



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Sobre perspectiva y homología de imágenes

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Bra. Leidy C. Rolón Z.** para optar al título de Licenciada en Matemática.

Tutor: Dr. Mauricio Angel A.

Caracas, Venezuela

Noviembre, 2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Sobre perspectiva y homología de imágenes**”, presentado por la **Bra. Leidy C. Rolón Z.**, titular de la Cédula de Identidad **18040675**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

Dr. Mauricio Angel A.

Tutor

Dr. Manuel Maia

Jurado

Dr. Wuilian Torres

Jurado

A mi padre

Agradecimientos

A mis padres, quienes siempre me brindaron su amor, protección, alegría y su entrega constante... un abrazo enorme.

A los familiares, amigos y profesores, por las palabras precisas en el momento oportuno, a quienes me animan y apoyan, un millón de gracias.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Perspectiva lineal	3
1. Conceptos Básicos	4
2. Imagen con dos puntos de fuga	7
3. Distancia entre objetos de una imagen con dos puntos de fuga	8
4. Cálculo con tres puntos de fuga	23
Capítulo 2. Álgebra homológica	25
1. Complejo	25
2. Complejo simplicial	28
3. Complejo cúbico	32
4. Cohomología de Čech	54
Capítulo 3. Imágenes digitales	55
1. Imagen digital 2D	55
2. Imagen digital 3D	60
3. Borde de una imagen digital 2D	64
4. Homología en una imagen digital	66
5. Homología de una imagen descompuesta en sus tres canales	75
Capítulo 4. Aplicaciones del álgebra homológica y perspectiva lineal en imágenes	78
1. Homología paramétrica	78
2. Estudio homológico en pinturas	81
3. Figuras imposibles	87
Capítulo 5. Anexos	95
1. Tablas para el complejo simplicial	95
2. Algoritmo homolo0	98

3. Comandos en Matlab, para el cálculo de H_0 en una imagen a color	98
4. Algoritmo paletacuatro	99
5. Comandos para el análisis de la obra de René Magritte	100
6. Algoritmo de limpieza para imágenes binarias	102
Bibliografía	105

Introducción

El uso de la matemática, y en particular de la perspectiva dentro de la pintura, dio lugar a un cambio drástico en las obras del renacimiento, ya que permitió a los artistas, realizar dibujos con un efecto de profundidad que los hacía lucir más realistas. En [1] y [2], se presenta la historia sobre el surgimiento de la perspectiva lineal y un estudio en imágenes, que permite, dada la ubicación de puntos, líneas, planos u objetos en una imagen (pintura, foto, etc.), obtener otro tipo de información respecto al mundo que se representa en ella y viceversa, por ejemplo, podemos determinar la distancia entre un objeto mostrado en una foto, y la persona que la tomó, así como la distancia entre dos objetos de una imagen que se encuentran en ese tipo de perspectiva.

Por otra parte, se puede analizar una imagen mediante desarrollos matemáticos en el campo del álgebra, en [4], presentan un estudio de propiedades topológicas en imágenes digitales binarias, usando los complejos cúbicos y algoritmos incremental y decremental, con una óptima implementación de éstos para cálculos rápidos en imágenes de gran tamaño.

La información que se puede obtener de imágenes digitalizadas, tiene fuertes repercusiones en la actualidad. Por ejemplo, en el caso de la medicina, se necesita detectar en cortes transversales del cerebro, algunas regiones de interés, las cuales podrían ser tumores, donde se espera saber su cantidad de forma rápida y eficiente, para dar un diagnóstico lo mas acertado posible.

En relación con lo anterior, se consiguen investigaciones que abordan ese tipo de problemáticas, ver [3] y [5], es por ello que se ha estado trabajando con herramientas matemáticas que luego se traducen en algoritmos para obtener información geométrica de invariantes topológicos en imágenes digitales. Para ello se hace uso de complejos de cadenas y homología, lo cual permite obtener por ejemplo, las componentes conexas presentes en la imagen previamente binarizada mediante el método de umbralización.

Así mismo, con base en [3], [4], [5], [7] y [8], nos interesa realizar un análisis de imágenes que representan obras de artistas como René Magritte, donde se pretende destacar información mediante la homología de los complejos asociados a esas obras.

Por último, la perspectiva lineal y el álgebra homológica, se pueden usar para el estudio de imágenes imposibles, ver [6], sobre éstas, existe una variedad de nociones, de las que nos interesa, considerar aquella que se presenta cuando los objetos no se pueden construir en el espacio $3D$.

Capítulo 1

Perspectiva lineal

La perspectiva, es el arte de representar los objetos desde el punto de vista del espectador, donde se crea la ilusión de un mundo tridimensional y de profundidad, en una superficie bidimensional. La perspectiva para la Edad Media, se denominaba la ciencia de la óptica, y mas tarde en el siglo XIV, se designó con más precisión como el conjunto de técnicas y especulaciones para la representación del espacio tridimensional.

El estudio de la perspectiva lineal, trae consigo impresionantes logros científicos y artísticos en la época del Renacimiento, donde la geometrización del espacio se convierte en requisito para la ciencia moderna. Este estudio presenta dos modos de ser llevado a cabo: de manera empírica, y mediante el desarrollo matemático y mucho mas preciso de los objetos observados en el espacio tridimensional. Con ello se empiezan a obtener obras más realistas que las medievales, donde no se consideraban relaciones espaciales.

Entre los personajes empíricos se encontraba Durero (1525), quien usaba como técnica, el empleo de un velo cuadriculado que le permitía reproducir los contornos observados, localizando algunos puntos de referencia con una lectura directa del objeto que quería representar.

Otro de los personajes importantes dentro de la perspectiva lineal es el arquitecto, escultor y orfebre, Filippo Brunelleschi (1377-1446) de Florencia, sus trabajos demostraban un importante conocimiento en el manejo de la perspectiva lineal. Él diseño una prueba para mostrar que su cuadro del Batisterio estaba bien hecho. Ésta consistía en colocar un trípode con un cuadro frente al Batisterio. El cuadro, presentaba un orificio por donde se podía observar el Batisterio, y con un espejo paralelo al cuadro colocado de tal modo, que al ver por el orificio se pudiera observar, tanto parte del Batisterio real como del reflejo en el espejo del cuadro, donde al casar perfectamente, se podría decir que el cuadro estaba correctamente dibujado.

Tommaso di Giovanni (1401-1428), por su parte, presenta la primera aplicación rigurosa del punto de fuga en su fresco de "La Trinidad", que se encuentra en la iglesia de Santa María Novella de Florencia.

Aunque los resultados de Brunelleschi y Tommaso di Giovanni son impresionantes para la época, no dejan ningún tipo de escrito donde expliquen sus métodos, es Alberti León Battista (1404-1472), quien deja un escrito para 1435, donde se presentan sólidos conocimientos de óptica y geometría, aunque allí no define el punto de fuga, lo cual representaba cierta dificultad, por el problema de ver al infinito entre dos líneas paralelas. Sin embargo, en la práctica, se usaba la intuición de la existencia de ese punto. Es Kepler quien más tarde reconoce que las líneas paralelas convergen en un punto en el infinito, mientras que Desargues(1591-1661) lo analiza explícitamente.

Con lo anterior, es evidente la importancia que tiene la perspectiva lineal para la pintura, y en este capítulo vamos a introducir los conceptos básicos y algunos resultados que se desprenden de imágenes, bajo esa perspectiva.

1. Conceptos Básicos

Consideremos el sistema de coordenadas cartesianas XYZ , donde una imagen en perspectiva lineal, se encuentra en el plano XY . Podemos apreciar un ejemplo en la figura 1.1.

DEFINICIÓN 1.1. Consideremos el ojo de un espectador ubicado en un punto E sobre el eje Z , quien observa un objeto O en el espacio XYZ . La línea recta que va desde el espectador E , hasta cada punto P sobre el objeto visible a éste, interseca al plano XY , en un punto P' llamado la imagen del punto P . El conjunto de estos puntos, es lo que se denominaría la imagen en perspectiva lineal de O .

EJEMPLO 1.2. En la figura 1.1, se tiene un florero en el espacio XYZ , para ser dibujado en el plano de la imagen $Z = 0$. El punto P corresponde a un punto del florero en el espacio XYZ , visualizado por el espectador, mientras que el punto P' es la imagen del punto P , que se encuentra en el plano de la imagen y en la línea de visión del espectador (línea recta que va desde E hasta el punto P).

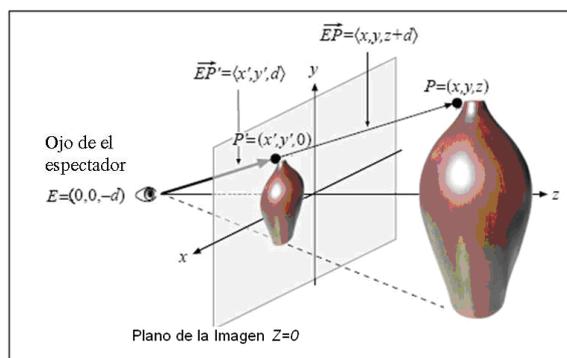


FIGURA 1.1. Imagen en perspectiva lineal

El ojo del espectador lo colocamos en la posición $E = (0, 0, -d)$, donde d es la distancia desde E hasta el plano del dibujo. El punto P' es llamado la imagen de la perspectiva del punto P .

En la imagen, el vector $\vec{EP} = (x, y, z + d)$ es paralela al vector $\vec{EP'} = (x', y', d)$, por lo tanto existe un número t tal que

$$t(x', y', d) = (x, y, z + d)$$

de lo anterior se tiene que

$$x' = \frac{x}{t}, y' = \frac{y}{t}, t = \frac{z + d}{d}$$

sustituyendo t en las expresiones de x' y y' , obtenemos

$$(1.1) \quad x' = \frac{dx}{z + d}, y' = \frac{dy}{z + d}.$$

A continuación, se tienen unos teoremas y corolarios que son resultados del hecho de que un dibujo esté en perspectiva lineal. La demostración de estos teoremas y corolarios se encuentran en [1].

