

$$\bar{S}_{B-F} = \int d^3x\left(\varepsilon^{\delta\rho\eta}A_\delta\partial_\rho B_\eta + J^\kappa_A A_\kappa + J^\kappa_B B_\kappa\right) = S_{B-F}$$

Por otro lado esta acción es independiente de la métrica, en vista de que no se hizo uso de ninguna en particular para definir el Lagrangeano. De este modo se concluye que la acción B-F es topológica.

Cabe acotar que al igual que la acción de Maxwell, la acción B-F es invariante de calibre (en la próxima subsección examinaremos esto detalladamente para la acción de Chern-Simons, en vista de que la prueba es similar).

A continuación hallamos las ecuaciones de movimiento. Para ello observemos que en este Lagrangiano tenemos dos campos vectoriales, a saber, A y B, por lo cual tendremos dos ecuaciones de movimiento asociadas al sistema, ambas de la forma dada por la ecuación (2.7)

Para el campo A_μ tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\eta} &= \frac{\partial(\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu B_\rho + J_A^\mu A_\mu + J_B^\mu B_\mu)}{\partial A_\eta} \\ &= \varepsilon^{\mu\nu\rho} \delta_\mu^\eta \partial_\nu B_\rho + J_A^\mu \delta_\mu^\eta \\ &= \varepsilon^{\eta\nu\rho} \partial_\nu B_\rho + J_A^\eta, \end{aligned}$$

$$\partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\eta)} \right) = \partial_\lambda \left(\frac{\partial \left(\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu B_\rho + J_A^\mu A_\mu + J_B^\mu B_\mu \right)}{\partial(\partial_\lambda A_\eta)} \right) = 0.$$

De este modo las ecuaciones de movimiento que surgen al variar A_μ son

$$\varepsilon^{\eta\nu\rho} \partial_\nu B_\rho + J_A^\eta = 0. \tag{2.24}$$

Análogamente para el campo B_μ se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_\eta} = \frac{\partial(\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu B_\rho + J_A^\mu A_\mu + J_B^\mu B_\mu)}{\partial B_\eta} = \delta_\mu^\eta J_B^\mu = J_B^\eta,$$

$$\partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda B_\eta)} \right) = \partial_\lambda \left(\frac{\partial \left(\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu B_\rho + J_A^\mu A_\mu + J_B^\mu B_\mu \right)}{\partial(\partial_\lambda B_\eta)} \right) = \partial_\lambda(\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \delta_\nu^\lambda \delta_\rho^\eta) = \varepsilon^{\mu\lambda\eta} \partial_\lambda A_\mu.$$

De este modo las ecuaciones de movimiento para B son

$$-\varepsilon^{\mu\lambda\eta} \partial_\lambda A_\mu + J_B^\eta = 0. \tag{2.25}$$

Finalmente las ecuaciones de movimiento del sistema son

$$\begin{cases} \varepsilon^{\eta\nu\rho}\partial_\nu B_\rho = -J_A^\eta, \\ \varepsilon^{\eta\lambda\mu}\partial_\lambda A_\mu = -J_B^\eta. \end{cases}$$

2.2. Formulación Lagrangeana de la acción Chern- Simons. La expresion matematica para esta acción viene dada por la expresión

$$S = \int (\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda + kA_\mu J^\mu). \tag{2.26}$$

La prueba de que esta teoría es topológica es análoga a la presentada para la acción B-F.

Ahora nos interesa probar que la acción de Chern- Simons es invariante bajo transfomaciones de calibre. Por lo cual si consideramos un cambio similar al usado en la ecuación (2.16)

$$\bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Upsilon,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} S(\bar{A}) &= \int d^3x(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\bar{A}_\mu\partial_\nu\bar{A}_\lambda + k\bar{A}_\mu J^\mu) \\ &= \int d^3x(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}(A_\mu + \partial_\mu\Upsilon)\partial_\nu(A_\lambda + \partial_\lambda\Upsilon) + k(A_\mu + \partial_\mu\Upsilon)J^\mu) \\ &= \int d^3x(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}(\underline{A_\mu\partial_\nu A_\lambda} + A_\mu\partial_\nu\partial_\lambda\Upsilon + \partial_\mu\Upsilon\partial_\nu A_\lambda + \partial_\mu\Upsilon\partial_\nu\partial_\lambda\Upsilon) + k(\underline{A_\mu J^\mu +}\partial_\mu\Upsilon J^\mu)) \\ &= S(A) + \int d^3x(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}(\cancelto{0}{A_\mu\partial_\nu\partial_\lambda\Upsilon} + \partial_\mu\Upsilon\partial_\nu A_\lambda) + \int d^3x\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\cancelto{0}{\partial_\mu\Upsilon\partial_\nu\partial_\lambda\Upsilon} + k\int d^3x(\partial_\mu\Upsilon)J^\mu, \end{aligned}$$

pero la contracción de un tensor simétrico con uno antisimétrico es cero, por lo cual los términos del tipo $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu\partial_\nu\Upsilon$ se anulan. Queda así

$$S(\bar{A}) = S(A) + \int d^3x(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu\Upsilon\partial_\nu A_\lambda) + k\int d^3x(\partial_\mu\Upsilon)J^\mu,$$

además

$$\partial_\nu(\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu\Upsilon A_\lambda) = \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu\Upsilon\partial_\nu A_\lambda + \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu\partial_\mu\Upsilon A_\lambda,$$

y

$$\partial_\mu(\Upsilon J^\mu) = \Upsilon\partial_\mu(J^\mu) + \partial_\mu(\Upsilon)J^\mu.$$

Luego

$$S(\bar{A}) = S(A) + \int d^3x \cancelto{0}{\frac{1}{2}\partial_j(\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu\Upsilon A_\lambda)} - \cancelto{0}{\int d^3x \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu\partial_\mu\Upsilon A_\lambda} + k\int d^3x \cancelto{0}{\partial_\mu(\Upsilon J^\mu)} - k\cancelto{0}{\int d^3x \Upsilon\partial_\mu(J^\mu)},$$

el tercer término es nulo porque hay una contracción de un tensor simétrico con uno antisimétrico. El cuarto término es cero porque se asume que la corriente es conservada, por lo cual $\partial_\mu(J^\mu) = 0$. El segundo y quinto término son nulos al aplicar el teorema de Gauss con las condiciones de contorno apropiadas (los campos se anulan "suficientemente rápido en el infinito").

Finalmente se tiene

$$S(\bar{A}) = S(A).$$

Ahora vamos a obtener las ecuaciones de movimiento. Necesitamos según la ecuación (2.7) las siguientes derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\eta} &= \frac{\partial(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda + kA_\mu J^\mu)}{\partial A_\eta} \\
&= \delta^\eta_\mu\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda + k\delta^\eta_\mu J^\mu \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\eta\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda + kJ^\eta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\eta)} &= \frac{\partial(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda + kA_\mu J^\mu)}{\partial(\partial_\rho A_\eta)} \\
&= \delta^\rho_\nu\delta^\eta_\lambda\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\rho\eta}A_\mu.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\eta} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\eta)} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda + kJ^\eta - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\rho\eta}\partial_\rho A_\mu \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\rho\eta}\partial_\rho A_\mu + (\frac{1}{2}\varepsilon^{\eta\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda + kJ^\eta),\end{aligned}$$

pero $\varepsilon^{\mu\rho\eta} = -\varepsilon^{\eta\rho\mu}$, y haciendo $\nu = \rho$ y $\lambda = \mu$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\eta} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\eta)} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\eta\rho\mu}\partial_\rho A_\mu + \frac{1}{2}\varepsilon^{\eta\rho\mu}\partial_\rho A_\mu + kJ^\eta \\ &= \varepsilon^{\eta\rho\mu}\partial_\rho A_\mu + kJ^\eta \\ &= 0.\end{aligned}$$

Con la métrica euclídea esta última expresión es igual a

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -k\vec{J}. \tag{2.27}$$

Observe que esta última ecuación es formalmente idéntica a la ecuación fundamental de la magnetostatica: La ley de Ampere, en la próxima sección usaremos este hecho.

3. Acción On-Shell

Para integrar las ecuaciones de movimiento de la teoría B-F y la de Chern- Simons nos será util el siguiente teorema [**6**].

TEOREMA 2.1. *Sea G un campo vectorial. Entonces si*

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_x \cdot \vec{G} &= d(\vec{x}) \\ \vec{\nabla}_x \times \vec{G} &= \vec{c}(\vec{x}),\end{aligned}$$

se tiene que G se puede escribir como

$$\vec{G}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}_x \left(\int \frac{d(\vec{x'})dv(\vec{x'})}{4\pi R} \right) + \vec{\nabla}_x \times \left(\int \frac{c(\vec{x'})dv(\vec{x'})}{4\pi R} \right), \tag{2.28}$$

donde $R = \mid \vec{x} - \vec{x'} \mid$ Este resultado establece que la divergencia $d(\vec{x})$ y el rotor $\vec{c}(\vec{x})$ de G son independientes, y que el campo G puede descomponerse en términos de estas cantidades. El primer término de la descomposición es un gradiente (la parte longitudinal de G). El segundo término es un rotor (la parte transversa).

En nuestro caso, sabemos del campo $\vec{A}(\vec{x})$ que (según la ecuación 2.27)

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -k\vec{J}.$$

Además podemos suponer que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = f(x),$$

con f una función arbitraria. Utilizando el Teorema 2.1 se tiene entonces

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}_x \left(\int \frac{f(\vec{x'}) dv(\vec{x'})}{4\pi R} \right) - \vec{\nabla}_x \times \left(\int \frac{k\vec{J}(\vec{x'}) dv(\vec{x'})}{4\pi R} \right).$$

Definamos $\Upsilon = \int \frac{f(\vec{x}) dv(\vec{x'})}{4\pi R}$. De este modo

$$(A(\vec{x}))^i = (-\vec{\nabla}_x \Upsilon)^i - \left(\vec{\nabla}_x \times \int dv(\vec{x'}) \frac{k\vec{J}(\vec{x'})}{4\pi R} \right)^i = -\partial_i \Upsilon - k\varepsilon^{ijk} \int dv(\vec{x'}) \partial_j \frac{J_{k(\vec{x'})}}{4\pi R},$$

pero $J^k(\vec{x'})$ puede salir del rotor porque no depende de $\vec{x}$

$$(A(\vec{x}))^i = -\partial_i \Upsilon - k \int dv(\vec{x'}) \frac{J_k(\vec{x'})}{4\pi} \left(\varepsilon^{ijk} \partial_j \frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x'} \mid} \right)$$

Necesitaremos

$$\partial_j \left(\frac{1}{\mid \vec{x} - \vec{x'} \mid} \right) = \frac{\partial(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x'}|})}{\partial x_j} = -\frac{(x_j - x'_j)}{R^3},$$

donde hemos definido $\hat{R} = \frac{\vec{x} - \vec{x'}}{R}$. Luego

$$(A(\vec{x}))^i = k\varepsilon^{ijk} \int dv(\vec{x'}) \frac{(x_j - x'_j) J^k(\vec{x'})}{4\pi R^3} - \partial_i \Upsilon.$$

Finalmente la solución de la ecuación de movimiento viene dada en la forma de

$$\vec{A}(\vec{x}) = k \int \frac{\vec{J}(\vec{x'}) \times \hat{R}}{4\pi R^2} dv(\vec{x'}) - \vec{\nabla}\Upsilon. \tag{2.29}$$

Para el cálculo de la acción on-shell, el término longitudital $\vec{\nabla}\Upsilon$ no contribuye, pues se trata de una transformación de calibre.

