UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

EL TEOREMA DE NEHARI Y EL TEOREMA DE KRONECKER

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Ronald Miguel Ramírez Márquez** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Marisela Domínguez.

Caracas, Venezuela
Julio de 2009

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**El teorema de Nehari y el teorema de Kronecker**”, presentado por el **Br. Ronald Miguel Ramírez Márquez**, titular de la Cédula de Identidad **16.870.704**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Marisela Domínguez
Tutor

Ramón Bruzual
Jurado

Imanol Ajuria
Jurado

Agradecimiento

Gracias al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela por su colaboración en la edición de este trabajo.

Índice general

Introducción.

En este trabajo se consideran matrices de Hankel y se presentan las demostraciones de los teoremas de Nehari y de Kronecker dadas por Vladimir Peller en su artículo "An Excursion into the Theory of Hankel Operators"publicado en Holomorphic Spaces. MSRI Publications, Volume 33, 1998 [**24**].

Este trabajo se comienza mencionando un comentario de Martínez-Avendaño [**21**] quien hace notar que los operadores de Hankel constituyen una de las clases de operadores en espacios de Hilbert que han sido más estudiadas en las últimas décadas y dice que esto se debe, entre varias razones, a las muchas relaciones que existen entre espacios de operadores de Hankel y diferentes espacios de funciones.

Uno de los primeros resultados conocidos sobre matrices de Hankel se debe a Kronecker. Si se piensa solamente en matrices de Hankel (es decir, se olvida por un momento que representan operadores), es natural preguntarse cuándo estas matrices son de rango finito, es decir, cuándo es verdad que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que cualquier conjunto de más de n columnas de la matriz, es linealmente dependiente. El primer capítulo de este Trabajo Especial de Grado es una introducción a las matrices de Hankel, la cual se ha decidido motivar a partir de las series de potencias formales que determinan funciones racionales. Luego se usa el artículo de Aline Bonami [**2**] para la presentación de la estructura de estas matrices y se culmina este capítulo con la demostración del teorema de Kronecker publicada en [**24**].

El teorema de Nehari establece bajo qué condiciones un operador de Hankel es acotado. Para poder demostrar este teorema se necesitan herramientas del análisis funcional. Por esta razón, en el segundo capítulo de este trabajo se hace un breve repaso sobre algunas nociones básicas en análisis funcional como lo son los espacios métricos, los espacios normados, los espacios de Banach y en particular los espacios l^p. El tercer capítulo está destinado a presentar los espacios de Lebesgue, los coeficientes de Fourier y los polinomios trigonométricos.

Los espacios de Hardy están muy vinculados al teorema de Nehari, estos espacios pueden ser vistos como espacios de funciones analíticas en el disco unidad y como subespacios de los correspondientes espacios de Lebesgue en la circunferencia, estos enfoques son presentados en el cuarto capítulo de este trabajo. Para el caso particular en que estos espacios tienen producto interno se tienen resultados muy útiles, es por eso que en el quinto capítulo se hace un breve repaso sobre espacios con producto interno y espacios de Hilbert. Al final del quinto capítulo se estudia en detalle el espacio de Hardy-Hilbert siguiendo el artículo de Rubén Martínez-Avendaño [**21**].

Finalmente en el último capítulo se desarrolla la demostración del teorema de Nehari para operadores de Hankel, usando los resultados presentados en los capítulos anteriores y siguiendo como referencia principal el artículo de Peller [**24**]. Algunos resultados permiten interpretar los operadores de Hankel como "partes"de operadores de multiplicación en espacios de funciones (ver [**12**] y las referencias de ese artículo). Este trabajo culmina con la versión del teorema de Nehari visto como un resultado que caracteriza los operadores de Hankel, entre espacios de Hardy, que son acotados.

CAPíTULO 1

El teorema de Kronecker y las matrices de Hankel.

1. Series de potencias formales que determinan funciones racionales.

Se puede identificar las sucesiones de números complejos con la serie de potencias formal correspondiente. Si $a = \{a_j\}_{j\geq 0}$ es una sucesión de números complejos se le asocia la serie de potencias formal

$$f_a(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j.$$

Se comienza este trabajo dando condiciones para que una serie de potencias formal determine una función racional.

El espacio E de las series de potencias formales forma un álgebra con respecto al producto

$$(f_a f_b)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} a_j\, b_{m-j}\, z^m,$$

donde

$$f_a(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j \qquad \text{y} \qquad f_b(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, z^j.$$

Sea $S_1 : E \to E$ dado por

$$(S_1 f_a)(z) = z f_a(z).$$

Es decir

$$(S_1 f_a)(z) = z f_a(z) = z \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^{j+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}\, z^k.$$

Se define $S_1^* : E \to E$

$$(S_1^* f_a)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1}\, z^j.$$

TEOREMA 1.1. *Sea $\alpha = \{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ una sucesión de números complejos. Si la serie de potencia*

$$f_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j\, z^j$$

determina una función racional entonces la matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{N-1} & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & & \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ \alpha_{N-1} & & & \dots & \alpha_{2(N-1)} & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

tiene rango finito.

En este caso

$$\text{rango}(A_\alpha) \leq \text{grado}(z f_\alpha(z)).$$

Demostración.

Se supone que la serie $f_\alpha(z)$ determina una función racional.

Es decir,

$$f_\alpha(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

donde p y q son polinomios tales que

$$\text{grado}\, p < \text{grado}\, q = n$$

para algún $n \in \mathbb{N}$.

Se consideran los números complejos $p_0, \cdots, p_{n-1}$, $c_0, \cdots, c_n$ dados por

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n-1} p_j z^j \qquad \text{y} \qquad q(z) = \sum_{j=0}^{n} c_{n-j}\, z^j.$$

De donde

$$\begin{aligned} p(z) = f_\alpha(z) q(z) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j\, z^j\right) \left(\sum_{k=0}^{n} c_k\, z^{n-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_k\, z^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j\, z^j\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j\, z^{j+n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_k\, S^{n-k} f_\alpha(z) \end{aligned}$$

Es decir,

$$p = \sum_{j=0}^{n} c_j \, S_1^{n-j} \, f_\alpha. \tag{1.1}$$

Se probará que

$$S_1^{*\,n} S_1^{n-j} \, f_\alpha = S_1^{*\,j} \, f_\alpha \text{ para } j = 0, \cdots, n$$

Sea

$$f_{\beta,j}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \, z^l$$

donde

$$\beta_l = \begin{cases} 0 & \text{si } l = 0, \ldots, n-j-1 \\ \alpha_{l-(n-j)} & \text{si } l = n-j, \ldots \end{cases}$$

Por lo tanto

$$(S_1^{n-j} \, f_\alpha)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \, z^{k+n-j} = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \, z^l = f_{\beta,j}(z).$$

De donde

$$S_1^{*\,n} S_1^{n-j} \, f_\alpha = S_1^{*\,n} f_{\beta,j}.$$

Por otro lado, usando la definición de S_1^* sigue que

$$(S_1^{*\,n} f_{\beta,j})(z) = S_1^{*\,n} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \, z^l \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l+n} \, z^l = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{l+j} \, z^l = (S_1^{*\,j} \, f_\alpha)(z).$$

Juntando las expresiones anteriores se obtiene la fórmula que ya había sido anunciada:

$$S_1^{*\,n} S_1^{n-j} \, f_\alpha = S_1^{*\,j} \, f_\alpha.$$

A partir de (1.1) y aplicando $S_1^{*\,n}$ se obtiene que

$$S_1^{*\,n} \, p = S_1^{*\,n} \left(\sum_{j=0}^{n} c_j \, S_1^{n-j} \, f_\alpha \right) = \sum_{j=0}^{n} c_j \, S_1^{*\,j} \, f_\alpha. \tag{1.2}$$

Sea

$$f_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \, z^k$$

donde

$$\gamma_k = \begin{cases} p_k & \text{si } k = 0, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{si } k = n, \ldots \end{cases}$$

Luego

$$p = f_\gamma.$$

Por lo tanto

$$S_1^{*\,n}\, p = S_1^{*\,n}\, f_\gamma$$

Usando la definición de S_1^* y de $\{\gamma_k\}_{k\geq 0}$ se obtiene

$$(S_1^{*\,n}\, p)(z) = (S_1^{*\,n}\, f_\gamma)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k+n}\, z^k = 0,$$

De (1.2) sigue que

$$\sum_{j=0}^{n} c_j\, S_1^{*\,j}\, f_\alpha = 0.$$

Esto implica que las primeras n+1 filas de la matriz A_α son linealmente dependientes.

Sea $m \leq n$ el mayor entero tal que $c_m \neq 0$. Entonces $S_1^{*\,m} f_\alpha$ es una combinación lineal de $S_1^{*\,j} f_\alpha$ con $j \leq m-1$, esto es:

$$S_1^{*\,m} f_\alpha = \sum_{j=0}^{m-1} d_j\, S_1^{*\,j} f_\alpha.$$

Por inducción se probará que cualquier fila de A_α es una combinación lineal de las primeras m filas.

Sea $k > m$, se tiene que

$$S_1^{*\,k} f_\alpha = S_1^{*\,k-m} S_1^{*\,m} f_\alpha = \sum_{j=0}^{m-1} d_j\, S_1^{*\,k-m+j} f_\alpha.$$

Para $0 \leq j \leq m-1$ se tiene que $k - m + j < k$.

Por la hipótesis inductiva cada uno de los términos del lado derecho de la igualdad anterior es una combinación lineal de las primeras m filas.

Por lo tanto el rango de la matriz A_α es menor o igual que m. De donde

$$\text{rango}(A_\alpha) \leq m \leq n \leq \text{grado}(z f_\alpha(z)).$$

$\square$

2. Matrices finitas de Hankel y matrices finitas de Toeplitz.

En el Teorema 1.1 apareció un tipo de matrices infinitas que tendrán un papel importante en este trabajo. A continuación se considerara la versión finita de estas matrices.

Para el desarrollo de esta sección se usó como referencia principal el artículo de [**2**].

Una *matriz de Hankel* es una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-1} \\ a_1 & a_2 & & & \\ a_2 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & & & \dots & a_{2(N-1)} \end{bmatrix}$$

para algunos $a_0, \dots, a_{2(N-1)} \in \mathbb{C}$.

Una *matriz de Toeplitz* es una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-(N-1)} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & & & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

para algunos $a_{-(N-1)}, \dots, a_0, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$.

Es fácil pasar de una matriz de Hankel (finita) a una matriz de Toeplitz (finita), de la manera siguiente:

$$T = HM_J,$$

donde M_J es la matriz del isomorfismo J, dado por

$$J(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) = (x_{N-1}, \dots, x_1, x_0)$$

Es claro que la matriz asociada a J es

$$M_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde

$$HM_J = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-1} \\ a_1 & a_2 & & & \\ a_2 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & & & \dots & a_{2(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{N-1} & a_{N-2} & a_{N-3} & \dots & a_0 \\ a_N & a_{N-1} & & & \\ a_{N+1} & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{2(N-1)} & & & \dots & a_{N-1} \end{bmatrix}$$

Se nota claramente que las determinantes de las matrices son iguales excepto por los signos.

3. Matrices infinitas de Hankel y matrices infinitas de Toeplitz.

Una *matriz infinita de Hankel* es una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-1} & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ a_2 & a_3 & a_4 & & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ a_{N-1} & & & \dots & a_{2(N-1)} & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

para algunos $a_0, \dots, a_{N-1}, \dots \in \mathbb{C}$.

Una *matriz infinita de Toeplitz* es una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-(N-1)} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ a_{N-1} & & & \dots & a_0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

para algunos $\dots, a_{-(N-1)}, \cdots, a_0, \dots, a_{N-1}, \cdots \in \mathbb{C}$.

En el caso infinito no se puede pasar de una matriz de Hankel a una de Toeplitz de manera "análoga" a lo que se hizo antes.

A continuación se da un resultado que muestra ciertas relaciones entre matrices finitas y matrices infinitas tomando en cuenta propiedades de convergencia que involucran las entradas de las matrices.

Para cada n sea B_n una matriz $n \times n$. Se puede considerar la sucesión de matrices $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Se dice que la sucesión de matrices $\{B_n\}$ es *uniformemente acotada*, cuando existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{m=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_{m,k} \right|^2 \leq C \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)$$

para toda sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Sea l_o el espacio de todas las sucesiones de números complejos tales que a partir de un cierto valor del subíndice (que depende de cada sucesión) todos sus elementos son nulos.

Sea $B = (b_{m,n})_{m,n \geq 0}$ una matriz de números complejos. Se define T_B en l_o mediante

$$T_B(\{a_k\}_{k=1}^{\infty}) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_{m,k} \right\}_{m=1}^{\infty} = \{c_m\}_{m=1}^{\infty}$$

para una sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_o$.

PROPOSICIÓN 1.2. *Dada $B = (b_{m,n})_{m,n\geq 0}$ una matriz de números complejos tal que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^{\infty} |b_{m,n}|^2 < \infty.$$

Sea $\{B_n\}$ la sucesión de matrices tal que B_n es una matriz $n\times n$ obtenida tomando las primeras n filas y las primeras n columnas de B.