TEOREMA 1.3. *Si S es un subconjunto de una línea recta L en el espacio (S puede ser una línea segmento, un punto, un rayo, etc.), y si todos los puntos de S tienen z - coordenadas positivas, entonces la imagen perspectiva S' de S es un subconjunto de una línea recta $Ax' + By' = C$ en el plano de la figura.*

TEOREMA 1.4. *Sea S un conjunto de puntos en un plano $z = z_0$ con ($z_0 > 0$) paralelo al plano de la imagen, y si el espectador se encuentra en la posición $E = (0, 0, d)$ con $d > 0$.*

Entonces existe una constante t , con $0 < t < 1$, de forma que en cualquiera de los dos puntos $P_1 = (x_1, y_1, z_0)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_0)$ en S , $P_1P_2 = tP'_1P'_2$, donde P'_1 y P'_2 son las imágenes perspectiva correspondientes a los puntos P_1 y P_2 .

TEOREMA 1.5. Sea B una caja rectangular en el espacio, con las coordenadas- z positiva y lados paralelos a los planos coordenados. Supongamos también que al menos una cara de B , no es paralela al plano de la imagen que es visible para un espectador ubicado en la posición $(0, 0, -d)$. Si esta cara tiene dimensiones ab , donde a es la longitud en la dirección z , entonces la distancia de visualización d es directamente proporcional a la razón de forma a/b .

DEFINICIÓN 1.6. Sea L una línea en el espacio dada por la ecuación paramétrica

$x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$ con $-\infty < t < \infty$ y x_0, y_0, z_0, a, b, c constantes con $c > 0$, el punto de fuga de la línea L , es el punto en el plano de la pintura cuando el parámetro $t \rightarrow \infty$, luego usando la ecuación (1.1) se llega a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x' = \frac{da}{c}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y' = \frac{db}{c}$$

luego las coordenadas x', y' del punto de fuga son

$$\left(\frac{da}{c}, \frac{db}{c} \right).$$

TEOREMA 1.7. Sea L una línea en el espacio no paralelo al plano de la imagen, con ecuaciones paramétricas $x_0 = x + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$; donde $c > 0$. Entonces, la línea de visión desde el punto de vista $E = (0, 0, -d)$ al punto de fuga de L es paralela a L .

TEOREMA 1.8. Si dos líneas L_1 y L_2 son paralelas entre si, pero no pertenecen a un plano paralelo al plano $z = 0$, entonces ellas tienen el mismo punto de fuga.

TEOREMA 1.9. Si una línea L en el espacio es paralelo al eje Z , entonces el punto de fuga V de L es el origen $(0, 0)$ del plano de la imagen $Z = 0$.

TEOREMA 1.10. Sea T un plano en el espacio dado por la ecuación

$$Mx + Ny + Pz + Q = 0$$

donde M y N , no son ambos 0, es decir, T no es paralelo al plano del cuadro $z = 0$. Si el espectador se encuentra en la posición $(0, 0, -d)$, entonces cualquier línea en T que no es

paralela al plano de la imagen tiene un punto de fuga que se encuentra en la línea

$$Mx + Ny = -dP$$

llamada línea de fuga del plano T .

COROLARIO 1.11. *Si T_1 y T_2 son planos paralelos entre si, los cuales a su vez, no son paralelos al plano de la imagen $z = 0$, entonces ellos tienen la misma línea de fuga.*

TEOREMA 1.12. *Cuando observamos un trabajo hecho en perspectiva con dos puntos de fuga, la correcta localización del espectador yace sobre un semicírculo horizontal cuyo diámetro tiene los dos puntos de fuga como puntos extremos.*

2. Imagen con dos puntos de fuga

Para realizar dibujos con un efecto de profundidad, vamos a hacer uso de los teoremas y corolarios antes presentados, por ejemplo tenemos lo siguiente:

En la figura 1.2, se ha dibujado un piso partiendo de dos puntos de fuga F_1 y F_2 . Por el teorema 1.8, las líneas paralelas entre si, que además, no son paralelas al plano del dibujo, tienen el mismo punto de fuga, así que todas las líneas del piso que van a F_1 son líneas paralelas. Lo mismo pasa con las líneas que van a F_2 .

El teorema 1.10, dice que si se tiene un plano T , que no es paralelo al plano de la pintura $Z = 0$, entonces toda línea perteneciente a T , tiene un punto de fuga, en la línea de fuga del plano T . Como F_1 y F_2 son puntos de fuga que yacen en el plano del piso, entonces ellos pertenecen a la misma línea de fuga en el piso.

Si queremos dibujar una pared, con sus bordes inferior y superior paralela a las líneas del piso, que tienen como punto de fuga a F_1 y la otra pared paralela a las líneas que tienen como punto de fuga a F_2 , entonces por el teorema 1.8 los bordes de cada pared se encuentran en el punto F_1 o en el punto F_2 según correspondan.

Los bordes laterales de las paredes, los dibujamos como líneas verticales paralelas entre si y que no tienen puntos de fuga.

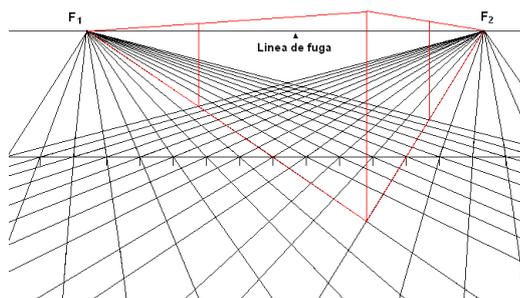


FIGURA 1.2

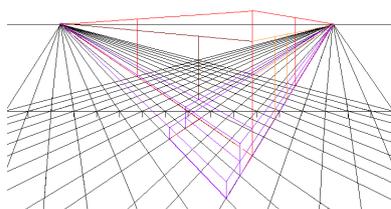


FIGURA 1.3

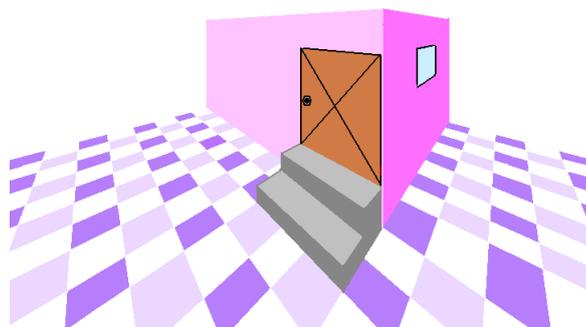


FIGURA 1.4

En la figura 1.3, dibujamos unas escaleras con líneas moradas utilizando argumentos análogos para dibujar las paredes, al igual que para la ventana y la puerta.

En la figura 1.4, tenemos ya el dibujo pintado y con el efecto de profundidad.

3. Distancia entre objetos de una imagen con dos puntos de fuga

Supongamos que tenemos una imagen con dos paredes perpendiculares como se muestra en la figura 1.5, queremos saber la distancia del espectador ubicado en la posición en donde se pintó o tomó la imagen, hasta el cuadro donde están esas paredes.

En la figura 1.6 tenemos la situación vista desde arriba en el plano $Y = 0$.

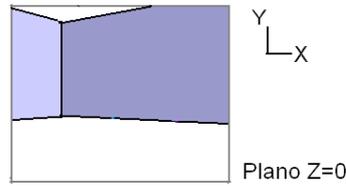


FIGURA 1.5

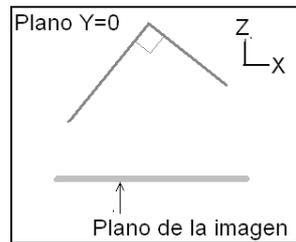


FIGURA 1.6

En este tipo de imágenes estamos suponiendo, que el borde inferior de la imagen es paralelo al piso y, que el plano que contiene a la línea de visión y la línea que divide las paredes en el espacio XYZ , es perpendicular al plano de la imagen como se puede apreciar en la figura 1.7, vista en el plano $Y = 0$, donde P_L es el punto de intersección entre el cuadro y la línea de visión perpendicular a la línea que divide las paredes.

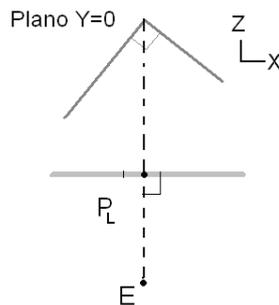


FIGURA 1.7

Como el plano de la imagen es perpendicular al eje Z y a la línea de visión del espectador, entonces podemos colocar a esa línea precisamente sobre el eje Z .

Por otra parte, haciendo uso del teorema 1.12, podemos decir que el espectador está en un semicírculo cuyo diámetro es la distancia entre sus puntos de fuga. Entonces debemos calcular los puntos de fuga de la imagen. Digamos que los puntos de fuga son F_1 y F_2 como se muestran en la figura 1.8, además el punto P_L es la intersección de la línea de fuga con la imagen de la línea que divide las paredes y que pasa por ella.

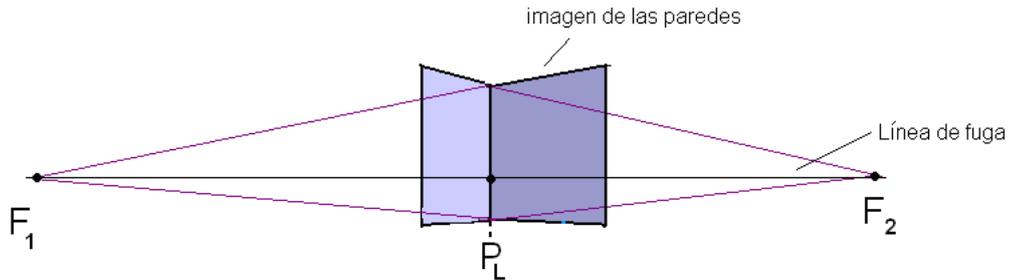


FIGURA 1.8

A la distancia entre F_1 y F_2 lo denotaremos por d_F , y al punto medio entre F_1 y F_2 por P_{mf} , como se muestra en la figura 1.9, así la distancia entre F_1 o F_2 y P_{mf} será $\frac{d_F}{2}$.