Ahora consideremos la corriente

$$\vec{J}(\vec{x}) = \int_{c_1} d\vec{x}' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \tag{2.30}$$

donde c_1 es una curva cerrada. Con esto la ecuación (2.29) queda como sigue

$$\vec{A}(\vec{x}) = -k \int \frac{\int_{c_1} d\vec{x'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x'}) \times \hat{R}}{4\pi R^2} dv(\vec{x'}). \tag{2.31}$$

Al sustituir el campo $\vec{A}(x)$ en la acción obtenemos la acción *on shell* que viene dada en la forma

$$S_{os} = -\frac{k^2}{8\pi} \oint_{c_1} dx'^i \oint_{c_1} dx^j \varepsilon^{ijk} \frac{(\hat{R})^k}{R^2}. \tag{2.32}$$

Para interpretar esta expresión consideremos el caso general en el cual las integrales de línea corresponden a dos curvas distintas. Tendremos entonces la siguiente expresión

$$S_{os} = -\frac{k^2}{8\pi} \oint_{c_1} dx'^i \oint_{c_2} dx^j \varepsilon^{ijk} \frac{(\hat{R})^k}{R^2}. \tag{2.33}$$

A continuación intercambiaremos las integrales, en vista de que se efectúan en variables distintas, y consideraremos la siguiente definición $c^j = \oint_{c_1} dx'^i \varepsilon^{ijk} \frac{(\hat{R})^k}{R^2}$ nos queda así

$$\begin{aligned} S_{os} &= -\frac{k^2}{8\pi} \oint_{c_2} d^j x \oint_{c_1} d^i x' \varepsilon^{ijk} \frac{(\hat{R})^k}{R^2} \\ &= -\frac{k^2}{8\pi} \oint_{c_2} dx'^j c^j. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Por el teorema de Stokes sabemos que

$$\oint_c \vec{c} \cdot \vec{dl} = \int_s \vec{ds} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{c}).$$

En notación de componentes este teorema se escribe como sigue

$$\int_c c^i dl^i = \int_s ds^i \varepsilon^{ijk} \partial_j c_k.$$

Aplicando este resultado al caso que estamos trabajando

$$\begin{aligned} S_{os} &= -\frac{k^2}{8\pi} \int_{s_2} ds_x^i \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\oint_{c_1} dx'^m \varepsilon^{mkl} \frac{(\hat{R})^l}{R^2} \right) \\ &= -\frac{k^2}{8\pi} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{mkl} \int_{s_2} ds_x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\oint_{c_1} dx'^m \frac{(\hat{R})^l}{R^2} \right). \end{aligned}$$

Utilizaremos que $\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmk} = \delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l$, obteniendo

$$\begin{aligned} S_{os} &= -\frac{k^2}{8\pi} (\delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l) \int_{s_2} ds_x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\oint_{c_1} dx'^m \frac{(\hat{R})^l}{R^2} \right). \\ &= -\frac{k^2}{8\pi} \int_{s_2} ds_x^i \oint_{c_1} dx'^j \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{(\hat{R})^i}{R^2} + \frac{k^2}{8\pi} \int_{s_2} ds_x^i \oint_{c_1} dx'^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{(\hat{R})^j}{R^2}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Pero en esta expresión podemos reemplazar $\frac{\partial}{\partial x^j}$ por $-\frac{\partial}{\partial x'^j}$ con lo cual

$$S_{os} = \underbrace{-\frac{k^2}{8\pi} \int_{s_2} ds_x^i \oint_{c_1} dx'^j \left(-\frac{\partial}{\partial x'^j} \right) \frac{(\hat{R})^i}{R^2}}_{1} - \underbrace{\frac{k^2}{8\pi} \int_{s_2} ds_x^i \oint_{c_1} dx'^i \left(-\frac{\partial}{\partial x'^j} \right) \frac{(\hat{R})^j}{R^2}}_{2}.$$

El primer término puede reescribirse como

$$-\frac{k^2}{8\pi} \int_{s2} \vec{d}s_x \cdot \oint_{c_1} d\vec{x}' \vec{\bigtriangledown} \left(\frac{(\hat{R})}{R^2} \right),$$

considerando que el gradiente de una integral de línea sobre una curva cerrada es nula la acción *on shell* queda del siguiente modo

$$S_{os} = \frac{k^2}{8\pi} \int_{s_2} ds_x^i \oint_{c_1} dx'^i \frac{\partial}{\partial x'^j} \frac{(\hat{R})^j}{R^2}.$$

A continuación usaremos la siguiente igualdad

$$\frac{\partial}{\partial x'^j} \frac{(\hat{R})^j}{\parallel R \parallel^2} = -4\pi \delta^3(\vec{x'} - \vec{x}),$$

con lo que

$$S_{os} = \frac{-k^2}{2} \int_{s_2} ds_x^i \oint_{c_1} dx'^i \delta^3(\vec{x'} - \vec{x}). \tag{2.36}$$

Según la ecuación (2.36) la curva c_1 debe intersectar la superficie bordeada por c_2 para que la delta contribuya. De este modo, la acción *on shell* mide el anudamiento entre las curvas. Esta fórmula corresponde al número de Gauss [**12**]. En el capítulo 4 volveremos sobre la interpretación de este invariante.

Para el caso que obtuvimos inicialmente (ecuación 2.32) $c_1 = c_2$, por lo cual la acción no está bien definida, en vista de que el denominador se anula en infinitas ocasiones. Este problema se puede solucionar formando una nueva curva que se obtiene de la original trasladándola, siguiendo alguna prescripción. Claramente el resultado dependerá de la prescripción.

Capítulo 3

1. Formalismo Hamiltoniano

Las ecuaciones de Euler Lagrange que obtuvimos a partir del principio variacional, si el Lagrangeano es cuadrático en las derivadas de los campos, serán ecuaciones diferenciales de segundo orden. Esto es así, por ejemplo: en los casos de las teorías de Maxwell y Klein-Gordon. La formulación Hamiltoniana surge como una reformulación de la mecánica clásica y de la teoría clásica de campos en términos de ecuaciones de primer orden.

En física contemporánea, sin embargo, esta reducción del orden es menos importante que el hecho de que la formulación Hamiltoniana o canónica, establece un puente para la cuantización de las teorías físicas. En esta sección resumiremos el formalismo Hamiltoniano para el caso de teorías de campo clásicas usuales.

Por simplicidad, consideraremos el caso en el que la teoría contiene un único campo $\theta(x)$. El paso al caso de múltiples campos es inmediato.

Consideremos una densidad Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, \vec{\nabla}\theta). \tag{3.1}$$

Se define el momento conjugado

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}(\vec{x}, t)}. \tag{3.2}$$

Supondremos que la ecuación (3.2) permite despejar "la velocidad" $\dot{\theta}$ en función de θ y π:

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta, \pi), \tag{3.3}$$

si esto ocurre, se dice que el Lagrangeano es *regular*, en caso contrario, es *singular*.
El espacio definido por θ y π se llama *espacio de fases*, además las variables θ y π son independientes.

Definamos la *densidad Hamiltoniana*

$$\mathcal{H}(\theta,\pi) \;=\; \pi\dot{\theta} - \mathcal{L}, \tag{3.4}$$

donde hemos empleado (3.1) para escribir $\dot{\theta}$ en término de θ y π. El Hamiltoniano se define como:

$$H \;=\; \int d^3x\mathcal{H}. \tag{3.5}$$

(Nótese la analogía con la relación entre el Lagrangeano y la densidad Lagrangeana). La expresión (3.4) corresponde a tomar la transformación de Legende [**1**] de la densidad Lagrangeana.

Definiremos también la *derivada funcional* de cualquier funcional del espacio de fases $F[\theta,\pi]$ con respecto a θ y π del modo

$$\frac{\delta F[\theta,\pi]}{\delta\theta(\vec{x},t)} \;=\; \text{lím}\,\varepsilon \longrightarrow 0 \left(\frac{1}{\varepsilon}F[\theta(.,t)+\varepsilon\delta^3(.-\vec{x}),\pi] - F[\theta(.,t),\pi]\right), \tag{3.6}$$

y de modo similar para $\frac{\delta F}{\delta\pi}$. Aqui el punto ”.” indica un argumento espacial arbitrario. Por ejemplo, se tiene que si

$$F[\theta,\pi] = \int d^3\vec{x}\left(\theta^2(\vec{x},t)+\pi^2(\vec{x},t)\right), \tag{3.7}$$

entonces

$$\frac{\delta F}{\delta\pi(\vec{x},t)} \;=\; \int d^3\vec{x}\; 2\pi(\vec{x'},t)\frac{\delta\pi(\vec{x'},t)}{\delta\pi(\vec{x},t)} \tag{3.8}$$

$$\;=\; 2\pi(\vec{x},t). \tag{3.9}$$

La definición (3.6) permite mostrar que la derivada funcional obedece muchas reglas de la derivada ordinaria, por ejemplo la regla de Leibnitz y la regla de la cadena [**3**].

Equipados con estas definiciones, podemos establecer el siguiente resultado:

a)Dadas una densidad Lagrangeana $\mathcal{H}$ como en (3.4), la definición de π (3.2) y de H (3.5), se tiene que las ecuaciones de Euler-Lagrange implican a las ecuaciones canónicas, que son

$$\dot{\theta} = \frac{\delta H}{\delta \pi(\vec{x}, t)}. \tag{3.10}$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta \theta(\vec{x}, t)}. \tag{3.11}$$

b) Recíprocamente, dada una densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}(\theta, \pi)$, si se define la densidad Lagrangeana según:

$$\mathcal{L} = \pi\dot{\theta} - \mathcal{H}, \tag{3.12}$$

se tiene que las ecuaciones canónicas (3.10) y (3.11) implican las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La prueba de este resultado se encuentra en el apéndice A. Puede decirse entonces que las ecuaciones de Euler-Lagrange equivalen a las ecuaciones canónicas.

En el caso de N campos θ_m, m= 1,....,N y una densidad

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\theta_m, \dot{\theta}_m, \vec{\nabla}\theta), \tag{3.13}$$

se definen los momentos

$$\pi_m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_m}, \tag{3.14}$$

el Hamiltoniano

$$H = \int d^3\vec{x}\mathcal{H} = \int d^3x \left(\sum_m \dot{\theta}_n \pi_m - \mathcal{L} \right) \tag{3.15}$$

y las ecuaciones canónicas son 2N ecuaciones de primer orden en el tiempo:

$$\dot{\theta}_m = \frac{\delta H}{\delta \pi_m} \tag{3.16}$$

$$\dot{\pi}_m = -\frac{\delta H}{\delta \theta_m} \tag{3.17}$$

La formulación canónica puede rescribirse en términos de los corchetes de Poisson, definidos como sigue. Sean $\rho[\theta_m, \pi_m]$ y $\gamma[\theta_m, \pi_m]$ dos variables del espacio de fases, la expresión

$$\{\rho(\vec{x}), \gamma(\vec{y})\} = \int d^3z \sum_{m=1} \left(\frac{\delta\rho(\vec{x})}{\delta\theta_m(\vec{z})} \frac{\delta\gamma(\vec{y})}{\delta\pi_m(\vec{z})} - \frac{\delta\rho(\vec{x})}{\delta\pi_m(\vec{z})} \frac{\delta\gamma(\vec{y})}{\delta\theta_m(\vec{z})} \right)$$

se denomina *corchete de Poisson*, de ρ con γ [**3**].

Enumeramos algunas propiedades de los corchetes de Poisson. Sean f, g, h pertenecientes al espacio de fases y a,b,c variables que no están en el espacio de fases, entonces

$$a)\{f, ag + bh\} = a\{f, g\} + \{f, h\}b$$

$$b)\{f, g\} = -\{g, h\}$$

$$c)\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h.$$

En términos de los corchetes de Poisson la dinámica del sistema puede reescribirse como sigue. Dado un funcional $f[\theta_m, \pi_m, t]$, se tiene que

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{3.18}$$

En efecto

$$\dot{f} = \int d^3x \sum_m \left(\frac{\delta f}{\delta\theta_m} \dot{\theta_m} + \frac{\delta f}{\delta\pi_m} \dot{\pi_m} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{3.19}$$

Pero, usando las ecuaciones canónicas se tiene

$$\dot{f} = \int d^3x \sum_m \left(\frac{\delta f}{\delta \theta_m} \frac{\delta H}{\delta \pi_m} - \frac{\delta f}{\delta \pi_m} \frac{\delta H}{\delta \theta_m} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{3.20}$$

$$= \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{3.21}$$

Un caso particular de este resultado lo constituyen las propias ecuaciones canónicas.

Son de importancia los corchetes de Poisson entre las variables canónicas, o corchetes fundamentales

$$\{\theta^p(\vec{x}), \pi^m(\vec{y})\} = \int d^3z \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\delta \theta^p(\vec{x})}{\delta \theta^l(\vec{z})} \frac{\delta \pi^m(\vec{y})}{\delta \pi^l(\vec{z})} - \frac{\delta \theta^p(\delta \vec{x})}{\delta \pi^l(\vec{z})} \frac{\delta \pi^m(\vec{y})}{\delta \theta^l(\vec{z})} \right). \tag{3.22}$$

Como π y θ son campos independientes el segundo término de la ecuación es cero, además [**3**]

$$\frac{\delta \theta^p(\vec{x})}{\delta \theta^l(\vec{z})} = \delta_l^p \delta^3(\vec{x} - \vec{z}). \tag{3.23}$$

$$\frac{\delta \pi^m(\vec{y})}{\delta \pi^l(\vec{z})} = \delta_l^m \delta^3(\vec{y} - \vec{z}). \tag{3.24}$$

Con esto

$$\{\theta^p(\vec{x}), \pi^m(y)\} = \int d^3z \sum_{l=1}^{N} \delta_l^p \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) \delta_l^m \delta^3(\vec{y} - \vec{z}) = \delta_p^m \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.25}$$

En algunos caso ocurre que no se puede despejar todas las velocidades θ_n en función de los momentos π_n. Entonces no se puede hacer la transformación de Legendre, y hay que recurrir a otros métodos. Existen casos importantes que caen en esta categoría, el más notable es el campo de Maxwell. Existen formulaciones que contemplan esta situación, pero sólo las mencionaremos tangencialmente en esta tesis.

