



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# Implementación del Método de Elemento Frontera en la resolución de problemas de potencial usando elementos cuadráticos.

Trabajo Especial de Grado presentado  
ante la ilustre Universidad Central de  
Venezuela por el **Br. Francisco Javier  
Fernández Rodríguez** para optar al  
título de Licenciado en Matemática.

**Tutora: Dra. Mariela Castillo.**

Caracas, Venezuela  
Marzo 2012

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Implementación del Método de Elemento Frontera en la resolución de problemas de potencial usando elementos cuadráticos.**”, presentado por el **Br. Francisco Javier Fernández Rodríguez**, titular de la Cédula de Identidad **18.358.104**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

---

**Profa. Mariela Castillo**  
**Tutor**

---

**Profa. Maira Valera**  
**Jurado**

---

**Profa. Carmen Da Silva**  
**Jurado**

## Resumen

El objetivo de este trabajo es resolver problemas de potencial implementando el método de elemento frontera, para ello se realiza un estudio de la ecuación de Laplace la cual es conocida como ecuación potencial y es la ecuación que modela los problemas que se quieren resolver.

El método de elemento frontera es un método numérico cuya característica principal es que solo se necesita discretizar la frontera del dominio del problema en estudio, para su implementación es necesario conocer la ecuación integral de frontera, la cual será matemáticamente equivalente a la ecuación diferencial parcial que modela el problema; para deducirla se debe conocer la solución fundamental asociada al problema y nos valdremos de las identidades de Green.

En el método de elemento frontera se pueden considerar varios tipos de elementos a saber: elemento constante, elemento lineal, elemento cuadrático y elementos de orden superior. En este trabajo resolveremos problemas de potencial usando elementos cuadráticos por lo que se realiza un estudio de los mismos.

La implementación de método se hace utilizando el algoritmo desarrollado en FORTRAN, el cual fué tomado del libro *Boundary Elements An Introductory Course* de Brebbia, C. y Dominguez, J. (1989), la implementación se realiza en dos ejemplos, el primero una barra elíptica sometida a torsión y el segundo placas sometidas a temperaturas. Luego de implementar el método se analizan los resultados y se estudia la convergencia del mismo.

## Dedicatoria

A *Dios Padre*, por darme vida y salud para lograr esta meta.

A *San Miguel Arcángel*, por darme las fuerzas y la fé en los momentos que más lo necesito.

A *mi mamá Zoraida y mi papá Francisco*, por darme la vida y haber dado lo mejor de sí para hacerme el ser que hoy en día soy. Los amo.

A *mis Hermanas, Alexandra, Gabriela y Francis*, por ser mis apoyos y ejemplos a seguir, por tanta comprensión y amor incondicional. Las amo.

A *toda mi familia*, abuelas, tios, tias, primos, primas y cuñados por el apoyo brindado.

A *todos*, con sinceridad Muchas Gracias...

***Francisco Fernández***

## Agradecimiento

A *Dios Padre*, ser Omnipotente; por darme vida y salud para lograr esta meta.

A *la Universidad Central de Venezuela*, la casa que vence la sombra, por la oportunidad de pertenecer al Alma Mater, además de la educación brindada para formarme como un gran ciudadano.

A *la Facultad de Ciencias, Escuela de Matemática*, por darme el crecimiento académico a través de los estudios realizados y así ejercer las Matemáticas con devoción, dedicación y ética.

A *mi tutora Dra. Mariela Castillo*, excelente profesional, por sus constancia y dedicación para salir adelante en la realización de este trabajo, además de sus consejos, disciplina, y enseñanzas en el transcurso de la carrera.

A *la Profa. Maira Valera*, por su apoyo y mejor disposición a aportar sus conocimientos para la realización de este trabajo

A todas las personas que fueron parte del proceso: familiares, amigos, compañeros de clases, y otros...

A todos Muchas Gracias...

***Francisco Fernández***

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>viii</b>
<b>Preliminares</b>	<b>xi</b>
<b>1 Deducción de la ecuación de Laplace</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 Deducción de la Ecuación del Calor . . . . .	2
1.2.1 Problema de valor inicial y frontera . . . . .	6
1.2.2 Ecuación de Laplace . . . . .	7
1.2.3 Existencia y unicidad de la solución de la Ecuación de Laplace . . . . .	8
1.3 Aplicaciones de la ecuación de Laplace . . . . .	9
<b>2 Método de elemento frontera</b>	<b>13</b>
2.1 Introducción . . . . .	13
2.2 Problemas de potencial . . . . .	14
2.3 Ecuación integral . . . . .	15
2.3.1 Operador adjunto al operador de Laplace . . . . .	15
2.3.2 Solución fundamental . . . . .	17
2.3.3 Cálculo de la solución fundamental . . . . .	18
2.3.4 Ecuación integral de frontera . . . . .	22
2.4 Método de elemento frontera . . . . .	28
2.5 Estudio de los elementos cuadráticos . . . . .	31
2.5.1 Tratamiento en las esquinas. . . . .	34
<b>3 Implementación del método numérico</b>	<b>37</b>
3.1 Introducción . . . . .	37
3.2 Programa principal (POQUABE) . . . . .	37

3.2.1	Rutina INPUTPQ . . . . .	38
3.2.2	Rutina GHMATPQ . . . . .	39
3.2.3	Rutina SLNPD . . . . .	42
3.2.4	Rutina INTERPQ . . . . .	43
3.2.5	Rutina OUTPTPQ . . . . .	43
3.3	Ejemplos . . . . .	43
3.3.1	Torsión sobre sección elíptica . . . . .	43
3.3.2	Placas sometidas a temperaturas . . . . .	58
	<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>69</b>

# Introducción

Por muchos años los matemáticos e ingenieros han utilizado elementos finitos para resolver ciertos problemas de ecuaciones en derivadas parciales, pero esta técnica ha demostrado ser ineficiente en algunas aplicaciones de la ingeniería tales como mecánica de fluidos, acústica, electromagnetismo, elasticidad y fracturas mecánicas, lo que lo ha hecho parecer engorroso de usar y por lo tanto, difícil de aplicar en los sistemas de ingeniería asistida por computador. El Método de Elemento Frontera conocido como BEM por sus siglas en inglés, aparece a mediados de los años sesenta como una poderosa alternativa en los casos donde se requiere una mayor precisión como en problemas de concentración de tensiones o en donde el dominio sea infinito.

El establecimiento de los métodos de contorno es mucho más reciente que otros métodos numéricos como elementos finitos o diferencias finitas y, por tanto, su uso no es muy extenso y salvo muy raras excepciones, su aplicación actual esta restringida a los ambientes académicos. En general se atribuye a Jaswon (1963) y Symm (1963) [7] el desarrollo de la primera técnica numérica, denominada “método directo”, para resolver las ecuaciones integrales de Fredholm (1903) en el estudio de problemas de potencial [7]. Paralelamente, Kupradze (1963) presentó el método indirecto en la solución de problemas de elastostática, pero no fué hasta cuatro años después en que Rizzo (1967) desarrolló la versión directa del método aplicada a problemas bidimensionales y basada en la solución fundamental de Kelvin para el método elástico infinito [7]. En los años siguientes fueron desarrollados más artículos que aportaron grandes avances en el estudio de BEM, tales como los realizados por Rizzo y Shippy (1977,1979) y Nakaguma (1979). Desde entonces se ha producido un desarrollo en las publicaciones referente a BEM en los más variados campos de la ingeniería. En España, los trabajos con elementos de contorno comenzaron con la tesis doctoral de Domínguez (1977) [7], quien aplicó el método directo al cálculo de tensiones en anclajes de piezas postensadas.



Posteriormente, Gómez (1987) y Cerrolaza (1988) presentan las expresiones matemáticas vectoriales necesarias para la eficaz implementación y control del refinamiento en problemas de elastostática [7]. También en ese mismo año, Rank y Perreira (1987) trabajan con la versión p-adaptable de BEM en elastostática. Sin embargo, utilizan elementos rectos y las integraciones son realizadas analítica o semianalíticamente, todo lo cual resta considerables ventajas y flexibilidad en métodos de esta naturaleza, donde una de las ideas centrales consiste en representar la geometría y condiciones de contorno complejas con el menor número posible de elementos.

El BEM es un método numérico el cual se basa en la transformación de la ecuación diferencial parcial en una ecuación integral, que es matemáticamente equivalente y en la discretización de la frontera del dominio donde se quiere resolver la ecuación diferencial parcial. La reformulación de la EDP que aparece en BEM se compone de una ecuación integral que se define en la frontera del dominio, y una integral que relaciona la solución en la frontera con la solución en los puntos internos del dominio [3]. La primera se denomina ecuación integral de contorno. La principal ventaja del método surge del hecho de que solo la frontera del dominio en el que se quiere resolver la EDP requiere ser discretizada, mientras que en el método de elementos finitos o el método de diferencias finitas se discretiza todo el dominio donde se resuelve la ecuación diferencial. Así, la dimensión del problema se reduce en una unidad, por ejemplo, una ecuación que modela una región de tres dimensiones se transforma en una integral de superficie. En los casos en que el dominio es exterior a la frontera, en la medida en la que el dominio es infinito las ventajas del BEM son aún más sorprendentes, la ecuación que rige el dominio infinito se reduce a una ecuación de frontera.

La ecuación integral se puede considerar como una solución exacta de la ecuación diferencial parcial que rige el problema. El método utiliza las condiciones de contorno dadas para adaptarse a los valores de frontera en la ecuación integral, en lugar de valores en todo el espacio definido por una ecuación diferencial parcial. Una vez hecho esto, la ecuación integral se puede utilizar de nuevo para calcular numéricamente la solución en cualquier punto deseado en el interior del dominio, cabe destacar que el método es aplicable a los problemas para los cuales se conocen las funciones de Green.

Este trabajo se divide en tres capítulos, en el Capítulo 1: Deducción de la ecuación de Laplace, se realiza una revisión bibliográfica para deducir la ecuación de Laplace y su aplicación

en problemas de potencial. En el Capítulo 2 se estudia el Método Elemento Frontera para obtener las ecuaciones necesarias para su implementación con el fin de resolver los problemas de potencial, usando elementos de orden superior, y en el Capítulo 3: Implementación del método numérico, se realiza el estudio del algoritmo en FORTRAN <sup>1</sup> que modela la implementación del método, mostramos algunos ejemplos utilizando dicho algoritmo, finalmente se analizan los resultados obtenidos, planteamos algunas conclusiones y damos algunas recomendaciones.

---

<sup>1</sup>El algoritmo desarrollado en FORTRAN fué tomado de la bibliografía [3].

# Preliminares

**Definición 0.1 (Función generalizada)** *Sea el funcional*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(x)dx = \mathfrak{F}(h)$$

*$h(x)$  es una función generalizada perteneciente a alguna clase  $D$  de funciones, llamado el dominio de  $\mathfrak{F}$  y  $g(x)$  es la función de prueba.*

## Propiedad de la función generalizada

Sea  $h(x)$  una función generalizada,  $g(x)$  la función de prueba se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)g(x, x_0)dx = h(x_0)$$

**Teorema 0.2 (Teorema de la divergencia)** *Sea  $F$  un campo vectorial de clase  $C^1$  en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , entonces*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F d\Omega = \int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} d\Omega,$$

*siendo  $\partial\Omega$  la superficie regular cerrada, frontera de  $\Omega$ .*

**Teorema 0.3 (Identidades de Green)** *Sean  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones de clase  $C^2$  definidas en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\Omega \subset U$  una región en  $\mathbb{R}^3$ . Supongamos que  $S = \partial\Omega$  está orientada con su vector normal hacia el exterior, entonces se deducen las siguientes identidades:*

$$1) \int_{\Omega} [f(\vec{x}) \nabla^2 g(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x}) \cdot \nabla g(\vec{x})] dv = \int_S [f(\vec{x}) \nabla g(\vec{x})] \cdot \hat{n} dS$$

$$2) \int_{\Omega} [f(\vec{x}) \nabla^2 g(\vec{x}) - g(\vec{x}) \nabla^2 f(\vec{x})] d\Omega = \int_S [f(\vec{x}) \nabla g(\vec{x}) - g(\vec{x}) \nabla f(\vec{x})] \cdot \hat{n} dS$$

### Potencial de simple y doble capa

Las funciones armónicas<sup>2</sup> también pueden ser generadas por distribuciones continuas de los potenciales a lo largo de la superficie de un dominio  $\Omega$ . En particular, dos de ellos son de importancia práctica y se definen a continuación.

**Definición 0.4 (Potencial de simple capa)** Sea  $h(\vec{x})$  una función continua en  $\partial\Omega$ ,  $\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$  la solución fundamental asociada a una función armónica. El potencial de simple capa se define como

$$\bar{u}(\vec{x}) = \int_{\partial\Omega} h(\vec{x}) \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) dS.$$

**Definición 0.5 (Potencial de doble capa)** Sea  $h(\vec{x})$  una función continua en  $\partial\Omega$ ,  $\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$  la solución fundamental asociada a una función armónica. El potencial de doble capa se define como

$$\bar{\bar{u}}(\vec{x}) = \int_{\partial\Omega} h(\vec{x}) \frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) dS.$$

---

<sup>2</sup>Definición 1.1

# Capítulo 1

## Deducción de la ecuación de Laplace

### 1.1 Introducción

En este capítulo deduciremos la conocida ecuación de Laplace. En cálculo vectorial, la ecuación de Laplace es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de tipo elíptico, que recibe ese nombre en honor al astrónomo, físico y matemático Pierre-Simon Laplace, nacido en Normandía el 23 de marzo de 1749 [1]. Laplace dedicó la mayor parte de sus estudios a la probabilidad y al universo, y es alrededor del año 1787, poco después de ser nombrado miembro de la Academia de Ciencia en Francia, que descubre lo que hoy conocemos como la ecuación de Laplace. Para su deducción partiremos de la deducción de la ecuación del calor para un cubo, considerando el flujo de energía térmica y su conducción a través de las caras del cubo.

Para esta deducción es necesario considerar la ley de conservación de la energía, además de otro resultado importante como lo es la ley experimental del matemático y físico francés Joseph Fourier (nacido el 21 de marzo de 1768 en Auxerre) [2], conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas Series de Fourier, método con el cual consiguió resolver la ecuación del calor. Dicha ley se basa en los mecanismos de transferencia de energía térmica y establece que la tasa de transferencia de calor por conducción en una dirección dada, es proporcional al área normal a la dirección del flujo de calor y al gradiente de temperatura en esa dirección. Luego de realizar la deducción de la ecuación del calor, estudiaremos el caso estacionario el cual nos conducirá a la ecuación de Laplace.

## 1.2 Deducción de la Ecuación del Calor

Sea  $R$  una región formada por un cubo de lado  $L$  y consideremos una sección infinitesimal  $\Delta x$ . Esta región presenta flujo de calor en las seis caras, tal como se muestra en la Figura 1.1.

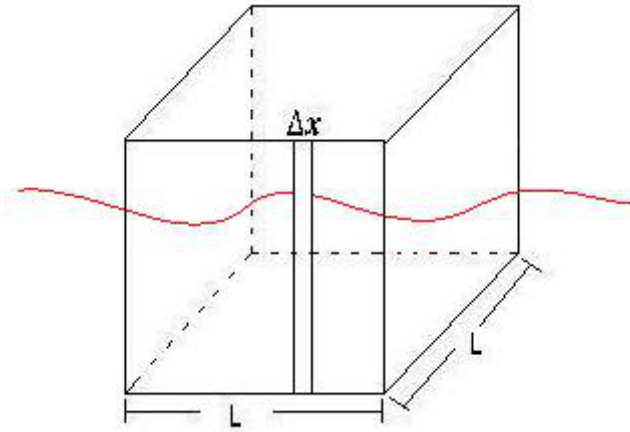


Figura 1.1: Cubo de lado  $L$

Consideremos la cantidad de energía térmica por unidad de volumen como una variable desconocida, que llamaremos densidad de energía térmica y la denotaremos por:

$$e(\vec{x}, t) = \text{densidad de energía térmica.}$$

La energía térmica en una región infinitesimal del cubo varía con el tiempo debido al flujo a través de las fronteras (caras del cubo) y a la energía generada en el interior (debido a fuentes positivas o negativas de energía térmica). Todo el proceso de flujo de calor se puede describir como:

*La variación de energía térmica en el tiempo es igual al flujo de calor a través de las fronteras por unidad de tiempo más la energía térmica generada en el interior por unidad de tiempo.*

La cual se conoce como la Ley de Conservación de la energía térmica [4].

Representamos el flujo de energía térmica por unidad de tiempo que fluye en las caras del cubo por  $\phi(\vec{x}, t)$ , que no es más que el flujo de calor a través de la frontera que va en alguna dirección, de esta manera podemos considerar al flujo de calor como un vector. Además, la energía térmica también puede variar debido a la existencia de fuentes internas denominadas,

en este caso, fuentes de calor denotada por  $Q(\vec{x}, t)$  y representa la energía térmica generada por unidad de volumen y por unidad de tiempo.

Ahora necesitamos introducir el concepto de calor específico (o capacidad calorífica) denotado por  $c$ , ya que el mismo representa la energía térmica necesaria para elevar una unidad la temperatura de una unidad de masa de una sustancia. En general, se deduce que el calor específico  $c$  de un material depende de la temperatura  $u(\vec{x}, t)$ , ya que normalmente describimos los materiales por su temperatura, no por su densidad de energía térmica.

Si consideramos el volumen de dos secciones transversales cercanas del cubo, la energía térmica concentrada en esa sección infinitesimal es:

$$\text{energía térmica} = e(\vec{x}, t)L^2 \Delta x,$$

ya que el volumen de la sección infinitesimal es  $L^2 \Delta x$ , sin embargo, también se define como la energía necesaria para elevar la temperatura desde la de referencia,  $0^\circ$ , a su temperatura actual  $u(\vec{x}, t)$ . Ahora, si consideramos que la energía térmica necesaria para elevar una unidad la temperatura de una unidad de masa no depende de la temperatura de referencia, la densidad de energía térmica por unidad de masa va a ser  $c(\vec{x})u(\vec{x}, t)$ .

La densidad de masa la denotamos por  $\rho(\vec{x})$  y representa la masa por unidad de volumen, la cual varía con respecto a  $\vec{x}$ . La masa total de una sección infinitesimal es  $\rho(\vec{x})6L^2 \Delta x$ , y por tanto la energía térmica es  $c(\vec{x})u(\vec{x}, t)\rho(\vec{x})6L^2 \Delta x$  por lo que

$$e(\vec{x}, t)6L^2 \Delta x = c(\vec{x})u(\vec{x}, t)\rho(\vec{x})6L^2 \Delta x,$$

de aquí deducimos la relación básica entre energía térmica y temperatura:

$$e(\vec{x}, t) = c(\vec{x})\rho(\vec{x})u(\vec{x}, t).$$

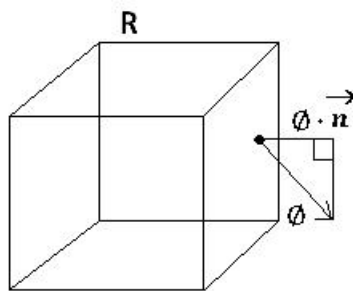
Esto nos dice que la energía térmica por unidad de volumen es igual a la energía térmica por unidad de masa y por unidad de temperatura, multiplicada por la temperatura y por la densidad de masa.