La sucesión de matrices $\{B_n\}$ es uniformemente acotada, si y sólo si, existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_{m,k} \right|^2 \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$$

para toda sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Como la sucesión de matrices $\{B_n\}$ es uniformemente acotada, existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{m=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_{m,k} \right|^2 \leq C \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_{m,k} \right|^2 \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \right).$$

($\Leftarrow$) Se puede definir T_{B_n} en $\mathbb{C}^n$ mediante

$$T_{B_n}(\{a_k\}_{k=1}^{n}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{m,k} \right)_m = c_m$$

Entonces,

$$\sum_{m=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_{m,k} \right|^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_{m,k} \right|^2.$$

Se define $\{d_k\}$ de la siguiente manera $d_k = a_k$ si $0 \leq k \leq n$, y $d_k = 0$ en cualquier otro caso.

Por hipótesis existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} d_k b_{m,k} \right|^2 \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^2.$$

Luego

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_{m,k}\right|^2 &\leq \sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_{m,k}\right|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}d_kb_{m,k}\right|^2 \\ &\leq C\left(\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|^2\right) = C\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\end{aligned}$$

Esto demuestra que la sucesión de matrices $\{B_n\}$ está uniformemente acotada. □

Definición 1.3. La matriz $B = (b_{m,n})_{m,n\geq 0}$ es una *matriz de Hilbert*, si

$$b_{m,n} = \frac{1}{m+n+1}.$$

Proposición 1.4. *Sea $B = (b_{m,n})_{m,n\geq 0}$ una matriz de Hilbert. Entonces*

$$\sum_{m=0}^{n}\left|\sum_{k=0}^{n}a_kb_{m,k}\right|^2 \leq C\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2.$$

Demostración.

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo.

Se considera H_n la matriz $n \times n$, obtenida tomando las primeras n filas y las primeras n columnas de la matriz de Hilbert.

Se tiene que

$$\sum_{m=0}^{n}\left|\sum_{k=0}^{n}a_kb_{m,k}\right|^2 = \sum_{m=0}^{n}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{m+k+1}\right|^2.$$

Por otro lado, por la desigualdad de Hölder (en dimensión finita) se tiene que

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{m+k+1}\right| \leq \left|\frac{1}{m+1}\right|\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{m,k}\right|^2 &= \sum_{m=0}^{n}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{m+k+1}\right|^2 \leq \sum_{m=0}^{n}\left(\left|\frac{1}{m+1}\right|\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2}\right)^2 \\
&= \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{m+1}\right)^2\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2 \\
&= \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{m+1}\right)^2\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2 \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^2\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2 = C\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2
\end{aligned}$$

donde $C = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^2$.

Entonces $\{H_n\}$ son acotadas uniformemente. Usando la proposición anterior se obtiene el resultado. $\square$

4. El teorema de Kronecker.

Dada una sucesión de números complejos $\alpha = \{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ sea

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{N-1} & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & & \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ \alpha_{N-1} & & & \dots & \alpha_{2(N-1)} & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.5 (Kronecker). *Sea $\alpha = \{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ una sucesión de números complejos. La matriz A_α tiene rango finito si y sólo si la serie de potencia*

$$f_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\, z^j$$

determina una función racional.

En este caso

$$\text{rango}(A_\alpha) = \text{grado}(zf_\alpha(z)).$$

DEMOSTRACIÓN.

($\Leftarrow$) Esta implicación se obtiene de la Proposición 1.1.

($\Rightarrow$) Se supone que A_α tiene rango n. Entonces los vectores formados por las primeras $n+1$ filas $\{f_\alpha, S_1^* f_\alpha, S_1^{*\,2} f_\alpha, \cdots, S_1^{*\,n} f_\alpha\}$ son linealmente dependientes. Entonces existe una familia no trivial de números complejos $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ tal que

$$c_0\, f_\alpha + c_1\, S_1^* f_\alpha + \cdots + c_n\, S_1^{*\,n} f_\alpha = 0. \tag{1.3}$$

Sea $1 \leq k \leq n$, usando la definición de S_1^* se tiene que

$$S_1^{*\,k} f_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j+k}\, z^j.$$

Aplicando S^n se obtiene

$$S^n S_1^{*\,k} f_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j+k}\, z^{j+n} = \alpha_k\, z^n + \alpha_{1+k}\, z^{1+n} + \cdots .$$

Por otro lado,

$$S^{n-k} f_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j\, z^{j+n-k} \tag{1.4}$$

Es decir,

$$S^{n-k} f_\alpha(z) = \alpha_0\, z^{n-k} + \alpha_1\, z^{1+n-k} + \cdots + \alpha_{k-1}\, z^{n-1} + \alpha_k\, z^n + \cdots$$

Entonces

$$\begin{aligned} S^{n-k} f_\alpha(z) - S^n S_1^{*\,k} f_\alpha(z) &= \alpha_0\, z^{n-k} + \alpha_1\, z^{1+n-k} + \cdots + \alpha_{k-1}\, z^{n-1} \\ &= S^{n-k}(\alpha_0 + \alpha_1\, z^1 + \cdots + \alpha_{k-1}\, z^{k-1}). \end{aligned}$$

Luego

$$S^{n-k} f_\alpha(z) - S^n S_1^{*\,k} f_\alpha(z) = S^{n-k}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j\, z^j\right).$$

De donde

$$S^n S_1^{*\,k} f_\alpha(z) = S^{n-k} f_\alpha(z) - S^{n-k}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j\, z^j\right). \tag{1.5}$$

Por (1.3)

$$0 = S^n \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \, S_1^{*\,k} f_\alpha(z) \right) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, S^n \, S_1^{*\,k} f_\alpha(z).$$

De la igualdad anterior, usando (1.5) se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &= c_o \, S^n \, f_\alpha(z) + \sum_{k=1}^{n} c_k \left(S^{n-k} f_\alpha(z) - S^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \, z^j \right) \right) \\ &= c_o \, S^n \, f_\alpha(z) + \sum_{k=1}^{n} c_k \, S^{n-k} f_\alpha(z) - \sum_{k=1}^{n} c_k \, S^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \, z^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_k \, S^{n-k} f_\alpha(z) - \sum_{k=1}^{n} c_k \, S^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \, z^j \right) \end{aligned}$$

Sea

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, S^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \, z^j \right).$$

entonces p se puede expresar de la siguiente manera

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n-1} p_j z^j$$

para algunos $p_0, \cdots p_{n-1} \in \mathbb{C}$.

De donde

$$0 = \sum_{k=0}^{n} c_k \, S^{n-k} f_\alpha(z) - p(z).$$

Entonces

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, S^{n-k} f_\alpha(z).$$

Usando (1.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} c_k \, S^{n-k} f_\alpha(z) &= \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, z^{j+n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_k \, z^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, z^j \right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, z^j \right) \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \, z^{n-k} \right). \end{aligned}$$

Sea

$$q(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, z^{n-k}.$$

Luego

$$p(z) = f_\alpha(z) q(z).$$

De donde

$$f_\alpha(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Como

$$\operatorname{grado} p \leq n - 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{grado} q \leq n$$

se tiene que

$$\operatorname{grado}(z f_\alpha(z)) \leq \text{máx}\{\operatorname{grado} z p(z), \operatorname{grado} q(z)\} \leq n = \operatorname{rango}(A_\alpha).$$

Por otro lado de la Proposición 1.1 se sabe que

$$\operatorname{rango}(A_\alpha) \leq \operatorname{grado}(z f_\alpha(z)).$$

Esto completa la prueba. $\square$

CAPíTULO 2

Espacios métricos, espacios normados y espacios de Banach.

1. Espacios métricos.

Definición 2.1. Sea X un conjunto no vacío. Sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función, se dice que d es una *métrica métrica* en X cuando se verifican:

(a) $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$.
(b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.
(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todos $x, y, z \in X$ (desigualdad triangular).
(d) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

El número real $d(a, b)$ recibe el nombre de *distancia* entre a y b.

En este caso se dice que (X, d) es un *espacio métrico*.

Sea (X, d) un espacio métrico.

Definición 2.2. Sean $\{x_n\}$ una sucesión en X y $x \in X$, se dice que $\{x_n\}$ *converge* a x cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ si $n \in \mathbb{N}$ y $n > N$.

En este caso se escribe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{ en } (X, d).$$

Definición 2.3. Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ en X es *convergente* cuando existe $x \in X$ tal que $\{x_n\}$ converge a x en (X, d).

Definición 2.4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X, se dice que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ si $n, m > N$.

Usando la desigualdad triangular se puede probar que toda sucesión convergente es de Cauchy. Sin embargo, el recíproco no es cierto.

Definición 2.5. Sea $A \subset X$, se dice que A es *un conjunto completo* cuando toda sucesión de Cauchy en A converge a un punto de A.

2. Espacios normados.

Sean $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales y $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos.

En este trabajo se usará $\mathbb{K}$ para referirse a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$.

Definición 2.6. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una *norma* en X es una función $\| \quad \| : X \to \mathbb{R}$ tal que

(i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$,

(ii) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in X$, para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$,

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

En este caso se dice que $(X, \| \quad \|)$ es un *espacio normado.*

Proposición 2.7. *Sea* $(X, \| \quad \|)$ *un espacio normado. Para* $x, y \in X$ *sea*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

entonces d *es una métrica en* X.

Esta métrica se conoce como la métrica asociada a la norma o la métrica proveniente de la norma.

Observación 2.8. Existen métricas que no provienen de una norma.

3. Espacio cociente.

Sea X un espacio vectorial y sea $M \subset X$ una variedad lineal, se define

$$X/M = \{x + M : x \in X\}.$$

Se usa la siguiente notación:

$$[x] = x + M.$$

Si $x, y \in X$, si λ es un escalar se define

$$[x] + [y] = [x + y].$$

$$\lambda[x] = [\lambda x].$$

Con estas operaciones, resulta que X/M es un espacio vectorial.

Sea $(X, \| \quad \|_X)$ un espacio normado.

Definición 2.9. Sea M un subconjunto de X, se dice que M es un *subespacio* si M es una variedad lineal y M es cerrado en la topología de la norma.

Sea M un subespacio de X, para $[x] \in X/M$ se define:

$$\| [x] \|_{X/M} = \operatorname{dist}(x, M) = \inf_{m \in M} \|x + m\|_X.$$

Se puede verificar que $\| [x] \|_{X/M}$ está bien definida.

Proposición 2.10. $\| \quad \|_{X/M}$ *es una norma en* X/M*.*

Proposición 2.11. *Si* $x \in X$ *entonces* $\| [x] \|_{X/M} \leq \|x\|_X$*.*

4. Operadores en espacios normados.

Sean X, Y dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$).

Definición 2.12. Sea $T : X \to Y$ se dice que T es un *operador lineal* si

(i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in X$,
(ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo $x \in X$, para todo escalar λ.

Definición 2.13. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal, se dice que T es un *operador acotado* cuando existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Teorema 2.14. *Sean* X*,* Y *dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares) y sea* $T : X \to Y$ *un operador lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) T *es continuo,*
(b) T *es continuo en* $x = 0$*,*
(c) T *es continuo en algún punto* $x_o \in X$*,*
(d) T *es un operador acotado.*

Para un operador lineal acotado T se define $\|T\|$ como

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|. \tag{2.1}$$

Se puede probar que

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|},$$

y

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

Otra expresión para $\|T\|$ es la siguiente

$$\|T\| = \text{ínf}\{M : \|T(x)\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in X\}.$$

5. El espacio $L(X, Y)$.

Sean X, Y dos espacios normados sobre el mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$.

DEFINICIÓN 2.15. Sea

$$L(X, Y) = \{T : X \to Y \text{ tales que } T \text{ es un operador lineal y continuo}\}.$$

En el caso $X = Y$ se usará $L(X)$ para referirse a este conjunto, es decir,

$$L(X) = L(X, X).$$

PROPOSICIÓN 2.16. $L(X, Y)$ *es un espacio vectorial con las operaciones usuales*

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x),$$

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x).$$

donde $T_1, T_2 \in L(X, Y)$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Además con la definición dada en la igualdad (2.1), se tiene que $\|\cdot\|$ es una norma en $L(X, Y)$.

6. Dual de un espacio normado y teorema de Hahn-Banach.

Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ (como antes $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

DEFINICIÓN 2.17. Un *funcional lineal* en X es una función $f : X \to \mathbb{K}$ que es lineal.

DEFINICIÓN 2.18. El *dual topológico* de X es

$$X^* = L(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ tales que f es un funcional lineal y continuo}\}.$$

El siguiente resultado es muy importante.

TEOREMA 2.19 (Hahn-Banach para un espacio normado).
Sean X un $\mathbb{K}$-espacio normado, M un subespacio propio de X y $f : M \to \mathbb{K}$ un funcional lineal continuo. Entonces existe un funcional lineal continuo $F : X \to \mathbb{K}$ tal que

(i) *$F(x) = f(x)$ para todo $x \in M$,*
(ii) *$\|F\| = \|f\|$.*

Si X es un espacio de Banach y M es un subespacio de X, el *anulador del subespacio M* es

$$M^\perp = \{f \in X^* \,:\, f(x) = 0 \text{ para toda } x \in M\}.$$

Es decir,

$$M^\perp = \{f \in X^* \,:\, f \mid M = 0\}.$$

Sean $f \in X^*$, $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset X^*$. Se dice que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *converge a f en la topología débil** cuando

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

para todo $x \in X$. Y se define *la topología débil** como la topología de la convergencia puntual.