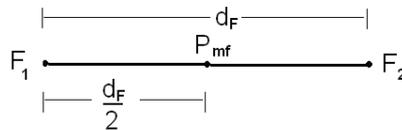


FIGURA 1.9

Tomando todas las consideraciones anteriores, tenemos una representación de la situación como se muestra en la figura 1.10, visto desde el plano $Z = 0$ donde se tiene la siguiente información:

El espectador se encuentra a una distancia $\frac{d_F}{2}$ del punto medio entre los puntos de fuga, además cuando su línea de visión pasa por el punto P_L , ésta es perpendicular al plano de la pintura.

d_{mfl} representa la distancia entre los puntos P_L y P_{mf} .

d_{EC} representa la distancia del espectador al plano de la pintura .

Así tenemos por teorema de Pitágoras que

$$\left(\frac{d_F}{2}\right)^2 = d_{mfl}^2 + d_{EC}^2$$

despejando d_{EC} tenemos

$$d_{EC} = \sqrt{\left(\frac{d_F}{2}\right)^2 - d_{mfl}^2}.$$

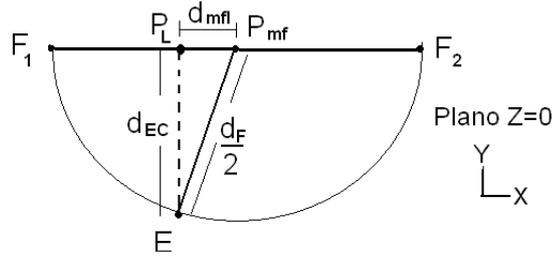


FIGURA 1.10

Supongamos que $F_1 = (x_{f1}, y_{f1})$ y $F_2 = (x_{f2}, y_{f2})$, por el teorema 1.10 y debido a que el borde inferior del cuadro es paralelo al piso, la línea de fuga del suelo es paralela al eje X y los dos puntos de fuga se encuentran en la misma línea de fuga del suelo, por lo tanto $y_{f1} = y_{f2}$.

$$d_F = |x_{f1} - x_{f2}|$$

$$P_{mf} = \left(\frac{x_{f1} + x_{f2}}{2}, y_{f1}\right)$$

$$d_{mfl} = \left|\frac{x_{f1} + x_{f2}}{2} - x_L\right|$$

$$(1.2) \quad F_1 = (x_{f1}, y_{f1})$$

$$(1.3) \quad F_2 = (x_{f2}, y_{f1})$$

$$(1.4) \quad P_L = (x_L, y_{f1})$$

$$(1.5) \quad d_{EC} = \sqrt{\left(\frac{|x_{f1} - x_{f2}|}{2}\right)^2 - \left(\left|\frac{x_{f1} + x_{f2}}{2} - x_L\right|\right)^2}$$

Entonces la distancia entre el espectador y una imagen de dos puntos de fuga (con el borde inferior de la imagen paralela al suelo, y el plano formado por la línea que divide las

paredes y la línea de visión, perpendicular al plano de la imagen), se puede calcular mediante la fórmula anterior.

Supongamos que en un cuadro tenemos la imagen de dos objetos de cierta altura, queremos saber la distancia que existe entre esos objetos en el espacio tridimensional. Para ello necesitamos alguna información, tal como el tamaño real de los objetos y la ubicación del espectador respecto al plano del dibujo.

En la figura 1.11, tenemos una línea azul entre los puntos A_1 y A_2 , esa línea representara la altura del objeto 1, el punto A'_1 y A'_2 serán respectivamente las imágenes de los puntos A_1 y A_2 .

La línea azul en el plano $Z = 0$, entre los puntos A'_1 y A'_2 representara la altura de la imagen del objeto 1.

La línea morada entre los puntos A_3 y A_4 , representara la altura del objeto 2. La imagen de esa línea en el plano $Z = 0$, representara la altura de la imagen del objeto 2 entre los puntos A'_3 y A'_4 que son las imágenes respectivas de los puntos A_3 y A_4 .

El espectador estará ubicado en la posición $E = (0, 0, -d_{EC})$, acá el espectador se considera que esta en la posición correcta, es decir, la línea de visión que pasa por un punto en la imagen de un objeto pasa por el punto en el espacio real que se observa del objeto.

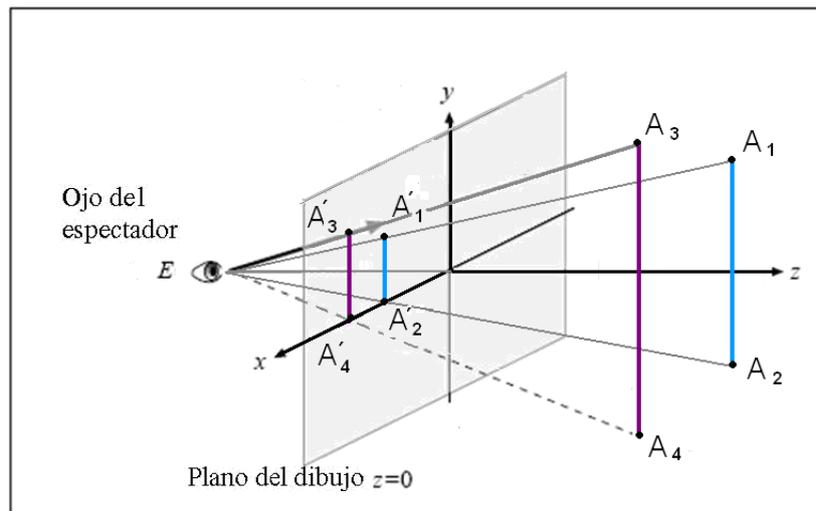


FIGURA 1.11

Si $A'_1 = (x'_{11}, y'_{12})$ y $A'_2 = (x'_{21}, y'_{22})$, como A'_1 y A'_2 tienen la misma componente en X , se tiene que $x'_{11} = x'_{21}$, luego

$$A'_2 = (x'_{11}, y'_{22}).$$

Por otra parte consideremos los puntos $A'_3 = (x'_{31}, y'_{32})$ y $A'_4 = (x'_{41}, y'_{42})$, como A'_3 y A'_4 tienen la misma componente en X , se tiene que $x'_{31} = x'_{41}$, luego

$$A'_4 = (x'_{31}, y'_{42}).$$

En la figura 1.12, se tiene una configuración del problema en el plano $Y = 0$, donde se muestra dos paredes en el fondo que sirven para dar la información de donde está ubicado el espectador y que presentan dos puntos de fugas bajo las mismas condiciones que se plantearon para la figura 1.5.

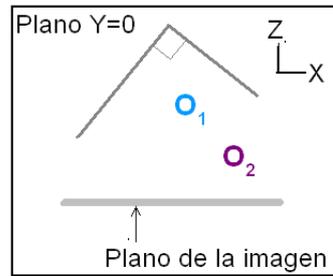


FIGURA 1.12

En la figura 1.13 tenemos el plano de la imagen, donde denotamos al objeto 1 por O_1 y al objeto 2 por O_2 .

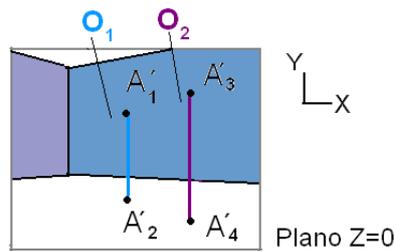


FIGURA 1.13

En la figura 1.14, se tiene la representación de los dos puntos de fuga al extender los bordes inferior y superior de las paredes, que al igual que P_L , pertenecen a la misma línea por el teorema 1.10 y por definición de P_L .

De lo anterior, se tienen las ecuaciones (1.2), (1.3), (1.4) y, además se puede usar la fórmula de la distancia del espectador al cuadro (1.5).

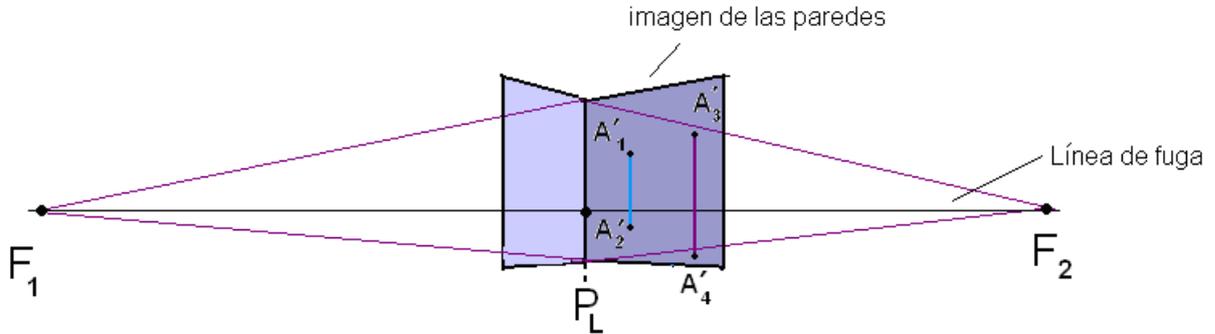


FIGURA 1.14

El espectador se encuentra en la posición $E = (0, 0, -d_{EC})$. En la figura 1.15 (desde el plano $Y = 0$), se muestra la posición de E, P_L y los puntos de las imágenes de los objetos 1 y 2 al intersecar la línea de fuga, denotados por O'_{1L} y O'_{2L} respectivamente.