Ahora, por la ley de conservación de la energía calorífica, la energía calorífica total en la región  $R$  del cubo es

$$\text{Energía térmica} = \iiint_R c(\vec{x})\rho(\vec{x})u(\vec{x}, t)dV.$$

En este caso, la magnitud de  $\phi(\vec{x}, t)$  es la cantidad de energía calorífica por unidad de tiempo y por unidad de superficie. Sin embargo, al considerar la conservación de la energía calorífica, lo único que importa es el flujo de calor a través de la frontera por unidad de tiempo. Si el flujo en un punto es paralelo a la frontera, entonces no hay energía calorífica cruzando la frontera por ese punto, en cambio cuando el flujo de calor no es paralelo, sí hay energía calorífica cruzando la frontera y en ese término sólo contribuye la componente normal del flujo de calor. Por otro lado, en cada punto hay dos vectores normales, uno interior y otro exterior, convendremos pues en utilizar siempre el vector normal unitario exterior  $\hat{n}$ .

Por la conservación de la energía calorífica, la cantidad de energía que fluye saliendo de la región del cubo por unidad de tiempo y por unidad de superficie en cada punto, es la componente normal exterior del vector de flujo de calor en ese punto. Si tenemos un flujo como se muestra en la Figura 1.2,



la componente normal exterior del vector de flujo de calor en ese punto es

$$|\phi| \cos(\theta) = \phi \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \phi \cdot \hat{n}$$

Figura 1.2: Flujo de calor a través de las caras del cubo

Si el vector de flujo de calor  $\phi$  se dirige hacia el interior, entonces  $\phi \cdot \hat{n} < 0$ , y el flujo hacia fuera es negativo.

Para calcular la energía calorífica total que fluye hacia fuera del cubo por unidad de tiempo, debemos multiplicar  $\phi \cdot \hat{n}$  por el elemento de superficie  $ds$  y “sumar” sobre toda la superficie que encierra la región del cubo. Esto se indica mediante la integral de superficie  $\oiint \phi(\vec{x}, t) \cdot \hat{n}dS$ . Esta es la cantidad de energía calorífica que sale del cubo y da lugar (si es positiva) a una disminución de la energía calorífica por unidad de superficie que se genera en el



interior del cubo, entonces la cantidad total de energía calorífica en una región tridimensional  $R$  (como por ejemplo el cubo) se escribe como

$$\frac{d}{dt} \iiint_R c(\vec{x})\rho(\vec{x})u(\vec{x}, t)dV = - \oiint \phi(\vec{x}, t) \cdot \hat{n}dS + \iiint_R Q(\vec{x}, t)dV,$$

donde la integral de superficie  $\oiint \phi \cdot \hat{n}dS$  correspondiente a la energía calorífica que fluye a través de la frontera por unidad de tiempo, puede escribirse como una integral de volumen de acuerdo al teorema de la divergencia, así obtenemos,

$$\frac{d}{dt} \iiint_R c(\vec{x})\rho(\vec{x})u(\vec{x}, t)dV = - \iiint_R \nabla \cdot \phi(\vec{x}, t)dV + \iiint_R Q(\vec{x}, t)dV.$$

Observemos que la derivada temporal puede intercambiarse con la integral (pues el dominio espacial  $R$  está fijo) y pasa dentro de la integral como una derivada parcial, puesto que la temperatura depende de la variable espacial y la variable temporal. Por lo tanto, todas las integrales son integrales triples sobre el mismo volumen, que pueden agruparse en una sola integral

$$\iiint_R [c(\vec{x})\rho(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \phi(\vec{x}, t) - Q(\vec{x}, t)]dV = 0, \quad \text{donde } \vec{x} \in \Omega \text{ y } 0 \leq t;$$

como esta integral es cero, se deduce que el integrando debe ser cero:

$$c(\vec{x})\rho(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \phi(\vec{x}, t) - Q(\vec{x}, t) = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$c(\vec{x})\rho(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) = - \nabla \cdot \phi(\vec{x}, t) + Q(\vec{x}, t). \quad (1.1)$$

De acuerdo a la Ley Experimental de Fourier, en un dominio unidimensional el flujo de calor  $\phi$  es proporcional a la derivada de la temperatura,  $\phi = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}$ , donde el signo menos indica que la energía térmica fluye de lo más caliente a lo más frío;  $\frac{\partial u}{\partial x}$  es la variación de temperatura por unidad de longitud. Aquí el vector de flujo de calor  $\phi$  es proporcional al gradiente de temperatura  $\left( \nabla u \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \right)$ :

$$\phi(\vec{x}, t) \equiv -K_0(\vec{x}) \nabla u(\vec{x}, t). \quad (1.2)$$

Esta fórmula se conoce como ley de Fourier de la difusión del calor. De nuevo  $K_0$  es la conductividad térmica.

Sustituyendo (1.2) en (1.1) obtenemos la siguiente ecuación en derivadas parciales para la temperatura

$$c(\vec{x})\rho(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) = \nabla \cdot (K_0(\vec{x}) \nabla u(\vec{x}, t)) + Q(\vec{x}, t). \quad (1.3)$$

Si no hay fuentes externas ( $Q(\vec{x}, t) = 0$ ) y los coeficientes térmicos son constantes, la ecuación (1.3) se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) = K \nabla \cdot (\nabla u(\vec{x}, t)), \quad (1.4)$$

donde  $K = \frac{K_0}{c\rho}$  es la constante de difusividad térmica.

A partir de la definición de divergencia se puede calcular la divergencia del gradiente de la función  $u$ , así para el caso tridimensional ( $\vec{x} = (x, y, z)$ )

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 u. \quad (1.5)$$

La expresión  $\nabla^2$  que aparece en la ecuación (1.5) se denomina Laplaciano de  $u(\vec{x}, t)$ . Por tanto, en este caso

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \nabla^2 u. \quad (1.6)$$

Esta ecuación es frecuentemente conocida como ecuación del calor o de difusión en dimensión tres.

### 1.2.1 Problema de valor inicial y frontera

Si se quiere predecir la temperatura en el tiempo, a la ecuación del calor se le debe añadir la existencia de una distribución inicial de temperaturas, dada por una función conocida  $f(\vec{x})$

$$u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}),$$

conocida como condición inicial.

Además, si estamos resolviendo la ecuación en un dominio acotado la temperatura también puede satisfacer alguna condición sobre la frontera en cada punto de la superficie que encierra la región considerada. Esta condición de frontera puede ser de varios tipos. En primer lugar, si en algún punto  $\vec{\xi}$  sobre la frontera  $\Gamma$  lo que se conoce es el valor de la temperatura, en ese punto tendremos una condición tipo Dirichlet. Si en el punto sobre la frontera lo que se tiene prescrito es el flujo, decimos que tenemos una condición tipo Neumann [4], es decir,

$$\begin{cases} u(\vec{\xi}, t) = g_1(\vec{\xi}) & \vec{\xi} \in \Gamma, \quad \text{Tipo Dirichlet.} \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{\xi}, t) = g_2(\vec{\xi}) & \vec{\xi} \in \Gamma, \quad \text{Tipo Neumann.} \end{cases}$$

En particular si  $g_2(\vec{\xi}) = 0$  significa que no hay flujo, la frontera esta aislada térmicamente.

El tercer tipo de condición que se puede tener es la que nos da la Ley de Enfriamiento de Newton, esta condición es conocida como tipo Robin o Mixta y viene dada como sigue

$$-K_0 \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = H[u(\vec{x}, t) - u_e(t)],$$

donde  $u_e(t)$  es la temperatura en el exterior del dominio.

### 1.2.2 Ecuación de Laplace

Si las posibles fuentes de calor son independientes del tiempo, es posible que existan soluciones estacionarias de la ecuación del calor que verifiquen las condiciones de frontera estacionarias:

$$0 = \nabla \cdot (K_0 \nabla u) + Q.$$

Observemos que una distribución de temperaturas en equilibrio  $u(\vec{x})$  verifica una ecuación en derivadas parciales con más de una dimensión espacial. En el caso de coeficientes térmicos constantes, la distribución de temperaturas en equilibrio satisface

$$\nabla^2 u = \frac{-Q}{K_0},$$

conocida como ecuación de Poisson.

Si además no hay fuentes ( $Q = 0$ ), entonces

$$\nabla^2 u = 0; \tag{1.7}$$

el Laplaciano de la distribución de temperaturas es cero. La ecuación (1.7) se conoce como **Ecuación de Laplace**.

### 1.2.3 Existencia y unicidad de la solución de la Ecuación de Laplace

Para estudiar la unicidad de la solución de la Ecuación de Laplace, primero daremos la definición de función armónica.

**Definición 1.1** Una función  $u(\vec{x})$  se dice armónica en una región  $\Omega \subseteq R^2$  si  $u(\vec{x}) \in C^2(\Omega)$  y, además verifica  $\nabla^2 u = 0$ .

Ahora, enunciaremos una propiedad de las funciones armónicas que nos permitirá establecer la unicidad de la solución para los problemas que involucran la ecuación de Laplace.

**Principio del máximo y mínimo para funciones armónicas.** Sea  $u(\vec{x})$  una función armónica en un dominio bidimensional acotado  $\Omega$  que, además, es continua en  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Entonces el valor máximo y mínimo de  $u(\vec{x})$  se alcanzan en la frontera  $\partial\Omega$ . La función  $u(\vec{x})$  alcanza sus valores máximo y mínimo en el interior  $\Omega$  si y sólo si  $u(\vec{x})$  es constante [4].

**Teorema 1.2 (Existencia y unicidad)** La solución al problema modelado por la ecuación de Laplace en un dominio bidimensional  $\Omega$ , si existe, es única.

**Demostración.** Queremos resolver el problema con condición de contorno tipo Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\vec{x}) = 0 \\ u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \text{ Sobre la frontera } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sean  $u_1$  y  $u_2$  dos soluciones al problema anterior, entonces

$$\nabla^2 u_1(\vec{x}) = \nabla^2 u_2(\vec{x}) = 0$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = f.$$

Ahora bien, si  $u_1$  y  $u_2$  son armónicas en  $\Omega$  la función  $w = u_1 - u_2$  también lo es, puesto que el operador Laplaciano es lineal. En estas condiciones se tiene que  $w|_{\partial\Omega} = 0$ , lo que nos permite afirmar, en virtud del principio del máximo y el mínimo que  $w = 0$  en  $\Omega$ , es decir,  $u_1 - u_2 = 0$  y, por tanto  $u_1 = u_2$ , lo que establece la unicidad de la solución.

Para el problema con condición tipo Neumann, la demostración es análoga [14].

## 1.3 Aplicaciones de la ecuación de Laplace

### Láminas elásticas

Una lámina elástica (por ejemplo, una superficie de goma o una película de jabón) tiende a estar en la posición en la que su superficie sea lo menor posible. Si sus bordes están fijos, por ejemplo en un alambre, la lámina adoptará la forma de lo que se conoce como una superficie minimal. Si una superficie así está dada por el grafo de  $u(\vec{x})$  en un cierto dominio se sabe que  $u(\vec{x})$  cumple la ecuación

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla^2 u}{\sqrt{1 + |\nabla^2 u|^2}} \right) = 0.$$

Esta ecuación resulta demasiado complicada; para aplicaciones prácticas en las que la norma del vector gradiente ( $|\nabla u|$ ) es muy pequeño (si estudiamos la superficie en una zona muy pequeña, si  $u$  es casi una función constante salvo desviaciones pequeñas o situaciones parecidas), una buena aproximación es la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0.$$

En física elemental normalmente se hace esta aproximación (aunque se llegue a ella por métodos distintos) y se dice, por ejemplo, que la forma que toma una lámina elástica (que suponemos inicialmente en posición horizontal) cuando está sometida a una fuerza (tal vez dependiente de la posición) en la dirección del eje vertical se parece a la solución de la ecuación

$$\nabla^2 u = Cf,$$

donde  $C$  es una constante (la inversa de la tensión de la lámina) y consideramos la fuerza positiva si va hacia abajo, negativa si va hacia arriba. Esta ecuación da buenos resultados en muchos casos prácticos [12].

### La Gravedad

Otro contexto distinto donde aparece la ecuación de Laplace es la ley de la gravedad de Newton, la cual dice que dos masas  $M$  y  $m$  separadas por una distancia  $r$  se atraen en la dirección de la recta que las une con una fuerza

$$|F(\vec{x})| = G \frac{Mm}{r^2},$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal expresada en unidades adecuadas. Por supuesto, la fuerza  $F(\vec{x})$  es un vector, aunque cuando se escribe la ecuación anterior frecuentemente se incluye sólo su magnitud. Esto puede decirse de otra forma: si imaginamos que un cuerpo de masa  $m$ , que suponemos concentrada (idealmente) en un punto  $y$ , crea un campo gravitatorio dado por (ver Figura 1.3)

$$E(x) = Gm \frac{y-x}{|y-x|^3}, \quad (1.8)$$

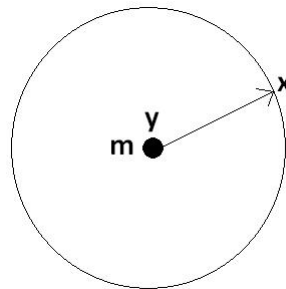


Figura 1.3: Campo gravitatorio  $L$

entonces podemos expresar la ley diciendo que la fuerza (ahora vectorial) sobre otro cuerpo cualquiera de masa  $M$  situado en  $x$  es  $ME(x)$  (obsérvese que la magnitud, el módulo de  $E$ , es la fuerza que escribimos al principio). De la misma forma podemos calcular el campo que crean dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$ , situadas en puntos  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente:

$$E(x) = Gm_1 \frac{y_1 - x}{|y_1 - x|^3} + Gm_2 \frac{y_2 - x}{|y_2 - x|^3}. \quad (1.9)$$

Si lo que tenemos es una gran cantidad de partículas cuya distribución podemos expresar como una función de densidad  $m(y)$  (que da la densidad de masa en cada punto  $y$ ) podemos generalizar esto para dar el campo que crea esta distribución de masa:

$$E(x) = G \int \frac{y-x}{|y-x|^3} m(y) dy. \quad (1.10)$$

Una justificación de esto es que esta integral y la suma anterior verdaderamente se parecen mucho si hay gran cantidad de partículas, de forma que el resultado es suficientemente aproximado para la mayoría de situaciones prácticas.

Al estudiar el campo  $E$  creado por una distribución de masa es útil hablar del potencial que crea esta masa. El potencial no es más que una función real  $V$  de forma que  $-\nabla V = E$  (y que está determinada salvo la suma de una constante). Por ejemplo, para el campo creado por una partícula de masa  $m$  situada en el punto  $y$  la función

$$V(x) = -Gm \frac{1}{|y-x|} \quad (1.11)$$

sirve como potencial (podemos ver que  $-\nabla V$  es el campo dado en la ecuación (1.8)). De la misma forma que antes, el potencial creado por una distribución de masa  $m(y)$  es

$$V(x) = -G \int \frac{1}{|y-x|} m(y) dy. \quad (1.12)$$

Puede comprobarse derivando bajo la integral que  $-\nabla V = E$  (con  $E$  dado por la ecuación (1.10)). ¿Dónde está aquí la ecuación de Laplace? En realidad, aún no podemos verla claramente. Lo que ocurre es que

$$\nabla^2 V = -4\pi Gm, \quad (1.13)$$

de forma que el potencial satisface la ecuación de Poisson en la que el segundo término es esencialmente menos la densidad de masa (salvo una constante). Esto no puede probarse derivando bajo la integral en la ecuación (1.12), ya que la segunda derivada que obtenemos no es integrable, así que la regla de derivación bajo la integral no es válida.

### Problemas de Potencial

Cuando estamos en el caso estacionario de la ecuación del calor cuyos coeficientes son constantes, la derivada temporal se hace cero, por lo que obtenemos

$$0 = k\nabla^2 u(\vec{x}) + Q(\vec{x})$$

y como vimos anteriormente cuando no tenemos fuentes en el dominio, obtenemos el Laplaciano

$$\nabla^2 u(\vec{x}) = 0. \tag{1.14}$$

La ecuación (1.14) también se denomina ecuación potencial, pues el potencial gravitacional y el potencial electrostático satisfacen la ecuación de Laplace en ausencia de fuerzas externas. Esta ecuación será la que utilizaremos en la resolución de los problemas de potencial implementando el Método Elemento Frontera.



# Capítulo 2

## Método de elemento frontera

### 2.1 Introducción

El Método Elemento Frontera conocido como BEM por sus siglas en inglés, es un método numérico computacional usado para resolver ecuaciones en derivadas parciales que han sido transformadas a ecuaciones integrales. Se puede decir que uno de los primeros trabajos con elementos de frontera fue la tesis doctoral de Domínguez (1977), quien trabajó con el cálculo de tensiones en anclajes. París (1979) utilizó el método en elasticidad bidimensional con elementos lineales, mientras que Doblaré (1981) utilizó interpolación parabólica en elasticidad. Por su parte Roures (1981) atacó el problema de la teoría de potencial en régimen transitorio [7].

El BEM se basa en la discretización de la frontera del dominio del problema en una serie de elementos, sobre los que el potencial y su derivada normal pueden variar. La geometría de estos elementos puede ser modelado utilizando líneas rectas, curvas, parábolas, etc. Utilizando el método de colocación, la ecuación discretizada se aplica a un número de nodos dentro de cada elemento, donde los valores del potencial y su derivada normal están asociados. Mediante la adopción de una solución práctica fundamental se planteará una ecuación integral en la cual, en general, las integrales que en ella intervienen son calculadas de forma numérica y, posteriormente, nos llevará a plantearnos un sistema de ecuaciones algebraicas. Además, nos valdremos de la función delta de Dirac, introducida por primera vez por el físico inglés Paul Dirac a mediados del siglo XX [8], la cual puede representar la distribución de densidad o carga de una masa concentrada en un punto, y debe ser vista como una función generalizada.

## 2.2 Problemas de potencial

En el año 1978 fue publicado el primer libro de elementos de contorno, dicha publicación coincidió con la celebración de la primera conferencia en la que el método fue establecido, aunque el nombre BEM parece haber sido utilizado por primera vez en dos artículos por Brebbia y Domínguez [3] en el año 1977. En el trabajo pionero de Hess y Smith, desarrollaron muchos programas de gran alcance para la solución de la ecuación de Laplace en problemas donde se estudiaba el flujo de potenciales [3].

En este trabajo, estudiaremos como encontrar la solución de la ecuación de Laplace en un dominio  $\Omega$  bidimensional, sujeta a las siguientes condiciones de borde

$$u(\vec{x}) = \bar{u}(\vec{x}) \text{ en } \Gamma_1$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) = \bar{q} \text{ en } \Gamma_2,$$

donde  $\hat{n}$  es el vector normal exterior a la frontera del dominio  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , tal como se muestra en la Figura 2.1.