PROPOSICIÓN 2.20. *Sea A un subconjunto de X^*. Si A es débil-* cerrado, en X^*, entonces A es cerrado en la topología de la norma, en X^*.*

Este es un caso particular de un resultado más general que puede verse en la sección referente a la topología débil* de [**6**].

PROPOSICIÓN 2.21.

(a) *$M^{\perp}$ es débil-* cerrado, en X^*.*

(b) *$M^{\perp}$ es cerrado en la topología de la norma, en X^*.*

DEMOSTRACIÓN.

Para probar (a) se consideran $f \in X^*$ y $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset M^{\perp}$ tales que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge a f en la topología débil*. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, como $f_n \in M^{\perp}$ se tiene que

$$f_n(x) = 0 \qquad \text{para todo } x \in M.$$

Por lo tanto, para $x \in M$ se tiene que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

De donde $f \in M^{\perp}$.

La parte (b) se obtiene de la parte (a) y de la Proposición 2.20. □

7. Espacios de Banach.

DEFINICIÓN 2.22. Sea X un espacio vectorial normado y sea d la métrica asociada a la norma. Si X es un espacio métrico completo con respecto a d se dice que X es un *espacio de Banach*.

TEOREMA 2.23. *Si X es un espacio de Banach y M es un subespacio de X entonces X/M es un espacio de Banach.*

TEOREMA 2.24. *Si X es un espacio de Banach y M es un subespacio de X entonces M^* es isomorfo al espacio $X^*/M^{\perp}$.*

Esto se abrevia mediante

$$M^* \approx X^*/M^{\perp}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f \in M^*$ entonces $f : M \to \mathbb{C}$ es lineal y continuo.

Entonces por el teorema de Hahn-Banach, existe F tal que $F : X \to \mathbb{C}$ es lineal y continuo, además se tiene que

(a) Para todo $x \in M$

$$F(x) = f(x). \tag{2.2}$$

(b) $\|F\| = \|f\|$.

Como F es lineal y continuo entonces $F \in X^*$.

Por (2.2) se obtiene

$$f(x) - F(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in M.$$

Es decir,

$$f - F \in M^{\perp}.$$

Sea $g \in M^{\perp}$ tal que

$$g = f - F.$$

De donde

$$f = F + g \quad \text{con } g \in M^{\perp}.$$

Entonces,

$$\|f\| = \|F + g\| = \text{ínf}\{\|F + g\| : g \in M^{\perp}\}.$$

Sea h la función nula, es decir $h(x) = 0$ para todo $x \in X$. Entonces $h \in M^{\perp}$.

Por (2.2) se tiene que

$$f(x) - F(x) = h(x) \quad \text{si } x \in M,$$

de donde

$$f(x) = F(x) + h(x) \quad \text{si } x \in M, \text{ con } h \in M^{\perp}.$$

Se deduce que $[f] = [F]$.

Sea $\Delta : M^* \to X^*/M^{\perp}$ definido por

$$\Delta(f) = [F].$$

(i) Se verá que Δ está bien definida.

Sean $f \in M^*$. Sean F_1 y F_2 dos funcionales lineales y continuas diferentes obtenidas al aplicar el teorema de Hahn-Banach a f, entonces

(a) Para todo $x \in M$

$$F_1(x) = f(x) = F_2(x). \tag{2.3}$$

(b) $\|F_1\| = \|f\| = \|F_2\|$.

Por (2.3)

$$f(x) - F_1(x) = 0 = f(x) - F_2(x) \quad \text{ para todo } x \in M.$$

En M se define

$$g_1 = f - F_1 \qquad \text{y} \qquad g_2 = f - F_2.$$

Es claro que $g_1, g_2 \in M^\perp$, de donde $g_2 - g_1 \in M^\perp$.

Se tiene que

$$F_1|_M = F_2|_M + (g_2 - g_1).$$

Por lo tanto

$$[F_1] = [F_2].$$

(ii) La prueba de la linealidad de Δ es sencilla y se da a continuación.

Sean $f, g \in M^*$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\Delta(\lambda f + g) = [\lambda F + G] = \lambda[F] + [G] = \lambda\Delta(f) + \Delta(g).$$

(iii) Para probar que Δ es una isometría, basta observar que

$$\|\Delta(f)\| = \|[F]\| = \|f\|.$$

(iv) Para finalizar la demostración se verá que Δ es sobreyectiva.

Sea $h \in X^*/M^\perp$. Entonces existe $F \in X^*$ tal que $h = [F]$. Sea

$$f = F|_M.$$

Entonces $f \in M^*$.

Además

$$\Delta(f) = [F] = h.$$

$\square$

8. Espacios l^p.

Ejemplo 2.25. Para $1 \leq p < \infty$ sea

$$l^p = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} : \; x_n \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}.$$

Para $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^p$ se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

El espacio l^p es un espacio de Banach.

Observación: se considera $1 \leq p < \infty$ porque la desigualdad triangular falla para $0 < p < 1$.

Ejemplo 2.26. Sea

$$l^\infty = \{(x_n)_{n\geq 1} : \; x_n \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \sup_{n\geq 1} |x_n| < \infty\}.$$

Para $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$ se define

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|.$$

Para más detalles acerca de espacios de Banach ver [**20**].

9. El espacio $(l^1)^*$ es isomorfo al espacio l^∞.

Proposición 2.27. *Para $y = (y_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$ sea $\phi_y : l^1 \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\phi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

para cada $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^1$. Entonces

(a) *ϕ_y es un funcional lineal en l^1.*

(b) *ϕ_y es un funcional continuo tal que*

$$\|\phi_y\| \leq \|y\|_\infty.$$

Demostración. La linealidad es sencilla.

Se probará la continuidad.

Si $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^1$, $y = (y_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\phi_y(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \\ &\leq \sup_{n\geq 1} |y_n| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\ &= \|y\|_\infty \|x\|_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ_y es un funcional lineal acotado y $\|\phi_y\| \leq \|y\|_\infty$.

Luego ϕ_y es un funcional lineal y continuo. □

Teorema 2.28. *$(l^1)^*$ es isomorfo a l^∞.*

Esto se abrevia mediante

$$(l^1)^* \approx l^\infty.$$

Demostración. Sea $\Lambda : l^\infty \to (l^1)^*$ definida por

$$\Lambda(y) = \phi_y.$$

Por la proposición anterior, si $y \in l^\infty$ entonces $\phi_y \in (l^1)^*$. Por lo tanto Λ está bien definida.

Se debe probar que Λ es un isomorfismo isométrico, es decir,

(a) Λ es lineal,
(b) Λ es inyectiva,
(c) Λ es sobreyectiva,
(d) Λ es isométrica.

La prueba de (a) es sencilla. Además se tiene que (d) implica (b). Por lo tanto, basta probar (c) y (d).

Las demostraciones de (c) y (d) son análogas a las dadas en [**6**] para el caso de los funcionales lineales a valores reales. □

En [**18**] pueden encontrarse otros resultados similares, los cuales caracterizan los duales de algunos espacios de sucesiones.

10. El principio de acotación uniforme y el teorema de Banach-Steinhaus.

Definición 2.29. Sean X, Y espacios normados. Sea $F \subset L(X,Y)$ se dice que F es *equicontinuo* cuando

$$\sup_{T\in F} \|T\| < \infty.$$

Teorema 2.30 (Principio de acotación uniforme).

Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $F \subset L(X,Y)$. Si

$$\sup_{T\in F} \|T(x)\|_Y < \infty \qquad \textit{para cada } x \in X$$

entonces

$$\sup_{T\in F} \|T\| < \infty,$$

es decir, F es equicontinuo.

Teorema 2.31 (Teorema de Banach - Steinhaus).

Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado.

Sea $\{T_n\}_{n\geq 1} \subset L(X,Y)$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe para todo $x \in X$ entonces $\{T_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinuo, es decir,

$$\sup_{n\geq 1} \|T_n\| < +\infty.$$

Además si se considera $T : X \to Y$ dado por

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

para $x \in X$ entonces T es lineal y acotado, es decir, $T \in L(X,Y)$. Además

$$\|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

CAPíTULO 3

Espacios de Lebesgue.

1. El conjunto de las funciones medibles y esencialmente acotadas: L^∞.

Un espacio importante es L^∞, el conjunto de las funciones medibles y esencialmente acotadas en $[0, 2\pi]$, definido como

$$L^\infty = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \text{ tales que } \|f\|_\infty < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \ m\{t \in [0, 2\pi] : |f(t)| > \lambda\} = 0 \quad \}$$

y m es la medida de Lebesgue normalizada en $[0, 2\pi]$.

El espacio L^∞ es un espacio de Banach; es decir, es un espacio vectorial, normado y completo.

2. Los espacios de Lebesgue: L^p.

Para $1 \leq p < \infty$ sea

$$\mathcal{L}^p = \left\{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \text{ tales que } f \text{ es medible y } \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

Dadas $f \in \mathcal{L}^p$ sea

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

donde dt representa la medida de Lebesgue normalizada.

En este caso $\|f\|_p = 0$ no implica $f = 0$.

Sin embargo, $\|f\|_p = 0$ implica $f = 0$ c.s. (con respecto a la medida de Lebesgue).

Se puede considerar la siguiente relación de equivalencia: $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ c.s. Considerando las clases de equivalencia y pasando a un cociente se obtiene el espacio de Lebesgue L^p.

Si se usa $\widetilde{f}$ para referirse a la clase de equivalencia de f se puede definir

$$\|\widetilde{f}\|_p = \|f\|_p.$$

Se puede probar que L^p es un espacio normado, más aún L^p es un espacio de Banach. Por comodidad se usará f para referirse a los elementos de L^p, en lugar de usar $\widetilde{f}$.

Para detalles adicionales ver [**27**].

Se puede probar que L^∞ es un subconjunto de L^p para $1 \leq p < \infty$.

3. El espacio $(L^1)^*$ es isomorfo al espacio L^∞.

Proposición 3.1. *Para $g \in L^\infty$ sea $\phi_g : L^1 \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\phi_g(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

para cada $f \in L^1$. Entonces

(a) *ϕ_g es un funcional lineal en L^1.*

(b) *ϕ_g es un funcional continuo tal que*

$$\|\phi_g\| \leq \|g\|_\infty.$$

Demostración. La linealidad es sencilla. Se probará la continuidad.
Si $f \in L^1$, $g \in L^\infty$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|\phi_g(f)| &= \left| \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x)\, g(x)|\, dx \\
&\leq \int_0^{2\pi} |f(x)|\, \|g\|_\infty\, dx \leq \|g\|_\infty \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx \\
&\leq \|g\|_\infty\, \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ_g es un funcional lineal acotado. Luego ϕ_g es un funcional lineal continuo.

□

Teorema 3.2. *$(L^1)^*$ es isomorfo a L^∞.*
Esto se abrevia mediante

$$(L^1)^* \approx L^\infty.$$

Demostración. Solamente se dará la idea de la prueba.
Sea $\Lambda : L^\infty \to (L^1)^*$ definida por

$$\Lambda(g) = \phi_g.$$

Por la proposición anterior, si $g \in L^\infty$ entonces $\phi_g \in (L^1)^*$. Por lo tanto Λ está bien definida.

Se debe probar que Λ es un isomorfismo isométrico, es decir,

(a) Λ es lineal,
(b) Λ es inyectiva,
(c) Λ es sobreyectiva,
(d) Λ es isométrica.

La prueba de (a) es sencilla. Además se tiene que (d) implica (b). Por lo tanto, basta probar (c) y (d).

La prueba de (c) y (d) puede verse en el libro de Rudin [**28**, Capítulo 6] o en el libro de Royden [**27**, Capítulo 6]. Sin embargo a continuación se da la demostración de (c).

Se probará que si $\phi \in (L^1)^*$ entonces existe $g \in L^\infty$ tal que ϕ tiene la siguiente representación integral

$$\phi(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

para cada $f \in L^1$.

Sea $\phi \in (L^1)^*$.

Si $\|\phi\| = 0$ basta tomar $g = 0$.

Si $\|\phi\| > 0$ se define

$$\mu(E) = \phi(1_E).$$

Se tiene que $\mu([0,2\pi]) = \phi(1_{[0,2\pi]})$ es una constante, por lo tanto $\mu([0,2\pi])$ es finito.

Se probará que μ es una medida.

Si $A \cap B = \emptyset$ entonces

$$\mu(A \cup B) = \phi(1_{A\cup B}) = \phi(1_A + 1_B) = \phi(1_A) + \phi(1_B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Es decir μ es finitamente aditiva.