1.1. Formulación Hamiltoniana de la teoría de Klein Gordon. La acción de Klein Gordon está dada por

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2). \tag{3.26}$$

Para deducir las ecuaciones de movimiento de Hamilton debemos encontrar los momentos conjugados de acuerdo con la ecuación (3.2). En este caso tendremos un solo momento conjugado porque hay una sola variable θ

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial^0 \phi}. \tag{3.27}$$

Es necesario desglosar la densidad Lagrangiana en su parte temporal y espacial para realizar esta derivada parcial de forma correcta

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi\partial^0\phi + \partial_i\phi\partial^i\phi - m^2\phi^2). \tag{3.28}$$

Entonces la derivada parcial anterior es

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 2(\frac{1}{2}\partial_0\phi) = \partial_0\phi = \dot{\phi}. \tag{3.29}$$

La densidad Hamiltoniana es así

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi\pi - \frac{1}{2}(\pi\pi + \partial_i\phi\partial^i\phi - m^2\phi^2) && (3.30)\\ &= \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2. && (3.31) \end{aligned}$$

Finalmente las ecuaciones de movimiento usando (3.10) y (3.11) será

$$\dot{\phi}(\vec{x}) = \int d^3y \frac{1}{2}\frac{\delta(\pi^2(\vec{y})) + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2(\vec{y})}{\delta\pi} = \pi(\vec{x}), \tag{3.32}$$

$$\dot{\pi} = -\frac{1}{2}\int d^3y \frac{\delta(\pi^2(\vec{y})) + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2(\vec{y})}{\delta\phi} = -m^2\phi + \nabla^2\phi. \tag{3.33}$$

Al comparar con la ecuación (2.9), observamos que se llega a la misma descripción dinámica del sistema por la formulación Hamiltoniana que por la Lagrangeana.

1.2. Formulación Hamiltoniana de la teoría de B-F en dimensión 2+1. Consideremos la siguiente acción (B-F) en dimensión 3 $(2+1)$

$$S_{B-F} = \int d^3x \left(\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu B_\rho + J_A^\mu A_\mu + J_B^\mu B_\mu\right). \tag{3.34}$$

Descompongamos esta acción en espacio tiempo

$$S_{B-F} = \int d^3x \left(\varepsilon^{0ij} A_0 \partial_i B_j + \varepsilon^{i0j} A_i \partial_0 B_j + \varepsilon^{ij0} A_i \partial_j B_o + J_A^0 A_0 + J_B^0 B_0 + J_A^i A_i + J_B^i B_i\right),$$

al usar que

$$\varepsilon^{0ij} = \varepsilon^{ij},$$

y que

$$\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji},$$

tenemos que

$$S_{B-F} = \int d^3x \left(\varepsilon^{ij} A_0 \partial_i B_j + J_A^0 A_0 + J_B^0 B_0 + \varepsilon^{ji} A_i \partial_0 B_j + J_A^i A_i + J_B^i B_i + \varepsilon^{ij} A_i \partial_j B_o\right).$$

Pero

$$\partial_j(\varepsilon^{ij} A_i B_0) = \partial_j(\varepsilon^{ij} A_i) B_0 + \varepsilon^{ij} A_i (\partial_j B_0),$$

con ello

$$S_{B-F} = \int d^3x [\varepsilon^{ij} A_0 \partial_i B_j + J_A^0 A_0 + J_B^0 B_0 + \varepsilon^{ji} A_i \partial_0 B_j + J_A^i A_i + J_B^i B_i + \partial_j(\varepsilon^{ij} A_i B_0) +$$

$$- \partial_j(\varepsilon^{ij} A_i) B_0].$$

Usando el teorema de Gauss y suponiendo que los campos tienden a cero en infinito lo suficientemente rápido tenemos que

$$\int d^3x \partial_j(\varepsilon^{ij} A_i B_0) = 0,$$

con lo cual

$$S_{B-F} = \int d^3x \left(\varepsilon^{ij} A_0 \partial_i B_j + J_A^0 A_0 + J_B^0 B_0 + \varepsilon^{ji} A_i \partial_0 B_j + J_A^i A_i + J_B^i B_i - \partial_j(\varepsilon^{ij} A_i) B_0\right).$$

Como $\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$, se tiene

$$S_{B-F} = \int d^3x \left(\varepsilon^{ij} A_0 \partial_i B_j + J_A^0 A_0 + J_B^0 B_0 + \varepsilon^{ji} A_i \partial_0 B_j + J_A^i A_i + J_B^i B_i + \partial_j(\varepsilon^{ji} A_i) B_0\right).$$

Agrupando de modo conveniente

$$S_{B-F} = \int d^3x (\varepsilon^{ij} \partial_i B_j + J_A^0) A_0 + (\varepsilon^{ji} \partial_j A_i + J_B^0) B_0 + \varepsilon^{ji} A_i \dot{B}_j + J_A^i A_i + J_B^i B_i. \tag{3.35}$$

Recordemos que al hacer la formulación Hamiltoniana se obtuvo la ecuación (3.4)

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\theta} - \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}(\pi)),$$

de este modo

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}(\pi)) = \pi \dot{\theta} - \mathcal{H}.$$

Es importante percatarse de que la acción B-F al descomponerla en espacio y tiempo (ecuación 3.35) tiene un Lagrangeano justamente de la forma indicada arriba, es decir, tiene estructura canónica, lo cual nos permite encontrar el momento conjugado y el Hamiltoniano por simple comparación. Sin embargo existen otros términos en esta acción que no nos son familiares, ya que este Lagrangiano posee restricciones por lo cual para la formulación Hamiltoniana se ha hecho uso del método de los multiplicadores de Lagrange (apéndice B). En este caso, reconocemos

$\lambda_1 = A_0$, con la restricción $h(x) = \varepsilon^{ij} \partial_i B_j + J_A^0$, y
$\lambda_2 = B_0$, con la restricción $g(x) = \varepsilon^{ji} \partial_j A_i + J_B^0$,
$\pi^j = \varepsilon^{ji} A_i$,
$\theta^j = B_j$,

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - A_0(\varepsilon^{ij} \partial_i B_j + J_A^0) - B_0(\varepsilon^{ji} \partial_j A_i + J_B^0), \tag{3.36}$$

con

$$\mathcal{H} = -J^i_A A_i - J^i_B B_i. \tag{3.37}$$

Los campos A_0 y B_0 no son variables dinámicas, es decir, estas no evolucionan en el tiempo. Son los multiplicadores de Lagrange asociados a las ligaduras

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ij}\partial_i B_j + J^0_A &= 0, \\ \varepsilon^{ji}\partial_j A_i + J^0_B &= 0. \end{aligned}$$

En adelante demostraremos usando los corchetes de Poisson que las ecuaciones obtenidas con este Hamiltoniano coinciden con las que ya obtuvimos haciendo variaciones del Lagrangiano, lo cual probará que el Hamiltoniano propuesto en la ecuación (3.36) es correcto.

Para la formulación Hamiltoniana las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{\theta}_i = \frac{\delta H}{\delta \pi_i}, \tag{3.38}$$

$$\dot{\pi}_i = \frac{-\delta H}{\delta \theta_i}. \tag{3.39}$$

Ahora bien, la ecuación (3.18) nos permite determinar la dinámica del sistema en función de los corchetes de Poisson usando los campos A,B y el Hamiltoniano.
Comencemos con el campo A

$$\dot{A}_i(\vec{x}) = \{A_i(\vec{x}), H'\} = \{A_i(\vec{x}), \int d^2y[\mathcal{H} - A_0(\varepsilon^{km}\partial_k B_m + J^0_B) - B_0(\varepsilon^{km}\partial_k A_m + J^0_B)]\}, \tag{3.40}$$

como la integral es una suma continua sale de los corchetes de Poisson

$$\{A_i, H'\} = \int d^2y \underbrace{\{A_i, \mathcal{H}\}}_{1} + \int d^2y \underbrace{\{A_i, -A_0(\varepsilon^{km}\partial_k B_m + J^0_A)\} - B_0(\varepsilon^{km}\partial_k A_m + J^0_B)\}}_{2}. \tag{3.41}$$

Primero desarrollemos la parte 1 de la ecuación (3.41)

$$\{A_i, \mathcal{H}\} = [\{A_i, -J^k_A A_k - J^k_A B_k\}] = \{A_i, -J^k_A A_k\} + \{A_i, -J^k_B B_k\},$$

como J_A^k Y J_B^k no son variables del espacio de fases salen del corchete de Poisson

$$\{A_i, \mathcal{H}\} = -\cancelto{0}{J_A^i\{A_i, A_k\}} - J_B^k\{A_i, B_k\},$$

Por la ecuación (3.25) sabemos que

$$\{\phi^i(\vec{x}), \pi^j(y)\} = \delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}),$$

pero en este caso tenemos $\pi^j = \varepsilon^{jm} A_m$ y $\theta_i = B_i$, así

$$\{\phi_i(\vec{x}), \pi^j(y)\} = \{B_i(\vec{x}), \varepsilon^{jm} A_m(y)\} = \delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}),$$

por lo cual

$$\varepsilon^{ji}\{B_i(\vec{x}), A_m(y)\} = \delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}).$$

Contraemos la igualdad anterior con ε^{jk} para obtener $\{B_i(\vec{x}), A_i(y)\}$:

$$\varepsilon^{jk}\varepsilon^{jm}\{B_i(\vec{x}), A_m(y)\} = \varepsilon^{jk}\delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}),$$

pero $\varepsilon^{jk}\varepsilon^{jm} = \delta_k^m$; así

$$\delta_k^m\{B_i(\vec{x}), A_m(\vec{x})\} = \{B_i(\vec{x}), A_k(\vec{y})\} = \varepsilon^{jk}\delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = \varepsilon^{ik}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}).$$

Por la propiedad (b) de los corchetes de Poisson se tiene

$$\{B_i(\vec{x}), A_k(\vec{y})\} = \varepsilon^{ik}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = -\{A_k(\vec{y}), B_i\vec{x}\},$$

así

$$\{A_i(\vec{x}), B_k\vec{y}\} = \varepsilon^{ik}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}).$$

Finalmente tenemos

$$\{A_i, \mathcal{H}\} = \varepsilon^{ki}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) J_B^k(y). \tag{3.42}$$

Con respecto a la parte 2 de la ecuación (3.41) se tiene. Usando las propiedades de los corchetes de Poisson de manera análoga al caso anterior lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{km}\partial_k(-A_0\{A_i,B_m\} - \cancelto{0}{B_0\{A_i,A_m\}}) - \cancelto{0}{A_0\{A_i,J_A^0\}} - \cancelto{0}{B_0\{A_i,J_B^0\}} &= -A_0\varepsilon^{km}\partial_k(-\varepsilon^{mi}\delta^2(\vec{x}-\vec{y})),\\
&= -A_0\delta_k^i\partial_k\delta^2(\vec{x}-\vec{y}),\\
&= -A_0\partial_i(\delta^2(\vec{x}-\vec{y})),\\
&= -A_0\frac{\partial(\delta^2(\vec{x}-\vec{y}))}{\partial y^i},\\
&= A_0\frac{\partial(\delta^2(\vec{x}-\vec{y}))}{\partial x^i}.
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

Uniendo el resultado de las ecuaciones (3.42) y (3.43) podemos concluir que la ecuación (3.41) queda como

$$\{A_i, H'\} = \int d^2y A_0\frac{\partial(\delta^2(\vec{x}-\vec{y}))}{\partial x^i} + \int d^2y J_B^i(y)\varepsilon^{ki}\delta^2(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\dot{A}_i = \partial_0 A_i = \{A_i, H\} = \partial_i A_0(\vec{x}) + \varepsilon^{ki}J_B^k(\vec{x})$$

Multiplicando por ε^{ip}

$$\varepsilon^{ip}\dot{A}_i = \varepsilon^{ip}\partial_0 A_i(\vec{x}) = \varepsilon^{ip}J_B^j(\vec{x})\varepsilon^{ki} + \varepsilon^{ip}\partial_i A_0(\vec{x}) = -\delta_p^k J_B^j(\vec{x}) + \varepsilon^{ip}\partial_i A_0(\vec{x}) = -J_B^p(\vec{x}) + \varepsilon^{ip}\partial_i A_0(\vec{x}).$$

Luego

$$-\varepsilon^{pi}\partial_0 A_i(\vec{x}) + \varepsilon^{pi}\partial_i A_0(\vec{x}) = -J_B^p(\vec{x}). \tag{3.44}$$

Esta es la componente espacial de la ecuación de movimiento obtenida en la formulación Lagrangiana (ver ecuacion 2.25). Por lo cual el Hamiltoniano obtenido es correcto.

Análogamente para el campo $\vec{B}$

$$-\varepsilon^{pi}\partial_0 B_i(\vec{x}) + \varepsilon^{pi}\partial_i B_0(\vec{x}) = -J_A^p(\vec{x}). \tag{3.45}$$

Cabe acotar que existen dos caminos para obtener las soluciones de las ecuaciones de movimiento de la acción B-F en dimensión 2+1, uno de ellos es usando la ecuaciones (2.24) y (2.25) y el otro es partiendo la ecuaciones (3.44) y (3.45) [**2**]. En este trabajo usaremos el

primer camino, por lo cual tendremos vectores en R^2 y R^3, lo que hará necesario el establecimiento de la siguiente notación:
1) Los vectores pertenecientes a R^2 tendran un subindice 2,
2) Los vectores pertenecientes a R^3 tendran un subindice 3.