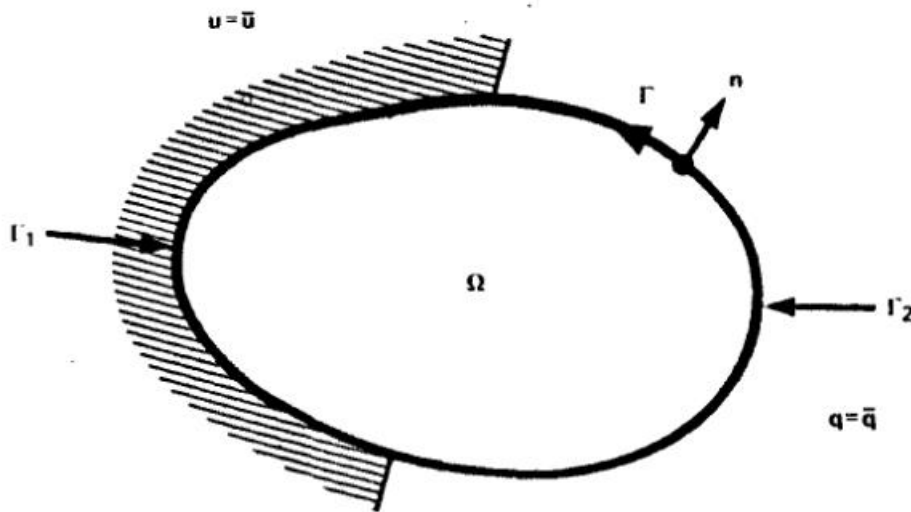


Figura 2.1: Dominio y condiciones de contorno

Para resolver este problema es necesario deducir la ecuación básica integral, la cual es el punto de partida para el método de elemento frontera.

## 2.3 Ecuación integral

Para deducir la ecuación integral consideraremos las identidades deducidas por el matemático británico George Green [14], aplicadas a las funciones  $u(\vec{x})$  que representa el potencial y una función ponderada  $\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$ , que no es más que la solución fundamental de nuestro problema, para deducirla debemos conocer el operador adjunto al operador de Laplace.

### 2.3.1 Operador adjunto al operador de Laplace

**Definición 2.1** Sea  $L$  un operador,  $u$  y  $v$  dos funciones de clases  $C^2$  en el dominio  $\Omega$ , definimos  $M$  el operador adjunto a  $L$  como aquel que cumple la siguiente igualdad:

$$v(\vec{x})L[u(\vec{x})] - u(\vec{x})M[v(\vec{x})] = \nabla \cdot F(\vec{x}), \quad (2.1)$$

donde  $\nabla \cdot F(\vec{x})$  es la divergencia de un campo vectorial  $F(\vec{x})$ .

Si consideramos el operador de Laplace  $L[u(\vec{x})] = \nabla^2 u(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , sea  $\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$  una función ponderada, tenemos que

$$\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)L[u(\vec{x})] = \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\vec{x}) \right] \quad (2.2)$$

lo que es igual,

$$\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)L[u(\vec{x})] = \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\vec{x}) + \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\vec{x}), \quad (2.3)$$

por otra parte

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}) \right] = \frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}) + \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\vec{x})$$

entonces, despejando el segundo término a mano derecha se tiene

$$\phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}) \right] - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}), \quad (2.4)$$

pero

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}) \right] = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}),$$

despejando el segundo término del lado derecho obtenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}) \right] - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}), \quad (2.5)$$

sustituyendo la ecuación (2.5) en la ecuación (2.4) se obtiene la siguiente igualdad

$$\phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}) \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}), \quad (2.6)$$

aplicando la linealidad de la derivada parcial tenemos

$$\phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}) \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}), \quad (2.7)$$

de igual forma

$$\phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}) \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}), \quad (2.8)$$

considerando las ecuaciones (2.7) y (2.8) la igualdad (2.3) queda como sigue

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) L[u(\vec{x})] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}) \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}) \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

reordenando y sacando  $u(\vec{x})$  como factor común obtenemos

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) L[u(\vec{x})] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}) \right] \\ &\quad + \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) u(\vec{x}) \right] u(\vec{x}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

reagrupando tenemos

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, \vec{x}_0)L[u(\vec{x})] - \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(\vec{x}, \vec{x}_0)u(\vec{x}) \right] u(\vec{x}) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x}, \vec{x}_0)u(\vec{x}) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(\vec{x}, \vec{x}_0)u(\vec{x}) \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

si consideramos el campo vectorial  $F$  como

$$F = \left( \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\vec{x}, \vec{x}_0)u(\vec{x}), \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(\vec{x}, \vec{x}_0)u(\vec{x}) \right)$$

nótese que el término del lado derecho de la ecuación (2.11) no es más que su divergencia, así

$$\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)L[u(\vec{x})] - \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) \right] u(\vec{x}) = \nabla \cdot F(\vec{x}), \quad (2.12)$$

lo que implica que

$$M[\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)] = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\vec{x}, \vec{x}_0) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(\vec{x}, \vec{x}_0),$$

es decir,  $M = L$  y por lo tanto el operador de Laplace es un operador autoadjunto.

### 2.3.2 Solución fundamental

La solución fundamental que denotaremos por  $\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$ , representa el campo generado por una unidad de carga concentrada que actúa en el punto  $\vec{x}_0$  [6]. El efecto de esta carga es propagado desde  $\vec{x}_0$  hacia el infinito, de esta manera la ecuación que satisface la solución fundamental puede ser escrita como:

$$M[\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)] = -\delta(\vec{x}, \vec{x}_0), \quad (2.13)$$

donde  $M$  es el operador autoadjunto al operador de Laplace y  $\delta(\vec{x}, \vec{x}_0)$  es la función delta de Dirac. De esta forma ecuación la (2.13) se escribe como

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) + \delta(\vec{x}, \vec{x}_0) = 0. \quad (2.14)$$

Si multiplicamos (2.14) por  $u(\vec{x})$  e integramos sobre el dominio  $\Omega$  obtenemos

$$\int_{\Omega} u(\vec{x}) \nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Omega = \int_{\Omega} u(\vec{x}) (-\delta(\vec{x}, \vec{x}_0)) d\Omega,$$

lo que es igual a

$$\int_{\Omega} u(\vec{x}) \nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Omega = \int_{\Omega} -u(\vec{x}) \delta(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Omega, \quad (2.15)$$

considerando la función delta de Dirac como una función generalizada y aplicando sus propiedades obtenemos

$$\int_{\Omega} u(\vec{x}) \nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Omega = -u(\vec{x}_0), \quad (2.16)$$

este resultado nos será útil para la deducción de la ecuación integral.

### 2.3.3 Cálculo de la solución fundamental

Para estudiar la solución del problema planteado en la ecuación (2.14), supondremos que el punto  $\vec{x}_0$  está en el origen de un sistema de coordenadas de dos dimensiones. De (2.14) obtenemos

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) = -\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \begin{cases} 0, & \text{si } \vec{x} \neq \vec{x}_0 \\ \infty, & \text{si } \vec{x} = \vec{x}_0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Obsérvese que la ecuación (2.17) indica que el laplaciano de la distribución de la temperatura es cero en todos los puntos excepto en el origen, por lo tanto para cualquier punto  $\vec{x}$  ubicado a una distancia  $r$  de  $\vec{x}_0$ , como se muestra en la Figura 2.2, el efecto será el mismo.

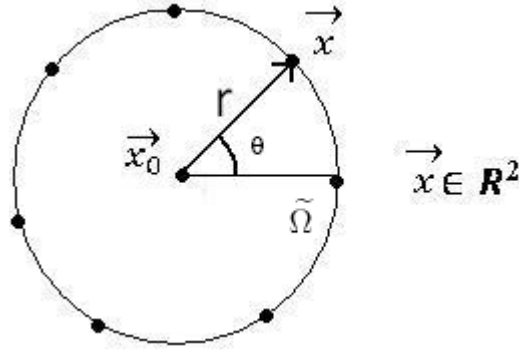


Figura 2.2: Distribución de puntos de colocación

Resolvamos entonces el caso en que  $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ , es decir,

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) = 0.$$

En primer lugar, como tomamos los puntos a una distancia radial  $r$  del origen, podemos hacer el cambio a coordenadas polares, obteniendo así

$$\nabla^2 \phi(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r}(r, \theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0.$$

Esto nos dice que la solución fundamental debe tener simetría axial desde el origen, y se debe a que un punto de colocación  $\vec{x}$  ubicado a una distancia radial  $r$  es equivalente a cualquier otro punto ubicado a la misma distancia, independientemente de su posición angular, de este modo el efecto es el mismo para todo  $\theta$ .

Ahora, como el efecto de la carga va a ser independiente del ángulo  $\theta$ , consideramos  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}(r, \theta)$  igual a cero, así

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r}(r) \right) = 0,$$

obteniendo

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r}(r) \right) = 0,$$

lo que es igual a

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r}(r) \right) = 0, \quad (2.18)$$

integramos en (2.18) a ambos lados en una dimensión con respecto a  $r$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r}(r) \right) dr &= \int 0 dr \\
 r \frac{\partial \phi}{\partial r}(r) + C_1 &= C_2 \\
 r \frac{\partial \phi}{\partial r}(r) &= C_2 - C_1 \\
 r \frac{\partial \phi}{\partial r}(r) &= C \\
 \frac{\partial \phi}{\partial r}(r) &= \frac{1}{r} C,
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde  $C = C_2 - C_1$ . Integramos (2.19) con respecto a  $r$

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial r}(r) dr = \int \frac{1}{r} C dr$$

obteniendo así

$$\phi(r) = C \ln(r) + D. \tag{2.20}$$

Por otra parte, sea  $\tilde{\Omega}$  el círculo centrado en  $\vec{x}_0$  y de radio  $r$  mostrado en la Figura 2.2. Integrando la ecuación (2.14) respecto a  $\tilde{\Omega}$ ,

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\tilde{\Omega} = - \int_{\tilde{\Omega}} \delta(\vec{x}, \vec{x}_0) d\tilde{\Omega}$$

y por propiedades de la función delta de Dirac

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\tilde{\Omega} = -1. \tag{2.21}$$

Si tomamos el Laplaciano como la divergencia del gradiente de un campo vectorial, es decir,  $\nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) = \nabla \cdot (\nabla \phi(\vec{x}, \vec{x}_0))$  podemos aplicar el teorema de la divergencia al lado izquierdo de la ecuación (2.21), considerando  $\Omega = \tilde{\Omega}$  y  $\partial \tilde{\Omega} = \Gamma$  denota la frontera del círculo  $\tilde{\Omega}$ , obteniendo así

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\tilde{\Omega} = \int_{\Gamma} \nabla \phi \cdot \hat{n} ds, \tag{2.22}$$



entonces

$$\int_{\Gamma} \nabla \phi(r) \cdot \hat{n} ds = -1, \quad (2.23)$$

pero el vector normal  $\hat{n}$  apunta en la misma dirección del vector gradiente, por lo que

$$\int_{\Gamma} \nabla \phi(r) \cdot \hat{n} ds = 2\pi r \frac{\partial \phi}{\partial r}(r)$$

sustituyendo en (2.23) resulta

$$2\pi r \frac{\partial \phi}{\partial r}(r) = -1$$

usando (2.19), la expresión anterior es equivalente a

$$2\pi C = -1$$

y por tanto

$$C = -\frac{1}{2\pi}, \quad (2.24)$$

sustituyendo (2.24) en (2.20)

$$\phi(r) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) + D \quad (2.25)$$

donde  $D$  es una constante, en particular tomamos  $D = 0$ , entonces

$$\phi(r) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r), \quad (2.26)$$

lo que es igual a escribir

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi} (\ln(1) - \ln(r))$$

obteniendo así

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right),$$

donde  $r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$  es la distancia en norma euclídea del punto  $\vec{x}$  al punto  $\vec{x}_0$ . Finalmente, devolvemos el cambio a coordenadas polares

$$\phi(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}\right). \quad (2.27)$$

La ecuación (2.27) es la solución fundamental asociada al operador de Laplace.

### 2.3.4 Ecuación integral de frontera

Aplicando la segunda identidad de Green a la función  $u(\vec{x})$  y la función ponderada  $\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$  obtenemos

$$\int_{\Omega} [\phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \nabla^2 u(\vec{x}) - u(\vec{x}) \nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0)] d\Omega = \int_{\Gamma} \left[ \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) - u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) \right] d\Gamma. \quad (2.28)$$

Ahora, reescribiendo (2.28)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \nabla^2 u(\vec{x}) d\Omega - \int_{\Omega} u(\vec{x}) \nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Omega &= \int_{\Gamma} \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.29)$$

como  $\nabla^2 u = 0$  y de la ecuación (2.16)

$$\int_{\Omega} u(\vec{x}) \nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Omega = -u(\vec{x}_0),$$

lo sustituimos en (2.29)

$$0 - (-u(\vec{x}_0)) = \int_{\Gamma} \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma,$$

obteniendo así

$$u(\vec{x}_0) = \int_{\Gamma} \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma, \quad (2.30)$$

donde  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  y es conocida como la ecuación integral evaluada en un punto  $\vec{x}_0$  del dominio.

Esta ecuación es el punto de partida para el método de elemento frontera (BEM) y proporciona el valor de la función  $u$  para un punto  $\vec{x}_0$ , conocidos los valores de  $u(\vec{x})$  y  $\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$  para  $\vec{x} \in \Gamma$ . Sin embargo, BEM se basa en la posibilidad de colocar la ecuación integral en puntos  $\vec{x}_0$  tal que  $\vec{x}_0 \in \Gamma$ . En consecuencia, es necesario hallar una expresión alternativa de

(2.30) cuando  $\vec{x}_0 \in \Gamma$ , lo cual presenta dificultades, debido a que puede existir un  $\vec{x}$  sobre la frontera  $\Gamma$  tal que sea el mismo  $\vec{x}_0$ , y esta condición provocaría una singularidad en (2.30) debido a que si  $\vec{x}_0 \equiv \vec{x}$  implica  $r = 0$ .

Para hallar la expresión alternativa de la ecuación de (2.30) para los puntos en la frontera, tomaremos el límite cuando un punto en el interior del dominio tiende a la frontera. Consideremos nuevamente la segunda identidad de Green, que es válida para cualquier par de funciones regulares

$$\int_{\Omega} [u(\vec{x}) \nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) - \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \nabla^2 u(\vec{x})] d\Omega = \int_{\Gamma} \left[ u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) - \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) \right] d\Gamma, \quad (2.31)$$

donde  $\Omega$  ahora es una región limitada bidimensional y  $\Gamma$  es la frontera cerrada de  $\Omega$ . Como  $\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$  (la solución fundamental de la ecuación de Laplace) es singular cuando  $\vec{x}_0 \equiv \vec{x}$ , es necesario excluir este punto del dominio  $\Omega$  mediante la extracción de una parte del dominio cuya forma es un círculo de radio  $\varepsilon$  y centrado en  $\vec{x}_0$  como se muestra en la Figura 2.3

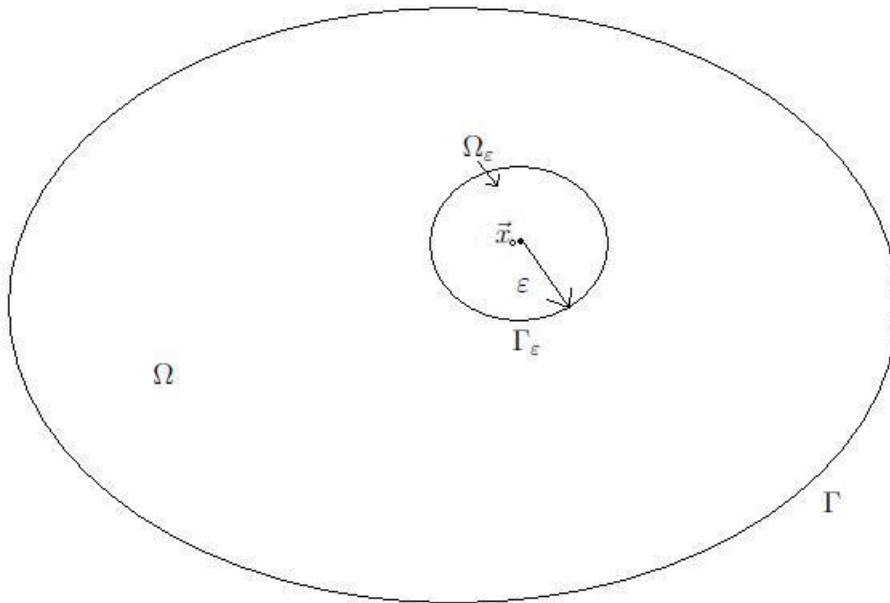


Figura 2.3: Exclusión de punto interno  $\vec{x}$  del dominio  $\Omega$

Aplicando la segunda identidad de Green a la nueva región  $\Omega - \Omega_\varepsilon$ , delimitada exteriormente por  $\Gamma$  e internamente por  $\Gamma_\varepsilon$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} [u(\vec{x}) \nabla^2 \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) - \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \nabla^2 u(\vec{x})] d\Omega &= \int_{\Gamma} \left[ u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) - \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) \right] d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[ u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) - \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) \right] d\Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.32)$$

En la nueva región  $\Omega - \Omega_\varepsilon$ , las funciones  $u(\vec{x})$  y  $\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$  satisfacen la ecuación de Laplace, y la integral de dominio se puede transformar en una integral de frontera; tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se recupera la región original.

En el lado derecho de la ecuación (2.32) tenemos dos integrales, una de doble capa y una de simple capa. En primer lugar, analizaremos el potencial de doble capa sobre  $\Gamma_\varepsilon$ ; sumando y restando  $u(\vec{x}_0)$  en esta ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\varepsilon} u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma_\varepsilon(\vec{x}) &= \int_{\Gamma_\varepsilon} [u(\vec{x}) - u(\vec{x}_0)] \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma_\varepsilon(\vec{x}) \\ &+ u(\vec{x}_0) \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma_\varepsilon(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nos concentramos ahora en la segunda integral en el lado derecho de la ecuación anterior. Recordando que la solución fundamental de la ecuación de Laplace en dos dimensiones es de la forma

$$\phi(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right).$$

En coordenadas polares

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

lo que es igual a escribir

$$\phi(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\varepsilon),$$

y su derivada normal viene dada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\varepsilon) = \left| \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) \right|,$$

entonces

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) \right| = \frac{1}{2\pi\varepsilon}$$

lo que implica

$$\frac{\partial \phi}{\partial \widehat{n}}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}$$

escribiendo la integral en coordenadas polares, en cuyo caso

$$d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\theta$$

y tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se obtiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \widehat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \varepsilon d\theta = 1. \quad (2.34)$$

Todavía tenemos que evaluar el límite de la primera integral en el lado derecho de la ecuación (2.33). Usando el mismo razonamiento que antes, y suponiendo que la función  $u$  es continua en  $\vec{x}_0$ , se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [u(\vec{x}) - u(\vec{x}_0)] \frac{\partial \phi}{\partial \widehat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma_\varepsilon(\vec{x}) = 0.$$

Así

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \widehat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma_\varepsilon(\vec{x}) = u(\vec{x}_0). \quad (2.35)$$

Basándonos en las mismas ideas anteriores, se evalúa el límite para el potencial de simple capa, obteniendo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \widehat{n}}(\vec{x}) d\Gamma_\varepsilon(\vec{x}) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \ln(\varepsilon) \frac{\partial u}{\partial \widehat{n}}(\vec{x}) \varepsilon d\theta = 0, \quad (2.36)$$

donde la derivada normal de la función  $u$  podría presentar discontinuidades, siempre y cuando esas discontinuidades sean finitas. Considerando (2.35) y (2.36), el límite de la integral sobre  $\Gamma_\varepsilon$  en la ecuación (2.32) es de la forma

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) - \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) \right) d\Gamma_\varepsilon(\vec{x}) = u(\vec{x}_0)$$

y la siguiente ecuación integral se obtiene de la ecuación (2.32)

$$u(\vec{x}_0) = \int_{\Gamma} \left( \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) - u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) \right) d\Gamma,$$

que no es más que la segunda identidad de Green.