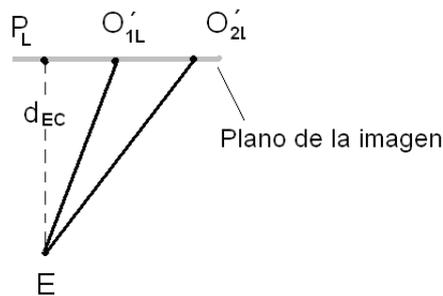


FIGURA 1.15

La distancia del espectador E a (O'_{1L}) , la denotaremos por d'_{O_1E} , la distancia del punto P_L a O'_{1L} , lo denotaremos por d'_{LO_1} como se muestra en la figura 1.16.

Usando el teorema de Pitágoras tenemos lo siguiente:

$$d'_{O_1E} = \sqrt{(d'_{LO_1})^2 + (d_{EC})^2}$$

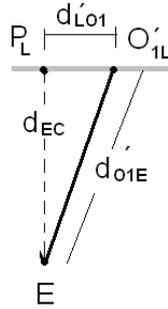


FIGURA 1.16

Todos los puntos de la figura 1.16, tienen componentes $y = y_{f1}$, donde $F_1 = (x_{f1}, y_{f1})$, luego la distancia entre $P_L = (x_L, y_{f1})$ y $O_{1L} = (x_{11}, y_{f1})$ lo determinamos en las componentes de x , por lo tanto

$$d'_{LO_1} = |x_L - x'_{11}|$$

En la figura 1.17, queremos calcular la distancia del punto O'_{2L} (punto de la imagen del objeto 2 que interseca a la línea de fuga), al espectador (E), esto lo denotamos por d'_{O_2E} , mientras que d'_{LO_2} representa la distancia del punto $P_L = (x_L, y_{f1})$ a $O'_{2L} = (x'_{31}, y_{f1})$, por lo tanto

$$d'_{LO_2} = |x_L - x'_{31}|$$

usando el teorema de Pitágoras para la figura 1.11 tenemos:

$$d'_{O_2E} = \sqrt{(d_{EC})^2 + (d'_{LO_2})^2}$$

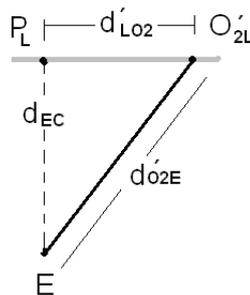


FIGURA 1.17

La figura 1.18, muestra al espectador con sus líneas de visión en los puntos A_1 y A_2 del objeto 1 pasando por los puntos imágenes A'_1 y A'_2 , como los triángulos $A'_1EA'_2$ y A_1EA_2

en los triángulos $O_{2LT}EO_{2L}$ y $P_LEO'_{2L}$, esta información nos permite hacer cálculos respecto a las componentes X y Z de los objetos 1 y 2 como se vera mas adelante.

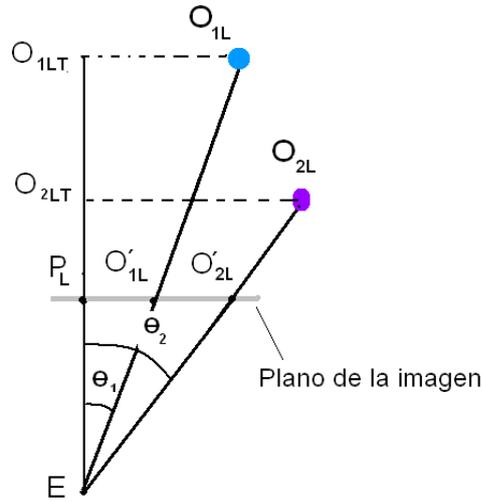


FIGURA 1.20

En la figura 1.21 tenemos un triángulo que nos permite ver cual es el $\text{sen}(\theta_1)$ y $\text{cos}(\theta_1)$:

$$d'_{LO_1} = d'_{O_1E} \text{sen}(\theta_1)$$

despejando $\text{sen}(\theta_1)$ se tiene

$$\text{sen}(\theta_1) = \frac{d'_{LO_1}}{d'_{O_1E}}$$

$$d_{EC} = d'_{O_1E} \text{cos}(\theta_1)$$

despejando $\text{cos}(\theta_1)$ se tiene

$$\text{cos}(\theta_1) = \frac{d_{EC}}{d'_{O_1E}}$$

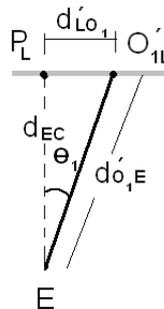


FIGURA 1.21

En la figura 1.22, tenemos una vista de la situación desde el plano $Y = y_{f1}$, donde el punto O_{1LT} representa la traslación perpendicular del punto O_{1L} a la prolongación de la línea que va desde el espectador y pasa por el punto P_L . Queremos hallar las distancias en el eje X y Z del punto en el objeto 1 que pasa por la línea de fuga (O_{1L}), la distancia en el eje X esta representada en la figura por CO_1 y, en el eje Z por CA_1 , el $\text{sen}(\theta_1)$ y $\text{cos}(\theta_1)$ ya lo hallamos en el triángulo de la figura anterior entonces tenemos las siguientes relaciones:

$$CO_1 = d_{O_1E} \text{sen}(\theta_1)$$

$$CA_1 = d_{O_1E} \text{cos}(\theta_1)$$

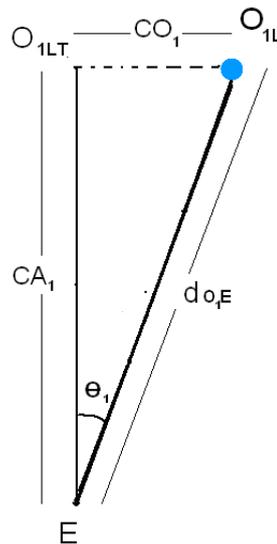


FIGURA 1.22

En la figura 1.23 tenemos un triángulo que nos permite ver cual es el $\text{sen}(\theta_2)$ y $\text{cos}(\theta_2)$, relacionada con las distancias en ese triángulo que se presenta:

$$d'_{LO_2} = d'_{O_2E} \text{sen}(\theta_2)$$

despejando $\text{sen}(\theta_2)$ se tiene

$$\text{sen}(\theta_2) = \frac{d'_{LO_2}}{d'_{O_2E}}$$

$$d_{EC} = d'_{O_2E} \text{cos}(\theta_2)$$

despejando $\cos(\theta_2)$ se tiene

$$\cos(\theta_2) = \frac{d_{EC}}{d'_{O_2E}}$$

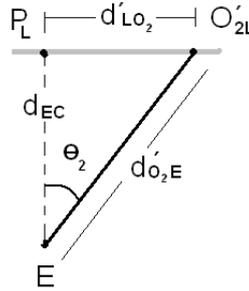


FIGURA 1.23

En la figura 1.24, tenemos una vista de la situación desde el plano $Y = y_{f1}$, donde el punto O_{2LT} representa la traslación perpendicular del punto O_2L a la prolongación de la línea que va desde el espectador y pasa por el punto P_L , acá queremos hallar las distancias en el eje X y Z del punto en el objeto 2, que pasa por la línea de fuga (O_{2L}). La distancia en el eje X esta representada por CO_2 y, en el eje Z por CA_2 , entonces tenemos las siguientes relaciones en la figura:

$$CO_2 = d_{O_2E} \text{ sen}(\theta_2)$$

$$CA_2 = d_{O_2E} \text{ cos}(\theta_2)$$

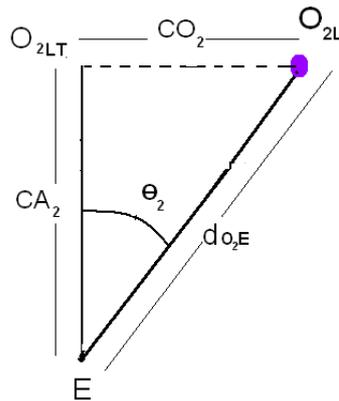


FIGURA 1.24

En la figura 1.25, se muestran la distancia entre los objetos 1 y 2 en el plano $Y = y_{f1}$, representada por d , el componente en X de esa distancia esta representada por d_X y, el

componente en Z esta representado por d_Z , donde se cumplen las siguientes relaciones:

$$d_Z = |CA_2 - CA_1|$$

$$d_X = |CO_2 - CO_1|$$

$$(1.7) \quad d = \sqrt{d_Z^2 + d_X^2}$$

Entonces tenemos que el valor de d , es la distancia entre los objetos 1 y 2, representados en una imagen con dos paredes que nos proporcionan información de dos puntos de fuga.

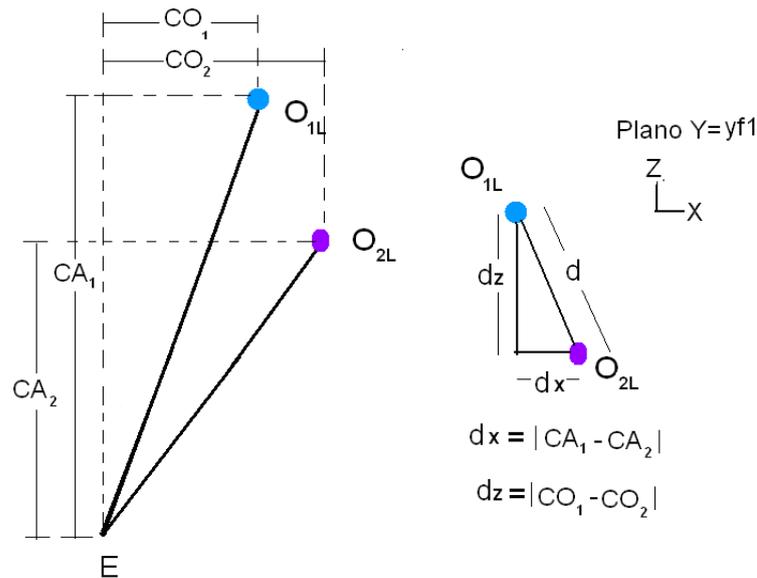


FIGURA 1.25

EJEMPLO 1.13. Vamos a aplicar los resultados anteriores a la foto del interior de la casa que se muestra en la figura 1.26. Se quiere calcular la distancia entre los dos cojines en los que se representa su altura con las líneas azul cian, los puntos A'_1 y A'_2 pertenecen a puntos de la imagen del cojín beige, mientras que los puntos A'_3 y A'_4 son imagen del cojín rojo.