Usando la ecuación (2.29), se tiene

$$\vec{A}(\vec{x_3}) = \int \frac{\vec{J_B}(\vec{x'_3}) \times \hat{R}}{4\pi R^2} dv(\vec{x'_3}),$$

$$\vec{B}(\vec{x_3}) = \int \frac{\vec{J_A}(\vec{x'_3}) \times \hat{R}}{4\pi R^2} dv(\vec{x'_3}).$$

Las componentes de estos campos vectoriales estan dadas por

$$(\vec{A}(\vec{x_3}))^\mu = \int \frac{(\vec{J_B}(\vec{x'_3})) \times \hat{R})^\mu}{4\pi R^2} dv(\vec{x'_3}) = \int \frac{\varepsilon^{\mu\nu\lambda} J^\nu_A (\hat{R})^\lambda}{4\pi R^2} dv(\vec{x'_3}), \tag{3.46}$$

$$(\vec{B}(\vec{x_3}))^\mu = \int \frac{(\vec{J_A}(\vec{x'_3}) \times \hat{R})^\mu}{4\pi R^2} dv(\vec{x'_3}) = \int \frac{\varepsilon^{\mu\nu\lambda} J^\nu_B (\hat{R})^\lambda}{4\pi R^2} dv(\vec{x'_3}). \tag{3.47}$$

Supongamos ahora que tenemos las siguientes corrientes en la acción B-F

$$J^\nu_A = \left\{ \begin{array}{ll} \delta^2(\vec{x}_2 - \vec{c}_2), & \nu = 0; \\ o, & \nu = i \end{array} \right\}, \tag{3.48}$$

y

$$J^\nu_B = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \nu = 0; \\ \int_\gamma dy^i \delta^2(\vec{x}_2 - \vec{y}_2), & \nu = i \end{array} \right\}, \tag{3.49}$$

donde γ es una curva cerrada en el espacio 2-dimensional.

A partir de la ecuacion (3.47) y la estructura de las corrientes, se tiene que

$$H' = -\int d^2x J_B^i(\vec{x})B^i(\vec{x}) \tag{3.50}$$

$$= -\int d^2x B^i(\vec{x_3}) \int_\gamma dy_2^i \delta^2(\vec{x}_2 - \vec{y}_2), \tag{3.51}$$

con

$$B^i = \int d^3\vec{x} \left(\frac{\varepsilon^{i0j}\delta^2(\vec{x_2} - \vec{c_2})(\hat{R})^j}{4\pi R^2} \right).$$

Resolvamos esta ecuación

$$B^i = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^2\vec{x} \left(\frac{\varepsilon^{i0j}\delta^2(\vec{x_2} - \vec{c_2})(\vec{R})}{4\pi R^3} \right) \tag{3.52}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^{i0j}(\vec{x}_{(2)} - \vec{c}_{(2)})^j}{((t-t')^2 + \|\vec{x}_{(2)} - \vec{c}_{(2)}\|^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dt \tag{3.53}$$

$$= \frac{\epsilon^{i0j}(\vec{x}_{(2)} - \vec{c}_{(2)})^j}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{((t-t')^2 + \|\vec{x}_{(2)} - \vec{c}_{(2)}\|^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.54}$$

$$= \frac{\epsilon^{i0j}(\vec{x}_{(2)} - \vec{c}_{(2)})^j}{2\pi(\|\vec{x}_{(2)} - \vec{c}_{(2)}\|)^2}. \tag{3.55}$$

Finalmente sustituyendo este valor en el Hamiltoniano tenemos

$$H' = \frac{\varepsilon^{ij}}{2\pi} \int_\gamma dy^i \left(\frac{y^j_{(2)} - c^j_{(2)}}{(\|\vec{y}_{(2)} - \vec{c}_{(2)}\|)^2} \right) \tag{3.56}$$

Suponiendo que el punto $\vec{c}$ coincide con el origen del sistema de referencia, ocurre que $y^j_{(2)} - c^j_{(2)} = r^{(2)}$

$$H' = \int_\gamma \frac{\varepsilon^{12} r^{(2)} dr^{(1)}}{(r^{(1)})^2 + (r^{(2)})^2} + \int_\gamma \frac{\varepsilon^{21} r^{(1)} dr^{(2)}}{(r^{(1)})^2 + (r^{(1)})^2} \tag{3.57}$$

$$= \int_\gamma \frac{(r^{(2)}) dr^{(1)}}{(r^{(1)})^2 + (r^{(2)})^2} + \int_\gamma \frac{-r^{(1)} dr^{(2)}}{(r^{(1)})^2 + (r^{(1)})^2} \tag{3.58}$$

$$\tag{3.59}$$

Obsérvese que

$$d(\arctan(\frac{r^{(2)}}{r^{(1)}})) = \frac{\partial \arctan \frac{r^{(2)}}{r^{(1)}}}{\partial r^{(1)}} dr^{(1)} + \frac{\partial \arctan \frac{r^{(2)}}{r^{(1)}}}{\partial r^{(1)}} dr^{(2)} \tag{3.60}$$

$$= \frac{1}{1 + [\frac{r^{(2)}}{r^{(1)}}]^2} \left[\frac{-r^{(2)} dr^{(1)}}{(r^{(2)})^2} + \frac{dr^{(2)}}{r^{(1)}} \right] \tag{3.61}$$

$$= \frac{(r^{(1)})^2}{(r^{(1)})^2 + (r^{(2)})^2} \left[\frac{r^{(1)} dr^{(2)} - r^{(2)} dr^{(2)}}{(r^{(1)})^2} \right] \tag{3.62}$$

$$= \frac{r^{(1)} dr^{(2)} - r^{(2)} dr^{(2)}}{(r^{(1)})^2 + (r^{(2)})^2}. \tag{3.63}$$

De este modo

$$H'_{os}(B) = -\frac{1}{2\pi} \int_\gamma d \arctan\left(\frac{r^{(2)}}{r^{(1)}}\right) = -\frac{1}{2\pi} \int_\gamma d\theta \tag{3.64}$$

La última integral deja ver que el Hamiltoniano *on shell* , mide el ángulo subtendido por la curva γ, medido desde el punto $\vec{x}_0$. Por lo cual obtenemos el siguiente invariante topológico

$$H'_{os}(B) = \begin{cases} -1, & x_0 \epsilon \Omega \\ 0, & x_0 \epsilon \Omega \end{cases}$$

Con Ω la superficie cuyo borde coincide con la curva γ

Una representación de esta situación se muestra en las siguientes figuras. En ambos casos consideraremos un sistema de referencia con origen en el punto x_0

Para la figura 3.1 el Hamiltoniano es 1 (o -1, dependiendo de la orientación de la curva), en vista de que el punto x_o está dentro de la curva γ, por lo cual el ángulo subtendido por ella será un múltiplo de 2π (ver figura 3.2)

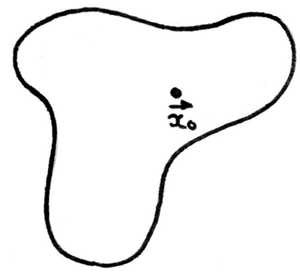

FIGURA 3.1

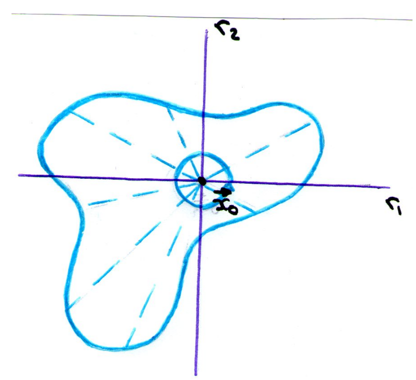

FIGURA 3.2

FIGURA 3.3

En el caso de la figura 3.3 el Hamiltoniano vale 0 debido a que el punto x_0 esta fuera de curva, por lo tanto una parte de ella será recorrido subtendiendo ángulos positivos (ver parte rosada de la curva de la figura 3.4) y la otra parte de la curva barrerá ángulos negativos (ver parte azul de la curva representada en la figura 3.4) de tal modo que al finalizar el recorrido completo γ los ángulos positivos y negativos se cancelan (ver figura 3.4).

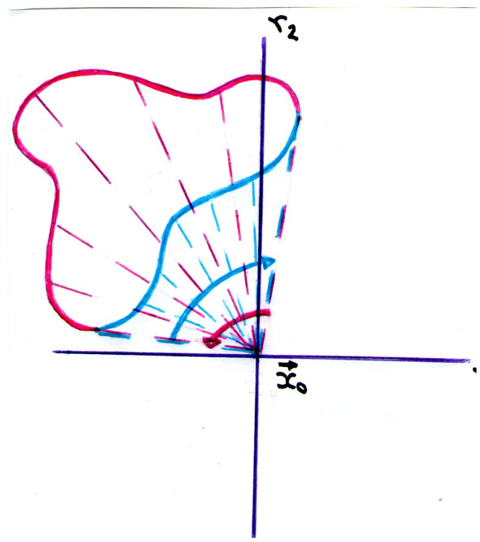

FIGURA 3.4

Capítulo 4

En este capítulo nos dispondremos a estudiar la acción B-F en dimensión 3 + 1 según las formulaciones Lagrangeana y Hamiltoniana. Obtendremos las ecuaciones de movimiento explícitamente de acuerdo a unas corrientes dadas y por último determinaremos el Hamiltoniano *on shell* para obtener expresiones para invariantes topológicos.

1. Formulación Lagrangiana de la acción B-F en dimensión 3+1

La acción B-F en dimensión 4 viene dada por la expresión

$$S_{B-F} = \int d^4x 2k_1(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}B_{\mu\nu}\partial_\lambda A_\rho) + k_2(J^\mu A_\mu) + k_3(\mathcal{K}^{\mu\nu}B_{\mu\nu}). \tag{4.1}$$

Hallemos las ecuaciones de movimiento. Primero para al campo vectorial A, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\eta} &= \frac{\partial(2k_1(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}B_{\mu\nu}\partial_\lambda A_\rho) + k_2(J^\mu A_\mu) + k_3(\mathcal{K}^{\mu\nu}B^{\mu\nu}))}{\partial A_\eta} \\
&= \delta^\eta_\mu(k_2 J^\mu) \\
&= k_2 J^\eta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\theta A_\eta)} &= \frac{\partial(2k_1(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}B_{\mu\nu}\partial_\lambda A_\rho) + k_2(J^\mu A_\mu) + k_3(\mathcal{K}^{\mu\nu}B^{\mu\nu}))}{\partial(\partial_\theta A_\eta)} \\
&= 2k_1\delta^\theta_\lambda\delta^\eta_\rho\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}B_{\mu\nu} \\
&= 2k_1\varepsilon^{\mu\nu\theta\eta}B_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Así

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\eta} - \partial_\theta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\theta A_\eta)} \right) = k_2 J^\eta - 2k_1 \varepsilon^{\mu\nu\theta\eta} \partial_\theta B_{\mu\nu} = 0, \tag{4.2}$$

en consecuencia

$$2k_1 \varepsilon^{\eta\theta\mu\nu} \partial_\theta B_{\mu\nu} = -k_2 J^\eta. \tag{4.3}$$

Luego para el campo tensorial B, tendremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{\eta\beta}} &= \frac{\partial(2k_1(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu} \partial_\lambda A_\rho) + k_2(J^\mu A_\mu) + k_3(\mathcal{K}^{\mu\nu} B^{\mu\nu})))}{\partial B_{\eta\beta}} \\
&= \delta^\eta_\mu \delta^\beta_\nu (2k_1 \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho + k_3 \mathcal{K}^{\mu\nu}) \\
&= (2k_1 \varepsilon^{\eta\beta\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho + k_3 \mathcal{K}^{\eta\beta}),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\theta B_{\eta\beta})} = 0.$$

Finalmente

$$2k_1 \varepsilon^{\eta\beta\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho = -k_3 \mathcal{K}^{\eta\beta}. \tag{4.4}$$

2. Invariancia de calibre

A continuación demostraremos que la acción B-F en dimensión 4 es invariante bajo transformaciones del tipo

$$B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu,$$

$$
\begin{aligned}
S(B') &= \int d^4x(2k_1\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}B'_{\mu\nu}\partial_\lambda A_\rho + k_2J^\mu A_\mu + k_3\mathcal{K}^{\mu\nu}B'_{\mu\nu}) \\
&= \int d^4x(2k_1\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(B_{\mu\nu}+\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu)\partial_\lambda A_\rho + k_2J^\mu A_\mu + k_3\mathcal{K}^{\mu\nu}(B_{\mu\nu}+\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu)) \\
&= \int d^4x(\underline{2k_1\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}B_{\mu\nu}\partial_\lambda A_\rho} + 2k_1\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu)\partial_\lambda A_\rho + \underline{k_2J^\mu A_\mu} \\
&+ \underline{k_3\mathcal{K}^{\mu\nu}B_{\mu\nu}} + k_3\mathcal{K}^{\mu\nu}(\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu)),
\end{aligned}
$$

con esto

$$S(B') = S(B) + \int d^4x(2k_1\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu)\partial_\lambda A_\rho + k_3\mathcal{K}^{\mu\nu}(\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu)).$$