Con el fin de obtener una ecuación que relacione los valores de la integral de borde solo con valores en la frontera, el límite se toma en el punto  $\vec{x}$  tendiendo a un punto  $\vec{x}_0$  sobre la frontera  $\Gamma$ . Una vez más, es necesario excluir el punto  $\vec{x}_0$  antes de tomar el límite, sin embargo, si  $\vec{x}_0$  pertenece a una parte suave de la frontera, bastará tomar un semicírculo como se muestra en la Figura 2.4.

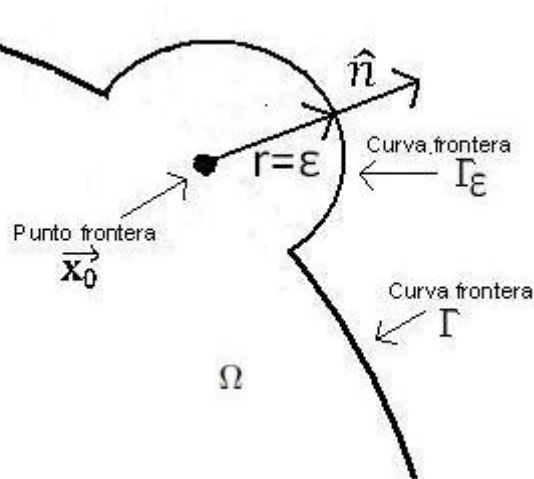


Figura 2.4: Exclusión punto sobre la frontera

En este caso, se puede aplicar el mismo procedimiento visto anteriormente, con la única diferencia que el límite superior de la integral en las ecuaciones (2.34) y (2.36) será  $\pi$  en lugar de  $2\pi$  [9]. Tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  tenemos (por  $\vec{x}_0$  estar en una frontera suave)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) - \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) \right) d\Gamma_\varepsilon(\vec{x}) = \frac{1}{2} u(\vec{x}_0)$$

obteniendo así la siguiente ecuación integral de frontera

$$\frac{1}{2}u(\vec{x}_0) = \int_{\Gamma} \left( \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) - u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) \right) d\Gamma \quad (2.37)$$

para cualquier punto  $\vec{x}_0$  sobre una superficie suave de la frontera.

La ecuación integral (2.37) se puede generalizar de la forma

$$C(\vec{x}_0)u(\vec{x}_0) = \int_{\Gamma} \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma \quad (2.38)$$

para cualquier punto  $\vec{x}_0$  en la frontera  $\Gamma$ .

El factor  $C(\vec{x}_0)$  depende de la geometría de la frontera en el punto  $\vec{x}_0$ . Si la frontera en  $\vec{x}_0$  no es una parte suave (presenta vértices o aristas) entonces el valor de  $C(\vec{x}_0)$  es un factor que varía entre 0 y 1.

En caso de problemas con bordes que no sean suaves, el proceso que acabamos de describir se puede repetir con sólo cambios menores (cambiando el límite superior en las integrales (2.34) y (2.36)) [9]. La Figura 2.5 muestra una de estas situaciones,

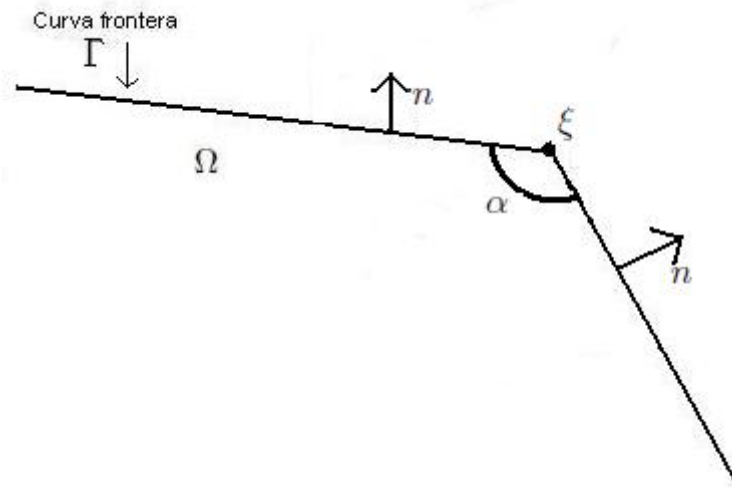


Figura 2.5: Contorno no suave

donde  $\alpha$  representa el ángulo que se produce en la esquina. Para este caso, el coeficiente  $C(\vec{x}_0)$  se convierte en

$$C(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad 0 \leq C(\xi) \leq 1. \quad (2.39)$$

El resultado de la integración de los otros términos para el caso de contornos no liso, es de nuevo igual a cero. De todos los resultados obtenidos hasta ahora, se obtiene la expresión de la constante  $C(\vec{x}_0)$  que aparece en la ecuación integral de frontera (2.38)

$$C(\vec{x}_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{x}_0 \notin \Gamma, \Omega \\ 1 & \text{si } \vec{x}_0 \in \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{si } \vec{x}_0 \text{ se encuentra en una superficie suave de } \Gamma \\ \frac{\alpha}{2\pi} & \text{si } \vec{x}_0 \text{ se encuentra en una esquina de } \Gamma, 0 \leq \alpha \leq 2\pi \end{cases} \quad (2.40)$$

## 2.4 Método de elemento frontera

El planteamiento de la ecuación integral de frontera es el punto de partida para el método de elemento frontera, el cual se basa en la discretización del contorno del dominio del problema en una serie de elementos, cuya geometría puede variar dependiendo del problema estudiado.

Consideremos un dominio bidimensional, dividamos su frontera en  $N$  elementos como se muestra en la Figura 2.6

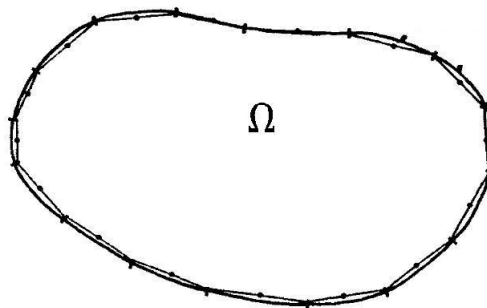


Figura 2.6: Discretización de la frontera



Los puntos donde los valores considerados son desconocidos se denominan “nodos”.

En BEM podemos considerar tres tipos de elementos a saber:

- **Elemento constante**

En este caso la frontera es discretizada en  $N$  elementos, y se tiene un nodo por elemento. Los nodos están ubicados justo en el centro de cada elemento como se muestra en la Figura 2.7. Es muy importante tener en cuenta que para este tipo de elementos el potencial y su derivada se consideran constantes a lo largo del mismo.

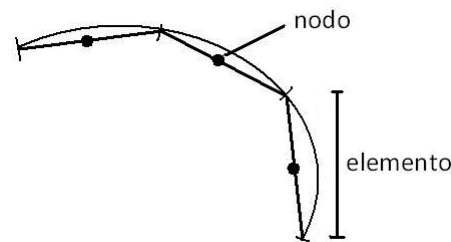


Figura 2.7: Elemento constante

- **Elemento lineal**

La frontera del dominio es discretizada en  $N$  elementos, y tenemos dos nodos por elemento. Los nodos se ubican en los extremos tal como se muestra en la Figura 2.8, por lo tanto un mismo nodo puede pertenecer a dos elementos distintos. Para estos elementos el potencial se puede considerar que varía a lo largo del elemento y, a diferencia de los elementos constantes, su derivada (el flujo) también puede variar, ya que para un mismo nodo se puede tener dos flujos distintos, y esto se debe a que el flujo depende de la dirección del vector normal, por ende va a ser de mucha importancia el tratamiento que se debe dar a las esquinas formadas por los elementos.

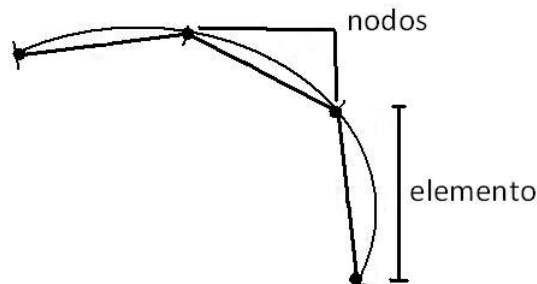


Figura 2.8: Elemento lineal

- **Elemento cuadrático**

Para este caso la frontera es discretizada en  $N$  elementos, y se tienen tres nodos por elemento. Los nodos se ubican de la siguiente forma: dos en los extremos y uno en el medio como se muestra en la Figura 2.9, por lo tanto al igual que en los elementos lineales, un nodo puede pertenecer a dos elementos distintos. Para estos elementos el potencial se puede considerar que varía a lo largo del elemento, debido a que el potencial puede tener valores distintos para cada uno de los nodos. Al igual que los elementos lineales, el flujo también varía, ya que en los extremos del elemento para un mismo nodo se pueden tener dos valores distintos del flujo de potencial, debido a que el mismo depende de la dirección del vector normal, como en elementos lineales, será de mucha importancia el tratamiento que se debe dar a las esquinas formadas por los elementos. Estos elementos se caracterizan por ser curvos, y son los que más se pueden adaptar a la geometría del dominio dependiendo de como esté sea.

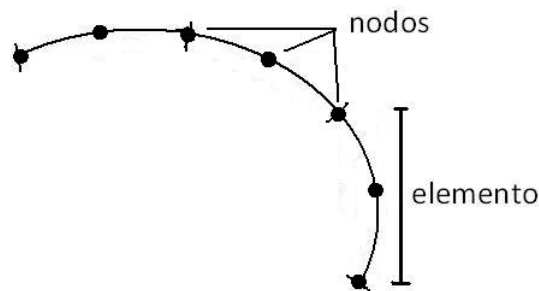


Figura 2.9: Elemento cuadrático

- **Elemento de orden superior**

Los elementos de orden superior rara vez se utilizan en la práctica en comparación al de segundo orden, sin embargo su estudio podría ser interesante. Para este caso los elementos se describen mediante la adopción de cuatro nodos en cada uno de ellos, tal como se muestra en la Figura 2.10

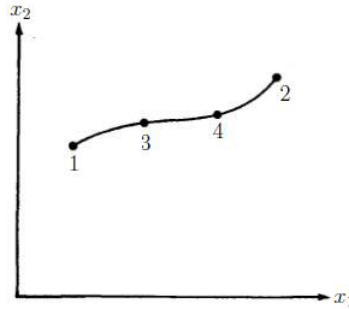


Figura 2.10: Elemento de orden superior

En este trabajo usaremos elementos cuadráticos para la resolución de problemas de potencial, por lo que se realiza un estudio de los mismos.

## 2.5 Estudio de los elementos cuadráticos

El objetivo de este trabajo es implementar los elementos de orden cuadráticos en la resolución de problemas de potencial, para ello consideramos una variación de  $u$  y  $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$ , con los nodos ubicados como se mostró en la Figura 2.9. Después de discretizar el contorno en  $N$  elementos la ecuación integral (2.38) puede ser escrita como

$$C^i u^i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u(\vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) d\Gamma. \quad (2.41)$$

donde  $i$  es el punto de colocación,  $1 \leq i \leq 2N$ .

Los valores de  $u(\vec{x})$  y de  $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\vec{x})$  en cualquier punto del elemento se pueden definir en términos de su valor nodal y tres funciones cuadráticas de interpolación  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ . Además, con la finalidad de facilitar los cálculos de las integrales, introduciremos una nueva variable adimensional  $\xi$  tal que  $-1 \leq \xi \leq 1$ , de tal forma las funciones de interpolación se dan en términos de la coordenada homogénea  $\xi$ , es decir,

$$u(\xi) = f_1 u^1 + f_2 u^2 + f_3 u^3 = (f_1, f_2, f_3) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\xi) = f_1 \frac{\partial u^1}{\partial \hat{n}} + f_2 \frac{\partial u^2}{\partial \hat{n}} + f_3 \frac{\partial u^3}{\partial \hat{n}} = (f_1, f_2, f_3) \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \hat{n}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \hat{n}} \\ \frac{\partial u^3}{\partial \hat{n}} \end{pmatrix}$$

donde las funciones de interpolación son

$$f_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1); \quad f_2 = (1 - \xi)(1 + \xi); \quad f_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

con  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

La Figura 2.11 muestra el recorrido sobre los elementos cuadráticos para distintos valores de  $\xi$ .

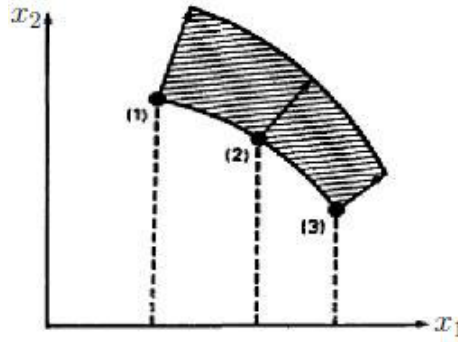


Figura 2.11: Recorrido elemento cuadrático

Nótese que para  $\xi = -1$  el parámetro se ubica en el primer nodo, para  $\xi = 0$  en el nodo central y para  $\xi = 1$  en el tercer nodo.

Las funciones de interpolación son cuadráticas en la variable  $\xi$ , sustituyendola en la ecuación (2.41) para un punto de colocación  $i$  obtenemos

$$\begin{aligned} C^i u^i + \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)u^1 + (1 - \xi)(1 + \xi)u^2 + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)u^3 \right] \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} J d\xi = \\ \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \frac{\partial u^1}{\partial \hat{n}} + (1 - \xi)(1 + \xi) \frac{\partial u^2}{\partial \hat{n}} + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \frac{\partial u^3}{\partial \hat{n}} \right] \phi J d\xi \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde  $J$  es el jacobiano de una transformación debido a que las funciones de interpolación están dadas en términos de la variable intrínseca mientras que las integrales a discretizar

están definidas en coordenadas globales.

Para una curva tal como se indica en la Figura 2.12, la transformación es simple,

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} d\xi = |J|d\xi$$

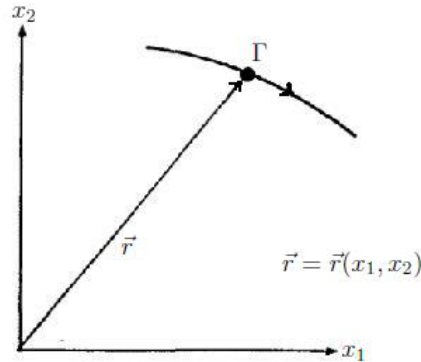


Figura 2.12: Elemento cuadrático simple

Debemos tener en cuenta que para calcular el valor del jacobiano es necesario conocer la variación de las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  en términos de  $\xi$ . Esto puede hacerse mediante la definición de la forma geométrica del elemento en la misma forma que definimos las variables  $u$  y  $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ , es decir, mediante la interpolación cuadrática del parámetro o de la geometría,

$$x_1 = f_1 x_1^1 + f_2 x_1^2 + f_3 x_1^3$$

$$x_2 = f_1 x_2^1 + f_2 x_2^2 + f_3 x_2^3$$

donde los supraíndices indican el número de los nodos.

Nótese que en la ecuación (2.41) tenemos dos tipos de integrales que se llevarán a cabo sobre los elementos, es decir,

$$\int_{\Gamma_j} u(\vec{x}_i) \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) d\Gamma \quad y \quad \int_{\Gamma_j} \phi(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(\vec{x}_i) d\Gamma.$$

Estas integrales se refieren al nodo  $i$  donde la solución fundamental se esta evaluando para cualquier otro nodo  $j$ . Debido a ésto los valores resultantes de estas integrales se denominan a veces coeficientes de influencia, vamos a llamarlos  $\widehat{H}^{ij}$  y  $G^{ij}$ , es decir,

$$\widehat{H}^{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi}{\partial \widehat{n}}(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma \quad y \quad G^{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Gamma. \quad (2.43)$$

### 2.5.1 Tratamiento en las esquinas.

Un dominio cuya frontera es discretizada usando elementos de borde presentará una serie de esquinas que requieren especial atención, debido a que en las mismas se tendrán pares de nodos que se solapan entre sí, es decir, cuando el borde del dominio es discretizado en elementos cuadráticos continuos, el nodo 3 del elemento “  $j$  ” es el nodo 1 del elemento “  $j + 1$  ”. Como el potencial es único en cualquier punto del borde,  $u^3$  del elemento “  $j$  ” y  $u^1$  del elemento “  $j + 1$  ” son iguales. Sin embargo, este argumento no puede ser aplicado como una regla general para el flujo, debido a que hay puntos en el borde para el cual el flujo no tiene un valor único. Éste tendrá lugar en los puntos donde el vector normal a la frontera no es único (puntos en las esquinas), por ello se debe tener en cuenta la posibilidad que el flujo del nodo 3 de un elemento puede ser diferente al flujo en el nodo 1 del siguiente elemento. Así, el potencial puede ser dispuesto en una matriz de dimensión  $2N$  y el flujo en una matriz de dimensión  $3N$ .

Sustituyendo las ecuaciones (2.43) en la ecuación (2.41), para todo elemento “  $j$  ” obtenemos la siguiente ecuación para el nodo “  $i$  ”

$$C^i u^i + (\widehat{H}^{i1}, \widehat{H}^{i2}, \dots, \widehat{H}^{i2N}) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \dots \\ u^{2N} \end{pmatrix} = (G^{i1}, G^{i2}, \dots, G^{i3N}) \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \widehat{n}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \widehat{n}} \\ \dots \\ \frac{\partial u^{3N}}{\partial \widehat{n}} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

La ecuación (2.44) representa la ecuación de ensamblado para el nodo “  $i$  ”, esta ecuación puede ser escrita como

$$C^i u^i + \sum_{j=1}^{2N} \widehat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=i}^{3N} G^{ij} \frac{\partial u^j}{\partial \widehat{n}}. \quad (2.45)$$

Como la posición de  $i$  también varía de 1 a  $2N$ , podemos suponer que la solución fundamental es aplicada en cada nodo, sucesivamente obtenemos un sistema de ecuaciones. Ahora, llamando

$$H^{ij} = \begin{cases} \hat{H}^{ij} & \text{cuando } i \neq j \\ \hat{H}^{ij} + C^i & \text{cuando } i = j \end{cases} \quad (2.46)$$

la ecuación (2.45) puede ser escrita como

$$\sum_{j=1}^{2N} H^{ij} u^j = \sum_{j=i}^{3N} G^{ij} \frac{\partial u^j}{\partial \hat{n}}. \quad (2.47)$$

Si hacemos  $q^j = \frac{\partial u^j}{\partial \hat{n}}$ , el conjunto de ecuaciones se puede expresar en forma matricial como

$$HU = GQ \quad (2.48)$$

donde  $H$  y  $G$  son matrices rectangulares de orden  $N \times 2N$  y  $N \times 3N$  respectivamente,  $U$  y  $Q$  son vectores de longitud  $N$ .

Para las condiciones de borde debemos tener en cuenta qué valores son prescritos, recordemos que por cada elemento tenemos tres nodos, y varias situaciones se pueden presentar, por ejemplo, si nos encontramos en el nodo central solo ocurren dos casos: el potencial es conocido y el flujo es desconocido o viceversa, ahora si nos encontramos en los nodos que coinciden en un mismo punto del borde, otras situaciones pueden ocurrir, una de las situaciones es que el borde sea suave en el nodo. En cuyo caso el flujo es el mismo en los nodos que se solapan, a menos que sean prescritos como diferentes, pero en cualquier caso, solo una variable será desconocida sea el potencial o el flujo. Otra situación es que el nodo se encuentre en un punto de la esquina, en este caso hay 3 posibles situaciones diferentes dependiendo de las condiciones de borde a saber:

- a) Valores conocidos: flujo conocido antes y después de la esquina.  
Valor desconocido: potencial.
- b) Valores conocidos: potencial y flujo antes de la esquina.  
Valor desconocido: flujo después de la esquina.
- c) Valores conocidos: potencial y flujo después de la esquina.