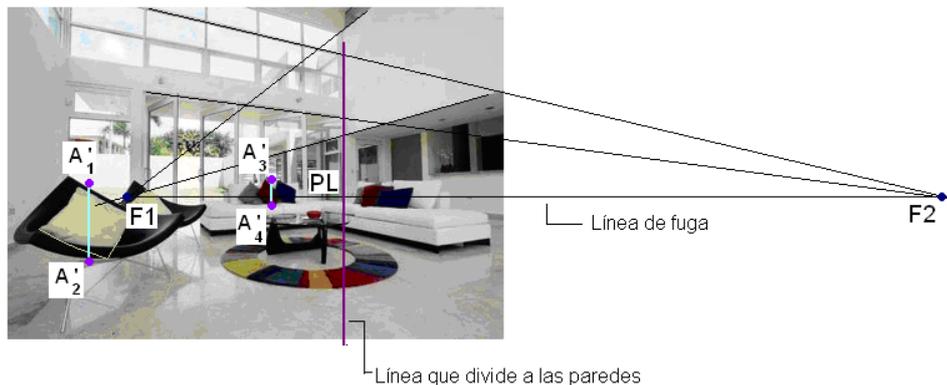


FIGURA 1.26

En la figura 1.26, marcamos los puntos de fuga F_1 y F_2 , con la prolongación de las líneas paralelas que pertenecen a las paredes del fondo en la foto, la línea de fuga que une a F_1 y F_2 esta en el eje X y, el punto P_L es la intersección de la imagen de la línea que divide las paredes con la línea de fuga.

Usando una escala en centímetros y considerando el punto $(0,0)$, en el punto P_L , donde la imagen se encuentra en el plano $Z = 0$, se tienen los siguientes valores presentes en la figura 1.27:

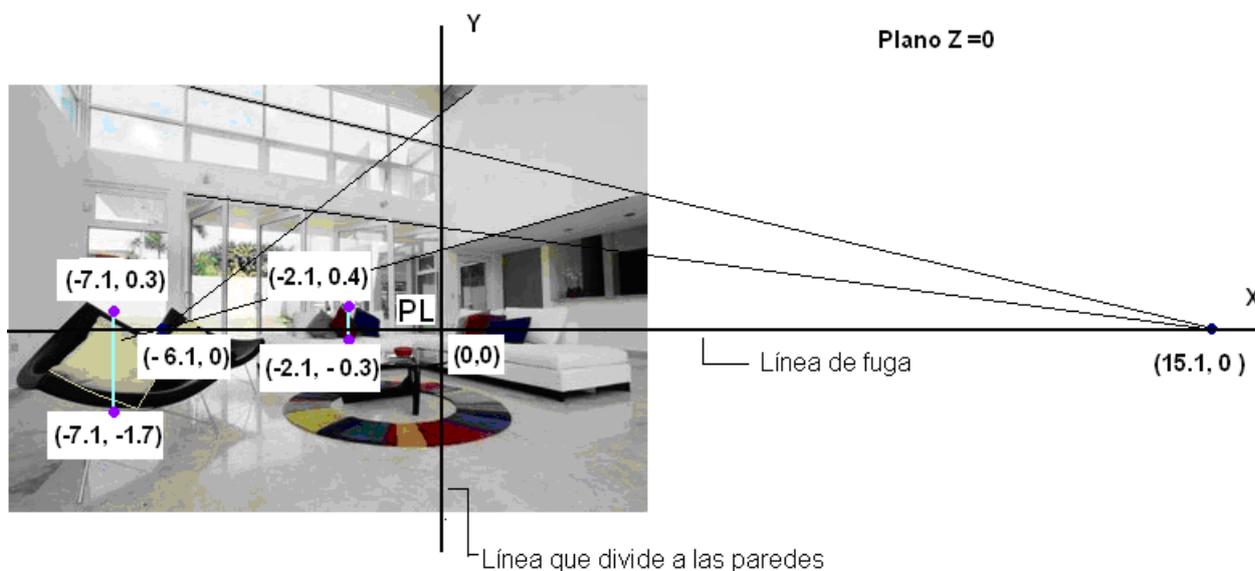


FIGURA 1.27

$$A'_1 = (-7,1,0,3)$$

$$A'_2 = (-7,1,-1,7)$$

$$A'_3 = (-2,1,0,4)$$

$$A'_4 = (-2,1,-0,3)$$

$$F_1 = (15,1,0)$$

$$F_2 = (-6,1,0)$$

$$P_L = (0,0)$$

Para calcular La distancia del espectador al objeto 1, consideramos que el cojín tiene una altura de 50 cm, es decir

$$(1.8) \quad h_1 = h_2 = 50$$

por otra parte

$$\begin{aligned} h'_1 &= |y'_{12} - y'_{22}| \\ &= |0,3 + 1,7| \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'_2 &= |y'_{32} - y'_{42}| \\ &= |0,4 + 0,3| \\ &= 0,7 \end{aligned}$$

las cuales son las alturas de las imágenes de los cojines.

Primero calculemos la distancia del espectador al cuadro usando la ecuación (1.5):

$$d_{EC} = \sqrt{\left|\frac{x_{f1} - x_{f2}}{2}\right|^2 - \left|\frac{x_{f1} + x_{f2}}{2} - x_l\right|^2} = \sqrt{\left|\frac{15,1 - (-6,1)}{2}\right|^2 - \left|\frac{15,1 + (-6,1)}{2} - 0\right|^2} = 9,6$$

Luego se realizan los otros cálculos que se requieren para hallar la distancia entre los cojines usando la ecuación 1.7.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(d_Z)^2 + (d_X)^2} \\ &= \sqrt{449,3^2 + 28,67^2} \\ &= 450,21 \end{aligned}$$

Al final se tiene que la distancia entre los dos cojines escogidos es, de aproximadamente cuatro metros y medio.

4. Cálculo con tres puntos de fuga

Cuando tenemos una imagen en la que se presentan un objeto con tres puntos de fuga, con las líneas que fugan a un punto perpendiculares a las líneas que fugan a los otros dos puntos, se puede calcular la distancia del fotógrafo a ese objeto como se muestra a continuación.

En la figura 1.28, tenemos una fotografía del edificio Parque Central. Queremos saber a qué distancia del edificio estaba la persona que tomó esa foto, es decir, tenemos un camarógrafo en una posición $E = (f, g, -d)$ en el espacio tridimensional, donde debemos calcular f , g y d .

Para calcular esta posición del camarógrafo, se hace uso de los puntos de fuga, que se encuentran en la extensión de ciertas líneas en la foto y que los determinan. Esas líneas son la imagen bordes del edificio que son paralelas o perpendiculares entre ellas.

Si las líneas son paralelas entre si, por el teorema 1.8 tienen el mismo punto de fuga, haciendo uso de ese teorema, aparecen en la figura 1.28, tres puntos de fuga A , B y C .

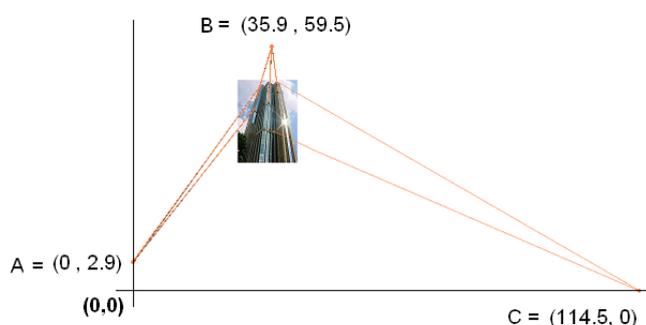


FIGURA 1.28

Luego la línea de visión del punto E al punto de fuga A , es paralela al par de líneas que en la imagen fugan a A , análogamente para los puntos B y C , como cada par de líneas en la imagen que fugan a cada punto, son perpendiculares a las líneas que fugan a los otros dos puntos en el edificio, entonces se cumple lo siguiente:

EB es perpendicular EA , $EB \cdot EA = 0$

EB es perpendicular EC , $EB \cdot EC = 0$

EA es perpendicular EC , $EA \cdot EC = 0$

$$A = (0, 2,9, 0), B = (35,9, 59,5, 0), C = (114,5, 0, 0), E = (f, g, -d)$$

$$EA = (-f, 2,9 - g, d), EB = B - E = (35,9 - f, 59,5 - g, d), EC = (114,5 - f, -g, d)$$

luego usando la ortogonalidad y datos de la ubicación de los puntos en la imagen, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$(1.9) \quad EA \cdot EB = -35,9f + 172,55 - 62,4g + f^2 + g^2 + d^2 = 0$$

$$(1.10) \quad EA \cdot EC = -114,5f + 0 - 2,9g + f^2 + g^2 + d^2 = 0$$

$$(1.11) \quad EB \cdot EC = -150,4f + 4110,55 - 59,5g + f^2 + g^2 + d^2 = 0$$

Si en este sistema de ecuaciones, se le resta a la ecuación (1.9), la ecuación (1.10) y (1.11), se obtiene lo siguiente:

$$(1.12) \quad 78,6f - 59,5g = -172,55$$

$$(1.13) \quad 114,5f - 2,9g = 3938$$

Resolviendo las ecuaciones (1.12) y (1.13), se obtiene que $g = 49,93$, $f = 35,66$ y sustituyendo estos valores en la ecuación (1.11), se llega a que $d \approx 21,42$, es decir, el fotógrafo se encontraba a una distancia aproximadamente de $21,42 \text{ m}$ del edificio.