Por la regla de derivación del producto tenemos los siguintes resultados

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu)\partial_\lambda A_\rho = \partial_\lambda(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu)A_\rho) - \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\lambda(\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu)A_\rho$$

$$\mathcal{K}^{\mu\nu}(\partial_\mu v_\nu) = \partial_\mu(\mathcal{K}^{\mu\nu}v_\nu) - (\partial_\mu\mathcal{K}^{\mu\nu})v_\nu$$

$$\mathcal{K}^{\mu\nu}(\partial_\nu v_\mu) = \partial_\nu(\mathcal{K}^{\mu\nu}v_\mu) - (\partial_\nu\mathcal{K}^{\mu\nu})v_\mu$$

en consecuencia

$$
\begin{aligned}
S(B') &= S(B) + \int d^4x2k_1\partial_\lambda(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu)A_\rho) - 2k_1\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\lambda(\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu)A_\rho \\
&+ \int d^4xk_3\partial_\mu(\mathcal{K}^{\mu\nu}v_\nu) - \int d^4x(\partial_\mu\mathcal{K}^{\mu\nu})v_\nu + \int d^4xk_3\partial_\nu(\mathcal{K}^{\mu\nu}v_\mu) - \int d^4x(\partial_\nu\mathcal{K}^{\mu\nu})v_\mu.
\end{aligned}
$$

La segunda integral es igual a cero porque en ambos términos hay una contracción de un tensor simétrico($\partial_\lambda\partial_\mu$ y $\partial_\lambda\partial_\nu$) con uno antisimétrico ($\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$), con esto la acción queda como

$$
\begin{aligned}
S(B') &= S(B) + \int d^4x2k_1\partial_\lambda(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu)A_\rho) + \int d^4xk_3\partial_\mu(\mathcal{K}^{\mu\nu}v_\nu) - \int d^4x(\partial_\mu\mathcal{K}^{\mu\nu})v_\nu \\
&+ \int d^4xk_3\partial_\nu(\mathcal{K}^{\mu\nu}v_\mu) - \int d^4x(\partial_\nu\mathcal{K}^{\mu\nu})v_\mu.
\end{aligned}
$$

La tercera y quinta integral son nulas porque la corriente es conservada

$$(\partial_\nu \mathcal{K}^{\mu\nu}) = (\partial_\mu \mathcal{K}^{\mu\nu}) = 0$$

así

$$S(B') = S(B) + \int d^4x 2k_1 \partial_\lambda(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu)A_\rho) + \int d^4x k_3 \partial_\mu(\mathcal{K}^{\mu\nu} v_\nu) + \int d^4x k_3 \partial_\nu(\mathcal{K}^{\mu\nu} v_\mu)$$

Ahora usamos el teorema de la divergencia

$$S(B') = S(B) + \int_{\partial\Omega_\lambda} d\Sigma_\lambda 2k_1(\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu)A_\rho) + \int_{\partial\Omega_\mu} d\Sigma_\mu k_3(\mathcal{K}^{\mu\nu} v_\nu) + \int_{\partial\Omega_\nu} d\Sigma_\nu k_3(\mathcal{K}^{\mu\nu} v_\mu).$$

Asumiendo que los campos tiende a cero suficientemente rápido, entonces finalmente tenemos que

$$S(B') = S(B).$$

Esta acción también es invariante bajo transformaciones de calibre asociadas al campo A_i

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Upsilon,$$

al igual que la acción B-F en dimensión 2+1.

3. Formulación Hamiltoniana de la acción B-F en dimensión 3+1

Descompongamos la acción B-F en espacio tiempo

$$\begin{aligned}
S_{B-F} &= \int d^4x(2k_1\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu}\partial_\lambda A_\rho + k_2 J^\mu A_\mu + k_3 \mathcal{K}^{\mu\nu} B_{\mu\nu}) \\
&= \int d^4x(2k_1\varepsilon^{0ijk} B_{0i}\partial_j A_k + 2k_1\varepsilon^{iojk} B_{io}\partial_j A_k + 2k_1\varepsilon^{ij0k} B_{ij}\partial_o A_k + 2k_1\varepsilon^{ijk0} B_{ij}\partial_k A_0 \\
&+ k_2 J^o A_0 + k_3\mathcal{K}^{0i} B_{0i} + k_3\mathcal{K}^{i0} B_{0i} + k_3\mathcal{K}^{ij} B_{ij} + k_2 J^i A_i).
\end{aligned}$$

Reordenando la integral y usando que los tensores B y K son antisimétricos

$$
\begin{aligned}
S_{B-F} &= \int d^4x(2k_1\varepsilon^{ij0k}B_{ij}\dot{A}_k + 4k_1\varepsilon^{0ijk}B_{0i}\partial_j A_k + 2k_1\varepsilon^{ijk0}B_{ij}\partial_k A_0 \\
&+ k_2 J^i A_i + k_2 J^0 A_0 + 2k_3\mathcal{K}^{i0}B_{io} + k_3\mathcal{K}^{ij}B_{ij}).
\end{aligned}
$$

Pero $\partial_k(B_{ij}A_o) = \partial_k(B_{ij})A_0 + B_{ij}\partial_k(A_0)$, por lo cual

$$
\begin{aligned}
S_{B-F} &= \int d^4x(2k_1\varepsilon^{ij0k}B_{ij}\dot{A}_k + 4k_1\varepsilon^{0ijk}B_{0i}\partial_j A_k + 2k_1\varepsilon^{ijk0}\partial_k(B_{ij}A_0) \\
&- 2k_1\varepsilon^{ijk0}A_0\partial_k B_{ij} + k_2 J^i A_i + k_2 J^0 A_0 + 2k_3\mathcal{K}^{i0}B_{io} + k_3\mathcal{K}^{ij}B_{ij}).
\end{aligned}
$$

Asumiendo que los campos tienden a cero suficientemente rápido en el infinito y aplicando el teorema de Gauss

$$
\int d^4x 2k_1\varepsilon^{ijk0}\partial_k(B_{ij}A_0) = 0,
$$

en consecuencia

$$
\begin{aligned}
S_{B-F} &= \int d^4x(2k_1\varepsilon^{ij0k}B_{ij}\dot{A}_k + 4k_1\varepsilon^{0ijk}B_{0i}\partial_j A_k - 2k_1\varepsilon^{ijk0}A_0\partial_k B_{ij} \\
&+ k_2 J^i A_i + k_2 J^0 A_0 + 2k_3\mathcal{K}^{i0}B_{io} + k_3\mathcal{K}^{ij}B_{ij}).
\end{aligned}
$$

Agrupando términos convenientemente

$$
\begin{aligned}
S_{B-F} &= \int d^4x[2k_1\varepsilon^{ij0k}B_{ij}\dot{A}_k + B_{0i}(4k_1\varepsilon^{0ijk}\partial_j A_k + 2k_3\mathcal{K}^{0i}) + A_0(k_2 J^o - 2k_1\varepsilon^{ijko}\partial_k B_{ij}) \\
&+ k_2 J^i A_i + k_3\mathcal{K}^{ij}B_{ij}]. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

A continuación hallaremos las ecuaciones de movimiento por la formulación Hamiltoniana utilizando los corchetes de Poisson. Dado que el término que tiene la derivada temporal multiplicado por el momento conjugado está elevado a la unidad, esta acción tiene ya estructura canónica, en consecuencia, en este caso por comparación obtenemos que (Apéndice B):

a)El campo es :

$$
\phi_k = A_k.
$$

b)El momento conjugado es:

$$\pi^k = 2k_1\varepsilon^{ij0k}B_{_{ij}}.$$

c)El corchetes de Poisson fundamentales no trivial es:

$$\{B_{rh}(\vec{x})\, A_l(\vec{y})\} = -\frac{1}{4k_1}\varepsilon^{lrh}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}).$$

d)El Hamiltoniano es:

$$H = -\int d^3y[B_{0i}(4k_1\varepsilon^{0ijk}\partial_j A_k + 2k_3\mathcal{K}^{0i}) + A_0(k_2J^o - 2k_1\varepsilon^{ijko}\partial_k B_{ij}) + (k_2J^iA_i + k_3\mathcal{K}^{ij}B_{ij})].$$

e)Las ligaduras son:

$$1)(k_2J^o - 2k_1\varepsilon^{ijko}\partial_k B_{ij}) = 0,$$

$$2)(4k_1\varepsilon^{0ijk}\partial_j A_k + 2k_3\mathcal{K}^{0i}) = 0.$$

Para determinar las ecuaciones dinámicas, consiredemos primero

$$\begin{aligned}\{B_{hr}(\vec{x}), H(\vec{y})\} &= \{B_{hr}(\vec{x}), -\int d^3y[A_0(k_2J^o - 2k_1\varepsilon^{ijko}\partial_k B_{ij}) + B_{0i}(4k_1\varepsilon^{0ijk}\partial_j A_k \\ &+ 2k_3\mathcal{K}^{0i}) + k_2J^iA_i + k_3\mathcal{K}^{ij}B_{ij}]\}.\end{aligned}$$

Usando las propiedades generales de los corchetes de Poisson expuestas en el capítulo 3 esto se reduce a

$$\begin{aligned}
\{B_{hr}(\vec{x}), H(\vec{y})\} &= \{B_{hr}(\vec{x}), -\int d^3y(k_2 J^i A_i)\} + \{B_{hr}(\vec{x}), -\int d^3y 4k_1 \varepsilon^{0ijk}\partial_j A_k B_{0i}\} \\
&= -\int d^3y k_2 J^i \{B_{hr}(\vec{x}), A_i(\vec{y})\} - \int d^3y (4k_1)\varepsilon^{0ijk} B_{oi}\partial_j \{B_{hr}(\vec{x}), A_k(\vec{y})\} \\
&= -\int d^3y k_2 J^i(y) \left(-\frac{\varepsilon^{ihr}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})}{4k_1}\right) - \int d^3y (4k_1)\varepsilon^{ijk} B_{0i} \frac{\partial}{\partial y^i}\left(-\frac{\varepsilon^{khr}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})}{4k_1}\right) \\
&= \frac{k_2\varepsilon^{ihr}J^i(\vec{x})}{4k_1} + \varepsilon^{kij}\varepsilon^{khr}\int d^3y B_{0i}\frac{\partial(\delta^3(\vec{x}-\vec{y}))}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^j} \\
&= \frac{k_2\varepsilon^{ihr}J^i(\vec{x})}{4k_1} - \varepsilon^{kij}\varepsilon^{khr}\frac{\partial}{\partial x^j}\int d^3y B_{oi}(\vec{y})\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\
&= \frac{k_2\varepsilon^{ihr}J^i(\vec{x})}{4k_1} - \varepsilon^{kij}\varepsilon^{khr}\frac{\partial}{\partial x^j}B_{oi}(\vec{x}) \\
&= \frac{k_2\varepsilon^{ihr}J^i(\vec{x})}{4k_1} - \delta^h_i\delta^r_j\partial_j B_{0i} + \delta^r_i\delta^h_j\partial_j B_{0i} \\
&= \frac{k_2\varepsilon^{ihr}J^i(\vec{x})}{4k_1} - \partial_r B_{0h}(\vec{x}) + \partial_h B_{0r}(\vec{x}).
\end{aligned}$$

Recordando que $\{B_{hr}(\vec{x}), H(\vec{y})\} = \partial_0 B_{rh}$, despejando el térmimo con la fuente externa y contrayendo con ε^{lhr} obtenemos la componente espacial de la ecuación de movimiento (4.3) obtenida al inicio del capítulo, lo cual comprueba que con la formulación Hamiltoniana obtenemos las mismas ecuaciones de movimiento que con la formulación Lagrangeana, a saber

$$\varepsilon^{lhr}\partial_0 B_{hr}(\vec{x}) - \varepsilon^{lhr}\partial_h B_{0r}(\vec{x}) + \varepsilon^{lhr}\partial_r B_{h0}(\vec{x}) = \frac{k_2 J^l(\vec{x})}{2k_1}.$$

La otra ecuación de movimiento la encontramos al hacer el corchete de Poisson del Hamiltoniano con el campo A

$$\begin{aligned}
\{A_p(\vec{x}), H(\vec{y})\} &= \{A_p(\vec{x}), -\int d^3y[A_0(k_2 J^o - 2k_1\varepsilon^{ijko}\partial_k B_{ij}) + B_{0i}(4k_1\varepsilon^{0ijk}\partial_j A_k \\
&+ 2k_3\mathcal{K}^{0i}) + k_2 J^i A_i + k_3\mathcal{K}^{ij}B_{ij}]\}.
\end{aligned}$$