Para probar que μ es σ-aditiva basta probar que para toda sucesión decreciente $\{V_k\}$ de conjuntos borelianos en $[0,2\pi]$ tal que $\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k = \emptyset$ se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \mu(V_k) = 0.$$

Sea $\{V_k\}$ una sucesión decreciente de conjuntos borelianos en $[0, 2\pi]$ tal que $\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k = \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \mu(V_k) &= \lim_{k\to\infty} \phi(1_{V_k}) = \phi\left(\lim_{k\to\infty} 1_{V_k}\right)\\ &= \phi\left(1_{\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k}\right) = \phi(1_{\emptyset})\\ &= \phi(0) = 0.\end{aligned}$$

De donde se tiene la σ-aditividad.

Se ha probado que μ es una medida compleja.

A continuación se verá que μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Sea m la medida de Lebesgue, si $m(E) = 0$ entonces

$$\begin{aligned}0 \le |\mu(E)| = |\phi(1_E)| &\le \|\phi\| \|1_E\|_1 = \|\phi\| \int_0^{2\pi} |1_E|\\ &= \|\phi\| \int_0^{2\pi} 1_E = \|\phi\| \int_0^{2\pi} 1_E = \|\phi\|\, m(E)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(E) = 0$.

Como μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, por el teorema de Radon-Nikodym existe $g \in L^1$ tal que

$$\mu(E) = \int_E g(x)\, dx.$$

Por lo tanto

$$\phi(1_E) = \int_0^{2\pi} 1_E(x)\, g(x)\, dx.$$

Por linealidad se tiene que

$$\phi(h) = \int_0^{2\pi} h(x)\, g(x)\, dx$$

donde h es una función simple.

Sea $h \in L^\infty$ entonces existe una sucesión de funciones simples $\{h_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\|_\infty = 0.$$

Es decir, $\{h_n\}$ converge uniformemente a h.

Como $h \in L^\infty \subset L^1$ y $\phi \in (L^1)^*$

$$\begin{aligned}\phi(h) &= \lim_{n\to\infty} \phi(h_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} h_n(x)\, g(x)\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} h_n(x)\, g(x)\, dx = \int_0^{2\pi} h(x)\, g(x)\, dx\end{aligned}$$

Se ha probado que para $h \in L^\infty$ se tiene la representación integral

$$\phi(h) = \int_0^{2\pi} h(x)\, g(x)\, dx.$$

Antes de probar la representación integral para funciones de L^1, se probará que $g \in L^\infty$ y $\|g\|_\infty \leq \|\phi\|$.

Sea E un conjunto medible Lebesgue contenido en $[0, 2\pi]$ entonces

$$\left| \int_E g(t)\, dt \right| = |\phi(1_E)| \leq \|\phi\|\, \|1_E\|_1 = \|\phi\|\, \mu(E).$$

Luego

$$\left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E g(t)\, dt \right| \leq \|\phi\|.$$

Para $h > 0$ se consideran intervalos en $[0, 2\pi]$ de la forma $[x, x+h]$ ó $[x-h, x]$. Se tiene que

$$|g(x)| = \left| \frac{d}{dx} \left(\int_0^x g \right) \right| = \lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} g(t)dt \right| \leq \|\phi\|.$$

Entonces

$$|g(x)| \leq \|\phi\| \quad \text{para casi todo } x \in X.$$

De donde $g \in L^\infty$ y

$$\|g\|_\infty \leq \|\phi\|.$$

A continuación se verá la representación integral para funciones de L^1.

Dada $f \in L^1$, sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones simples tal que $\{h_n\}$ converge a f puntualmente.

Como la medida de Lebesgue de $[0, 2\pi]$ es finita, por el teorema de convergencia dominada se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - f\|_1 = 0$$

(con dominante de $|h_n - f|$ igual a $2|f| + 1$ para n suficientemente grande, esto se prueba usando la convergencia puntual).

De $\phi \in (L^1)^*$ se obtiene que ϕ es lineal y acotada, por lo tanto

$$|\phi(h_n) - \phi(f)| = |\phi(h_n - f)| \leq \|\phi\| \, \|h_n - f\|_1.$$

Luego

$$\begin{aligned}\phi(f) &= \lim_{n\to\infty} \phi(h_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} h_n(x)\, g(x)\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} h_n(x)\, g(x)\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx.\end{aligned}$$

El intercambio del límite con la integral se justifica usando el teorema de convergencia dominada con dominante de $|h_n g - fg|$ igual a $\|g\|_\infty(2|f|+1)$ para n suficientemente grande.

$\square$

4. El operador en L^2 de multiplicación por una función de L^∞.

Una propiedad importante de L^∞ es que, si $\phi \in L^\infty$ y $f \in L^2$ entonces $\phi f \in L^2$; de hecho,

$$\|\phi f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |\phi f|^2 \leq \int_0^{2\pi} \|\phi\|_\infty^2 |f|^2 = \|\phi\|_\infty^2 \int_0^{2\pi} |f|^2 \leq \|\phi\|_\infty^2 \|f\|_2^2.$$

De donde

$$\|\phi f\|_2^2 \leq \|\phi\|_\infty^2 \|f\|_2^2.$$

Esto nos permite definir el operador de multiplicación por funciones en L^∞.

Proposición 3.3. *Dada $\phi \in L^\infty$ sea $M_\phi : L^2 \to L^2$ dado por*

$$M_\phi(f) = \phi f.$$

Entonces M_ϕ es un operador lineal acotado y $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

Demostración. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in L^2$ entonces

$$M_\phi(\lambda f_1 + f_2) = \phi(\lambda f_1 + f_2) = \lambda\phi f_1 + \phi f_2 = \lambda M_\phi(f_1) + M_\phi(f_2).$$

Luego M_ϕ es lineal.

Para probar que M_ϕ es un operador acotado, se considera $f \in L^2$ entonces

$$\|M_\phi(f)\|_2 = \|\phi f\|_2 \le \|\phi\|_\infty \|f\|_2.$$

De donde M_ϕ es un operador acotado y

$$\|M_\phi\| \le \|\phi\|_\infty.$$

Para probar que

$$\|\phi\|_\infty \le \|M_\phi\|$$

basta demostrar que

$$m\{x \in [0, 2\pi] : |\phi(x)| > \|M_\phi\|\} = 0$$

donde m denota la medida de Lebesgue en $[0, 2\pi]$.

Sea C un conjunto medible Lebesgue, como $1_C \in L^2$

$$\int_0^{2\pi} 1_C|\phi|^2 = \|M_\phi(1_C)\|_2^2 \le \|M_\phi\|^2\|1_C\|_2^2 = \|M_\phi\|^2 \int_0^{2\pi} 1_C = \|M_\phi\|^2 m(C).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ sea

$$C_n = \{x \in [0, 2\pi] : |\phi(x)| > \|M_\phi\| + 1/n\}.$$

Entonces

$$(\|M_\phi\| + 1/n)^2 m(C_n) = \int_0^{2\pi} 1_{C_n}(\|M_\phi\| + 1/n)^2 \le \int_0^{2\pi} 1_{C_n}|\phi|^2 \le \|M_\phi\|^2 m(C_n).$$

Luego

$$(\|M_\phi\| + 1/n)^2 m(C_n) \le \|M_\phi\|^2 m(C_n).$$

De donde

$$m(C_n) = 0.$$

Por lo tanto

$$0 \le m\{x \in [0, 2\pi] : |\phi(x)| > \|M_\phi\|\} = m\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right\} \le \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) = 0$$

Se ha probado que $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. $\square$

5. Los coeficientes de Fourier.

En lo que sigue se usará la medida de Lebesgue normalizada. Para $n \in \mathbb{Z}$ sea

$$e_n(x) = e^{inx}$$

y para $f \in L^1$ se consideran los coeficientes de Fourier:

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\, dx.$$

Es importante resaltar que la integral anterior es finita ya que si $f \in L^1$ entonces

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\, dx \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx = \|f\|_1 < \infty.$$

Por lo tanto $\{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión bilateral de números complejos.

Más aún

$$|\widehat{f}(n)| = \left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\, dx \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx = \|f\|_1.$$

Luego

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1.$$

De donde

$$\|\{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$$

y $\{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty$.

Para un estudio detallado de los coeficientes y de las series de Fourier se pueden ver [**8, 15, 16, 29, 31**].

6. Los polinomios trigonométricos.

El *soporte de una sucesión* bilateral $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es:

$$\text{sop}(\{a_n\}_n) = \{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}.$$

Un *polinomio trigonométrico* es una función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ de la forma

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, e_n(x)$$

donde $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de números complejos que tiene soporte finito.

Se puede probar que

$$\widehat{f}(n) = a_n.$$

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de los polinomios trigonométricos.

Se usará la siguiente notación

$$\operatorname{sop} \widehat{f} = \operatorname{sop}(\{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}).$$

Con esta notación se tiene que

$$\mathcal{P} = \left\{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \quad \text{tales que} \quad f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\; e_n \quad \text{y} \quad \operatorname{sop} \widehat{f} \text{ es finito} \right\}.$$

Sean

$$\mathbb{Z}_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$$

y

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ f \in \mathcal{P} : \ \operatorname{sop} \widehat{f} \subseteq \mathbb{Z}_1 \right\}.$$

Las funciones de $\mathcal{P}_1$ son llamadas *polinomios analíticos* y simplemente son funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n\; e_n(x)$$

para algún $N \in \mathbb{N}$.

Sean

$$\mathbb{Z}_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$$

y

$$\mathcal{P}_2 = \left\{ f \in \mathcal{P} : \ \operatorname{sop} \widehat{f} \subseteq \mathbb{Z}_2 \right\}.$$

Las funciones de $\mathcal{P}_2$ son llamadas *polinomios anti-analíticos* y simplemente son funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{-1} a_n\; e_n(x)$$

para algún $N \in \mathbb{N}$.

CAPíTULO 4

Espacios de Hardy.

1. Espacios de Hardy de funciones analíticas.

Sea

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Los espacios de Hardy suelen definirse para funciones cuyo dominio es $\mathbb{D}$ (ver [**28**]).

Sin embargo tomando límite radial surgen unos espacios muy relacionados con los anteriores, formados por funciones cuyo dominio es la circunferencia

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Como $\mathbb{T}$ es isomorfo a $[0, 2\pi)$, se pueden considerar funciones cuyo dominio es simplemente $[0, 2\pi)$. En realidad estas son las funciones que se considerarán al comienzo de este capítulo.

El espacio $H^\infty(\mathbb{D})$ es el espacio de Hardy de las funciones analíticas y acotadas en $\mathbb{D}$. Es decir,

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \{F : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \ / \ F \text{ es analítica y acotada } \}.$$

Sea $1 \leq p < \infty$. A continuación se definirá $H^p(\mathbb{D})$, sin embargo, antes se se dará el siguiente resultado.

Proposición 4.1. *Dada $f \in L^p$ sea $F_f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definida por*

$$F_f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, r^{|n|}\, e^{in\theta}$$

donde $0 \leq r < 1$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

Se tiene que:

$\widehat{f}(n) = 0$ para todo $n < 0$ si y sólo si F_f es analítica.

La demostración de este resultado es sencilla.

Una definición natural de los espacios $H^p(\mathbb{D})$ es la siguiente:

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ F : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \ / \ F \text{ es analítica y } F(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\, r^n\, e^{in\theta} \text{ para alguna } f \in L^p \right\}.$$

Sea

$$F^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} F(re^{i\theta}).$$

Si

$$F(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\, r^n\, e^{in\theta}$$

entonces

$$F^*(e^{i\theta}) = f(\theta).$$

Otra manera de definir los espacios $H^p(\mathbb{D})$ es la que aparece en el libro de Rudin [**28**]: dada F analítica en $\mathbb{D}$, usando la medida de Lebesgue normalizada, sea

$$M_p(r, F) = \left(\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta \right)$$

y

$$M_\infty(r, F) = \sup_{0\le\theta<2\pi} |F(re^{i\theta})|.$$

Resulta que $M_p(r, F)$ es creciente como función de r.

Se definen

$$\|F\|_p = \lim_{r\to 1} M_p(r, F)$$

y

$$H^p(\mathbb{D}) = \{F : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \ / \ F \text{ es analítica y } \|F\|_p < \infty\}.$$

Sea $\{b_n\}_{n\ge 1}$ una sucesión de números complejos tal que $0 < |b_n| < 1$. Se dice que $\{b_n\}_{n\ge 1}$ satisface la *condición de Blaschke* cuando

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |b_n|) < \infty.$$

DEFINICIÓN 4.2. Sea $B : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función, se dice que B es el *producto de Blaschke* asociado a una sucesión $\{b_n\}_{n\ge 1}$ si

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - z}{1 - \overline{b_n} z} \frac{|b_n|}{b_n}$$

donde el producto converge.

PROPOSICIÓN 4.3. *Si* $\{b_n\}_{n\geq 1}$ *satisface la condición de Blaschke y* B *es el producto de Blaschke asociado a* $\{b_n\}_{n\geq 1}$ *entonces*

(i) B *representa una función analítica.*
(ii) B *es acotada por 1.*
(iii) $B \in H^\infty(\mathbb{D})$.
(iv) B *tiene límite radial c.s., es decir* $\lim_{r\to 1} B(re^{i\theta})$ *existe c.s.*
(v) *Si*

$$B^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} B(re^{i\theta})$$

entonces $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ *c.s.*
(vi) B *tiene sus ceros exactamente en los* b_n.