Álgebra homológica

En el capítulo II, se presentaran definiciones en general sobre los complejos de cadenas. De estos complejos se consideran los casos especiales de los complejos simpliciales y cúbicos, donde el interés se centra en el estudio de la homología en los mismos, el cual trata, sobre un procedimiento que busca asociar a estos objetos matemáticos una secuencia de grupos abelianos que permitirán obtener información topológica.

OBSERVACIÓN 2.1. Para la demostración de los corolarios, proposiciones y teoremas que no se presentan en el capítulo, ver [3].

El último teorema y corolario de este capítulo son de suma importancia, ya que permiten considerar por medio de ciertos procedimientos como el colapso elemental para los conjunto cúbicos, un complejo que se encuentra contenido en otro complejo K , pero que preserva la misma información topológica que este último, y en donde se facilita el conseguir esa información mediante el cálculo de su homología.

OBSERVACIÓN 2.2. En todos los comandos, que involucran cálculos de componentes conexas, se utiliza la conectividad $(8 - \text{adyacencia}, 1)$ para el objeto y, la conectividad $(4 - \text{adyacencia}, 0)$ para el fondo.

1. Complejo

1.1. Complejo de cadena.

DEFINICIÓN 2.3. Un complejo de cadena sobre un anillo R es un par (C, d) donde C representa una familia de R -módulos C_n y donde d , denominado diferencial del complejo, representa una familia de R -homomorfismos d_n tal que $\forall n \in Z$ se cumple lo siguiente:

- (i) $d_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow C_n$.
- (ii) $Im(d_{n+1}) \subset Ker(d_n)$, para cada $n \in Z$.

De la condicion (ii) se sigue que

$$d_n \circ d_{n+1} = 0.$$

C_k en la definición anterior se denominada el espacio de k – *cadena* del complejo.

DEFINICIÓN 2.4. El complejo de cadenas (C, d) se denomina exacto en el paso n si $Im(d_{n+1}) = Ker(d_n)$, y es exacto si lo anterior se cumple para cada $n \in Z$.

DEFINICIÓN 2.5. Una aplicación en cadenas, entre dos complejos de cadenas (C, d) y (C^*, d^*) , representa un diagrama de cuadros conmutativos $f : C \rightarrow C^*$ entendido como un conjunto de R – *homomorfismos* $\{f_n : C_n \rightarrow C_n^*\}$ $n \in Z$, donde para cada $n \in Z$ se cumple lo siguiente:

$$d_n^* \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$$

DEFINICIÓN 2.6. Sea (C, d) un complejo de cadenas y consideremos los siguientes R – submódulos de C_n :

$Ker(d_n)$ denotado por $Z_n(C)$ y denominado n –*ciclos*, $Im(d_{n+1})$ denotado por $B_n(C)$ y denominado n –*bordes*.

La homología de (C, d) es la suma directa externa de los n –ésimos R –módulos de homología de C denotado por $H_n(C)$, donde este se define como el cociente $H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}$.

TEOREMA 2.7. *Toda aplicación en cadenas $f : C_* \rightarrow C'_*$ determina una aplicación en homología $H_*(f) : H_*(C_*) \rightarrow H_*(C'_*)$, que consiste en un conjunto de homomorfismos, $H_n(f) : H_n(C_*) \rightarrow H_n(C'_*)$ donde $c \in Z$ dados por $H_n(f)(c + B_n(C_*)) = f_n(c) + B_n(C'_*)$ donde $c \in Z_n(C_*)$.*

DEFINICIÓN 2.8. Sea (C', d') un subcomplejo del complejo (C, d) , $f : C' \rightarrow C$ es un cuasi-isomorfismo si la función inducida por f a la homología del complejo $f : H(C') \rightarrow H(C)$ es un isomorfismo.

DEFINICIÓN 2.9. Una homotopía en cadenas, entre dos aplicaciones en cadenas $f, g : C^* \rightarrow C$ es una sucesión de homomorfismos $\{D_n : C_n^* \rightarrow C_{n+1}\}$ $n \in Z$, tal que para cada $n \in Z$ se cumple:

$$d_{n+1} \circ D_n + D_{n-1} \circ d_n^* = f_n - g_n$$

DEFINICIÓN 2.10. Dos complejos C^* y C se dice que son homotópicamente equivalentes, si existen aplicaciones en cadenas $f : C^* \rightarrow C$ y $g : C \rightarrow C^*$, donde g se define como el inverso en homotopía de f que satisface lo siguiente:

Existe una homotopía en cadenas entre las aplicaciones $f \circ g$ y id_C y, otra homotopía en cadenas entre $g \circ f$ y id_{C^*} .

PROPOSICIÓN 2.11. Dada dos aplicaciones en cadenas $f, g : C_* \rightarrow C'_*$ y $f', g' : C'_* \rightarrow C''_*$, tal que si existe una homotopía en cadena entre f y g y, otra homotopía en cadenas entre f' y g' , entonces se tiene una homotopía en cadenas entre $f' \circ f$ y $g' \circ g$.

LEMA 2.12. Las aplicaciones homótopas en cadenas inducen aplicaciones iguales en homología, es decir, si existe una homotopía de cadenas entre f y g , entonces $H_n(f) = H_n(g)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

1.2. Complejo de cocadena.

DEFINICIÓN 2.13. Una sucesión finita o infinita de homomorfismos de R -módulos

$$\dots X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \dots$$

se denomina semiexacta, cuando la imagen del homomorfismo entrante esta contenida en el núcleo del homomorfismo saliente en todo módulo diferente de los extremos.

DEFINICIÓN 2.14. Una sucesión exacta de módulos, es una sucesión finita o infinita

$$\dots X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \dots$$

de homomorfismos de R -módulos tal que la imagen del homomorfismo entrante coincide con el núcleo del homomorfismo saliente de todo módulo distinto de los extremos (si existen) de la sucesión.

DEFINICIÓN 2.15. El complejo de cocadenas (C, δ) , es una sucesión semiexacta ascendente C , es decir, utiliza subíndices crecientes para los módulos, donde los homomorfismos de R -módulos son representados por δ , así el complejo de cocadenas es una sucesión de la forma:

$$C : \dots \xrightarrow{\delta_{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} \dots$$

C_k en la definición anterior se denominada el espacio de k – *cocadena* del complejo.

OBSERVACIÓN 2.16. Los términos cocadenas, cociclos y cobordes son utilizados en los complejos de cocadenas, en analogía a la cadena, ciclo y borde para los complejos de cadenas y en la notación se usan superíndices en lugar de los subíndices.

DEFINICIÓN 2.17. Sea (C, δ) un complejo de cocadenas y consideremos los siguientes R -submódulos de C_n :

$Ker(\delta_n)$ denotado por $Z^n(C)$ y denominado n -cociclos, $Im(\delta_{n-1})$ denotado por $B^n(C)$ y denominado n -cobordes.

La cohomología de (C, δ) es la suma directa externa de los n -ésimos R -módulos de cohomología de C denotado por $H^n(C)$, donde este se define como el cociente $H^n(C) = \frac{Z^n(C)}{B^n(C)}$.

2. Complejo simplicial

DEFINICIÓN 2.18. Una combinación convexa de $k + 1$ puntos $V_0, V_1, \dots, V_k \in R^n$ espacio euclídeo, es un punto $x \in R^n$ tal que $x = t_0V_0 + t_1V_1 + \dots + t_kV_k$ donde $t_0 + t_1 + \dots + t_k = 1$ y $t_i \geq 0$ para todo $0 < i < k$.

DEFINICIÓN 2.19. Un conjunto de $k + 1$ puntos V_0, V_1, \dots, V_k es afinmente independiente, si el conjunto $V_1 - V_0, V_2 - V_0, \dots, V_k - V_0$ es linealmente independiente en R^n .

DEFINICIÓN 2.20. Sean $V_0, V_1, V_2, \dots, V_k, (k+1)$ puntos en un espacio euclídeo n -dimensional que forman una combinación convexa y son afinmente independientes es lo que se denomina un k - símplice, donde los puntos son los vértices del k -símplice.

EJEMPLO 2.21. Tenemos: 0-símplice \longrightarrow (punto). 1-símplice \longrightarrow (segmento de línea). 2-símplice \longrightarrow (triángulo). 3-símplice \longrightarrow (tetraedro).

DEFINICIÓN 2.22. Una cara D de un $(K + 1)$ -símplice P , es un K -símplice tal que $D \in P$, con $K \in N$.

DEFINICIÓN 2.23. Un complejo simplicial, es una colección finita k de símplices en el espacio euclídeo n -dimensional que satisface lo siguiente:

- (i) Cada s3mplice contiene todas sus caras.
- (ii) La intersecci3n de cualquiera dos s3mplices de k es vac3o o tienen una cara com3n.

Un complejo simplicial consta de un conjunto de k -s3mplices denotado por C_k (C_k es un R -modul3, donde R es un anillo conmutativo unitario) y, un conjunto de aplicaciones d_k entre esos k -s3mplices con $k \in \mathbb{N}$ que cumplen lo siguiente:

- (i) $d_k : C_{k+1} \longrightarrow C_k$
- (ii) $d_k \circ d_{k+1} = 0$
- (iii) $Im(d_{k+1}) \subset Ker(d_k)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Este complejo se denotara por (C, d) , donde C representa al conjunto de los C_k y d al de las aplicaciones d_k .