Usando las propiedades generales de los corchetes de Poisson tenemos que

$$\begin{aligned}
\{A_p(\vec{x}), H(\vec{y})\} &= \{A_p(\vec{x}), -\int d^3yk_3\mathcal{K}^{ij}B_{ij}\} + \{A_p(\vec{x}), -\int d^3y - A_0 2k_1\varepsilon^{ijko}\partial_k B_{ij}\} \\
&= -\int d^3yk_3\mathcal{K}^{ij}(\vec{y})\{A_p(\vec{x}), B_{ij}\} + \int d^3yA_0 2k_1\varepsilon^{ijko}\partial_k\{A_p(\vec{x}), B_{ij}\} \\
&= -\int d^3yk_3\mathcal{K}^{ij}(\vec{y})(\frac{1}{4k_1}\varepsilon^{pij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})) + \int d^3yA_0 2k_1\varepsilon^{ijko}\partial_k(\frac{1}{4k_1}\varepsilon^{pij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})) \\
&= \frac{-k_3}{4k_1}\varepsilon^{pij}\mathcal{K}^{ij}(\vec{x}) - \frac{1}{2}\varepsilon^{pij}\varepsilon^{ijk}\int d^3yA_0(\vec{y})\frac{\partial\delta^3(\vec{x}-\vec{y})}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial y^k} \\
&= \frac{-k_3}{4k_1}\varepsilon^{pij}\mathcal{K}^{ij}(\vec{x}) + \varepsilon^{pij}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{1}{2}\int d^3A_0(\vec{y})\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\
&= \frac{-k_3}{4k_1}\varepsilon^{pij}\mathcal{K}^{ij}(\vec{x}) - \frac{1}{2}\varepsilon^{ipj}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^k}A_0(\vec{x}) \\
&= \frac{-k_3}{4k_1}\varepsilon^{pij}\mathcal{K}^{ij}(\vec{x}) - \frac{1}{2}[\delta^i_k\delta^p_i\partial_k A_0 - \delta^p_k\delta^i_i\partial_k A_0] \\
&= \frac{-k_3}{4k_1}\varepsilon^{pij}\mathcal{K}^{ij}(\vec{x}) - \frac{1}{2}[\delta^p_k\partial_k A_0(\vec{x}) - 3\delta^p_k\partial_k A_0(\vec{x})] \\
&= \frac{-k_3}{4k_1}\varepsilon^{pij}\mathcal{K}^{ij}(\vec{x}) + \partial_p A_0(\vec{x}).
\end{aligned}$$

La ecuación de movimiento para A_p es entonces

$$\{A_p(\vec{x}), H(\vec{y})\} = \dot{A}_p(\vec{x}),$$

así pues

$$\dot{A}_p(\vec{x}) = \partial_0 A_p = \frac{-k_3}{4k_1}\varepsilon^{pij}\mathcal{K}^{ij}(\vec{x}) - \partial_p A_0(\vec{x}).$$

Contrayendo esta expresión con ε^{pmf} y despejando convenientemente obtenemos finalmente la componente espacial de la ecuación (4.4)

$$2k_1\varepsilon^{pmf}\partial_0 A_p(\vec{x}) - 2k_1\varepsilon^{pmf}\partial_p A_o = -k_3\mathcal{K}^{ij}(\vec{x}).$$

3.1. Resolución de las ecuaciones de movimiento. Ahora nos dispondremos a resolver las ecuaciones de movimiento, para obtener el Hamiltoniano *on shell*. En este caso bastará con resolver las ligaduras, bajo la hipótesis de que las corrientes no dependerán de manera explícita del tiempo. Por otro, lado el Lagrangeano es invariante bajo translaciones temporales, entonces por el teorema de Noether (Apéndice C), hay una cantidad conservada que es el Hamiltoniano. Esto nos permitirá conseguir la solución a un tiempo fijo, por eso es válido usar las ligaduras para solucionar las ecuaciones de movimiento.

Definimos $C^k = \varepsilon^{kij} B_{ij}$, entonces la ligadura (1) se escribe como la ley de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = J^0, \tag{4.6}$$

por lo tanto

$$\vec{C'} = \vec{C} + (\vec{\nabla} \times \vec{v}),$$

es también solución de la ecuación (4.6), en vista de que el rotor de una divergencia es nulo. Así la solución de la ligadura viene dada en la forma de la siguiente ecuación

$$C^k(\vec{x}) = \varepsilon^{kij} B_{ij}(\vec{x}) = \frac{-k_2}{8\pi k_1} \int d^3x' \frac{J^0(\vec{x'})(\vec{x} - \vec{x'})^k}{R^3} + \varepsilon^{kim}\partial_i v_m.$$

Luego contrayendo con ε^{kpc}

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{kpc}\varepsilon^{kij} B_{ij}(\vec{x}) &= \frac{-k_2}{8\pi k_1}\varepsilon^{kpc} \int d^3x' \frac{J^0(\vec{x'})(\vec{x} - \vec{x'})^k}{R^3} + \varepsilon^{kcp}\varepsilon^{klm}\partial_l v_m \\
\delta^i_p\delta^j_c B_{ij} - \delta^j_p\delta^i_c B_{ij} &= \frac{-k_2}{8\pi k_1}\varepsilon^{kpc} \int d^3x' \frac{J^0(\vec{x'})(\vec{x} - \vec{x'})^k}{R^3} + \delta^l_p\delta^m_c\partial_l v_m - \delta^m_p\delta^l_c\partial_l v_m \\
\delta^i_p\delta^j_c B_{ij} - \delta^j_p\delta^i_c B_{ij} &= \frac{-k_2}{8\pi k_1}\varepsilon^{kpc} \int d^3x' \frac{J^0(\vec{x'})(\vec{x} - \vec{x'})^k}{R^3} + \delta^l_p\delta^m_c\partial_l v_m - \delta^m_p\delta^l_c\partial_l v_m \\
2B_{pc} &= \frac{-k_2\varepsilon^{kpc}}{8\pi k_1} \int d^3x' \frac{J^0(\vec{x'})(\vec{x} - \vec{x'})^k}{R^3} + \partial_p v_c - \partial_c v_p.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$B_{pc}(\vec{x}) = \frac{-k_2\varepsilon^{kpc}}{16\pi k_1}\int d^3x'\frac{J^0(\vec{x'})(\vec{x}-\vec{x'})^k}{R^3} + \frac{1}{2}(\partial_p v_c - \partial_c v_p) \tag{4.7}$$

En cuanto a la ligadura 2 usamos la fórmula (2.29) dada en el capitulo 2

$$A(\vec{x})^p = \frac{k_3}{2k_1}\int d^3\vec{x'}\frac{\varepsilon^{pij}\mathcal{K}^{0i}(\vec{x})(\vec{x}-\vec{x'})^j}{4\pi R^3} + \partial_p f(\vec{x}). \tag{4.8}$$

3.2. Hamiltoniano *on shell*. Queremos encontrar invariantes topológicos, para ello debemos resolver los campos en función de las fuentes externas. A continuación consideraremos varios tipos de fuentes externas dadas por corrientes que arrojarán diferentes resultados interesantes.

Caso I:

$$1) J^\eta(\vec{y}) = \begin{cases} \int_{c_1} dz^i\delta^3(\vec{y}-\vec{z}), & \eta = i \\ o, & \eta = o \end{cases}$$

$$2) K^{\eta\alpha}(\vec{y}) = \begin{cases} K^{i0}(\vec{y}) = \int_{c_2} dx^i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ K^{00}(\vec{y}) = 0, \\ K^{ij}(\vec{y}) = 0, \end{cases} \qquad \text{donde } c_1 \text{ y } c_2 \text{ son curvas cerradas.}$$

En este caso sólo contribuirá el campo A al Hamiltoniano *on shell* y la componente p de este campo de acuerdo a las corrientes dadas es

$$(A(\vec{x}))^p = \frac{\varepsilon^{pij}k_3}{8k_1\pi}\int d^3x'\frac{\int_{c_1} d(y)^i\delta^3(\vec{x'}-\vec{y})(\vec{x}-\vec{x'})^j}{(\sum_i(x^i-x'^i))^{\frac{3}{2}}} + \partial_p f.$$

Tomando en cuenta que la acción B-F es invariante de calibre, nos dispondremos a resolver las integrales dadas en la definición del campo A

$$
\begin{aligned}
(4.9) \qquad A(\vec{x})^p &= -\frac{\varepsilon^{pij} k_3}{8 k_1 \pi} \int_{c_1} dy^i \int d^3 x' \frac{\delta^3(\vec{x'} - \vec{y})(\vec{x} - \vec{y})^j}{(\sum_i (x^i - x^i))^{\frac{3}{2}}} \\
(4.10) \qquad &= -\frac{\varepsilon^{pij} k_3}{8 k_1 \pi} \int_{c_1} dy^i \frac{(\vec{x} - \vec{y})^j}{\sum_i^3 (x^i - y^i))^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el campo vectorial A queda

$$
(A(\vec{x}))^p = -\frac{\varepsilon^{pij} k_3}{4 k_1 \pi} \int_{c_1} dy^i \frac{(\vec{x} - \vec{y})^j}{\|x^i - y^i\|^3}.
$$

Así el Hamiltoniano *on shell* viene dado por

$$
H_{os} = \frac{k_2 k_3 \varepsilon^{kij}}{8 \pi k_1} \left(\int_{c_2} dz^k \int_{c_1} dy^i \frac{(\vec{z} - \vec{y})^j}{\|\vec{z} - \vec{y}\|^3} \right).
$$

Obtenemos entonces nuevamente que H_{os} es proporcional al número de Gauss [**12**] . Al final de la sección 3 del capítulo 2 vimos que este objeto puede reescribirse como

$$
(4.11) \qquad H_{os} = -\frac{k_2 k_3}{2 k_1} \int_{s_2} ds_x^i \oint_{c_1} dx'^i \delta^3(\vec{x'} - \vec{x}).
$$

Para que esta expresión sea distinta de cero tienen que satisfacerse las siguientes condiciones:

a) La curva c_1 y la superficie s_2 tienen que tener al menos un punto en común, para que la delta no sea siempre nula.

b) El vector normal a la superficie no puede ser ortogonal al vector tangente a la curva, ya que si esto ocurre el producto interno será igual a cero.

Ahora analicemos el valor del Hamiltoniano *on shell* para las tres formas posibles que podemos encontrar en el espacio dos curvas c_1 y c_2 generales:

<u>Situación a</u>

En este caso la curva c_1 y la superficie s_2 no tienen puntos en común, por lo cual $\delta^3(\vec{x'} - \vec{x})$ es siempre nula, en consecuencia el Hamintoniano *on shell* es igual a cero.

<u>Situación b</u>

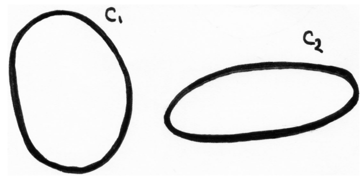

FIGURA 4.1

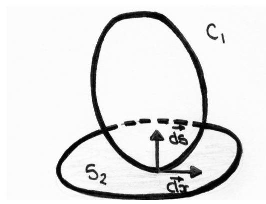

FIGURA 4.2

Como puede observarse en la figura 4.2 la curva c_1 y la superficie s_2 sólo tienen un punto en común, por lo cual la delta no será nula únicamente en este punto, pero el vector normal a s_2 es ortogonal al vector tangente a c_1 (ver figura 4.2), por lo que el Hamiltoniano *on shell* también es nulo en este caso.

Situación c

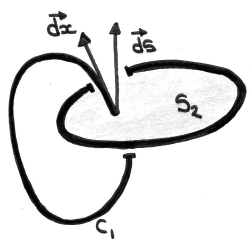

FIGURA 4.3

En este caso las curvas se intersectan, por cual la delta aporta contribución. Además el vector tangente a la curva y el normal a la supercie no son ortogonales. Como se satisfacen las condiciones a y b el Hamiltoniano *on shell* no es nulo en esta situación.

Caso II:

Ahora consideremos las siguientes corrientes como fuentes externas

1)

$$J^{\mu}(\vec{x}) = \begin{cases} \delta^3(\vec{x}-\vec{x_0}), & \mu = 0 \\ 0, & \mu = i \end{cases}$$

2)

$$K^{\mu\lambda}(\vec{x}) \begin{cases} K^{ij}(\vec{x}) = \int_{\Sigma} d\Sigma_y^{ij} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ K^{00}(\vec{x}) = 0, \\ K^{oi}(\vec{x}) = 0, \end{cases}$$

En este caso sólo contribuye el campo B al Hamiltoniano *on shell* por lo cual nos enfocaremos en su resolución en lo que sigue. Según la ecuación (4.7) se tiene

$$\begin{aligned} (B_{mr})(\vec{x}) &= \frac{-k_2}{4k_1} \int d^3x' \frac{\varepsilon^{kmr} J^0(\vec{x'})(\vec{x}-\vec{x'})^k}{4\pi R^3} \\ &= \frac{-k_2}{4k_1} \int d^3x' \frac{\varepsilon^{kmr} \delta^3(\vec{x'}-\vec{x_0})(\vec{x}-\vec{x'})^k}{4\pi R^3} \\ &= -\frac{k_2}{16\pi k_1} \frac{\varepsilon^{kmr}(\vec{x}-\vec{x_0})^k}{\|\vec{x}-\vec{x_0}\|^3}. \end{aligned}$$

Luego, nuestro Hamiltoniano *on shell* viene dado por

$$H_{os}(\vec{x}) = -\frac{k_2 k_3 \varepsilon^{kmr}}{16\pi k_1} \int_{\Sigma} d\Sigma_x^{mr} \frac{(\vec{x}-\vec{x_0})^k}{\|\vec{x}-\vec{x_0}\|^3}.$$

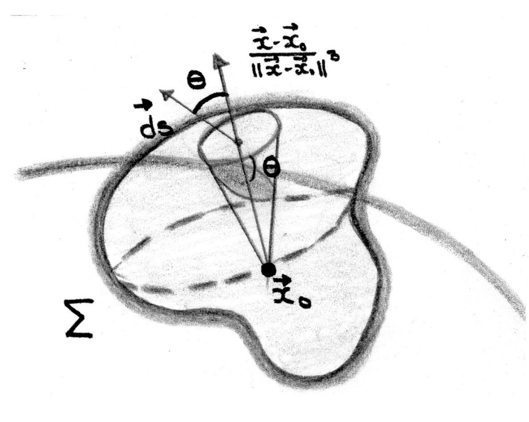

Figura 4.4

Ahora bien

$$\varepsilon^{kmr} d\Sigma_x^{mr} = 2(ds_x)^k,$$

con esto

$$H_{os}(\vec{x}) = -\frac{k_2 k_3}{8\pi k_1} \int_\Sigma ds_x^k \frac{(\vec{x} - \vec{x_0})^k}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|^3}.$$

En notación vectorial el Hamiltoniano *on shell* queda como sigue (ver figura 4.4)

$$-\frac{k_2 k_3}{8\pi k_1} \int_\Sigma \vec{ds} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x_0}}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|^3} = -\frac{k_2 k_3}{8\pi k_1} \int_\Sigma \|ds\| \frac{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|^3} cos(\theta) = -\frac{k_2 k_3}{8\pi k_1} \int_\Sigma \|ds\| \frac{cos(\theta)}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2}.$$

Pero $\|ds\| cos(\theta)$ es la proyección de una porción de superficie sobre una esfera (ver figura 4.4), por lo cual

$$H_{os}(\vec{x}) = \frac{K}{4\pi} \int_\Sigma \frac{dA}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2}.$$

donde $K = \frac{k_2 k_3}{2k_1}$.