Los detalles de este resultado y otras propiedades de los productos de Blaschke pueden hallarse en [**26, 28**].

Sea $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función con una cantidad numerable de ceros $\{b_n\}_{n\geq 1}$ se puede considerar el producto de Blaschke B_F formado con estos ceros

$$B_F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - z}{1 - \overline{b_n} z} \frac{|b_n|}{b_n}.$$

Bajo ciertas hipótesis, este producto será convergente.

Si $F \in H^p(\mathbb{D})$ y F no es idénticamente nula entonces F tiene a lo sumo una cantidad numerable de ceros en $\mathbb{D}$. Además el producto de Blaschke B_F formado con los ceros de F es convergente (ver [**28**, Capítulo 15]).

PROPOSICIÓN 4.4. *El producto de dos funciones de* H^2 *está en* H^1.

DEMOSTRACIÓN. Este resultado es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarzs.

□

El resultado anterior es bastante natural. Mucho más interesante es el siguiente resultado, el cual indica que el recíproco de la proposición anterior es cierto.

PROPOSICIÓN 4.5. *Toda función de* H^1 *se descompone como el producto de dos funciones de* H^2.

Más precisamente, si $F \in H^1$ *entonces existen* $g, h \in H^1$ *tales que* $F = gh$ *y*

$$\|g\|_2 = \|h\|_2 = \|F\|_1.$$

Demostración. Solamente se dará la idea de la prueba.

Si $F \in H^1$ y f no es idénticamente nula se puede considerar el polinomio de Blaschke B_F formado con los ceros de f.

Como F/B_F no se anula, existe una determinación analítica del logaritmo. Por lo tanto se puede tomar la raíz cuadrada de F/B_F. Sea

$$h = \left(\frac{F}{B_F}\right)^{1/2}$$

entonces h es analítica.

Por el Teorema 17.9 y la Observación 17.11 de [**28**] se tiene que $F/B_F \in H^1$, por lo tanto $h \in H^2$.

Por otra parte, como $B_F \in H^\infty$ y $h \in H^2$ se tiene que $B_F h \in H^2$.

Entonces $F = B_F h^2 = (B_F h)h$ es el producto de dos funciones de H^2. □

2. Los espacios H^p.

Tomando en cuenta la Proposición 4.1 resulta natural considerar los espacios H^p que se definen en esta sección.

Para $1 \leq p \leq \infty$, sea H^p el conjunto de las funciones $f \in L^p$ con n-ésimo coeficiente de Fourier nulo para todo n negativo (obsérvese que si $f \in L^p$ entonces $f \in L^1$, por lo tanto tiene sentido hablar de los coeficientes de Fourier).

En forma más precisa se define H^p mediante

$$H^p = \{f \in L^p : \widehat{f}(n) = 0 \text{ para todo } n < 0\}.$$

Estos son los espacios de Hardy que se usarán en este trabajo.

Se observa que considerando la Proposición 4.1, se puede definir H^p como el subespacio de L^p que corresponde con las funciones analíticas.

Tomando en cuenta que $\mathbb{Z}_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ se tiene que

$$H^p = \{f \in L^p : \operatorname{sop} \widehat{f} \subseteq \mathbb{Z}_1\}.$$

Más aún se tiene que H^p es la clausura del espacio de los polinomios analíticos $\mathcal{P}_1$, en la topología de la norma de L^p,

$$H^p = \overline{\mathcal{P}_1}^{\,L^p}.$$

Otro conjunto que se considerará más adelante es H^p_o, el cual se define mediante

$$H^p_o = \{f \in L^p : \widehat{f}(n) = 0 \text{ para todo } n \leq 0\},$$

es decir

$$H^p_o = \{f \in H^p : \widehat{f}(0) = 0\}.$$

3. EL anulador del espacio H^1.

Por definición

$$(H^1)^\perp = \{\phi \in (L^1)^* \,:\, \phi(f) = 0 \text{ para toda } f \in H^1\}.$$

Tomando en cuenta el isomorfismo del Teorema 3.2 se sigue que

$$(H^1)^\perp \approx \left\{g \in L^\infty \,:\, \int_0^{2\pi} f\,g = 0 \text{ para toda } f \in H^1\right\}.$$

Sea Ω el espacio que está a la derecha en la expresión anterior, esto es,

$$\Omega = \left\{g \in L^\infty \,:\, \int_0^{2\pi} f\,g = 0 \text{ para toda } f \in H^1\right\}.$$

Como

$$H^1 = \overline{\mathcal{P}_1}^{\,L^1}$$

se puede probar que

$$\Omega = \left\{g \in L^\infty \,:\, \int_0^{2\pi} f\,g = 0 \text{ para toda } f \in \mathcal{P}_1\right\}.$$

Usando la expresión de los polinomios analíticos se sigue que

$$\Omega = \left\{g \in L^\infty \,:\, \int_0^{2\pi} e_k\,g = 0 \text{ para todo } k \geq 0\right\}.$$

De donde

$$\Omega = \left\{g \in L^\infty \,:\, \int_0^{2\pi} e_{-n}\,g = 0 \text{ para todo } n \leq 0\right\}.$$

Luego

$$\Omega = \{g \in L^\infty \,:\, \widehat{g}(n) = 0 \text{ para todo } n \leq 0\}\,.$$

Es decir,

$$\Omega = H_o^\infty.$$

Por lo tanto

$$(H^1)^\perp \approx H_o^\infty.$$

Es decir, $(H^1)^\perp$ es isomorfo a H_o^∞.

En forma análoga se puede ver que $(H_o^1)^\perp$ es isomorfo a H^∞.

4. El espacio $(H^1)^*$ es isomorfo al espacio cociente L^∞/H_o^∞.

Como H^1 es un subespacio de L^1, por el Teorema 2.24 se tiene que $(H^1)^*$ es isomorfo al espacio $(L^1)^*/(H^1)^\perp$.

Por el Teorema 3.2 se sabe que $(L^1)^*$ es isomorfo a L^∞.
Usando el Teorema 3.2 también se probó que $(H^1)^\perp$ es isomorfo a H_o^∞.

Juntando estos hechos se sigue que

$$(H^1)^* \approx (L^1)^*/(H^1)^\perp \approx L^\infty/H_o^\infty.$$

Esto demuestra que $(H^1)^*$ es isomorfo al espacio L^∞/H_o^∞.

En forma análoga se puede ver que $(H_o^1)^*$ es isomorfo al espacio L^∞/H^∞.

CAPíTULO 5

Espacios de Hilbert.

1. Espacios con producto interno y espacios de Hilbert.

Definición 5.1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un *producto interno* en X es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ tal que

(a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ para todo $x, y \in X$.
(b) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ para todo $x, y, z \in X$.
(c) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in X$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.
(d) $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in X$.
(e) $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Además se dice que $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *espacio con producto interno.*

Definición 5.2. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial con producto interno que es completo con respecto a la norma dada por el producto interno.

Proposición 5.3. *Si H es un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ entonces*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle T(x), y\rangle|. \tag{5.1}$$

Teorema 5.4. *Si H es un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ entonces existe un único operador $T^* \in L(H)$ tal que*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

para todo $x, y \in H$.

Además se tiene que $\|T\| = \|T^*\|$.

El operador T^* se llama el adjunto de T.

2. El espacio l^2 y el operador de desplazamiento (o shift).

Como antes, sea

$$l^2 = \left\{(x_n)_{n\geq 0}/ \quad x_n \in \mathbb{C} \quad \text{ y } \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < \infty\right\}.$$

Este es un espacio con producto interno, el cual está dado por:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 0} x_n \overline{y_n}.$$

El espacio l^2, con el producto interno indicado antes, es un espacio de Hilbert.

Uno de los operadores más importantes en l^2 es el desplazamiento hacia adelante S_o (por el término inglés shift). Se define $S_o : l^2 \to l^2$ como

$$S_o(a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots) = (0, a_0, a_1, a_2, \cdots).$$

Claramente

$$\|S_o(x)\| = \|x\|$$

para toda sucesión $x \in l^2$, por lo que S_o es un operador acotado y $\|S_o\| = 1$.

Sean $a = (a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots)$ y $b = (b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots)$. Se tiene que

$$\langle a, S_o^*(b)\rangle = \langle S_o(a), b\rangle = 0b_0 + \sum_{n\geq 1} a_{n-1}\overline{b_n} = \sum_{k\geq 0} a_k \overline{b_{k+1}}.$$

Luego

$$S_o^*(b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots) = (b_1, b_2, b_3, b_4, \cdots).$$

3. El espacio L^2 y el operador de multiplicación por e_1 (o shift).

Como antes, sea

$$\mathcal{L}^2 = \left\{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \text{ tales que } f \text{ es medible y } \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Dadas $f, g \in \mathcal{L}^2$ sea

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Esta función $\langle\cdot,\cdot\rangle$ satisface las condiciones (a), (b), (c) y (d) de la definición de producto interno. En este caso $\langle f, f\rangle = 0$ no implica $f = 0$.

Sin embargo, $\langle f, f\rangle = 0$ implica $f = 0$ c.s. (con respecto a la medida de Lebesgue).

Se puede considerar la siguiente relación de equivalencia: $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ c.s. Considerando las clases de equivalencia y pasando a un cociente se obtiene el espacio L^2.

Si se usa $\widetilde{f}$ para referirse a la clase de equivalencia de f se puede definir

$$\langle \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle = \langle f, g\rangle.$$

Se puede probar que L^2 es un espacio con producto interno, más aún L^2 es un espacio de Hilbert.

Por comodidad se usará f para referirse a los elementos de L^2, en lugar de usar $\widetilde{f}$.

El operador shift en L^2 es el operador $S : L^2 \to L^2$ dado por

$$(Sf)(x) = e^{ix} f(x)$$

para toda $f \in L^2$.

Por lo tanto, S es el operador de multiplicación por e_1, es decir,

$$Sf = e_1 f = M_{e_1}(f).$$

Claramente

$$\|S(f)\| = \|f\|$$

para toda función $f \in L^2$, por lo que S es un operador acotado y $\|S\| = 1$.

Además se tiene que $S^{-1} : L^2 \to L^2$ está dado por

$$(S^{-1} f)(x) = e^{-ix} f(x)$$

para toda $f \in L^2$.

En este caso

$$S^* = S^{-1}.$$

4. Ortogonalidad.

Definición 5.5. Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno. Un subconjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de X se llama *ortogonal* si

$$\langle v_\alpha, v_\beta\rangle = 0 \qquad \text{para} \qquad \alpha \neq \beta.$$

Definición 5.6. Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno. Un subconjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de X se llama *ortonormal* si

$$\langle v_\alpha, v_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Definición 5.7. Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno. Un subconjunto ortonormal $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de X se dice que es un *sistema ortonormal completo* cuando, el único $h \in X$ tal que

$$\langle h, v_\alpha\rangle = 0$$

para todo $\alpha \in A$, es $h = 0$.

5. El espacio de Hardy-Hilbert.

Un ejemplo importante de espacio de Hilbert es $H^2(\mathbb{D})$, también conocido como el espacio de Hardy-Hilbert (ver [**21**]). Este es el espacio de funciones analíticas en el disco unitario $\mathbb{D}$, definido como

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \ / \ f \text{ es analítica, } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ y } \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Como f es analítica en $\mathbb{D}$ el desarrollo en serie para f que aparece en la definición anterior es el desarrollo en serie de Taylor y la serie converge uniformemente a f.

Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle : H^2(\mathbb{D}) \times H^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n},$$

donde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{y} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

A continuación se probará que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno.

Sean $f, g, h \in H^2(\mathbb{D})$ dadas por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ , \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \ , \qquad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Por la definición de $H^2(\mathbb{D})$ se tiene que

$$\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty \ , \qquad \sum_{n\geq 0} |b_n|^2 < \infty \ , \qquad \sum_{n\geq 0} |c_n|^2 < \infty.$$

1-. $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$.

En efecto,

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\overline{a_n} b_n} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_n} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} b_n \overline{a_n}} = \overline{\langle g, f\rangle}.$$

2-. $\langle f+g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$.

Para probar esto, primero se observa que

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

Luego,

$$\begin{aligned}\langle f+g, h\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\overline{c_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \overline{c_n} + b_n \overline{c_n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{c_n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \overline{c_n} = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle.\end{aligned}$$

3-. $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda \langle f, g\rangle$, si $\lambda \in \mathbb{C}$.

En efecto,

$$(\lambda f)(z) = \lambda f(z) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda\, a_n z^n.$$

Entonces,

$$\langle \lambda f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda\, a_n \overline{b_n} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n} = \lambda \langle f, g\rangle.$$

4-. Si $f \neq 0$ entonces $\langle f, f\rangle > 0$.

Para probar esto, se nota que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entonces existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_o} \neq 0$.

Además se sabe que

$$\langle f, f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

Como $a_{n_o} \neq 0$ entonces $|a_{n_o}|^2 > 0$.