DEFINICI3N 2.24. sea σ un n -s3mplice denotado por $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, donde a_i son los v3rtices de σ , σ^i es la i -3sima cara de σ definida como el $n - 1$ -s3mplice que resulta de extraer el vertice a_i a σ , es decir, $\sigma^i = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$.

DEFINICI3N 2.25. La frontera de un n -s3mplice σ , es un operador definido por $\partial(\sigma) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma^i$.

DEFINICI3N 2.26. Un k -s3mplice es compartido si es cara de m3s de un $(k + 1)$ -s3mplice, es libre si pertenece s3lo a un $(k + 1)$ -s3mplice y es maximal si no pertenece a ning3n otro s3mplice.

DEFINICI3N 2.27. El adelgazamiento de un complejo K , es el calculo de otro complejo K' que preserva toda la informaci3n topol3gica de K , cuando este se hace a nivel algebraico se denomina adelgazamiento algebraico.

DEFINICI3N 2.28. El colapso simplicial, es un proceso que permite un adelgazamiento algebraico sobre alg3n complejo simplicial K , se toma un s3mplice maximal $\sigma \in K$ y una cara libre σ' de σ , luego se tiene que K colapsa simplicialmente en $K - \{\sigma', \sigma\}$, este proceso se acaba cuando ya no es posible realizar mas colapsos, es decir, cuando todas las caras del complejo son compartidas.

OBSERVACI3N 2.29. Con el colapso simplicial se produce una contracci3n de cadenas de $C(K)$ a $C(K - \{\sigma', \sigma\})$.

DEFINICIÓN 2.30. Un espacio X es contráctil si y sólo si, tiene el mismo tipo de homotopía que un punto.

DEFINICIÓN 2.31. Una contracción de cadenas de un complejo de cadenas C a otro complejo de cadenas C' , es un conjunto de tres homomorfismos (f, g, ϕ) tal que:

- (1) (i) $f : C \rightarrow C'$ y $g : C' \rightarrow C$ son aplicaciones de cadenas ($\partial \circ f = f \circ \partial$ y $\partial \circ g = g \circ \partial$)
- (2) (ii) $f \circ g$ es la aplicación identidad de C'
- (3) (iii) $\phi : C \rightarrow C$ es una homotopía de cadenas de la función identidad de C id_c a $g \circ f$, esto es, $\phi \circ \partial + \partial \circ \phi = Id_c + g \circ f$.

PROPOSICIÓN 2.32. En una contracción de cadena (f, g, ϕ) de un complejo de cadenas $C(K)$ a un complejo K' , ambos complejos tienen grupos de homología isomorfos.

Algoritmo de adelgazamiento algebraico

Entrada: conjunto ordenado de símlices $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$

Salida: la contracción de cadenas (f, g, ϕ)

Inicialmente $f(\sigma) := 0$, $\phi(\sigma) := 0$ para cada $\sigma \in K$; y $h := \{\emptyset\}$

para $i = 1$ hasta $i = n$ hacer

si $f(\partial\sigma_i) = 0$ entonces

$h := h \cup \{\sigma_i\}$

$f(\sigma_i) := \sigma_i$

sino

elegir algún σ_j de $f(\partial\sigma_i)$ $h := h - \{\sigma_j\}$

para $k = 1$ hasta $k = m$ hacer

si σ_j aparece en la expresión de $f(\sigma_k)$ entonces

$f(\sigma_k) := f(\sigma_k) - f(\partial_i)$ $\phi(\sigma_k) := \phi(\sigma_k) + \sigma_i + \phi(\partial_i)$

fin si fin para fin si fin para

para todo $\sigma \in h$ hacer

$g(\sigma) := \sigma + \phi(\partial\sigma)$

fin para

En el algoritmo de adelgazamiento algebraico, se considera un complejo simplicial K con su conjunto ordenado de símlices $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, donde se presenta (f, g, ϕ) , como la

contracción de cadenas de $C(K)$ a K' donde K' es un complejo de cadenas con diferencial nula e isomorfa a $H(C(K))$ y con h como el conjunto de sus generadores. En este algoritmo, si $f\partial(\sigma_i) = 0$, entonces σ_i crea una clase de homología y σ_i es añadido a h , si lo anterior no pasa, se elige un símplice que se encuentra en la expresión de $f\partial(\sigma_i)$ para ser restado al conjunto h . Al final los elementos de h generan las clases de homología de $H(C(K))$ al ser este isomorfo a K' .

EJEMPLO 2.33. Se tiene el complejo simplicial K de la figura 2.1, al cual se aplica el algoritmo del adelgazamiento algebraico mostrado en la tabla de la figura 5.1 presente en los anexos, en la sección 1, donde se obtienen los generadores del complejo de cadenas K' , con lo que se concluye que K es contráctil al obtener K' un solo generador ($\langle 2 \rangle$).

$$K = \{ \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 5 \rangle, \langle 6 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \\ \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 6 \rangle, \langle 1, 3, 4 \rangle, \langle 1, 3, 6 \rangle, \langle 1, 4, 6 \rangle, \\ \langle 2, 3, 5 \rangle, \langle 3, 4, 6 \rangle, \langle 1, 3, 4, 6 \rangle \}$$

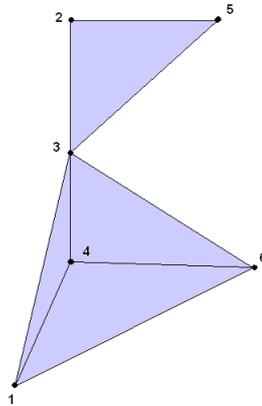


FIGURA 2.1

En los anexos, en la sección 1, se presenta en la figura 5.2 y 5.3, la tabla de adelgazamiento del complejo simplicial para la función f y ϕ respectivamente, utilizando el algoritmo de adelgazamiento algebraico.

DEFINICIÓN 2.34. Sean (C, d) y (C', d') complejos símpliciales, donde C_0 es el subconjunto de los 0- símplices $(V_0, V_1, V_2, \dots, V_N)$ de C y C'_0 el subconjunto de los 0- símplices de

$(f(V_0), f(V_1), f(V_2), \dots, f(V_N))$ de C' . Sea $f : C_0 \rightarrow C'_0$ una función continua y biyectiva, consideremos a $g : C \rightarrow C'$ la función extensión de $f / \forall x \in C, x = \sum_{i=0}^N t_i V_i$ se tiene que $g(x) = \sum_{i=0}^N t_i f(V_i)$, entonces g es denominado homeomorfismo simplicial.

3. Complejo cúbico

3.1. Conjunto cúbico.

DEFINICIÓN 2.35. Un intervalo elemental, es un intervalo cerrado $I \subset R$ de la forma $I = [a, a + 1]$ o $I = [a, a] := [a]$ donde $a \in Z$.

EJEMPLO 2.36. $[-1, 0]$, $[2, 3]$ son intervalos elementales.

OBSERVACIÓN 2.37. Se llama degenerado al intervalo elemental que solo contiene un punto, es decir, que tiene la forma $[a]$, y no degenerado al intervalo elemental de longitud 1 de la forma $[a, a + 1]$ con $a \in Z$.

DEFINICIÓN 2.38. Un cubo elemental Q es un producto finito $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N$ donde I_k es un intervalo elemental $\forall 1 \leq K \leq N$.

EJEMPLO 2.39. $Q_1 = [1, 2] \times [-2, -1] \times [3]$, $Q_2 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, $Q_3 = [3, 4] \times [1, 2]$, $Q_4 = [1, 2]$, $Q_5 = [1, 2] \times [1]$, $Q_6 = [1] \times [1, 2]$.

DEFINICIÓN 2.40. El conjunto de todos los cubos elementales en el espacio R^d se denota por K^d , el conjunto de todos los cubos elementales se denota por K , es decir

$$K := \bigcup_{d=1}^{\infty} K^d.$$

DEFINICIÓN 2.41. Sea $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$ un cubo elemental contenido en el espacio R^d , se define $emb(Q)$ como el número de componentes de Q por lo tanto $emb(Q) := d$.

El intervalo elemental I_K se conoce como la k -ésima componente de Q y se denota por $I_K(Q)$.

EJEMPLO 2.42. Sea $Q_4 = [1, 2] \times [-2, -1] \times [3]$, el intervalo elemental $[3] = I_3$, es la tercera componente de Q_4 donde $emb(Q_4) = 3$.

DEFINICIÓN 2.43. La dimensión de Q se define como el número de componentes no degeneradas de Q y se denota por $dim(Q)$.

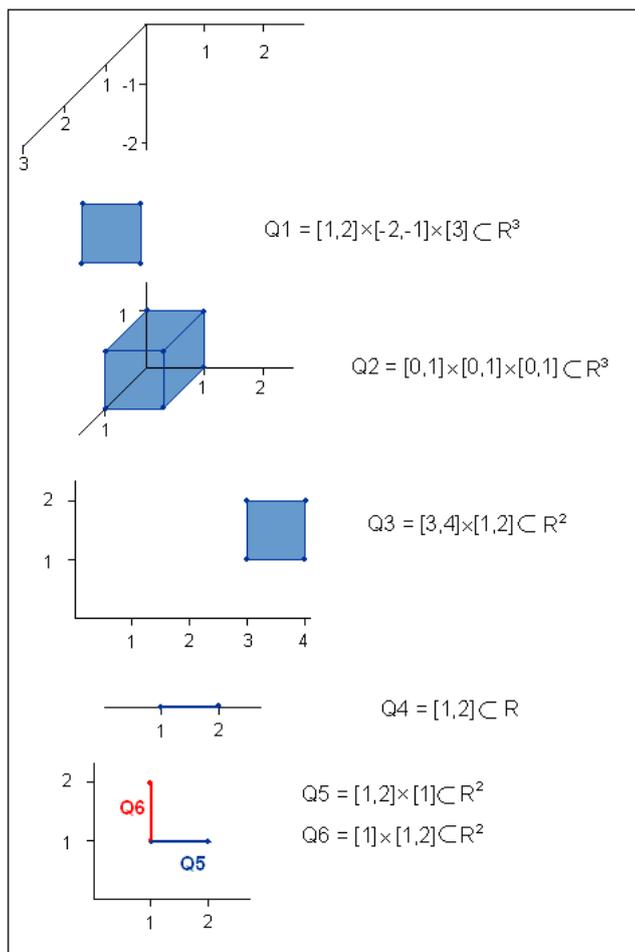


FIGURA 2.2

OBSERVACIÓN 2.44. Si $Q \in K^d$ y $\dim(Q) = c$ se denota por $Q \in K_c^d$.