Por otro lado el ángulo sólido se define como el área del casquete polar entre el radio al cuadrado. Con este resultado tenemos lo siguiente

$$H_{os}(\vec{x}) = \frac{K}{4\pi} \int_\Sigma d\Omega,$$

entendiendo Ω como el ángulo sólido sustendido desde el punto $\vec{x_0}$

Este invariante indica si el punto $\vec{x_0}$ esta dentro o no de la superficie Σ: Supongamos que tenemos un punto $\vec{x_0}$ que está en el interior de la superficie Σ, entonces los vectores $\vec{ds}$ y $\frac{\vec{x} - \vec{x_0}}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|^3}$ apuntarán hacia el exterior de la superficie Σ, para todos los puntos en la frontera de la superficie, por lo cual el ángulo sólido subtendido por Σ valdrá un múltiplo de 4π (ver figura 4.5).

En el caso en el cual el punto $\vec{x}_0$ está fuera de la superficie, será necesario dividir Σ en dos superficies, a saber: Σ_A que se caracteriza porque $\vec{ds}$ apunta hacia afuera de la superficie y $\frac{\vec{x} - \vec{x_0}}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|^3}$ apunta hacia el interior de Σ y Σ_B que es la porción de Σ en la cual $\vec{ds}$ y $\frac{\vec{x} - \vec{x_0}}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|^3}$ apuntan hacia el exterior de la superficie. Ahora bien el ángulo sólido necesario para recorrer

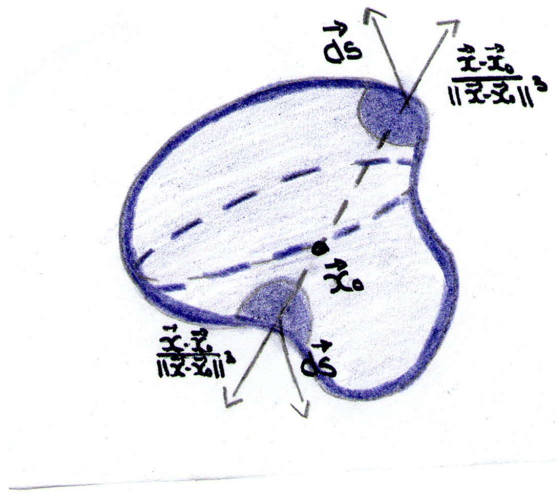

FIGURA 4.5

Σ_A será igual en magnitud al ángulo sólido que barre Σ_B pero de signo opuesto, de este modo el ángulo sólido subtendido por la superficie Σ es nulo (ver figura 4.6).

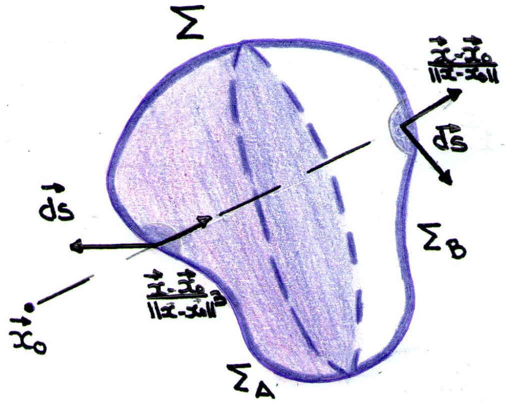

FIGURA 4.6

Conclusiones

En este trabajo se estudió la formulación Hamiltoniana de la acción B-F en dimensión 3+1, por medio de la descomposición en espacio y tiempo de la misma, obteniendo de este modo las ecuaciones de movimiento que gobiernan al sistema, y las ligaduras entre las variables canónicas. Como parte de este estudio se revisó el carácter topológico de la acción B-F, verificandose las siguientes propiedades [**5**]:

- Independendencia de la métrica.

- Invariancia bajo cambios de coordenadas generales.

A partir de la integración de las ligaduras se calculó el Hamiltoniano *on shell* con fuentes externas asociadas a objetos geométricos. Se estudiaron dos casos. En el primero las fuentes externas se tomaron como:

$$J^{\eta}(\vec{y}) = \begin{cases} \int_{c_1} dz^i \delta^3(\vec{y}-\vec{z}), & \eta = i \\ o, & \eta = o \end{cases}$$

$$K^{\eta\alpha}(\vec{y}) = \begin{cases} K^{i0}(\vec{y}) = \int_{c_2} dx^i \delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ K^{00}(\vec{y}) = 0, \\ K^{ij}(\vec{y}) = 0. \end{cases}$$

Esto arrojó la expresión de un invariante topológico que indica cuándo las curvas c_1 y c_2 se anudan. El Hamiltoniano correspondiente resultó ser

$$H_{os} = \frac{k_2 k_3 \varepsilon^{kij}}{8\pi k_1} \left(\int_{c_1} dz^k \int_{c_2} dy^i \frac{(\vec{z}-\vec{y})^j}{\|\vec{z}-\vec{y}\|^3} \right)$$

Este invariante se conoce como número de anudamiento de Gauss.

La segunda escogencia para las fuentes externas es

$$J^{\mu}(\vec{x}) = \begin{cases} \delta^3(\vec{x}-\vec{x_0}), & \mu = 0 \\ 0, & \mu = i \end{cases}$$

$$K^{\mu\lambda}(\vec{x}) = \begin{cases} K^{ij}(\vec{x}) = \int_{\Sigma} d\Sigma_y^{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ K^{00}(\vec{x}) = 0, \\ K^{oi}(\vec{x}) = 0. \end{cases}$$

En este caso, el Hamiltoniano *on shell* cuenta cuándo la superficie Σ contiene al punto $\vec{x_0}$.

$$H_{os}(\vec{x}) = -\frac{k_2 k_3 \varepsilon^{kmr}}{16\pi k_1}\int_{\Sigma} d\Sigma_x^{mr}\frac{\vec{x}-\vec{x_0}^{\,k}}{\|\vec{x}-\vec{x_0}\|^3}.$$

Este trabajo se puede extender al estudio del Hamiltoniano de la acción B-F en una dimensión general d. También se pueden obtener invariantes de nudos más sofisticados, que detecten anudamientos que el número de Gauss no percibe, colocando fuentes externas más complejas.

Apéndice A

Equivalencia entre la formulación Lagrangeana y Hamiltoniana

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea* $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\theta_n, \dot{\theta_n}, \partial_i\theta_n)$ *una densidad Lagrangeana* , $\pi_n = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta_n}}$ *el momento conjugado, y* $\mathcal{H} = \pi_n\dot{\theta_n} - \mathcal{L}$ *la densidad Hamiltoniana, con* $H = \int d^3x\mathcal{H}$*, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_n} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta_n)}\right) = 0,$$

implican las siguientes ecuaciones

$$\dot{\theta_n} = \frac{\delta H}{\delta\pi_n(\vec{x},t)}. \tag{4.12}$$

$$\dot{\pi_n} = -\frac{\delta H}{\delta\theta_n(\vec{x},t)}. \tag{4.13}$$

que son conocidas como las ecuaciones canónicas

Demostración

Por una parte tenemos, usando la definición de la densidad Hamiltoniana que

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi_n(\vec{x},t)} = \int d^3x'\left(\frac{\delta\dot{\theta_m}(\vec{x'},t)}{\delta\pi_n(\vec{x},t)}\pi_m(\vec{x'},t) + \frac{\delta\pi_m(\vec{x'},t)}{\delta\pi_n(\vec{x},t)}\dot{\theta_m}(\vec{x'},t) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta_m}(\vec{x'},t)}\frac{\delta\dot{\theta_m}(\vec{x},t)}{\delta\pi_n(\vec{x'},t)}\right), \tag{4.14}$$

pero en virtud de la definición del momento conjugado, el primer y tercer término se cancelan, quedando

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi_n(\vec{x},t)} = \int d^3x'(\dot{\theta_n}(\vec{x'},t))\delta^3(\vec{x'}-\vec{x}) = \dot{\theta_n}(\vec{x'},t), \tag{4.15}$$

obteniendo así la ecuación (4.12).

Además

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \theta_n(\vec{x},t)} = \int d^3x' \big(\frac{\delta \dot{\theta_m}(\vec{x'},t)}{\delta\ \theta_n(\vec{x},t)} \pi_m(\vec{x'},t) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_m(\vec{x'},t)} \frac{\delta \theta_m(\vec{x'},t)}{\delta \theta_n(\vec{x},t)} \tag{4.16}$$

$$- \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta_m}(\vec{x'},t)} \frac{\delta \dot{\theta_m}(\vec{x},t)}{\delta \theta_n(\vec{x'},t)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \theta_m(\vec{x'},t))} \frac{\delta(\partial_i \theta_m(\vec{x'},t))}{\delta \theta_n(\vec{x},t)} \big), \tag{4.17}$$

(en el último término hay una suma sobreentendida en el subindice i). De nuevo el primer y tercer término se anulan usando la definición de momento conjugado. El segundo término da

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_n(\vec{x},t)}. \tag{4.18}$$

En cuanto al cuarto tenemos

$$\frac{\delta(\partial_i \theta_m(\vec{x'},t))}{\delta \theta_n(\vec{x},t)}) = \partial_i \frac{(\delta \theta_m(\vec{x'},t))}{\delta \theta_n(\vec{x},t)}), \tag{4.19}$$

en consecuencia obtenemos la siguiente igualdad

$$-\int d^3x' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \theta_m(\vec{x'},t))} \frac{\partial}{\partial x'^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x'}) = \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \theta_m(\vec{x},t))} \right). \tag{4.20}$$

Reuniendo las expresiones (4.18) y (4.20) se tiene

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \theta_n(\vec{x},t)} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_n(\vec{x},t)} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \theta_n(\vec{x},t))} \right). \tag{4.21}$$

Empleando ahora las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_n} - \partial_0 \pi_n - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \theta_n)} \right) = 0, \tag{4.22}$$

se tiene finalmente

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \theta_n(\vec{x},t)} = -\dot{\pi_n}(\vec{x},t). \tag{4.23}$$

PROPOSICIÓN 4.2. *Dado una densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}(\theta_n, \pi_n, \partial_i\theta_n)$, si se define la densidad Lagrangeana según:*

$$\mathcal{L} = \pi_n\dot{\theta}_n - \mathcal{H}(\theta_n, \pi_n, \partial_i\theta_n), \tag{4.24}$$

se tiene que las ecuaciones canónicas implican a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Demostración

Primero debemos establecer la siguiente relación entre la derivada tradicional y la funcional

$$\frac{\delta H}{\delta\theta_n} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta_n} - \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\theta_n)}\right). \tag{4.25}$$

Este resultado se obtiene del siguiente modo:
Sabemos que

$$H = \int d^3x\mathcal{H} = \int d^3y\mathcal{H}(\theta_m(\vec{y}), \partial_i\theta_m(\vec{y}), \pi_m(\vec{y})), \tag{4.26}$$

con esto

$$\begin{aligned}
\frac{\delta H}{\delta\theta_n(\vec{x})} &= \int d^3y\frac{\delta}{\delta\theta_n(\vec{x})}\mathcal{H}(\theta_m(\vec{y}), \partial_i\theta_m(\vec{y}), \pi_m(\vec{y})) && (4.27)\\
&= \int d^3y\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta_m(\vec{y})}\frac{\delta\theta_m(\vec{y})}{\delta\theta_n(\vec{x})} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\theta_m(\vec{y}))}\frac{\delta\partial_j\theta_m(\vec{y})}{\delta\theta_n(\vec{x})}\right) && (4.28)\\
&= \int d^3y\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta_m(\vec{y})}\delta_{nm}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\theta_m(\vec{y}))}\delta_{nm}\frac{\partial}{\partial y^i}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\right) && (4.29)\\
&= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta_n} - \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\theta_n)}\right). && (4.30)
\end{aligned}$$

De modo similar se puede probar que

$$\frac{\delta H}{\delta\pi_n} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_n} \tag{4.31}$$

Ahora bien, nuestro objetivo es probar que la siguiente expresión es nula

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_n} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_o \theta_n)} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \theta_n)}, \tag{4.32}$$

para ello vamos a determinar, según nuestras hipótesis, cuánto vale cada término de la misma. Desarrollemos el primer término de la expresión (4.32)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial(\pi_m \dot{\theta_m} - \mathcal{H}(\theta_m, \pi_m, \partial_i \theta_m))}{\partial \theta_n} \tag{4.33}$$

$$= \frac{\partial \pi_m}{\partial \theta_n}\dot{\theta_m} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_m}\frac{\partial \pi_m}{\partial \theta_n} \tag{4.34}$$

usando la ecuación (4.12) tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial \pi_m}{\partial \theta_n}\frac{\delta H}{\delta \pi_m} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_m}\frac{\partial \pi_m}{\partial \theta_n}.$$

Pero en virtud de (4.31) el primer y tercer término se cancelan, luego

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_n} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_n}. \tag{4.35}$$

En cuanto al segundo término de la expresión de (4.32) obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \theta_n} = \frac{\partial \pi_m}{\partial \dot{\theta_n}}\dot{\theta_m} + \pi - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_m}\frac{\partial \pi_m}{\partial \dot{\theta_n}} \tag{4.36}$$

$$= \pi_n, \tag{4.37}$$

donde se usaron las ecuaciones (4.12) y (4.31).