Por lo tanto

$$\langle f, f\rangle > 0.$$

5-. Si $\langle f, f\rangle = 0$ entonces $f = 0$.

Para probar esto, se observa que si $\langle f, f\rangle = 0$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = 0$$

Como se trata de una suma de términos positivos se sigue que

$$|a_n|^2 = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

De donde, $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego, $f = 0$.

Por lo anterior, $\langle \cdot, \cdot\rangle : H^2(\mathbb{D}) \times H^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ es un producto interno.

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dado por

$$u_n(z) = z^n.$$

A continuación se probará que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal en $H^2(\mathbb{D})$.

Antes que nada se observa que para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$u_n(z) = z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{nk} z^k$$

donde

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}.$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\langle u_n, u_m\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{nk}\overline{\delta_{mk}}.$$

De donde

$$\langle u_n, u_n\rangle = 1$$

y

$$\langle u_n, u_m\rangle = 0 \text{ para } n \neq m.$$

Por lo tanto, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal en $H^2(\mathbb{D})$.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Se puede notar que

$$\langle f, u_n \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{\delta_{nk}} = a_n \tag{5.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto f tiene el siguiente desarrollo en serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, u_n \rangle \, u_n(z). \tag{5.3}$$

Más aún

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 = \sum_{n \geq 0} |\langle f, u_n \rangle|^2. \tag{5.4}$$

A continuación se probará que el sistema ortonormal $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es completo en $H^2(\mathbb{D})$.

Si se supone que

$$\langle f, u_n \rangle = 0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

entonces

$$a_n = 0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De donde $f = 0$.

Por lo tanto, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal completo en $H^2(\mathbb{D})$.

A continuación se probará que $H^2(\mathbb{D})$ es un conjunto completo.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $m, n > N$, entonces $\|f_m - f_n\|_2 < \varepsilon$.

Como $f_n, f_m \in H^2(\mathbb{D})$, entonces

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^n z^k \quad \text{y} \quad f_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^m z^k.$$

Lo cual implica que,

$$f_m - f_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^m z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^n z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^m - a_k^n) \, z^k.$$

De donde se deduce lo siguiente

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^m - a_k^n|^2 = \langle f_m - f_n, f_m - f_n \rangle = \|f_m - f_n\|_2^2 < \varepsilon^2.$$

Por lo tanto,

$$|a_k^m - a_k^n| < \varepsilon, \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Entonces la sucesión $\{a_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ es completo, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $a_k \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_k^n = a_k.$$

Se define $g(z)$ de la manera siguiente

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k.$$

Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^n\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_k^n\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k = g(z).$$

Por otro lado

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\lim_{n\to\infty} a_k^n|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |a_k^n|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k^n|^2 < \infty.$$

Luego $g \in H^2(\mathbb{D})$.

Lo cual implica que $H^2(\mathbb{D})$ es un espacio completo y por lo tanto $H^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert.

CAPíTULO 6

El teorema de Nehari.

En los primeros años del siglo veinte se diseñaron los fundamentos de la teoría de operadores y del análisis funcional usando como base los espacios de funciones. Para la definición de estos espacios de funciones se utilizó la teoría de conjuntos que había desarrollado Cantor.

Sea A un operador en un espacio de Hilbert H, separable y de dimensión infinita, y sea $\{v_n : n \geq 0\}$ una base ortonormal de este espacio. Si $A : H \to H$ es un operador, se define la *matriz del operador* A *con respecto a la base ortonormal* $\{v_n\}$ como la matriz cuya entrada (m, n) está dada por $\langle Av_n, v_m\rangle_H$.

Un operador puede tener asociadas matrices diferentes si se escogen bases ortonormales diferentes. Sin embargo, la representación matricial es muy útil, pues la acción de un operador sobre un vector se puede ver como la multiplicación de la matriz por un vector columna (cuyas coordenadas son los coeficientes de representación del vector en la base dada).

A continuación se mostrará que las matrices de Hankel están asociadas a los operadores de Hankel.

1. Prueba del teorema de Nehari usando el teorema de Hahn Banach.

Dada una sucesión de números complejos $\alpha = \{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ sea

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{N-1} & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & & \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ \alpha_{N-1} & & & \dots & \alpha_{2(N-1)} & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Si $\alpha \in l^2$ se define el *operador de Hankel* $\Gamma_\alpha : l^2 \to l^2$ como el operador con matriz A_α en la base canónica de l^2 que está definido en el subconjunto denso de las sucesiones con soporte finito.

Las ideas de las demostraciones de los resultados siguientes de esta sección, están basadas en el artículo de Peller [**24**].

PROPOSICIÓN 6.1. *Dada* $\alpha \in l^2$ *sea* $\Gamma_\alpha : l^2 \to l^2$ *un operador de Hankel. Sea* $\psi \in L^\infty$ *tal que* $\alpha_n = \widehat{\psi}(n)$ *para todo* $n \geq 0$*. Entonces* Γ_α *es acotado y*

$$\|\Gamma_\alpha\| \leq \|\psi\|_\infty.$$

Más aún

$$\|\Gamma_\alpha\| \leq \inf\{\|\psi\|_\infty : \alpha_n = \widehat{\psi}(n) \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\psi \in L^\infty$ tal que $\alpha_n = \widehat{\psi}(n)$ para todo $n \geq 0$.

Sean a y b dos sucesiones con soporte finito. Entonces $a, b \in l^2$.

Se tiene que

$$\langle \Gamma_\alpha\, a, b\rangle_{l^2} = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0} \alpha_{j+k}\, a_j\, \overline{b_k}.$$

Tomando $m = j + k$ se obtiene

$$\langle \Gamma_\alpha\, a, b\rangle_{l^2} = \sum_{m\geq 0}\sum_{j=0}^{m} \alpha_m\, a_j\, \overline{b_{m-j}} = \sum_{m\geq 0} \alpha_m \sum_{j=0}^{m} a_j\, \overline{b_{m-j}} = \sum_{m\geq 0} \widehat{\psi}(m) \sum_{j=0}^{m} a_j\, \overline{b_{m-j}}.$$

Sean

$$f(t) = \sum_{j\geq 0} a_j\, e^{ijt} \qquad g(t) = \sum_{k\geq 0} \overline{b_k}\, e^{ikt}.$$

Se considera

$$q = fg.$$

Tal como se indicó en el primer capítulo

$$q(t) = \left(\sum_{j\geq 0} a_j\, e^{ijt}\right)\left(\sum_{k\geq 0} \overline{b_k}\, e^{ikt}\right) = \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\, \overline{b_{m-j}}\right) e^{imt}.$$

Como a, b son de soporte finito entonces las sumas anteriores son finitas. De donde q es un polinomio trigonométrico.

Se tiene que

$$\widehat{q}(m) = \langle q, e_m \rangle = \langle fg, e_m \rangle = \sum_{j=0}^{m} a_j \, \overline{b_{m-j}}.$$

Luego

$$\langle \Gamma_\alpha a, b \rangle_{l^2} = \sum_{m \geq 0} \widehat{\psi}(m) \, \widehat{q}(m).$$

Más aún

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma_\alpha \, a, b \rangle_{l^2} &= \sum_{m \geq 0} \sum_{j=0}^{m} a_j \, \overline{b_{m-j}} \int_0^{2\pi} \psi(t) e^{-ikt} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \psi(t) \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j \, \overline{b_{m-j}} \right) e^{-ikt} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \psi(t) \, q(-t) dt.
\end{aligned}$$

Como q es un polinomio trigonométrico entonces $q \in H^1$. Considerando la medida de Lebesgue normalizada, usando la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Cauchy-Schwartz se obtiene

$$\begin{aligned}
|\langle \Gamma_\alpha \, a, b \rangle_{l^2}| &= \left| \int_0^{2\pi} \psi(t) \, q(-t) dt \right| \\
&\leq \|\psi\|_\infty \|q\|_1 \\
&= \|\psi\|_\infty \|fg\|_1 \\
&\leq \|\psi\|_\infty \|f\|_2 \|g\|_2.
\end{aligned}$$

Por la igualdad de Parseval $\|f\|_2 = \|a\|_2$ y $\|g\|_2 = \|b\|_2$. Luego

$$|\langle \Gamma_\alpha \, a, b \rangle_{l^2}| \leq \|\psi\|_\infty \|a\|_2 \|b\|_2.$$

Se concluye que Γ_α es acotado y

$$\|\Gamma_\alpha\| \leq \|\psi\|_\infty.$$

Más aún se ha probado que

$$\|\Gamma_\alpha\| \leq \text{ínf}\{\|\psi\|_\infty : \alpha_n = \widehat{\psi}(n) \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

$\square$

El siguiente resultado contiene el recíproco de la proposición anterior, se trata del teorema de Nehari [**22**], el cual caracteriza los operadores de Hankel Γ_α acotados en l^2.

TEOREMA 6.2 (Nehari). *Dada $\alpha \in l^2$ sea $\Gamma_\alpha : l^2 \to l^2$ un operador de Hankel. Γ_α es acotado si y sólo si existe una función $\psi_o \in L^\infty$ tal que $\alpha_n = \widehat{\psi_o}(n)$ para todo $n \geq 0$.*

En este caso

$$\|\Gamma_\alpha\| = \|\psi_o\|_\infty = \text{ínf}\{\|\psi\|_\infty : \alpha_n = \widehat{\psi}(n) \textit{ para todo } n \geq 0\}.$$

DEMOSTRACIÓN.

($\Leftarrow$) Esta implicación es consecuencia de la proposición anterior.

($\Rightarrow$) Se supone que Γ_α es acotado. Se considera al conjunto de los polinomios trigonométricos, $\mathcal{P}_1$, y se define $L_\alpha : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{C}$ mediante

$$L_\alpha(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \, \widehat{q}(n).$$

La prueba de la linealidad de L_α es sencilla y se da a continuación. Sean $p, q \in \mathcal{P}_1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea n fijo, usando la linealidad del producto interno se tiene que

$$\widehat{\lambda p + q}(n) = \lambda \widehat{p}(n) + \widehat{q}(n).$$

Luego

$$\begin{aligned} L_\alpha(\lambda p + q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \, \widehat{\lambda p + q}(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \, (\lambda \widehat{p}(n) + \widehat{q}(n)) \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \, \widehat{p}(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \, \widehat{q}(n) \\ &= \lambda L_\alpha(q) + L_\alpha(q). \end{aligned}$$

A continuación se probará que

$$\|L_\alpha\| \leq \|\Gamma_\alpha\|.$$

Caso 1: Sea $\alpha \in l^1$.

En este caso se puede definir L_α en todo H^1. Es decir, sea $L_\alpha : H^1 \to \mathbb{C}$ mediante

$$L_\alpha(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \, \widehat{q}(n).$$

Si $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, por la desigualdad de Hölder

$$|L_\alpha(q)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \,\widehat{q}(n)\right| \leq \|\alpha\|_1 \|\widehat{q}\|_\infty \leq \|\alpha\|_1 \|q\|_1.$$

Luego $L_\alpha(q) \in \mathbb{C}$, de donde L_α está bien definida. También resulta ser lineal.

Más aún, de la desigualdad anterior se obtiene que L_α es acotado en H^1 y

$$\|L_\alpha\| \leq \|\alpha\|_1.$$

Sea $q \in H^1$ tal que $\|q\|_1 \leq 1$. Por la Proposición 4.5 se tiene que q admite una representación de la forma $q = fg$, donde $f, g \in H^2$ y $\|f\|_2 \leq 1$, $\|g\|_2 \leq 1$. Como

$$\widehat{q}(n) = \sum_{j=0}^{n} \widehat{f}(j)\, \widehat{g}(n-j).$$

Se obtiene que

$$L_\alpha(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \,\widehat{q}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{j=0}^{n} \widehat{f}(j)\, \widehat{g}(n-j) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{j+k}\, \widehat{f}(j)\, \widehat{g}(k).$$

Sean

$$a_j = \widehat{f}(j) \qquad \text{y} \qquad b_k = \overline{\widehat{g}(k)}.$$

Luego

$$L_\alpha(q) = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0} \alpha_{j+k}\, a_j\, \overline{b_k} = \langle \Gamma_\alpha\, a, b\rangle.$$

De donde

$$|L_\alpha(q)| \leq \|\Gamma_\alpha\|\, \|a\|_2\, \|b\|_2 = \|\Gamma_\alpha\|\, \|f\|_2\, \|g\|_2 \leq \|\Gamma_\alpha\|.$$

Por lo tanto

$$\|L_\alpha\| \leq \|\Gamma_\alpha\|.$$

Caso 2: Sea $\alpha = \{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión arbitraria en l^2.

Sea $0 < r < 1$. Se considera la sucesión $\alpha^{\,r} = \left\{\alpha^{\,r}_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ dada por

$$\alpha^{\,r}_j = r^j\, \alpha_j.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarzs

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha^{\,r}_j| = \sum_{j=0}^{\infty} r^j\, |\alpha_j| \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} r^{2j}\right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^{k}\right)^{1/2} \|\alpha\|_2 < \infty. \tag{6.1}$$

De donde $\alpha^{\,r} \in l^1$.