Valor desconocido: flujo antes de la esquina.

Solo hay un valor desconocido por nodo, siempre y cuando esto ocurra el sistema (2.48) puede ser reordenado de tal forma que todas las incógnitas sean llevadas a la izquierda y obtener un sistema usual de ecuaciones  $N \times N$ , es decir

$$AX = F \quad (2.49)$$

donde  $X$  es un vector de dimensión  $N$ , en el cual se encuentran incógnitas de  $u$  y valores en el borde de  $\frac{\partial u}{\partial n}$ .  $A$  es la matriz  $N \times N$  de coeficientes,  $F$  se encuentra multiplicando las correspondientes columnas por los valores conocidos de  $u$  o de  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , y es el vector conocido calculado por el producto de las condiciones de contorno conocidas y los correspondientes coeficientes de las matrices  $G$  o  $H$ .

Es interesante señalar que las incógnitas son una mezcla del potencial y su derivada, y no solo del potencial como en elementos finitos. Esto es consecuencia de los elementos de contorno de ser una formulación “mixta” y da una importante ventaja sobre el método de elementos finitos.

De esta manera podemos resolver el sistema (2.49) y todos los valores del borde son entonces conocidos. Una vez hecho esto es posible calcular cualquier valor interno de  $u$  o de su derivada. Los valores de  $u$  son calculados en cualquier punto interno “ $i$ ” usando la ecuación integral de frontera (2.38), con la solución fundamental actuando sobre un punto interno “ $i$ ” y que todos los valores de  $u$  y  $\frac{\partial u}{\partial n}$  sobre la frontera ya son conocidos.

Una manera de resolver la ecuación integral de frontera es la integración en forma numérica, integrales como  $G^{ij}$  y  $\hat{H}^{ij}$  en las expresiones anteriores, se pueden calcular usando cuadratura de Gauss para el caso  $i \neq j$ , que es el caso en donde la solución fundamental no presenta ninguna singularidad. En el caso en que el punto de colocación coincida con algún nodo del elemento, es decir  $i = j$ , la presencia de la singularidad en ese elemento requiere una integración más exacta. Para estas integrales es recomendable utilizar una fórmula especial tal como una formulación logarítmica u otras transformaciones [5].



# Capítulo 3

## Implementación del método numérico

### 3.1 Introducción

Un método numérico es un procedimiento mediante el cual se obtiene, casi siempre de manera aproximada, la solución de ciertos problemas; consiste de una lista finita de instrucciones precisas que especifican una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas (algoritmo), que producen una aproximación de la solución del problema conocida como solución numérica.

A continuación explicaremos el algoritmo que fue desarrollado en FORTRAN<sup>1</sup>, para problemas de potenciales usando elementos cuadráticos. El programa es llamado POQUABE [3] y está compuesto por varias subrutinas.

### 3.2 Programa principal (POQUABE)

Este programa hace el llamado a las diversas subrutinas necesarias para la solución de los problemas de potencial con elementos cuadráticos. El programa lleva por nombre POQUABE como abreviatura de Potential Quadratics Boundary Elements, las subrutinas llamadas son las siguientes:

INPUTPQ: lee los datos del problema.

GHMATPQ: forma el sistema de matrices  $H$  y  $G$  y reordena de acuerdo con las condiciones de contorno en una matriz  $A$ . Además, crea la parte derecha del sistema que es el vector  $F$ . Aquí se hace un llamado a otras dos subrutinas llamadas EXTINPQ y LOCINPQ.

---

<sup>1</sup>El algoritmo desarrollado en FORTRAN fué tomado de la bibliografía [3].

EXTINPQ: calcula las submatrices  $GW$  y  $HW$  cuando el punto de colocación se encuentra en un nodo que no sea ninguno de los tres en el elemento.

LOCINPQ: calcula la submatriz  $GW$  para el caso cuando el punto de colocación es uno de los nodos del elemento estudiado.

SLNPD: resuelve el sistema de ecuaciones obtenido.

INTERPQ: calcula el valor del potencial en los puntos internos.

OUTPTPQ: Imprime los resultados.

El diagrama de flujo en la Figura 3.1 representa el algoritmo dado por estas subrutinas.

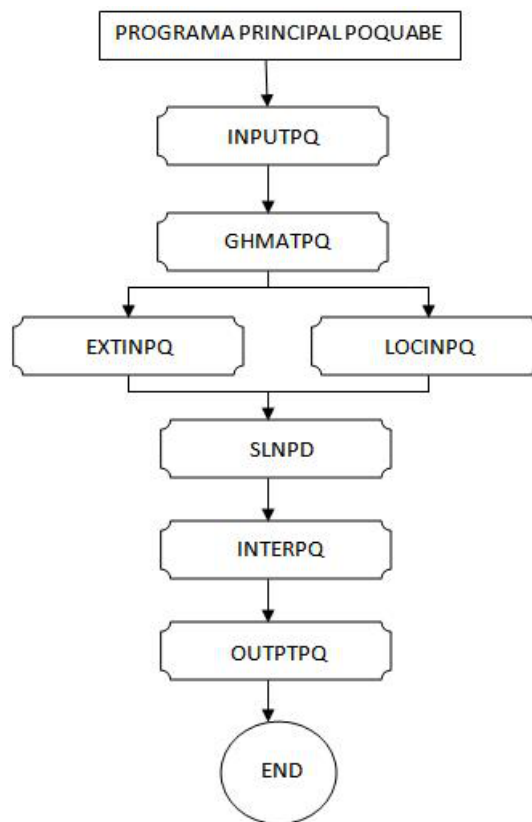


Figura 3.1: Diagrama de flujo programa POQUABE

### 3.2.1 Rutina INPUTPQ

Esta subrutina lee todos los datos requeridos por el programa, pide un archivo de entrada con toda la información del problema distribuida por líneas de la siguiente forma:

- i) Línea de título (Contiene el título del problema).
- ii) Línea de parámetro fundamental, ésta contiene el número de elementos y el número de

puntos internos.

iii) Línea con las coordenadas de los nodos. En esta línea se dan las coordenadas X e Y de cada nodo ordenando los nodos de forma antihorario.

iv) Línea de condiciones de frontera (habrá tantas líneas como elementos de borde). Se utiliza un valor adicional llamado KODE, el cual nos indicará el tipo de condición que se tiene en cada nodo; si KODE=0 la condición es tipo Dirichlet (potencial prescrito) y si KODE=1 la condición es tipo Neumann (flujo prescrito). Se deben dar tres valores de KODE y las variables conocidas serán leídas para cada elemento correspondiente a los tres nodos. De esta manera un valor del flujo que ha sido prescrito en un nodo en el extremo de un elemento será diferente al valor del flujo en el elemento contiguo. Sin embargo, el potencial debe ser único para cualquier nodo y el flujo también debe ser único para los nodos que están en el medio del elemento. El orden de lectura en el programa será primero KODE(I) y luego el valor de la variable sobre la frontera para  $I = 1, 2, 3$  donde  $I$  representa la ubicación de los nodos en cada elemento.

v) Línea de coordenadas de los puntos internos. Esta línea contiene las coordenadas de los puntos internos organizadas en un formato libre, habrá una o más líneas si es necesario.

### 3.2.2 Rutina GHMATPQ

Esta subrutina calcula las matrices  $G$  y  $H$  y hace llamado a las subrutinas EXTINPQ y LOCINPQ.

#### Rutina EXTINPQ

Esta subrutina calcula usando integración numérica las submatrices  $GW$  y  $HW$  cuando el punto de colocación se encuentra en un nodo que no sea ninguno de los tres en el elemento. Las integrales son del tipo  $\int_{\Gamma_j} u(\xi) \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} d\Gamma$  escritas en términos de las funciones de interpolación  $f_1, f_2, f_3$ , es decir,

$$HW = \int_{\Gamma_j} f_i \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} d\Gamma = \int_{-1}^1 f_i \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} J d\xi \quad (3.1)$$

$$GW = \int_{\Gamma_j} f_i \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} d\Gamma = \int_{-1}^1 f_i \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} J d\xi \quad (3.2)$$

donde  $i = 1, 2, 3$  y  $J$  es el jacobiano de la transformación.

En este caso, se calculan las matrices anteriores mediante cuadratura de Gauss con diez puntos.

### Rutina LOCINPQ

Esta subrutina calcula la submatriz  $GW$  para el caso cuando el punto de colocación es uno de los nodos del elemento estudiado (es decir, tenemos una singularidad en el elemento que se va a integrar). La correspondiente matriz  $HW$  es calculada usando EXTINPQ ya que la singularidad se producirá solo en el término diagonal y éste, es calculado más adelante mediante la adición de los términos de las filas fuera de la diagonal.

Para esta subrutina la integral para cada elemento es

$$GW = \int_{\Gamma_j} f_i \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} d\Gamma. \quad (3.3)$$

con  $i = 1, 2, 3$ .

Consideramos tres casos en función de la posición del punto de colocación, es decir,  $NODO = 1, 2$  o  $3$

i) Punto de colocación en el nodo 1.

En primer lugar se hace el cambio de coordenadas  $x_1, x_2$  a  $\xi$ , definido en la misma forma como se hace en la subrutina EXTINPQ. Luego, con el fin de integrar la singularidad, hacemos un nuevo cambio de variable, es decir

$$\eta = \frac{\xi + 1}{2}. \quad (3.4)$$

La integral da dos partes, una con un término singular en  $\frac{1}{\eta}$  y el otro término sin singularidad. En la primera parte de la integral se tiene una singularidad de tipo logarítmico, el integrando puede expresarse por una fórmula especial de cuadratura de Gauss del tipo

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) f(\eta) d\eta \approx \sum_{i=1}^n W_i f(\eta_i). \quad (3.5)$$

donde los valores de  $\eta_i$  y los factores  $W_i$  son los pesos y las abscisas de Gauss [3].

La segunda parte es integrada por la fórmula de cuadratura de Gauss estándar en términos de la variable  $\xi$ . Las funciones de interpolación dadas en términos de  $\xi$  ahora se darán en términos de la nueva variable  $\eta$ .

ii) Punto de colocación en el nodo 2.

Con el fin de integrar las dos singularidades que aparecen a ambos lados de los nodos, la integral se divide en dos partes

$$GW = \int_{nodo1}^{nodo3} f_i \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} J d\xi = \int_{nodo1}^{nodo2} f_i \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} J d\xi + \int_{nodo2}^{nodo3} f_i \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} J d\xi, \quad (3.6)$$

entonces, la primera parte se cambia a la variable  $\eta' = -\xi$  y la segunda parte a la variable  $\eta = \xi$ . Ahora cada parte singular de estas dos integrales es calculada usando la fórmula de integración especial de cuadratura de Gauss, y las dos partes no singulares son integradas usando 10 puntos de cuadratura de Gauss. Se debe tener en cuenta que dos jacobianos deben ser calculados, ya que estamos realizando dos cambios de variable.

iii) Punto de colocación en el nodo 3.

Este caso es similar al primero con la variable de integración logaritmica, ahora

$$\eta = \frac{1 - \xi}{2} \quad (3.7)$$

y la Figura 3.2 muestra el valor de  $\eta$  dependiendo de donde se encuentre el punto de colocación.

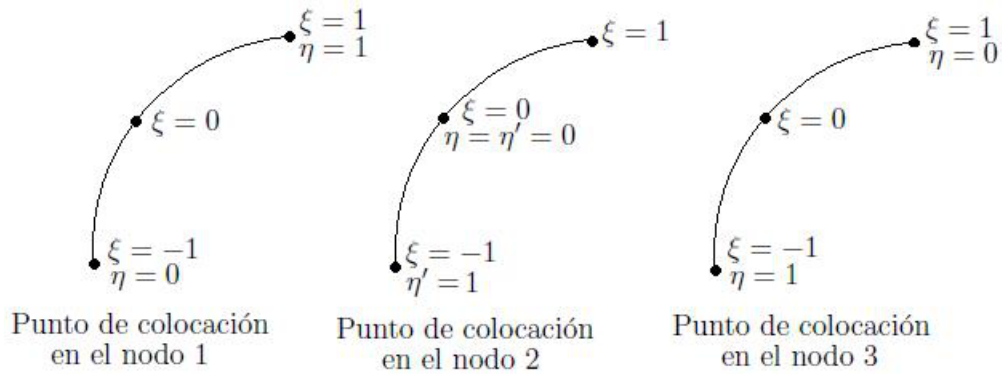


Figura 3.2: Sistema de coordenadas geométricas para integración numérica

Las submatrices resultantes  $GW$  y  $HW$  se ensamblan en el sistema de matrices  $G$  y  $H$ . La matriz  $G$  es rectangular, ya que cada nodo en el extremo de un elemento puede tener flujos diferentes, es decir, uno “antes” y otro “después” del nodo. Los términos diagonales en  $H$  se calculan considerando que el potencial es constante. Una vez que las matrices  $H$  y  $G$  se montan, el sistema de ecuaciones es reordenado de acuerdo con las condiciones de contorno para formar

$$AX = F, \quad (3.8)$$

donde  $X$  es un vector de  $N$  incógnitas, siendo  $N$  el número de nodos;  $A$  es una matriz de orden  $N \times N$  cuyas columnas son combinación de columnas de  $H$  o  $G$  en función de las condiciones de contorno;  $F$  es un vector conocido que se calcula multiplicando las condiciones de contorno prescritas por los términos de la correspondiente fila de  $G$  o  $H$ . Al final de la subrutina GHMATPQ y después de reordenar los valores, la matriz  $H$  contendrá la matriz  $A$  y los valores prescritos.

### 3.2.3 Rutina SLNPD

Esta subrutina es utilizada para resolver el sistema de ecuaciones  $AX = F$  obtenido en la subrutina GHMATPQ, utilizando el método de Gauss-Jordan. Si la matriz  $A$  tiene un cero en la diagonal se hará un intercambio de filas, concluyendo que la matriz del sistema es singular solo cuando no se han intercambiado filas, y en caso de hacerlo es para que los coeficientes de la diagonal sean distintos de cero. Si esto ocurre, dará un mensaje que indica una singularidad en la fila.

### 3.2.4 Rutina INTERPQ

Esta subrutina primero reordena los vectores donde los valores del flujo y potencial son almacenados, de tal forma que los flujos en el borde queden en un solo vector y los potenciales en otro. A continuación, calcula los potenciales en los puntos internos.

El potencial en cualquier punto interno está dado por

$$u^i = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \phi \alpha d\Gamma \right\} \frac{\partial u^j}{\partial \widehat{n}} - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi}{\partial \widehat{n}} \alpha d\Gamma \right\} u^j, \quad (3.9)$$

las integrales a lo largo del borde de los elementos son calculadas numéricamente haciendo un nuevo llamado a la subrutina EXTINPQ.

### 3.2.5 Rutina OUTPTPQ

Esta subrutina imprime los resultados en el siguiente orden:

- i) Potencial y flujos en los nodos del borde (flujo “antes” y “después” de cada nodo. Los nodos centrales siempre tienen el mismo flujo en ambos lados).
- ii) Potencial en los puntos internos.

## 3.3 Ejemplos

A continuación, con la finalidad de estudiar la eficiencia del método de elemento frontera se muestran ejemplos de la implementación usando elementos cuadráticos.

### 3.3.1 Torsión sobre sección elíptica

El problema de una barra bajo torsión elíptica se analiza usando el programa POQUABE. Para este problema se estudia el caso de una barra elíptica como la de la Figura 3.3 cuyo eje mayor es igual a 10 y eje menor igual 5, sometida a torsión mediante dos pares torsores aplicados en sus extremos, estando éstos libres para deformarse. Esto es lo que se denomina torsión uniforme, torsión libre o torsión de SAINT VENANT [10].

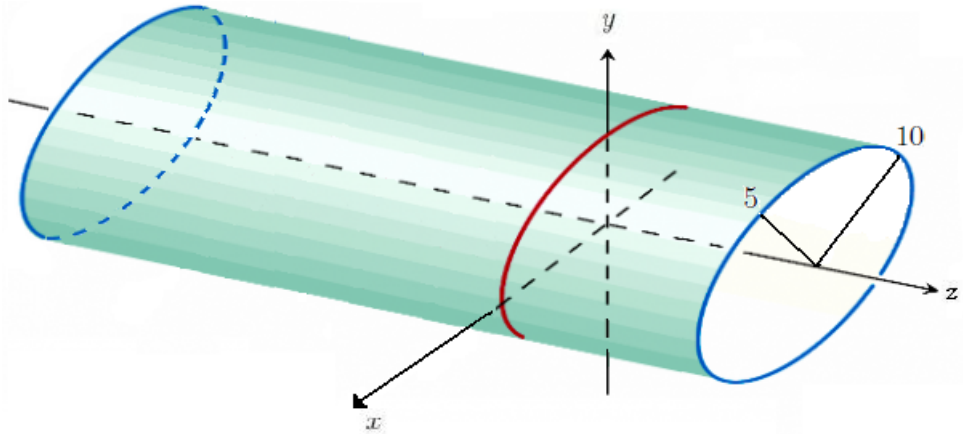


Figura 3.3: Barra Elíptica

Bajo estas condiciones, la deformación de la barra torsionada consiste en una rotación de la sección transversal y una deformación de la misma en la dirección del eje longitudinal, siendo esta deformación la misma para todas las secciones de la pieza. De acuerdo con la hipótesis de Saint-Venant, el giro de una sección cualquiera se efectúa alrededor de un punto que puede o no coincidir con el baricentro de la sección llamado centro de torsión. En virtud de la torsión de tipo Saint-Venant, los desplazamientos se dan por

$$\begin{aligned} u_1 &= -\theta zy \\ u_2 &= \theta zx \\ u_3 &= \theta \varphi \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde  $\theta$  es el ángulo de torsión por unidad de longitud y  $\varphi$  es la función de deformación dada por

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Dado que no existen fuerzas exteriores en la superficie lateral de la barra, no puede existir componente de tensión perpendicular al contorno, por lo tanto la tensión en el borde es siempre tangencial al mismo [10], esto indica que las tracciones, es decir, el esfuerzo a que está sometido el cuerpo por la aplicación de las fuerzas que actúan en sentido opuesto y tienden a estirarlo, debe ser constante a lo largo del borde. Esta constante puede elegirse arbitrariamente; en nuestro caso la consideraremos nula, por lo tanto la condición de borde es la siguiente



$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} = |r| \cos(\vec{r}, \vec{t}), \quad (3.11)$$

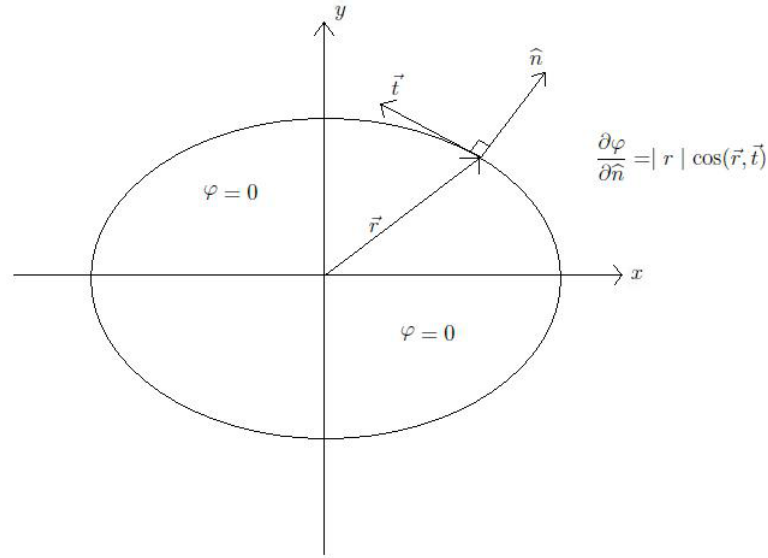


Figura 3.4: Condición de borde en la sección elíptica

para este caso (elipse) esta condición puede escribirse como

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}} xy. \quad (3.12)$$

y el valor analítico de  $\varphi$  viene dado por

$$\varphi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \quad (3.13)$$

Tomaremos el valor de  $a = 10$  y  $b = 5$  con los que se calcularán los valores de  $\varphi$  en la frontera y en dos puntos internos seleccionados, cuyas coordenadas son  $(2, 2)$  y  $(4, \frac{7}{2})$ .