Finalmente tratamos con el tercer término de la expresión (4.32)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \theta_n)} = \frac{\partial \pi_m}{\partial(\partial_i \theta_n)}\dot{\theta_m} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_m}\frac{\partial \pi_m}{\partial(\partial_i \theta_n)} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \theta_n)} \tag{4.38}$$

$$= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \theta_n)} \tag{4.39}$$

De nuevo el primer y segundo término de la ecuación (4.39) se cancela usando (4.12) y (4.31). Uniendo todos estos resultados, la expresión (4.32) queda del siguiente modo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_n} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_o \theta_n)} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \theta_n)} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial \pi_n}{\partial t} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \theta_n)} \right) \tag{4.40}$$

$$= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_n} + \frac{\delta H}{\delta \theta_n} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \theta_n)} \right) \tag{4.41}$$

$$= 0, \tag{4.42}$$

que es justamente la ecuacioń de Euler-Lagrange. En la última expresión, se usó la ecuación canónica (4.13) y la igualdad (4.30)

Apéndice B

Ecuaciones de movimiento y multiplicadores de Lagrange

Consideremos la siguiente densidad Lagrangeana

$$\mathcal{L}[\theta_n, \pi_n] = \pi_n \dot{\theta}_n - \mathcal{H}[\theta_n, \partial_i \theta_n, \pi_n].$$

A continuación hallaremos las ecuaciones de movimiento para esta densidad, según la ecuación (2.7).

Para los campos θ_n

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_m} - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \theta_m)} \right) - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \theta_m)} \right) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_m} - \dot{\pi}_m + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \theta_n)} \right) \\ &= -\dot{\pi}_m - \frac{\delta H}{\delta \theta_m} \\ &= 0. \end{aligned}$$

En la antepenúltima línea hemos usado la ecuación (4.25), la cual probamos en el apéndice A.

Para los campos π_n

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_m} - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \pi_m)} \right) - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \theta_m)} \right) &= \dot{\theta}_m - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_m} \\ &= 0, \end{aligned}$$

hemos usado la ecuación (4.31) desarrolado en el apéndice A. Estos resultados que corresponden a las ecuaciones de movimiento canónicas obtenidas en el capítulo 3 de este trabajo (ver ecuaciones 3.10 y 3.11.)

Ahora estudiemos la siguiente densidad Lagrangenana

$$\mathcal{L}[\theta_n, \pi_n, \lambda] = \pi_n \dot{\theta}_n - \mathcal{H}',$$

con $\mathcal{H}' = \mathcal{H}(\theta_n, \pi_n) - \lambda f(\theta_n, \pi_n)$, y de nuevo usemos la ecuación (2.7) para obtener la ecuaciones de movimiento.

Para los campos θ_n

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_m} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \theta_m)} \right) &= -\frac{\delta \mathcal{H}'}{\delta \theta_m} - \dot{\pi}_m \\ &= 0.\end{aligned}$$

Para los campos π_n

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_m} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \pi_m)} \right) &= \dot{\theta}_m - \frac{\delta \mathcal{H}'}{\delta \pi_m} \\ &= 0,\end{aligned}$$

de nuevo hemos usado las ecuaciones (4.25) y (4.35) Finalmente para λ la ecuación de movimiento será

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \lambda)} \right) &= f(\theta_n, \pi_n) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Esta última ecuación da una relación entre las variables π_n y θ_n la cual representa una condición adicional o resticción del sistema. En consecuencia para hallar los extremos condicionados de $\mathcal{H}$ se ha hecho uso del método de los multiplicadores de Lagrange. Siendo λ el multiplicador.

Apéndice C

Teorema de Noether

La existencia de cantidades que no cambian en el tiempo independientemente de la evolución del sistema físico juega un rol importante en las teorías físicas. La conservación de una cantidad es una consecuencia natural de las propiedades de simetría de un sistema y se expresa matemáticamente a través del teorema de Noether [**3**], el cual establece que si una teoría es invariante bajo ciertas transformaciones infinitesimales entonces existe una catidad conservada asociada.

Ejemplos de aplicación del teorema de Noether son los siguientes [**3**]:

a) La invariancia de sistemas físicos con respecto a traslaciones espaciales da la conservacion del momento lineal.

b) La invariancia con respecto a rotaciones espaciales produce la ley de conservación del momento angular.

c) La invariancia con respecto a la traslación en el tiempo origina la ley de conservación de la energía.

A continuación demostraremos este importante teorema.
Supongamos que ciertas transformaciones de los campos

$$\theta_n \longrightarrow \theta'_n = \theta_n + \delta\theta_n, \tag{4.43}$$

de los puntos del espacio - tiempo

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \tag{4.44}$$

y como consecuencia del Lagrangiano

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x), \tag{4.45}$$

dejan invariante la acción. Aquí estamos empleando la notación $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}'(\theta'_n(x'), \partial^\mu\theta'_n(x'), x')$.
Entonces

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) = 0.$$

Introduciendo la transformación (4.45), tenemos

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(x) + \int_{\Omega'} d^4x' \delta\mathcal{L}(x) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x).$$

Ahora bien, tomando en cuenta la transformación (4.44) tenemos

$$d^4x' = \left| \frac{\partial(x'^{\mu})}{\partial(x^{\nu})} \right| d^4x = \left| \frac{\partial(x^{\mu} + \delta x^{\mu})}{\partial(x^{\nu})} \right| d^4x$$

Como el recorrido de la varible μ es de 0 a 3 obtenemos la siguiente matriz

$$d^4x' = det \begin{pmatrix} (1 + \frac{\partial \delta x_0}{\partial x_0}) & \frac{\partial \delta x_0}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta x_0}{\partial x_2} & \frac{\partial \delta x_0}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_0} & (1 + \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1}) & \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_0} & \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_1} & (1 + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2}) & \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_0} & \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_2} & (1 + \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_3}) \end{pmatrix} d^4x = \left(1 + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}\right) d^4x.$$

En la última igualdad hemos usado que al desarrollar el determinante son despreciables todos los términos que contiene la variación δ de orden mayor que 1.

Con esto δS queda como sigue

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} \left(1 + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}\right) d^4x \mathcal{L}(x) + \int_{\Omega} \left(1 + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}\right) d^4x \delta\mathcal{L}(x) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \delta\mathcal{L}(x) + \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) \left(\frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}\right). \end{aligned}$$

donde de nuevo, hemos despreciado términos superiores al primer orden en las variaciones S Definamos la variación funcional

$$\tilde{\delta}\theta_n(x) = \theta'_n(x) - \theta_n(x). \tag{4.46}$$

A continuación determinaremos cúal es la relación de δ y $\tilde{\delta}$, para ello sumando y restando $\theta'(x')$ en la última ecuación

$$\tilde{\delta}\theta_n(x) = \theta'_n(x) + \theta'_n(x') - \theta'_n(x') - \theta_n(x)$$

Además conocemos la siguiente transformación

$$\theta'_n(x') = \theta_n(x) + \delta\theta_n(x),$$

con esto

$$\tilde{\delta}\theta_n(x) = \delta\theta(x) - (\theta'_n(x') - \theta'(x)).$$

Pero $x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$, por lo que

$$\tilde{\delta}\theta_n(x) = \delta\theta(x_\mu) - (\theta'_r(x_\mu + \delta x_\mu) - \theta'(x_\mu)) = \delta\theta(x_\mu) - \frac{\partial\theta'_r(x)}{\partial x_\mu}\delta x^\mu,$$

haciendo el desarrollo de Taylor hasta primer orden. De manera similar $\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) = \delta\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu$, con lo cual

$$\delta S = \int_\Omega d^4x\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) + \int_\Omega d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu + \mathcal{L}\frac{\partial\delta x_\mu}{\partial x_\mu}\right) = \int_\Omega d^4x\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) + \int_\Omega d^4x\frac{\partial(\mathcal{L}(x)\delta x_\mu)}{\partial x_\mu}.$$

Por otro lado sabemos que

$$\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_n}\tilde{\delta}\theta_n + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\theta_n)}\tilde{\delta}\left(\frac{\partial\theta_n(x)}{\partial x_\mu}\right).$$

Si sumamos y restamos $\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\theta_r)}\right)\tilde{\delta}\theta_r(x)$, e intercambiamos $\tilde{\delta}$ con la derivada parcial, tenemos

$$\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\theta_n}\tilde{\delta}\theta_n - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\theta_n)}\right)\tilde{\delta}\theta_n(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\theta_n)}\right)\tilde{\delta}\theta_n(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\theta_n)}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\tilde{\delta}\theta_n(x)).$$

Agrupando convenientemente

$$\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) = \left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\theta_n} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\theta)}\right)\tilde{\delta}\theta_n + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\theta_n)}\tilde{\delta}\theta_n\right).$$

De este modo

$$\delta S = \int_\Omega d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\theta_n} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\theta_n)}\right)\tilde{\delta}\theta_n + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\theta_n)}\tilde{\delta}\theta_n\right) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\mathcal{L}(x)\delta x^\mu)\right].$$

Pero $\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\theta r} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\theta_r)}\right) = 0$, por la ecuación de Euler-Lagrange, así

$$\delta S = \int_\Omega d^4x[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu\theta_r})}(\delta\tilde{\theta}_r)\right) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\mathcal{L}(x)\delta x^\mu)] = 0.$$

Como la región de integración es arbitraria

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \theta_n})(\delta\tilde{\theta}_n) + (\mathcal{L}(x)\delta x^\mu)\right) = 0.$$

Definamos

$$f_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu\theta_r})}(\delta\tilde{\theta}_r) + (\mathcal{L}(x)\delta x^\mu).$$

Entonces se tiene $\partial_\mu f^\mu = 0$, que es una ley de conservacion. En efecto, esto implica

$$\begin{aligned} 0 &= \int_v d^3x \frac{\partial f_0(x)}{\partial x_0} + \int_v d^3x \vec{\nabla} f(\vec{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_0}\int_v d^3x f_0(x) + \cancelto{0}{\oint_{\partial v} \vec{ds} \cdot \vec{f}(\vec{x})}. \end{aligned}$$

Finalmente la cantidad conservada es

$$G := \int_v d^3x f_0(x),$$

lo cual concluye la prueba.

Bibliografía

[1] CALLEN,H., Thermodynamics, John Wiley Sons, inc,(1960).

[2] DIAZ,A., Cuantización a la Dirac de una teoría topológica abeliana. Tesis de Grado, Universidad Central de Venezuela,(Mayo 2011).

[3] GREINER, W., REINHARDT,J., Field Quantization, Springer-Verlag Berlin Heilberg, (1996).

[4] GUADAGNINI, E., MARTELLINI, MINTCHEV, M.,Nucl. Phys, B330, 575 (1990).

[5] HOROWITZ, G., Commun, Math. Phys. 125 (1989) 417.

[6] JACKSON,J., Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, inc,(1975).

[7] LEAL,L., Mod. Phys, Lett, A7, 541 (1992).

[8] LEAL,L., Link invariants from classical Chern-Simons theory, Apr 2002. 15 pp. hep-th/0204139,UCVFC-DF-25-2002. Published in Phys.Rev. D66 (2002) 125007 e-Print: hep-th/0204139

[9] LIPSCHUTZ,M., Teoría y problemas de geometriá diferencial, New York: McGraw-Hill book company, inc (1971).

[10] SALETAN,E., CROMER,A., Theoretical Mechanics, John Wiley and Sons, inc (1971).

[11] TRAUTMANN,F.A.,PIRANI,E., H.BONDI , *Lectures on Genearl Relativity.* Prentice- Hall , inc. Englewood Cliffs, New Jersey,(1964).

[12] ROLFSEN,D.,Knots and Links, Wilmington, Publish or Perish,(1976).

[13] WITTEN,E.,Commun Math. Phys,121, 351-399 (1989).