Por otra parte se puede considerar el operador de multiplicación por $\{r^j\}_{j=0}^{\infty}$ en l^2. Este operador es $D_r : l^2 \to l^2$ dado por

$$D_r(\alpha) = \alpha^{\,r},$$

es decir,

$$D_r\left(\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}\right) = \left\{\alpha_j^{\,r}\right\}_{j=0}^{\infty} = \left\{r^j\,\alpha_j\right\}_{j=0}^{\infty}.$$

Como

$$\|D_r(\alpha)\|_2^2 = \|\alpha^{\,r}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\,\alpha_j^{\,r}|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |r^j\,\alpha_j|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_j|^2 = \|\alpha\|_2^2$$

se tiene que

$$\|D_r\| \leq 1.$$

Además

$$\begin{aligned}\langle \Gamma_{\alpha^r} a, b\rangle &= \sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0} \alpha_{j+k}^{\,r}\, a_j\, \overline{b_k} = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0} r^{j+k}\,\alpha_{j+k}\, a_j\, \overline{b_k} \\ &= \sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0} \alpha_{j+k}\, r^j\, a_j\, r^k\, \overline{b_k} = \langle D_r\,\Gamma_\alpha\, D_r a, b\rangle_{l^2}.\end{aligned}$$

Luego

$$\langle \Gamma_{\alpha^r} a, b\rangle_{l^2} = \langle D_r\,\Gamma_\alpha\, D_r a, b\rangle_{l^2}.$$

Por lo tanto

$$\langle \Gamma_{\alpha^r} a - D_r\,\Gamma_\alpha\, D_r a, b\rangle_{l^2} = 0.$$

Como b es arbitrario, se tiene que $\Gamma_{\alpha^r} a - D_r\,\Gamma_\alpha\, D_r a = 0$.

Entonces

$$\Gamma_{\alpha^r} = D_r\,\Gamma_\alpha\, D_r.$$

Luego Γ_{α^r} es acotado y

$$\|\Gamma_{\alpha^r}\| = \|D_r\,\Gamma_\alpha\, D_r\| \leq \|\Gamma_\alpha\|.$$

De donde

$$\|\Gamma_{\alpha^r}\| \leq \|\Gamma_\alpha\|.$$

Como $\alpha^{\,r} \in l^1$, por lo probado en el caso anterior se tiene que

$$\|L_{\alpha^r}\| \leq \|\Gamma_{\alpha^r}\|.$$

Por lo tanto

$$\|L_{\alpha^r}\| \leq \|\Gamma_{\alpha^r}\| \leq \|\Gamma_\alpha\|.$$

Es decir $\{\|L_{\alpha^r}\|\}_{r\in(0,1)}$ está uniformemente acotada por el valor $\|\Gamma_\alpha\|$.

Por otro lado, si $q \in H^1$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 1}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\,\widehat{q}(n)-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^r\,\widehat{q}(n)\right| &= \lim_{r\to 1}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\,\widehat{q}(n)-\sum_{n=0}^{\infty}r^n\,\alpha_n\,\widehat{q}(n)\right|\\
&= \left|\lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}(1-r^n)\,\alpha_n\,\widehat{q}(n)\right|\\
&= 0.
\end{aligned}$$

El intercambio del límite con la serie se obtiene en virtud del teorema de convergencia dominada y usando un razonamiento análogo al de (6.1) pero para $(1-r^n)$ en lugar de r^n.

Sea

$$L_\alpha(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\,\widehat{q}(n).$$

Se ha probado que $\{L_{\alpha^r}\}_{r\in(0,1)}$ converge fuertemente a L_α cuando $r\to 1$. Es decir,

$$L_{\alpha^r}f\to L_\alpha f$$

para toda $f\in H^1$.

La linealidad de L_α en H^1 se obtiene de la siguiente manera. Si $f,g\in H^1$ y $\lambda\in\mathbb{C}$ entonces

$$L_\alpha(\lambda\, f+g)=\lim_{r\to 1}L_{\alpha^r}(\lambda\, f+g)=\lambda\lim_{r\to 1}L_{\alpha^r}(f)+\lim_{r\to 1}L_{\alpha^r}(g)=\lambda\, L_\alpha(f)+L_\alpha(g).$$

Por el principio de acotación uniforme se tiene que L_α es continua y

$$\|L_\alpha\|\le\|\Gamma_\alpha\|.$$

Por el teorema de Hahn-Banach, para espacios normados (Teorema 2.19), se tiene que existe $\Phi : L^1\to\mathbb{C}$ tal que $\Phi(q)=L_\alpha(q)$ para todo $q\in H^1$ y además

$$\|\Phi\|=\|L_\alpha\|.$$

Luego $\Phi\in(L^1)^*$.

Como $(L^1)^*$ es isomorfo al espacio L^∞, se tiene que existe $\phi\in L^\infty$ tal que

$$\Phi(f)=\int_0^{2\pi}f(x)\,\phi(x)\,dx$$

para cada $f\in L^1$ y además $\|\Phi\|=\|\phi\|_\infty$.

Además para todo $n \geq 0$ se tiene que

$$\alpha_n = L_\alpha(e_n) = \Phi(e_n) = \int_0^{2\pi} e_n(x)\,\phi(x)\,dx = \widehat{\phi}(-n).$$

Considerando la extensión periódica de ϕ a todo $\mathbb{R}$ se puede definir $\psi_o : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\psi_o(t) = \phi(-t).$$

Obviamente $\psi_o \in L^\infty$ y

$$\|\psi_o\|_\infty = \|\phi\|_\infty.$$

Se tiene que para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(-n) &= \int_0^{2\pi} e^{inx}\,\phi(x)\,dx = \int_0^{2\pi} e^{inx}\,\psi_o(-x)\,dx \\ &= \int_0^{-2\pi} e^{-int}\,\psi_o(t)\,(-1)\,dt = \int_0^{2\pi} e^{-int}\,\psi_o(t)\,dt = \widehat{\psi_o}(n).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\alpha_n = \widehat{\psi_o}(n)$$

para todo $n \geq 0$.

Para probar la expresión para las normas se toman en cuenta las igualdades y desigualdades anteriores

$$\|\psi_o\|_\infty = \|\phi\|_\infty = \|\Phi\| = \|L_\alpha\| \leq \|\Gamma_\alpha\|.$$

Además por la proposición anterior se obtiene

$$\|\Gamma_\alpha\| \leq \text{ínf}\{\|\psi\|_\infty : \alpha_n = \widehat{\psi}(n) \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

□

2. El teorema de Nehari usando teoría de operadores.

A continuación se presentarán los operadores de Hankel los cuales permiten expresar el teorema de Nehari usando el operador de multiplicación en L^2.

Sea H^{2-} el conjunto de las funciones $f \in L^2$ tales que $\widehat{f}(n) = 0$ para todo $n \geq 0$ y sea P^- la proyección ortogonal en L^2 con rango H^{2-}.

Proposición 6.3. *Sea* $\alpha = \{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ *una sucesión de números complejos. Sea* $\Gamma_\alpha : l^2 \to l^2$ *dada por*

$$\langle \Gamma_\alpha \, a, b\rangle_{l^2} = \sum_{j\geq 0} \sum_{k>0} \alpha_{j+k} \, a_j \, \overline{b_k}.$$

Sea $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ *un operador lineal tal que*

$$\langle \Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2} = \alpha_{k+j} \qquad \text{para todo } k \geq 0, j > 0.$$

Si $f \in \mathcal{P}_1$, $g \in \mathcal{P}_2$ *están dadas por*

$$f = \sum_{j\geq 0} a_j \, e_j \quad \text{ y } \quad g = \sum_{k>0} b_k \, e_{-k}$$

entonces

$$\langle \Gamma \, f, g\rangle_{L^2} = \langle \Gamma_\alpha \, a, b\rangle_{l^2}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma \, f, g\rangle_{L^2} &= \left\langle \Gamma \left(\sum_{j\geq 0} a_j \, e_j \right), \sum_{k>0} b_k \, e_{-k} \right\rangle_{L^2} \\
&= \sum_{j\geq 0} \sum_{k>0} \langle \Gamma \, e_j, e_{-k}\rangle_{L^2} \; a_j \, \overline{b_k} \\
&= \sum_{j\geq 0} \sum_{k>0} \alpha_{j+k} \, a_j \, \overline{b_k} = \langle \Gamma_\alpha \, a, b\rangle_{l^2}.
\end{aligned}$$

□

Tal como se indicó antes el operador shift en L^2 es el operador $S : L^2 \to L^2$ dado por

$$(Sf)(x) = e^{ix} f(x)$$

para toda $f \in L^2$.

Proposición 6.4. *Sea* $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ *un operador lineal. Si existe una sucesión de números complejos* $\alpha = \{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ *tal que*

$$\langle \Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2} = \alpha_{k+j}$$

para todo $k \geq 0$, $j > 0$. *Entonces*

(1) $\langle P^- S\Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2} = \langle \Gamma S e_k, e_{-j}\rangle_{L^2}$ *para todo* $k \geq 0$, $j > 0$.

(2) $P^- S\Gamma = \Gamma S \mid_{H^2}$ *si* Γ *es continuo.*

Demostración.

(1) Sea P^+ la proyección ortogonal en L^2 con rango H^2.

Sean $k \geq 0, j > 0$

$$\begin{aligned}\langle P^- S\Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2} &= \langle P^- S\Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2} + \langle P^+ S\Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2}\\ &= \langle S\Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2} = \langle \Gamma e_k, S^{-1} e_{-j}\rangle_{L^2} = \langle \Gamma e_k, e_{-j-1}\rangle_{L^2}\\ &= \alpha_{k+j+1} = \langle \Gamma e_{k+1}, e_{-j}\rangle_{L^2} = \langle \Gamma S e_k, e_{-j}\rangle_{L^2}\end{aligned}$$

(2) Como H^{2-} está generado por $\{e_{-j}\}_{j>0}$, de lo hecho en (1) se tiene que

$$P^- S\Gamma = \Gamma S\mid_{H^2}.$$

□

Sea $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ un operador lineal, se dice que Γ es un *operador de Hankel* cuando

$$P^- S\Gamma = \Gamma S\mid_{H^2}.$$

El siguiente resultado muestra la estrecha relación que hay entre los operadores de Hankel y las matrices de Hankel.

Proposición 6.5. *Sea $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ un operador lineal y continuo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Γ *es un operador de Hankel.*

(b) *Existe una sucesión de números complejos $\alpha = \{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ tal que*

$$\langle \Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2} = \alpha_{k+j}$$

para todo $k \geq 0$, $j > 0$.

Demostración.

Por la Proposición 6.4 se obtiene que (b) implica (a).

A continuación se probará que (a) implica (b).

Dados $k \geq 0$, $j > 0$, considere $n = j - 1$ entonces $n \geq 0$ y

$$\begin{aligned}\langle \Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2} &= \langle \Gamma e_k, e_{-n-1}\rangle_{L^2} = \langle \Gamma e_k, S^{-n} e_{-1}\rangle_{L^2} = \langle S^n \Gamma e_k, e_{-1}\rangle_{L^2}\\ &= \langle P^- S^n \Gamma e_k, e_{-1}\rangle_{L^2} = \langle \Gamma S^n e_k, e_{-1}\rangle_{L^2} = \langle \Gamma e_{k+n}, e_{-1}\rangle_{L^2}\\ &= \langle \Gamma e_{k+j-1}, e_{-1}\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

Se define

$$\alpha_n = \langle \Gamma e_{n-1}, e_{-1} \rangle_{L^2}.$$

De donde

$$\langle \Gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2} = \alpha_{k+j}$$

para todo $k \geq 0$, $j > 0$. □

PROPOSICIÓN 6.6. *Sea $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ un operador lineal y continuo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Γ *es un operador de Hankel.*

(b) *Existe $\gamma \in L^2$ tal que*

$$\Gamma = P^- M_\gamma.$$

(c) *Existe $\gamma \in L^2$ tal que*

$$\langle \Gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2} = \widehat{\gamma}(-k-j)$$

para todo $k \geq 0$, $j > 0$.

DEMOSTRACIÓN.

Primero se probará la equivalencia entre (b) y (c).

Sea $\gamma \in L^2$, si $k \geq 0$, $j > 0$ entonces

$$\begin{aligned} \langle P^- M_\gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2} &= \langle M_\gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2} = \langle e_k \gamma, e_{-j} \rangle_{L^2} = \langle S^k \gamma, e_{-j} \rangle_{L^2} \\ &= \langle \gamma, S^{-k} e_{-j} \rangle_{L^2} = \langle \gamma, e_{-k-j} \rangle_{L^2} = \widehat{\gamma}(-k-j). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle P^- M_\gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2} = \widehat{\gamma}(-k-j). \tag{6.2}$$

De (6.2) se deduce que (b) implica (c).

Por otro lado si se supone que

$$\langle \Gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2} = \widehat{\gamma}(-k-j)$$

usando (6.2) se tendrá que

$$\langle \Gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2} = \langle P^- M_\gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2}.$$

Como H^2 está generado por $\{e_k\}_{k\geq 0}$ y H^{2-} está generado por $\{e_{-j}\}_{j>0}$ se sigue que

$$\Gamma = P^- M_\gamma.$$

Esto prueba que (c) implica (b).