Debido a la simetría axial de la elipse se tiene que  $\varphi = 0$  en los dos ejes. Así, solo una cuarta parte de la elipse será discretizada por cinco elementos de segundo orden, uno para

el semi-eje mas corto, dos para el largo y dos para un cuarto de la elipse como en la Figura 3.5.

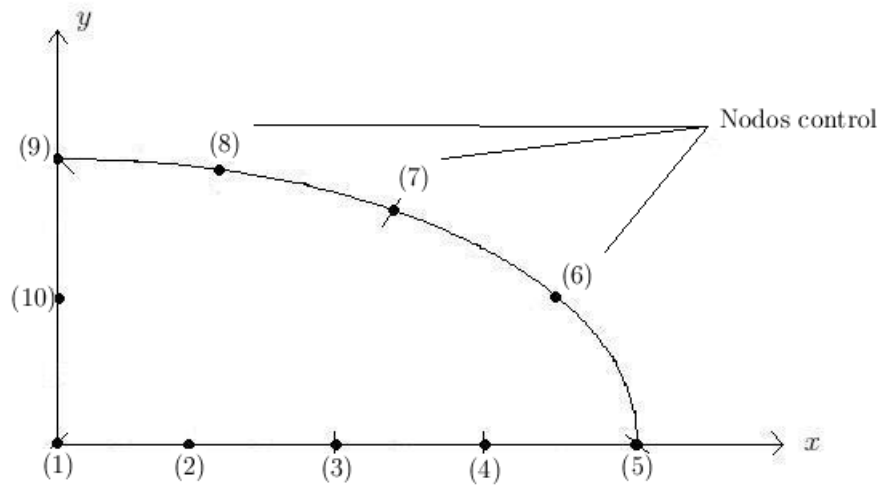


Figura 3.5: Discretización con 5 elementos cuadráticos

La data para este ejemplo es la siguiente:

SECCIÓN ELÍPTICA (5 ELEMENTOS) (DATA)

TORSIÓN SOBRE SECCIÓN ELÍPTICA (5 ELEMENTOS CUADRÁTICOS)

5 2

0. 0. 2.5 0. 5. 0. 7.5 0. 10. 0.

8.814 2.3617 6.174 3.933

3.3044 4.719

0. 5. 0. 2.5

0 0. 0 0. 0 0.

0 0. 0 0. 0 0.

1 0. 1 -4.8334 1 -4.3104

1 -4.3104 1 -2.4411 1 0.

0 0. 0 0. 0 0.

2. 2. 4. 3.5

y el archivo de salida está dado por:

\*\*\*\*\*  
 TORSIÓN SOBRE SECCIÓN ELÍPTICA (5 ELEMENTOS CUADRÁTICOS)

DATA

NÚMEROS DE ELEMENTOS DE BORDE= 5

NÚMERO DE PUNTOS INTERNOS= 2

COORDENADAS DE LOS NODOS EN EL BORDE

NODE	X	Y
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	0.2500000E+01	0.0000000E+00
3	0.5000000E+01	0.0000000E+00
4	0.7500000E+01	0.0000000E+00
5	0.1000000E+02	0.0000000E+00
6	0.8814000E+01	0.2361700E+01
7	0.6174000E+01	0.3933000E+01
8	0.3304400E+01	0.4719000E+01
9	0.0000000E+00	0.5000000E+01
10	0.0000000E+00	0.2500000E+01

CONDICIONES EN EL BORDE

ELEMENTO	PRIMER NODO		SEGUNDO NODO		TERCER NODO	
	VALOR	KODE	VALOR	KODE	VALOR	KODE
1	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0
2	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0
3	0.0000000E+00	1	-0.4833400E+01	1	-0.4310400E+01	1
4	-0.4310400E+01	1	-0.2441100E+01	1	0.0000000E+00	1
5	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0

\*\*\*\*\*

RESULTADOS

NODOS EN EL BORDE

X	Y	POTENCIAL	FLUJO	
			ANTES DEL NODO	DESPUÉS DEL NODO
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.10336E-01	-0.10336E-01
0.25000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.15216E+01	0.15216E+01
0.50000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.29757E+01	0.29757E+01
0.75000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.46613E+01	0.46613E+01
0.10000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.51624E+01	0.00000E+00
0.88140E+01	0.23617E+01	-0.12779E+02	-0.48334E+01	-0.48334E+01
0.61740E+01	0.39330E+01	-0.14839E+02	-0.43104E+01	-0.43104E+01
0.33044E+01	0.47190E+01	-0.94349E+01	-0.24411E+01	-0.24411E+01
0.00000E+00	0.50000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.30003E+01
0.00000E+00	0.25000E+01	0.00000E+00	0.15278E+01	0.15278E+01

## PUNTOS INTERNOS

X	Y	POTENCIAL
0.20000E+01	0.20000E+01	-0.23990E+01
0.40000E+01	0.35000E+01	-0.84019E+01

\*\*\*\*\*

Con la finalidad de estudiar la eficiencia del método numérico, daremos la definición de error porcentual. Primero debemos definir el error absoluto:

**Definición 3.1** Sea  $X$  el valor exacto y  $X_1$  el valor de la medida, se llama error absoluto al módulo de la diferencia entre estos dos valores

$$EA = |\Delta X| = |X - X_1|.$$

Sin embargo, este error no basta por sí solo para caracterizar la precisión del método, por ello se considera el error relativo.

**Definición 3.2** Sea  $X$  el valor exacto y  $EA$  el error absoluto, se llama error relativo al módulo del cociente entre el error absoluto y el valor exacto

$$e = \frac{EA}{X}.$$

Si multiplicamos el error relativo por 100 obtenemos el error que cometemos por cada 100 unidades, es decir, el error porcentual

$$e\% = 100 \cdot \frac{EA}{X}.$$

Con esta definición del error porcentual, veamos que ocurre para los resultados obtenidos en algunos nodos y en los puntos internos. El resultado numérico se compara con el resultado analítico.

Coordenada del nodo	Potencial usando 5 elementos cuadráticos	Solución exacta del potencial	Error porcentual
$n_6 = (8,814, 2,361)$	-12.779	-12.489	2,32 %
$n_7 = (6,174, 3,933)$	-14.839	-14.570	2,53 %
$n_8 = (3,304, 4,719)$	-9.435	-9.356	0,84 %
Puntos internos			
$p_1 = (2, 2)$	-2.4305	-2.400	1,27 %
$p_2 = (4, \frac{7}{2})$	-8.4718	-8.400	0,85 %

Tabla 3.1: Cuadro comparativo de resultados y error porcentual

En la Tabla 3.1 se puede observar los resultados obtenidos para los nodos control y los puntos internos, en este ejemplo utilizando 5 elementos de borde el error porcentual es bajo y no sobrepasa el 3%.

Con los resultados obtenidos al implementar el método, se realiza el gráfico de la solución analítica y la solución numérica.

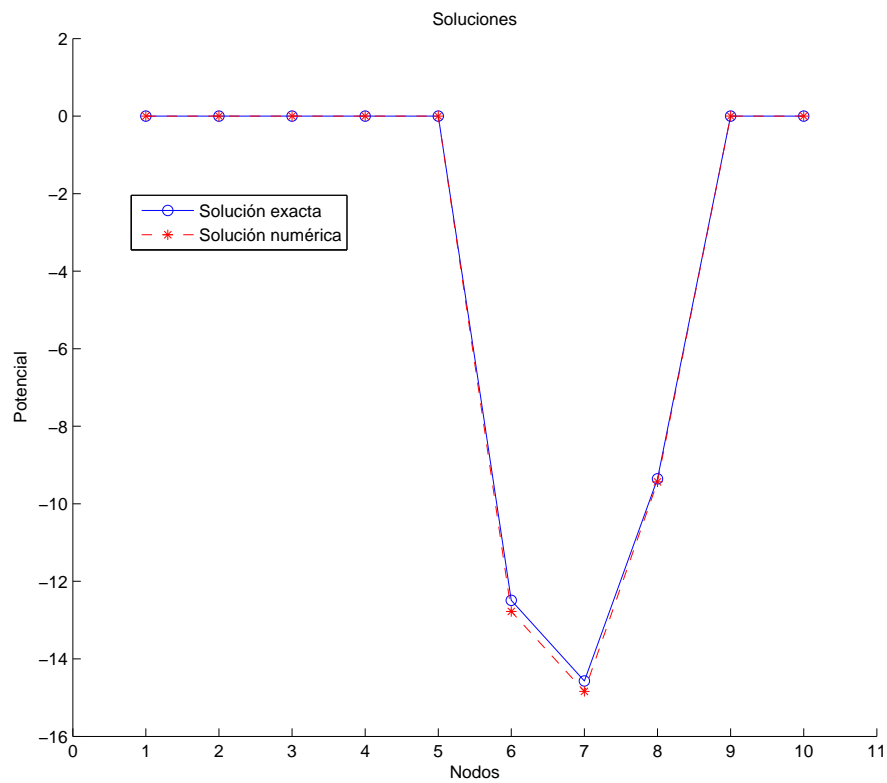


Figura 3.6: Comparación entre solución analítica y solución numérica

En la Figura 3.6 podemos observar la cercanía que existe entre la solución numérica usando elementos cuadráticos con la solución analítica dada por la ecuación (3.13).

La Figura 3.7 muestra la superficie que resulta al implementar el método en un cuarto de la sección elíptica utilizando 5 elementos cuadráticos.

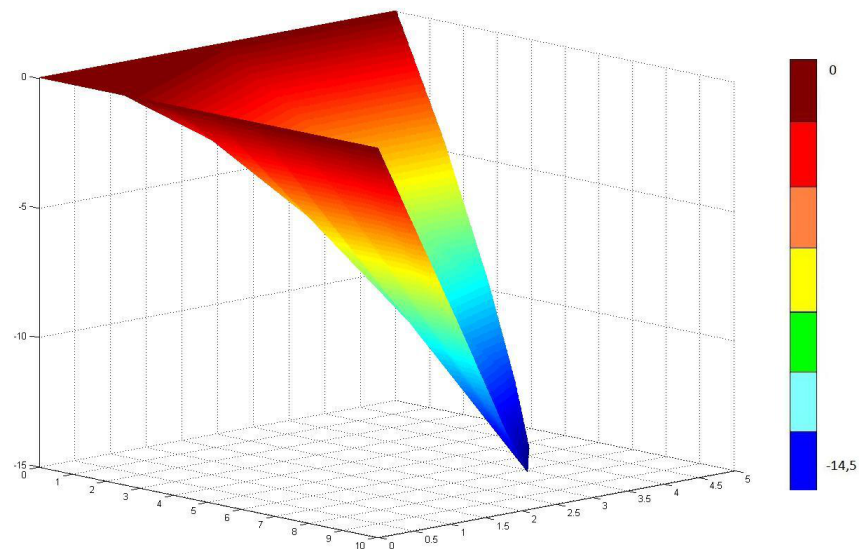


Figura 3.7: Potencial en un cuarto de la elipse

Como la barra es sometida a deformación se generan unas fuerzas internas que producen un trabajo conocido como potencial de deformación o potencial interno, que no es más que la resistencia que pone la barra a deformarse, en la figura anterior se puede observar cómo el potencial de deformación decae sobre la sección curva de la cuarta parte de la elipse, lo que nos indica que al aplicarle la torsión a la barra, dicha sección sufre una deformación y a medida que se va deformando el potencial disminuye.

Para estudiar la convergencia del método, aumentaremos el número de elementos para este ejemplo. Discretizaremos la cuarta parte de la sección elíptica con diez elementos de segundo orden, dos para el semi-eje más corto, cuatro para el largo y cuatro para la parte curva de la elipse como se muestra en la Figura 3.8.

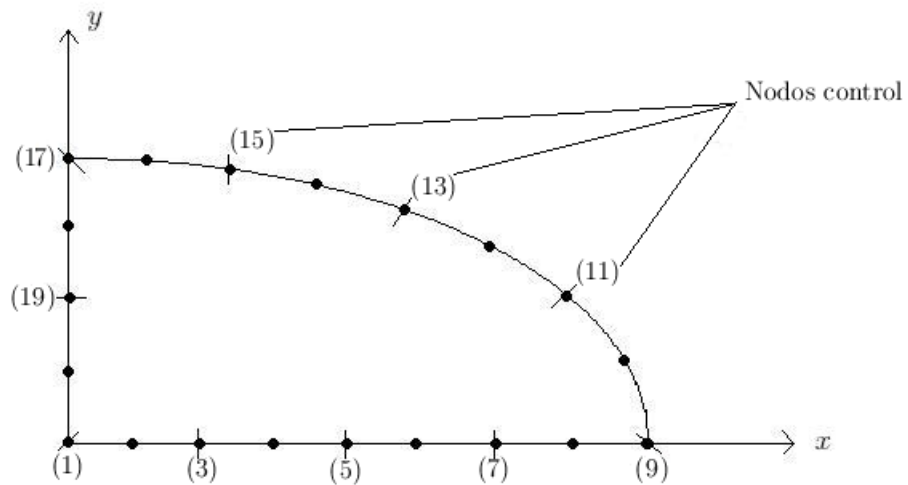


Figura 3.8: Discretización con 10 elementos cuadráticos

La data para este caso es la siguiente:

SECCIÓN ELÍPTICA (10 ELEMENTOS) (DATA)

TORSIÓN SOBRE SECCIÓN ELÍPTICA (10 ELEMENTOS CUADRÁTICOS)

```

10 2
0. 0. 1.25 0. 2.5 0. 3.75 0. 5. 0. 6.25 0. 7.5 0. 8.75 0. 10. 0.
9.67 1.273 8.814 2.3617 7.7008 3.1898 6.174 3.933
4.7898 4.3891 3.3044 4.719 1.557 4.939
0. 5. 0. 3.375 0. 2.5 0. 1.25
0 0. 0 0. 0 0.
0 0. 0 0. 0 0.
0 0. 0 0. 0 0.
0 0. 0 0. 0 0.
1 0. 1 -3.379 1 -4.8334
1 -4.8334 1 -4.9447 1 -4.3104
1 -4.3104 1 -1.1643 1 0.
1 -2.4411 1 -1.1643 1 0.
0 0. 0 0. 0 0.
0 0. 0 0. 0 0.
2. 2. 4. 3.5
    
```



y el archivo de salida está dado por:

```
*****  
TORSIÓN SOBRE SECCIÓN ELÍPTICA (10 ELEMENTOS CUADRÁTICOS)
```

DATA

NÚMEROS DE ELEMENTOS DE BORDE= 10

NÚMERO DE PUNTOS INTERNOS= 2

COORDENADAS DE LOS NODOS EN EL BORDE

NODE	X	Y
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	0.1250000E+01	0.0000000E+00
3	0.2500000E+01	0.0000000E+00
4	0.3750000E+01	0.0000000E+00
5	0.5000000E+01	0.0000000E+00
6	0.6250000E+01	0.0000000E+00
7	0.7500000E+01	0.0000000E+00
8	0.8750000E+01	0.0000000E+00
9	0.1000000E+02	0.0000000E+00
10	0.9670000E+01	0.1273000E+01
11	0.8814000E+01	0.2361700E+01
12	0.7700800E+01	0.3189800E+01
13	0.6174000E+01	0.3933000E+01
14	0.4789800E+01	0.4389100E+01
15	0.3304400E+01	0.4719000E+01
16	0.1557000E+01	0.4939000E+01
17	0.0000000E+00	0.5000000E+01
18	0.0000000E+00	0.3375000E+01
19	0.0000000E+00	0.2500000E+01
20	0.0000000E+00	0.1250000E+01

CONDICIONES EN EL BORDE

ELEMENTO	PRIMER NODO		SEGUNDO NODO		TERCER NODO	
	PRESCRITO	KODE	PRESCRITO	KODE	PRESCRITO	KODE
1	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0
2	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0
3	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0
4	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0
5	0.0000000E+00	1	-0.3379000E+01	1	-0.4833400E+01	1
6	-0.4833400E+01	1	-0.4944700E+01	1	-0.4310400E+01	1
7	-0.4310400E+01	1	-0.3465700E+01	1	-0.2441100E+01	1
8	-0.2441100E+01	1	-0.1164300E+01	1	0.0000000E+00	1
9	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0
10	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0	0.0000000E+00	0

\*\*\*\*\*

RESULTADOS

NODOS EN EL BORDE

X	Y	POTENCIAL	FLUJO	
			ANTES DEL NODO	DESPUÉS DEL NODO
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.28405E-03	-0.28405E-03
0.12500E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.74965E+00	0.74965E+00
0.25000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.14996E+01	0.14996E+01
0.37500E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.22502E+01	0.22502E+01
0.50000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.29999E+01	0.29999E+01
0.62500E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.37536E+01	0.37536E+01
0.75000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.44914E+01	0.44914E+01
0.87500E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.53030E+01	0.53030E+01
0.10000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.58638E+01	0.00000E+00
0.96700E+01	0.12730E+01	-0.74619E+01	-0.33790E+01	-0.33790E+01
0.88140E+01	0.23617E+01	-0.12506E+02	-0.48334E+01	-0.48334E+01
0.77008E+01	0.31898E+01	-0.14746E+02	-0.49447E+01	-0.49447E+01
0.61740E+01	0.39330E+01	-0.14576E+02	-0.43104E+01	-0.43104E+01

X	Y	POTENCIAL	FLUJO	
			ANTES DEL NODO	DESPUÉS DEL NODO
0.47898E+01	0.43891E+01	-0.12616E+02	-0.34657E+01	-0.34657E+01
0.33044E+01	0.47190E+01	-0.93634E+01	-0.24411E+01	-0.24411E+01
0.15570E+01	0.49390E+01	-0.46001E+01	-0.11643E+01	-0.11643E+01
0.00000E+00	0.50000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.30154E+01
0.00000E+00	0.33750E+01	0.00000E+00	0.20220E+01	0.20220E+01
0.00000E+00	0.25000E+01	0.00000E+00	0.14999E+01	0.14999E+01
0.00000E+00	0.12500E+01	0.00000E+00	0.74936E+00	0.74936E+00

PUNTOS INTERNOS

X	Y	POTENCIAL
0.20000E+01	0.20000E+01	-0.23990E+01
0.40000E+01	0.35000E+01	-0.84019E+01

\*\*\*\*\*

En la Tabla 3.2 se comparan los resultados de algunos nodos de la frontera y los dos puntos internos con la solución exacta conocida:

Coordenada del nodo	Potencial usando 10 elementos cuadráticos	Solución exacta del potencial	Error porcentual
$n_{11}$	-12.506	-12.489	0,13 %
$n_{13}$	-14.576	-14.570	0,04 %
$n_{15}$	-9.363	-9.356	0,07 %
Puntos internos			
$p_1$	-2.399	-2.400	0,04 %
$p_2$	-8.402	-8.400	0,02 %

Tabla 3.2: Cuadro comparativo de resultados y error porcentual

Al graficar los resultados obtenemos

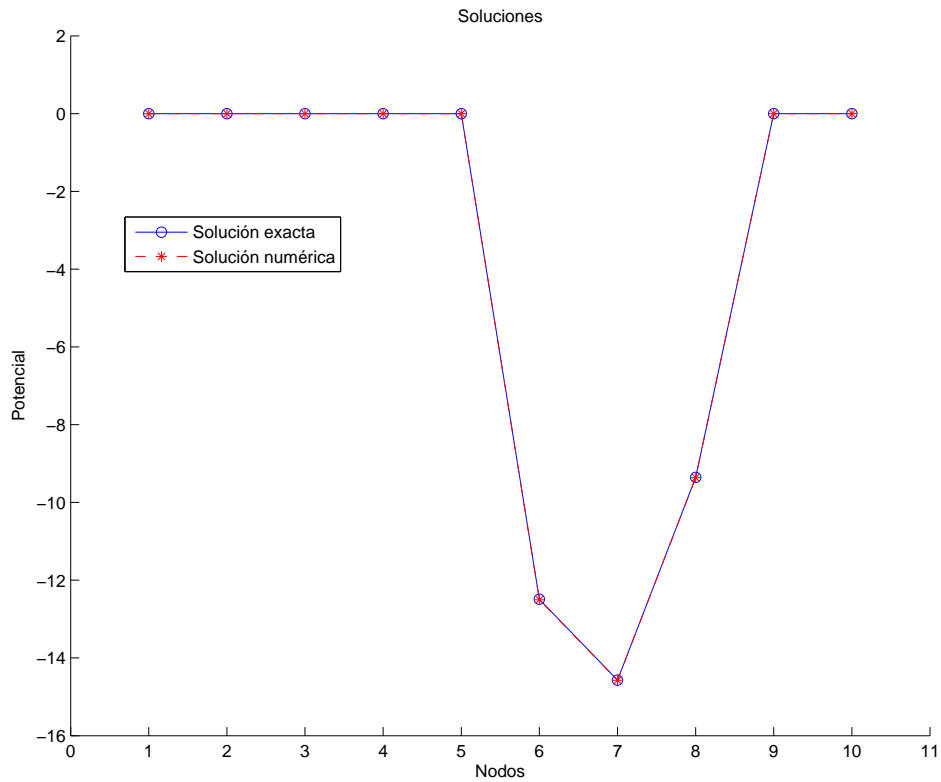


Figura 3.9: Comparación entre solución analítica y solución numérica

En la Tabla 3.2 se puede observar cómo al aumentar el número de elementos el error porcentual  $e\%$  tiende a cero, es decir, que la solución numérica se aproxima cada vez más a la solución exacta, y al observar los resultados de forma gráfica en la Figura 3.9 se aprecia dicha aproximación. Si comparamos la Figura 3.9 con la Figura 3.6 podemos observar como al implementar el método con más elementos la solución numérica se aproxima más a la solución exacta, lo que garantiza la convergencia del método de elemento frontera con elementos de orden cuadrático para este ejemplo.

En la Figura 3.10 se muestra la superficie que resulta al implementar el método en un cuarto de la sección elíptica utilizando 10 elementos cuadráticos.

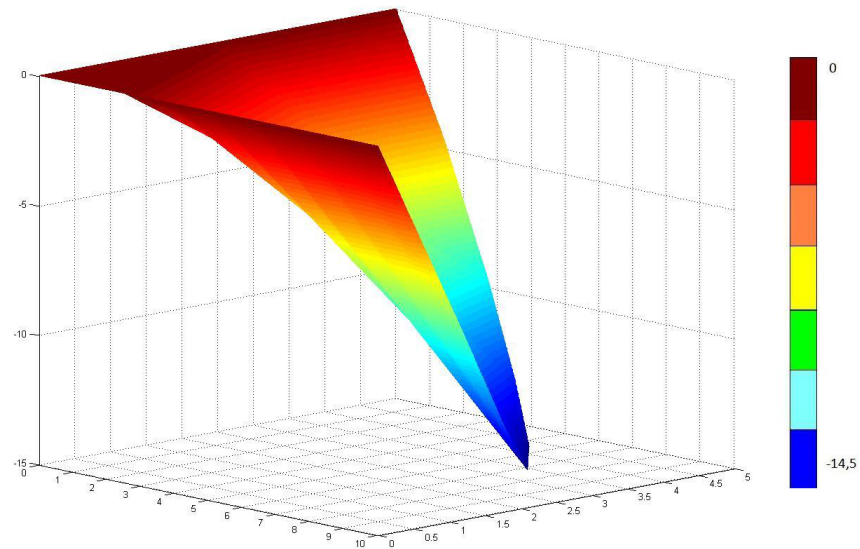


Figura 3.10: Potencial en un cuarto de la elipse

Basándonos en la simetría del problema, la Figura 3.11 muestra la superficie que resulta de implementar el método en toda la sección elíptica

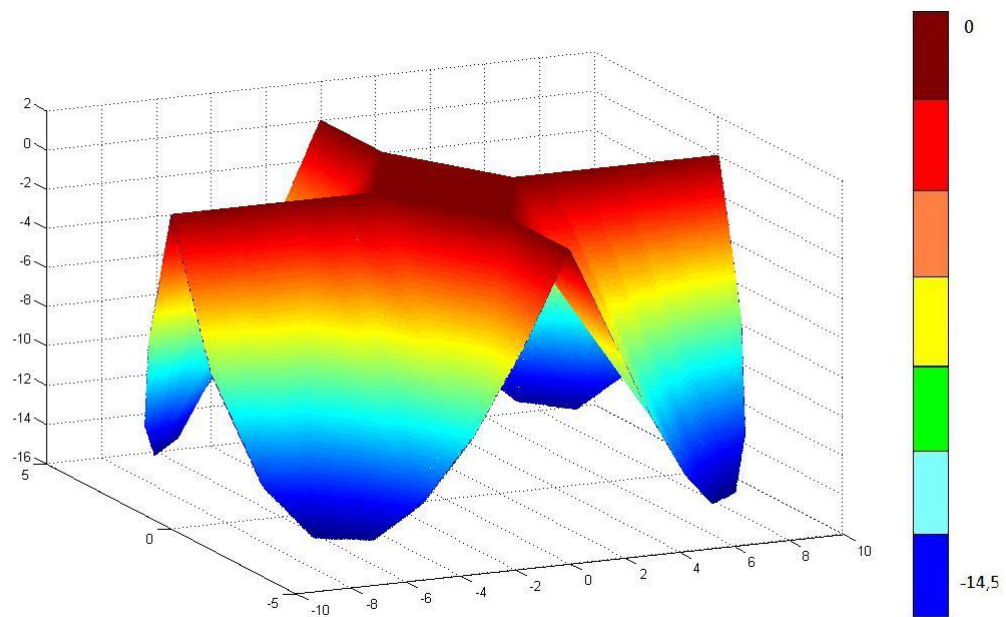


Figura 3.11: Potencial en la sección elíptica

En la Figura 3.11 podemos observar el comportamiento del potencial de deformación en toda la sección elíptica, donde se aprecia el decaimiento del potencial mientras más cerca se está de la frontera, lo que nos indica que la deformación debida a la torsión de la barra se da sobre la frontera.

### 3.3.2 Placas sometidas a temperaturas

En los siguientes ejemplos, consideramos el artículo método de elemento frontera en el estudio de placas sometidas a temperaturas elaborado por Terrer, H.; Ortega, A.; Gordon, M.; Morales, J.; Lizardi, A. y Lara, A. (2009) [11], mostraremos resultados para el caso de placas cuadradas sometidas a condiciones de temperatura y flujo de calor en su frontera implementando BEM. Para generar soluciones aplicables a la teoría del método, se consideran dos casos referidos a una placa cuadrada sometida a condiciones de frontera de Dirichlet (temperatura) y Neumann (flujo), esta placa es mostrada en la Figura 3.12

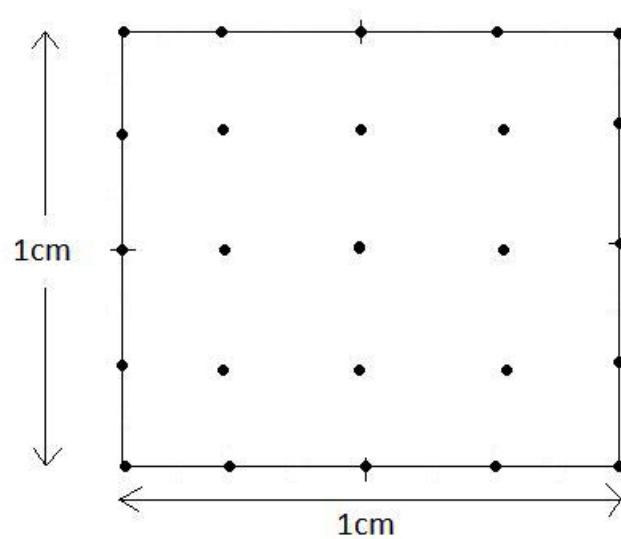


Figura 3.12: Placa cuadrada con 8 elementos, 16 nodos y 9 puntos internos

#### Ejemplo 1

Consideremos dos lados con temperaturas conocidas y aislada en sus otros lados, las condiciones que actúan sobre la placa mostrada son como se indican en la Figura 3.13

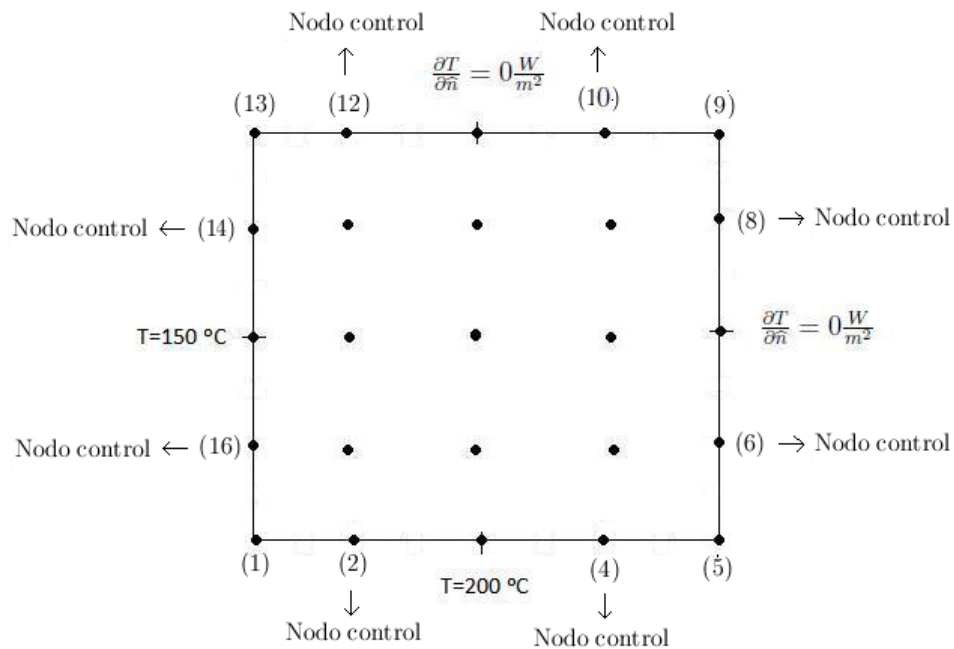


Figura 3.13: Dos lados con temperatura conocida y dos lados aislados

La solución lograda al aplicar el método numérico establece los valores de la temperatura y el flujo. Estos resultados son comparados con el valor analítico correspondiente, el cual puede ser obtenido por ecuaciones diferenciales parciales, y que se define para casos particulares como

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{w \sinh\left(\frac{n\pi H}{w}\right)} \int_0^w [f(x) - T_1] \sin\left(\frac{n\pi x}{w}\right) dx \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{w}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{w}\right). \quad (3.14)$$

donde las variables  $w$  y  $H$ , representan las longitudes horizontal y vertical máximas de la placa,  $x$  e  $y$ , definen la posición en la placa,  $f(x)$  es el valor de la temperatura en la frontera, la cual se redefine para cada aplicación y  $n$  representa la periodicidad de la función [11].

Una vez implementado el método con 8 elementos cuadráticos, en la Tabla 3.3 se pueden observar los resultados para la temperatura en grados centígrados para 8 nodos sobre el contorno.

Nodo	Coordenadas (x,y)	BEM			e % E. cuadrático
		E. cuadrático	Exacto	Flujo	
2	(0.25,0)	200	200	115.7	0 %
4	(0.75,0)	200	200	46.377	0 %
6	(1,0.25)	189.96	190.45	0	0,09 %
8	(1,0.75)	176.69	177.15	42.963	0,25 %
10	(0.75,1)	173.26	172.85	0	0,13 %
12	(0.25,1)	160.01	159.65	0	0,22 %
14	(0,0.75)	150	150	-48.491	0 %
16	(0,0.25)	150	150	-190.66	0 %

Tabla 3.3: Temperatura y flujo para 8 nodos exteriores en la placa cuadrada, ejemplo 1.

Al graficar los resultados obtenemos

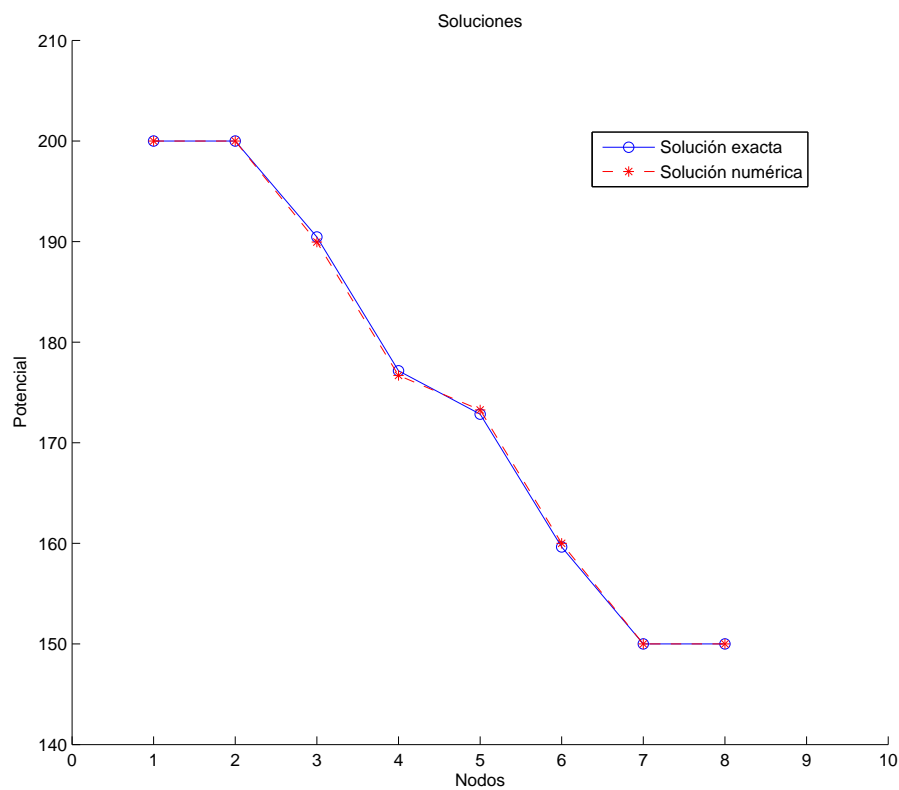


Figura 3.14: Comparación entre solución analítica y solución numérica



En la Tabla 3.3 se puede observar que el error porcentual no excede el 0,25 %, además al observar los resultados de forma gráfica (Figura 3.14) se aprecia cómo la solución numérica se aproxima a la solución exacta; sin embargo, veamos qué ocurre al aumentar el número de elementos a 16 tal como se muestra en la Figura 3.15.

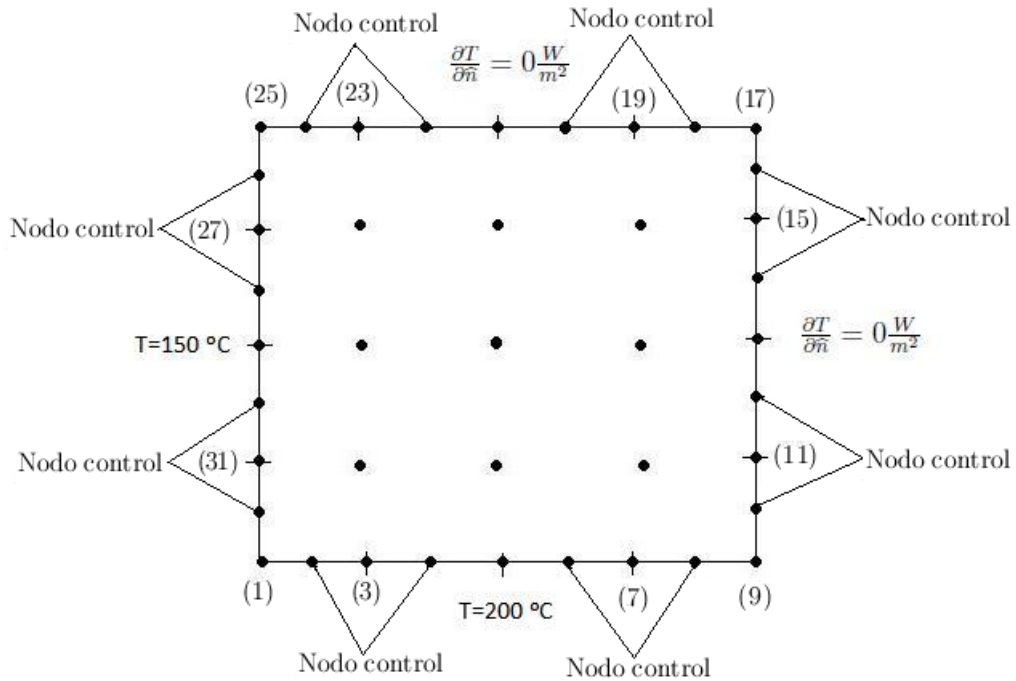


Figura 3.15: Dos lados con temperatura conocida y dos lados aislados

En la Tabla 3.4 se muestran los valores de temperatura y flujo obtenidos en °C para 16 nodos exteriores (tomaremos el nodo central de cada elemento).

Nodo	Coordenadas (x,y)	BEM			e % E. cuadrático
		E. cuadrático	Exacto	Flujo	
2	(0.125,0)	200	200	231.10	0 %
4	(0.375,0)	200	200	84.981	0 %
6	(0.625,0)	200	200	53.226	0 %
8	(0.875,0)	200	200	42.963	0 %
10	(1,0.125)	194.82	195.2	0	0,19 %
12	(1,0.375)	185.51	185.7	0	0,10 %
14	(1,0.625)	178.80	178.9	0	0,05 %
16	(1,0.875)	175.37	175.4	0	0,01 %
18	(0.875,1)	174.52	174.6	0	0,04 %
20	(0.625,1)	171.12	171.1	0	0,01 %
22	(0.375,1)	164.44	164.3	0	0,08 %
24	(0.125,1)	155.16	155.1	0	0,03 %
26	(0,0.875)	150	150	-42.827	0 %
28	(0,0.625)	150	150	-53.239	0 %
30	(0,0.375)	150	150	-94.683	0 %
32	(0,0.125)	150	150	-381.54	0 %

Tabla 3.4: Temperatura y flujo para 16 nodos exteriores en la placa cuadrada, ejemplo 1.