$(a) \Rightarrow (b)$ Sea $\gamma = \Gamma e_0$ entonces $\gamma \in L^2$. Sea $n \geq 0$ entonces

$$P^- M_\gamma e_n = P^- e_n \gamma = P^- S^n \gamma = P^- S^n \Gamma e_0 = \Gamma S^n e_0 = \Gamma e_n.$$

Como H^2 está generado por $\{e_j\}_{j\geq 0}$ se tiene que $\Gamma = P^- M_\gamma$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Si $k \geq 0$, $j > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle P^- S \Gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2} &= \langle S \Gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2} = \langle \Gamma e_k, S^{-1} e_{-j} \rangle_{L^2} = \langle \Gamma e_k, e_{-j-1} \rangle_{L^2} \\
&= \langle P^- \gamma e_k, e_{-j-1} \rangle_{L^2} = \langle \gamma e_k, e_{-j-1} \rangle_{L^2} = \langle e_1 \gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2} \\
&= \langle M_\gamma e_{k+1}, e_{-j} \rangle_{L^2} = \langle P^- M_\gamma e_{k+1}, e_{-j} \rangle_{L^2} = \langle \Gamma e_{k+1}, e_{-j} \rangle_{L^2} \\
&= \langle \Gamma S e_k, e_{-j} \rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Luego $P^- S \Gamma = \Gamma S \mid_{H^2}$. De donde Γ es un operador de Hankel. □

Para $\gamma \in L^\infty$ se puede considerar $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ como el operador dado por $\Gamma = P^- M_\gamma$. Entonces

$$\|\Gamma\| = \|P^- M_\gamma\| \leq \|P^-\| \|M_\gamma\| \leq \|M_\gamma\| = \|\gamma\|_\infty.$$

Para operadores de Hankel de H^2 en H^{2-} se tiene el siguiente teorema de Nehari.

Usando todo lo presentado en este trabajo el teorema de Nehari puede expresarse de la siguiente manera.

Teorema 6.7 (Nehari). *Sea $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ un operador de Hankel. Γ es acotado si y sólo si existe $\phi_o \in L^\infty$ tal que*

(a) $\widehat{\phi_o}(-k-j) = \langle \Gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2}$ *para todo* $k \geq 0$, $j > 0$.

(b) $\Gamma = P^- M_{\phi_o}$.

En este caso

$$\|\Gamma\| = \text{ínf}\{\|\phi_o - h\|_\infty : h \in H_o^\infty\} = \|\phi_o\|_\infty.$$

Demostración.

Sea $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ un operador de Hankel acotado.

Se sabe que existe una sucesión de números complejos $\alpha = \{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ tal que

$$\langle \Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2} = \alpha_{k+j}$$

para todo $k \geq 0$, $j > 0$.

Sea $\Gamma_\alpha : l^2 \to l^2$ dada por

$$\langle \Gamma_\alpha\, a, b\rangle_{l^2} = \sum_{j\geq 0}\sum_{k>0} \alpha_{j+k}\, a_j\, \overline{b_k}$$

para $a, b \in l^2$. En virtud de la Proposición 6.3 se tiene que Γ_α es acotada.

Por el Teorema 6.2 existe una función $\psi_o \in L^\infty$ tal que $\alpha_n = \widehat{\psi_o}(n)$ para todo $n \geq 0$.

Sea ϕ_o dada por

$$\phi_o(t) = \psi_o(-t).$$

Claramente $\phi_o \in L^\infty$.

Luego para $k \geq 0$, $j > 0$ se tiene

$$\langle \Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2} = \alpha_{k+j} = \widehat{\psi_o}(k+j) = \widehat{\phi_o}(-k-j)$$

Luego

$$\Gamma = P^- M_{\phi_o}.$$

Recíprocamente, sea $\phi_o \in L^\infty$ una función que satisface (a) y (b).

Se define ψ_o mediante

$$\psi_o(t) = \phi_o(-t).$$

Sea $\alpha = \{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dada por

$$\alpha_n = \widehat{\psi_o}(n).$$

Sea $\Gamma_\alpha : l^2 \to l^2$ definida por

$$\langle \Gamma_\alpha\, a, b\rangle_{l^2} = \sum_{j\geq 0}\sum_{k>0} \alpha_{j+k}\, a_j\, \overline{b_k}.$$

para $a, b \in l^2$. Entonces

$$\langle \Gamma_\alpha\, \delta_k, \delta_j\rangle_{l^2} = \alpha_{k+j} = \widehat{\psi_o}(k+j) = \widehat{\phi_o}(-k-j) = \langle \Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2}.$$

En virtud del Teorema 6.2 se tiene que Γ_α es acotado. De la Proposición 6.3 sigue que Γ es acotado.

A continuación se demostrará la expresión para las normas. Sea $\phi_o \in L^\infty$ una función fija tal que

$$\widehat{\phi_o}(-n) = \alpha_n \qquad \text{para todo } n \geq 0.$$

Sea $\phi \in L^\infty$ se tiene que:

$$\widehat{\phi}(-n) = \alpha_n \qquad \text{para todo } n \geq 0$$

si y sólo si

$$\widehat{\phi_o}(k) = \widehat{\phi}(k) \qquad \text{para todo } k \leq 0$$

si y sólo si

$$\widehat{\phi_o - \phi}(k) = 0 \qquad \text{para todo } k \leq 0$$

si y sólo si $\phi_o - \phi \in H_o^\infty$.

Sea $\psi, \psi_o \in L^\infty$ dadas por

$$\psi(t) = \phi(-t) \qquad \text{y} \qquad \psi_o(t) = \phi_o(-t).$$

Se obtiene que

$$\begin{aligned} \text{ínf}\{\|\psi\|_\infty : \alpha_n = \widehat{\psi}(n) \text{ para todo } n \geq 0\} &= \text{ínf}\{\|\phi\|_\infty : \alpha_n = \widehat{\phi}(-n) \text{ para todo } n \geq 0\} \\ &= \text{ínf}\{\|\phi\|_\infty : \phi_o - \phi \in H_o^\infty\} \\ &= \text{ínf}\{\|\phi_o - h\|_\infty : h \in H_o^\infty\}. \end{aligned}$$

Por la Proposición 6.3

$$\|\Gamma\| = \|\Gamma_\alpha\|.$$

Del Teorema 6.2 se sabe que

$$\|\Gamma_\alpha\| = \|\psi_o\|_\infty = \text{ínf}\{\|\psi\|_\infty : \alpha_n = \widehat{\psi}(n) \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Luego

$$\|\Gamma\| = \|\phi_o\|_\infty = \text{ínf}\{\|\phi_o - h\|_\infty : h \in H_o^\infty\}.$$

□

COROLARIO 6.8. *Sea* $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ *un operador de Hankel.* Γ *es acotado si y sólo si existe* $\phi_o \in L^\infty$ *tal que* $\Gamma = P^- M_{\phi_o}$.

En este caso

$$\|\Gamma\| = \|\Lambda\phi_o\|_{(H_o^1)^*} = \|\phi_o\|_\infty.$$

donde

$$(\Lambda\phi_o)(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\phi_o(x)\,dx$$

para cada $f \in H_o^1$.

DEMOSTRACIÓN.

Basta observar que si

$$[\phi_o] = \phi_o + H_o^\infty$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{ínf}\{\|\phi_o - h\|_\infty : h \in H_o^\infty\} &= \text{dist}(\phi_o, H_o^\infty) \\ &= \|[\phi_o]\|_{L^\infty/H_o^\infty} \\ &= \|\Lambda\phi_o\|_{(H_o^1)^*}. \end{aligned}$$

$\square$

Comentarios

(1) El libro de Rudin [**28**] presenta los espacios de Hardy en forma detallada. Estos espacios son estudiados en algunas electivas de pregrado o en algunos cursos de postgrado de la Facultad de Ciencias de la UCV.

(2) El artículo de Rubén Martínez-Avendaño [**21**] contiene una excelente introducción a los operadores de Hankel en espacios de Hilbert.

(3) La bibliografía que se presenta al final de esta monografía es extremadamente amplia. Se incluyen libros usados en los cursos avanzados de análisis y algunos artículos.

(4) Para desarrollos futuros relacionados con este trabajo especial de grado podrían considerarse las publicaciones siguientes [**3, 12, 23, 25**].

Bibliografía

[1] Bachman, G. & Narici, L. *Functional analysis.* Academic Press.

[2] Bonami, A. *An introduction to Hankel and Toeplitz operators.* Escuela Argentina CIMPA-UNESCO 2008. Citado en página(s) 1, 7

[3] Bonami, A. & Bruna, J. *On truncations of Hankel and Toeplitz operators.* Publ. Mat., Barc. 43, No.1, 235-250 (1999). Citado en página(s) 65

[4] Brown, A. & Page, A. *Elements of functional analysis.* Van Nostrand.

[5] Brown, A. & Pearcy, C. *Introduction to operator theory I.* Springer Verlag.

[6] Bruzual, R. & Domínguez, M. *Espacios de Banach.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, UCV. http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/ (Elaborada para Análisis Funcional) (2004). Citado en página(s) 20, 25

[7] Bruzual, R. & Domínguez, M. *Espacios de Hilbert.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, UCV. http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/ (Elaborada para Análisis Funcional) (2004).

[8] Bruzual, R. & Domínguez, M. *Series de Fourier.* IV TForma, Universidad de Oriente, Julio 2003. Ver también: http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/ Citado en página(s) 34

[9] Conway, J. *A course in functional analysis.* Segunda Edición, Springer-Verlag, New York, 1990.

[10] Cotlar, M. & Cignoli, R. *An introduction to functional analysis.* North Holland, 1974.

[11] DeVito, C. *Functional Analysis.* Academic Press, 1978.

[12] Domínguez, M. *A proof of Nehari's theorem through the coefficient of a matricial measure.* Divulg. Mat. 6, No.2, 123-131, 1998. Citado en página(s) 2, 65

[13] Douglas, R. *Banach algebra techniques in operator theory.* Segunda Edición, Springer-Verlag, New York, 1998.

[14] Dunford, N. & Schwartz, J. *Linear operators.* Part I.

[15] Dym, H. & McKean, H.P. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press 1972. Citado en página(s) 34

[16] Fourier, J. *The Analytical Theory of Heat.* Traducido al inglés por A. Freeman. Cambridge University Press, 1878. Reimpreso por Dover, 1955. Obra Original: Théorie Analytique de la Chaleur, 1822. Citado en página(s) 34

[17] Halmos, P. *A Hilbert space problem book.* Segunda Edición, Springer-Verlag, New York, 1982.

[18] Kolmogorov, A. & Fomin, S. *Elementos de la teoría de funciones y de análisis funcional.* MIR, 1975. Citado en página(s) 25

[19] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons, 1978.

[20] Lindenstrauss, J. & Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I.* Springer Verlag, 1977. Citado en página(s) 24

[21] Martínez-Avendaño, R. *Hankel operators in Hilbert space: a fast trip. (Operadores de Hankel en el espacio de Hilbert: un viaje rápido.)* Aguilar, M. (ed.) et al., Memorias. México: Sociedad Matemática Mexicana. Aportaciones Matemáticas. Comunicaciones 35, 217-233 (2005). Citado en página(s) 1, 2, 45, 65

[22] Nehari, Z. *On bounded bilinear forms.* Annals of Mathematics, 65-1, pp. 153 - 162, (1957). Citado en página(s) 53

[23] Nikolskii, N. *Operators, functions and systems: an easy reading.* Volumen I. American Mathematical Society, Providence, 2002. Citado en página(s) 65

[24] Peller, V. *An Excursion into the Theory of Hankel Operators.* Holomorphic Spaces. MSRI Publications, Volume 33, 1998. Citado en página(s) 1, 2, 51

[25] Peller, V. *Hankel operators and its applications.* Springer-Verlag, New York, 2003. Citado en página(s) 65

[26] Rosenblum, M., Rovnyak, J. Topics in Hardy classes and univalent functions. Birkhäuser Advanced Texts. Basel: Birkhäuser. ix, 250 p. (1994). Citado en página(s) 38

[27] Royden, H. L. *Real analysis.* Collier Macmillan, 1968. Citado en página(s) 28, 29

[28] Rudin, W. *Real and complex analysis.* Mc Graw-Hill, 1966. Citado en página(s) 29, 36, 37, 38, 39, 65

[29] Spiegel, M. *Análisis de Fourier.* Serie Schaum. McGraw-Hill, 1977. Citado en página(s) 34

[30] Taylor, A. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley & Sons, 1958.

[31] Tolstov, G. *Fourier Series.* Dover, 1976. Citado en página(s) 34

[32] Trenogin, V.A., Pisarevskij, B.M. & Soboleva, T.S. *Problemas y ejercios de análisis funcional.* Moskva: "Nauka". Glavnaya Redaktsiya Fiziko-Matematicheskoj Literatury, 1984.

[33] Yosida, K. *Functional Analysis.* Springer Verlag, 1965.