Al graficar los resultados obtenemos

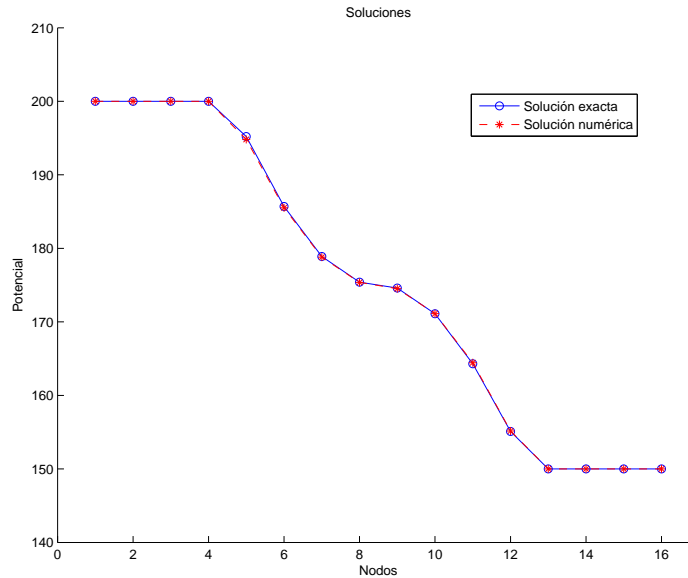


Figura 3.16: Comparación entre solución analítica y solución numérica

Para este ejemplo el error porcentual no excede el 0,20 %, por lo que la solución numérica se aproxima a la solución exacta, esto puede apreciarse en la Figura 3.16 además, el error es menor al obtenido en el caso de 8 elementos cuadráticos y al comparar la Figura 3.16 con la Figura 3.14 se observa como al aumentar el número de elementos la solución numérica se aproxima más a la solución exacta, lo que nos indica que el método converge; también mostramos los resultados para los puntos internos en la Tabla 3.5 usando 16 elementos.

Punto interno	Coordenadas (x,y)	BEM E. constante	BEM E. cuadrático	Exacto	e %
1	(0.25,0.25)	175.0	175.08	175.1	0,01 %
2	(0.5,0.25)	185.1	185.03	185.1	0,03 %
3	(0.75,0.25)	189.0	188.87	189	0,06 %
4	(0.25,0.5)	164.9	164.95	164.9	0,03 %
5	(0.5,0.5)	175.0	174.99	175	0,005 %
6	(0.75,0.5)	180.3	180.19	180.3	0,06 %
7	(0.25,0.75)	161.0	161.11	161	0,06 %
8	(0.5,0.75)	169.7	169.77	169.7	0,04 %
9	(0.75,0.75)	175.0	174.97	175	0,01 %

Tabla 3.5: Temperatura para los nodos interiores en la placa cuadrada, ejemplo 1.

La Figura 3.17 muestra la superficie obtenida con estos resultados.

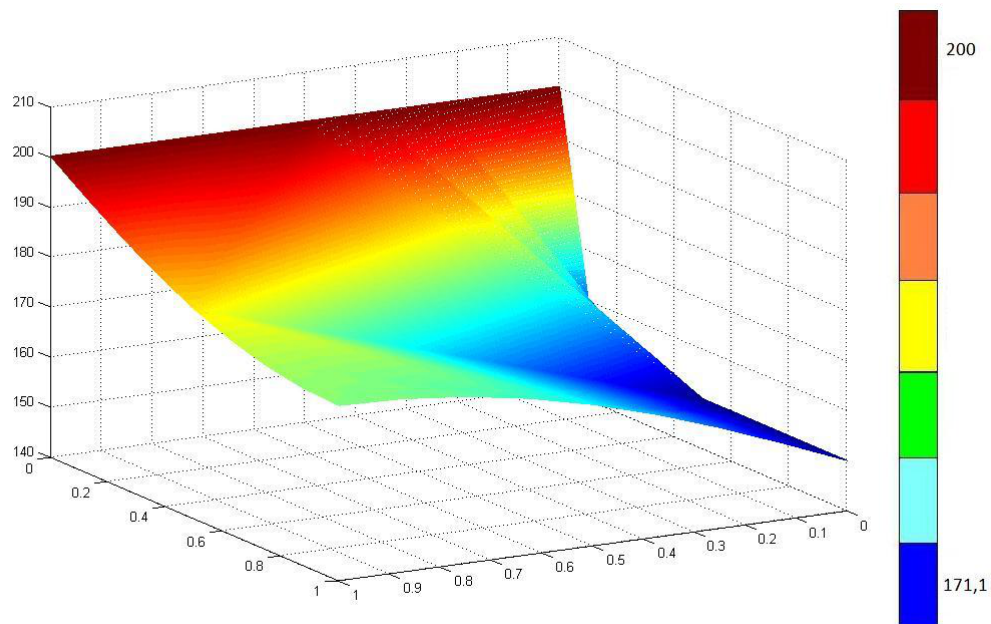


Figura 3.17: Superficie obtenida con la Temperatura de la placa

En la figura anterior se puede observar cómo disminuye la temperatura a lo largo de la placa, es decir, que mientras se está más lejos de las fuentes de calor, la placa se encuentra más fría.

Ahora, veamos qué ocurre para la misma placa del ejemplo 1 pero bajo otras condiciones en el borde.

### Ejemplo 2

En este caso tendremos tres lados con temperaturas conocidas y un lado aislado. Para este ejemplo las condiciones que actúan sobre la placa mostrada son como se indican en la Figura 3.18

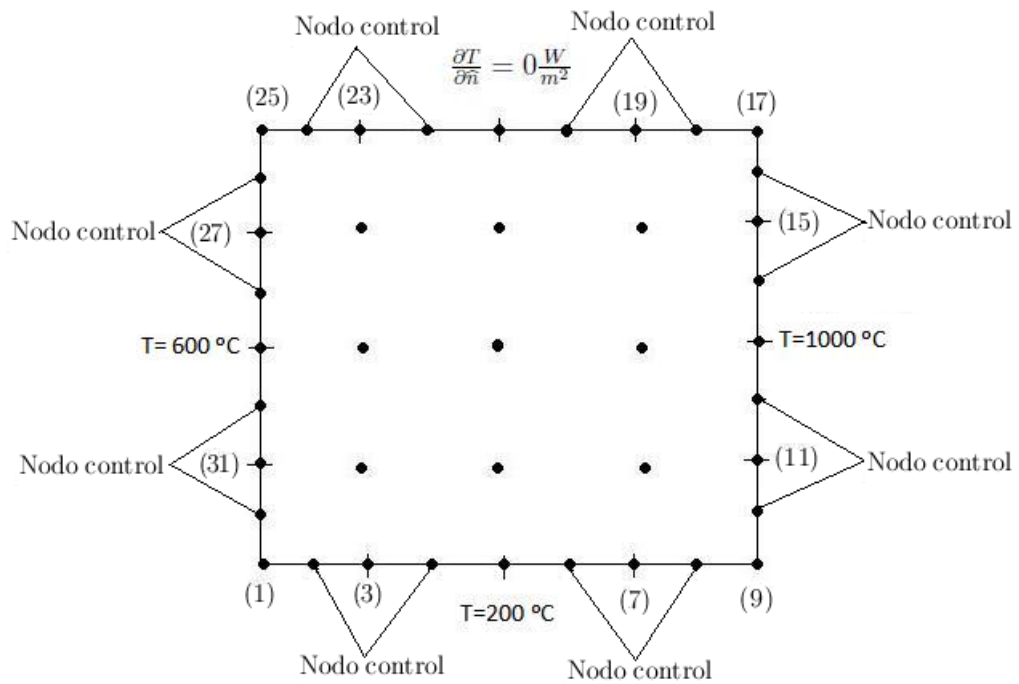


Figura 3.18: tres lados con temperatura conocida y un lado aislado

Al implementar el método con elementos cuadráticos, los valores de temperatura y flujo en grados centigrados obtenidos para los nodos exteriores son mostrados en la Tabla 3.6. Estos datos son comparados con los obtenidos con la solución analítica.

Nodo	Coordenadas (x,y)	BEM			e %
		E. cuadrático	Exacto	Flujo	
2	(0.125,0)	200	200	-1978.6	0 %
4	(0.375,0)	200	200	-1120.4	0 %
6	(0.625,0)	200	200	-1447.9	0 %
8	(0.875,0)	200	200	-3719.3	0 %
10	(1,1.125)	1000	1000	6076.6	0 %
12	(1,0.375)	1000	1000	1375.2	0 %
14	(1,0.625)	1000	1000	796.4	0 %
16	(1,0.875)	1000	1000	628.2	0 %
18	(0.875,1)	927.56	928.75	0	0,12 %
20	(0.625,1)	789.02	790.7	0	0,21 %
22	(0.375,1)	689.72	690.1	0	0,05 %
24	(0.125,1)	625.28	624.3	0	0,15 %
26	(0,0.875)	600	600	-181.21	0 %
28	(0,0.625)	600	600	-41.69	0 %
30	(0,0.375)	600	600	455.43	0 %
32	(0,0.125)	600	600	2296.1	0 %

Tabla 3.6: Temperatura y flujo para los nodos exteriores en la placa cuadrada, ejemplo 2.

En la Tabla 3.7 se muestran los resultados de las temperaturas para los nodos interiores de la misma forma como en el ejemplo 1.

Punto interno	Coordenadas (x,y)	BEM			e %
		E. cuadrático	Exacto		
1	(0.25,0.25)	462.52	463.5		0,21 %
2	(0.5,0.25)	469.8	469.7		0,02 %
3	(0.75,0.25)	609.22	611.2		0,32 %
4	(0.25,0.5)	587.07	587.7		0,10 %
5	(0.5,0.5)	636.56	637.4		0,13 %
6	(0.75,0.5)	775.87	777.2		0,17 %
7	(0.25,0.75)	639.40	640		0,09 %
8	(0.5,0.75)	712.96	714.3		0,18 %
9	(0.75,0.75)	836.96	838.5		0,18 %

Tabla 3.7: Temperatura para los nodos interiores en la placa cuadrada, ejemplo 2.

Al graficar los resultados obtenemos

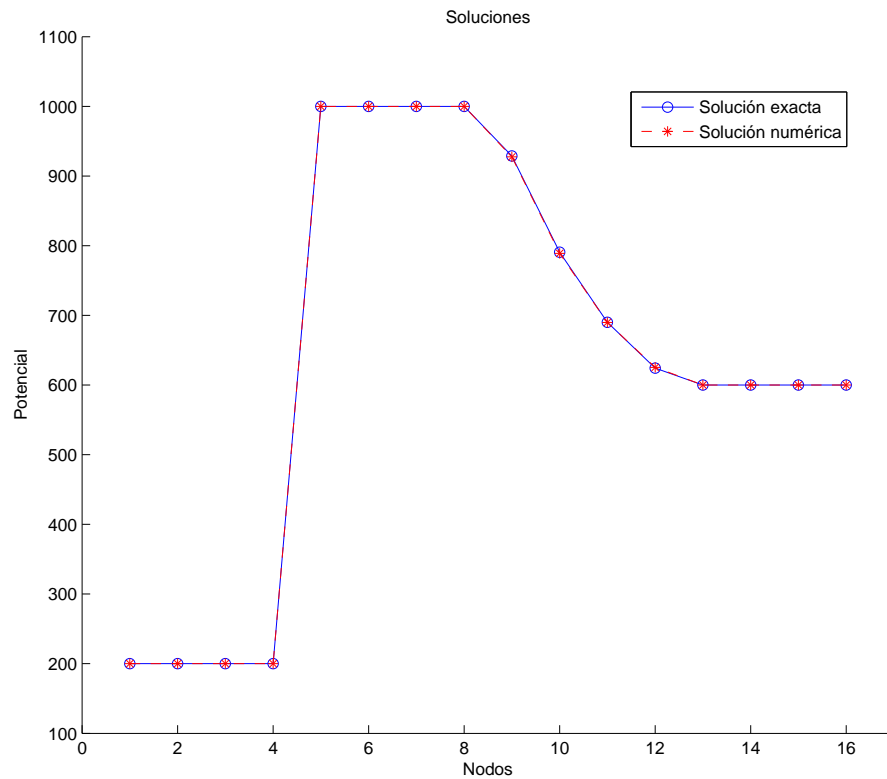


Figura 3.19: Solución analítica y solución numérica

En las Tablas 3.6 y 3.7 se puede observar que el error no excede el 0,35%, el cual es un error muy pequeño, esto se debe a la convergencia del método la cual se evidencia en la Figura 3.19 al observar cómo la curva de la solución numérica esta sobre la curva de la solución exacta. La superficie obtenida con estos resultados para la temperatura se muestra en la Figura 3.20.

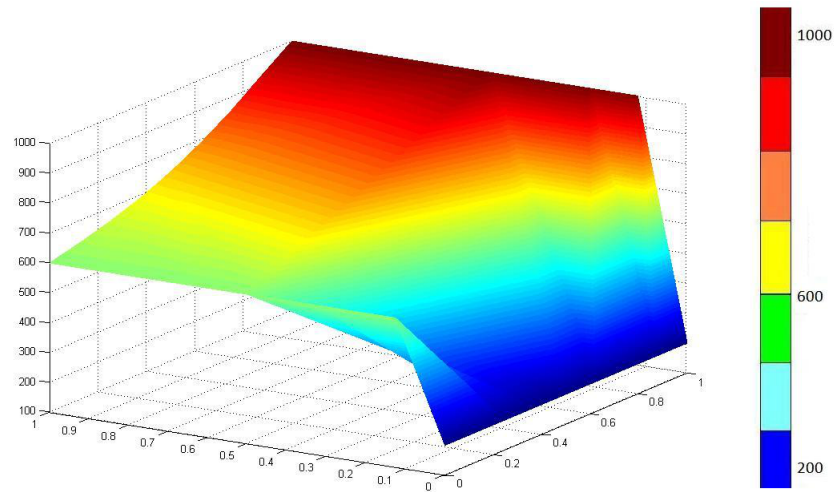


Figura 3.20: Superficie obtenida con la temperatura de la placa

En la figura anterior se puede observar la distribución de temperatura para este ejemplo.

Con los resultados obtenidos en los ejemplos realizados en este capítulo, se aprecia la precisión lograda por el método de elemento frontera con elementos de orden cuadrático, debido a que se obtuvo errores porcentuales muy bajos. Así, se garantiza la eficiencia del método usando elementos cuadráticos.



# Conclusiones y Recomendaciones

Con el estudio hecho en el capítulo 1 sobre la ecuación de Laplace, podemos ver la importancia que esta ecuación tiene en la simulación de muchas aplicaciones a problemas reales.

El método de elemento frontera nos permite resolver problemas de potenciales haciendo solo una discretización de la frontera del dominio, reduciendo la dimensionalidad del problema y siendo el primer atractivo de este método, obteniendo así una gran ventaja sobre otros métodos usados para resolver este tipo de problemas. Otra ventaja de BEM es el hecho de proveer los resultados logrados para el flujo de potencial en la frontera del problema estudiado.

Basandonos en los ejemplos realizados en el capítulo 3, podemos concluir que BEM con elementos cuadráticos provee soluciones muy precisas lo cual demuestra la convergencia del método. Además, la geometría del dominio juega un factor importante en la escogencia del tipo de elemento a usar para implementar el método, por ejemplo, para el caso de la barra, se tuvo un dominio elíptico por lo que los elementos cuadráticos eran los que más se aproximaban a la frontera del dominio en comparación con los elementos constantes o lineales, sin embargo, para el caso de las placas sometidas a temperaturas, por ser un dominio cuadrado, nos puede llevar a pensar que lo más eficiente era utilizar elementos lineales, aún así al implementar el método en este ejemplo con elementos cuadráticos se obtuvieron resultados satisfactorios, por lo que se concluye que la geometría del dominio asociado al problema que se quiera resolver no representa ninguna limitante para la implementación de BEM con elementos cuadráticos.

Los métodos numéricos (en particular BEM) son de gran importancia para la resolución de problemas reales. Los podemos implementar cuando el dominio del problema estudiado es irregular, cuando tenemos dominios muy extensos o cuando solo conocemos las condiciones sobre la frontera. Una vez demostrada la eficiencia del método para ciertos problemas,

el mismo puede ser aplicado en cualquier problema similar y así facilitar la obtención de resultados. Otra gran ventaja de BEM es que con solo tener las condiciones de frontera el método nos da resultados para cualquier punto del dominio.

Se recomienda la implementación de BEM para problemas de elasticidad usando elementos de orden superior y en problemas con dominios huecos, es decir, en problemas con múltiples bordes (bordes internos y externos) como se muestra en la siguiente Figura.

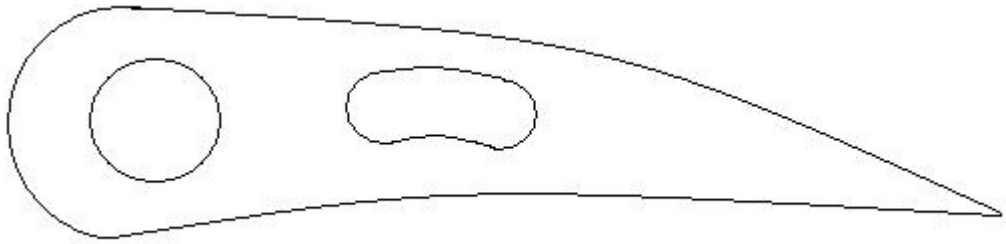


Figura 3.21: Dominio hueco, problemas con múltiples bordes

# Bibliografía

- [1] Dalmedico, A. *El mundo de Laplace: matemáticas, física y determinismo*. (www.gobiernodecanarias.org)
- [2] Ortíz, A. (2006). *Estudio sobre Joseph Fourier*. Universidad Autónoma de Fourier. (www.uam.es)
- [3] Brebbia, C. y Dominguez, J. (1989). *Boundary Elements An Introductory Course. Segunda Edición*. (Computational Mechanics Publications)
- [4] Haberman, R. (1998). *Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno*. (Prentice Hall)
- [5] Brebbia, C. y Wrobel, L. (1984). *Boundary Element Techniques*. (Springer-Verlag)
- [6] Kane, J. (1994). *Boundary Element Analysis*. (Prentice Hall)
- [7] Cerrolaza, M. (1989). *Elementos de Contorno p-adaptables: Desarrollo y Aplicaciones en Teoría del Potencial y Elastostática*. (Trabajo de ascenso presentado ante la Universidad Central de Venezuela)
- [8] Kaye, R. (2003). *The Life and Works of P.A.M. Dirac*. (www.citadel.edu)
- [9] Power, H. y Wrobel, L. (1995). *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*. (Computational Mechanics Publications)
- [10] Ortalli, J. y Actis, M. (2005). *Estructuras IV: Torsión*. Universidad Nacional de La Plata. (www.unlp.edu.ar)
- [11] Terrer, H.; Ortega, A.; Gordon, M.; Morales, J.; Lizardi, A. y Lara, A. (2009). *Método Elemento Frontera en el estudio de placas sometidas a temperaturas*. (somim.org.mx) Sonora-México

- [12] Cañizo, J. (2005) *Cosas Sencillas sobre las Ecuaciones de Laplace y Poisson.*  
([www.uab.es](http://www.uab.es))