EJEMPLO 2.45. Para el cubo elemental, $Q_4 = [1, 2] \times [-2, -1] \times [3], [3]$ es una componente no degenerada, por lo que la $\dim(Q_4) = 2$.

PROPOSICIÓN 2.46. Si $Q \in K_c^d$ y $P \in K_{c'}^{d'}$ entonces $Q \times P \in K_{c+c'}^{d+d'}$.

DEFINICIÓN 2.47. Sean $Q, P \in K$, cubos elementales, si $Q \subset P$, decimos que Q es una cara de P y se denota por $Q \preceq P$. Si $Q \preceq P$ y $Q \neq P$, decimos que Q es una cara propia de P , y se denota por $Q \prec P$. Q es una cara principal de P si $Q \preceq P$ y $\dim(Q) = \dim(P) - 1$.

EJEMPLO 2.48. Las caras de $[0, 1]^2$ son:

$$[0, 1] \times [0, 1], [0] \times [0, 1], [1] \times [0, 1], [0, 1] \times [0],$$

$$[0, 1] \times [1], [0] \times [0], [0] \times [1], [1] \times [0], [1] \times [1].$$

Las caras propias de $[0, 1]^2$ son:

$$[0] \times [0, 1], [1] \times [0, 1], [0, 1] \times [0], [0, 1] \times [1], \\ [0] \times [0], [0] \times [1], [1] \times [0], [1] \times [1].$$

Las caras principales de $[0, 1]^2$ son:

$$[0] \times [0, 1], [1] \times [0, 1], [0, 1] \times [0], [0, 1] \times [1].$$

DEFINICIÓN 2.49. Un conjunto $X \subset R^d$ es cúbico, si X puede ser escrito como una unión finita de cubos elementales. Para $X \subset R^d$ conjunto cúbico, se usa la siguiente notación:

$$K(X) := \{Q \in K / Q \subset X\} \\ K_c(X) := \{Q \in K(X) / \dim(Q) = c\}.$$

EJEMPLO 2.50. Sea $X = [0, 1] \times [0, 1] \times [1, 2] \cup [2] \times [1, 2] \cup [2, 3]$ entonces se tiene lo siguiente:

$$K_3(X) = \{[0, 1] \times [0, 1] \times [1, 2]\} \\ K_2(X) = \{[0] \times [0, 1] \times [1, 2], [1] \times [0, 1] \times [1, 2], [0, 1] \times [0] \times [1, 2], \\ [0, 1] \times [1] \times [1, 2], [0, 1] \times [0, 1] \times [1], [0, 1] \times [0, 1] \times [2]\} \\ K_1(X) = \{[0] \times [0] \times [1, 2], [0] \times [1] \times [1, 2], [1] \times [0] \times [1, 2], \\ [1] \times [1] \times [1, 2], [0, 1] \times [0] \times [1], [0, 1] \times [0] \times [2], \\ [0, 1] \times [1] \times [1], [0, 1] \times [1] \times [2], [0] \times [0, 1] \times [1], \\ [0] \times [0, 1] \times [2], [1] \times [0, 1] \times [1], [1] \times [0, 1] \times [2], \\ [2] \times [1, 2], [2, 3]\} \\ K_0(X) = \{[0] \times [0] \times [1], [0] \times [0] \times [2], [0] \times [1] \times [1], \\ [0] \times [1] \times [2], [1] \times [0] \times [1], [1] \times [0] \times [2], \\ [1] \times [1] \times [1], [1] \times [1] \times [2], [2] \times [1], [2] \times [2], [2], [3]\}.$$

Los elementos de $K_k(X)$ son los k -cubos de X , donde los elementos de $K_0(X)$ son los vértices de X y los elementos de $K_1(X)$ son las aristas de X .

PROPOSICIÓN 2.51. *Si $X \subset R^d$ y es cúbico, entonces X es cerrado y acotado.*

DEFINICIÓN 2.52. Sea I un intervalo elemental, su celda elemental asociada es:

$$\mathring{I} = \begin{cases} (a, a + 1) & \text{si } I = [a, a + 1] \\ [a] & \text{si } I = [a, a] \end{cases}$$

La celda elemental asociada al cubo elemental $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N$, se define como $\mathring{Q} = \mathring{I}_1 \times \mathring{I}_2 \times \cdots \times \mathring{I}_N$.

EJEMPLO 2.53. las celdas elementales asociadas a $Q_1 = [1, 2] \times [-2, -1] \times [3]$ son:

$$\mathring{Q}_1 = (1, 2) \times (-2, -1) \times [3]$$

Dado un punto en R_d se definen en las celdas elementales dos funciones usadas para describir las celdas o cubos que las contienen, estas son:

$$piso(x) := \max \{n \in Z / n \leq x\}$$

$$techo(x) := \min \{n \in Z / x \leq n\}.$$

PROPOSICIÓN 2.54. *Las celdas elementales tienen las siguientes propiedades.*

- (i) $R^d = \bigcup \{\mathring{Q} / Q \in K^d\}$
- (ii) *Sea $A \subset R^d$ frontera $\Rightarrow \text{card}\{Q \in K^d / \mathring{Q} \cap A \neq \emptyset\} < \infty$*
- (iii) *Si P y $Q \in K$, entonces $\mathring{P} \cap \mathring{Q} = \emptyset$ o $P = Q$*
- (iv) *Para cada $Q \in K$, $\text{cl}\mathring{Q} = Q$*
- (v) $Q \in K^d \Rightarrow Q = \bigcup \{\mathring{P} / P \in K^d, \mathring{P} \subset Q\}$
- (vi) *Si X es un conjunto cúbico y $\mathring{Q} \cap X \neq \emptyset$ para algun cubo elemental Q , entonces $Q \subset X$.*

DEMOSTRACIÓN. (iv) Sea $Q \in K^d$ un cubo elemental, por definición de celda elemental se tiene que $\mathring{Q} \subset Q$. Por otra parte la $\text{cl}\mathring{Q} = \bigcap \{F \subset R^d / \mathring{Q} \subset F \text{ y } F \text{ es cerrado}\}$, como Q es el menor cerrado que contiene a \mathring{Q} entonces $Q \subset F$ para todo F cerrado / $\mathring{Q} \subset Q$, es decir, $Q \subset \bigcap F = \text{cl}\mathring{Q}$, luego $\mathring{Q} = Q$. \square

OBSERVACIÓN 2.55. La demostración de las propiedades (i), (ii), (iii), (v) y (vi) se encuentran en [3].

PROPOSICIÓN 2.56. *Una cara $(k - 1)$ - dimensional de un cubo elemental $(k + 1)$ - dimensional, es una cara común de exactamente dos caras k - dimensionales de Q .*

DEMOSTRACIÓN. . Sea Q un cubo elemental $(k + 1)$ -dimensional y sea P una cara $(k - 1)$ -dimensional de Q , $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ contenida en R^n donde I_j es un intervalo elemental para todo $1 \leq j \leq n$, con $K + 1$ intervalos no degenerados y $n - (K + 1)$ degenerados, los intervalos no degenerados de Q son de la forma $[Z_1, Z_1 + 1], \dots, [Z_{k+1}, Z_{k+1} + 1]$ con $Z_i \in Z$, para todo $1 \leq i \leq k + 1$, ahora como $P \subset Q$ y es $(k - 1)$ -dimensional, esta compuesta por $(k - 1)$ cualesquiera de los intervalos anteriores, es decir, a P lo conforman $[Z_{i_1}, Z_{i_1} + 1], \dots, [Z_{i_{(k-1)}}, Z_{i_{(k-1)}} + 1]$, como la dimensión de Q es $(k + 1)$, existen exactamente dos intervalos elementales no degenerados que no pertenecen a P , digamos que estos intervalos son :

$[Z_a, Z_a + 1], [Z_b, Z_b + 1]$, ahora si consideramos los cubos elementales Q_1 conformado por los intervalos elementales no degenerados $[Z_a, Z_a + 1]$ y $[Z_{i_1}, Z_{i_1} + 1], \dots, [Z_{i_{(k-1)}}, Z_{i_{(k-1)}} + 1]$ y el cubo elemental Q_2 conformado por $[Z_{i_1}, Z_{i_1} + 1], \dots, [Z_{i_{(k-1)}}, Z_{i_{(k-1)}} + 1]$ y $[Z_b, Z_b + 1]$, estos dos cubos elementales Q_1 y Q_2 son caras k -dimensionales de Q en donde P es cara común de esos dos cubos. \square

3.2. Cadenas cúbicas.

DEFINICIÓN 2.57. Consideremos un k -cubo elemental $Q \in K_k^d$, identificamos un objeto algebraico \hat{Q} llamado una k -cadena elemental de R^d . El conjunto de las k -cadenas de R^d es denotado por $\hat{K}_k^d = \{\hat{Q} / Q \in K_k^d\}$. El conjunto de todas las cadenas elementales de R^d es dado por:

$$\hat{K}^d := \bigcup_{K=0}^{\infty} \hat{K}_k^d.$$

DEFINICIÓN 2.58. Dada una colección finita de k -cadenas elementales $\{\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_m\} \subset \hat{K}_k^d$, se considerara la suma de la siguiente forma:

$$c = a_1 \hat{Q}_1 + \cdots + a_m \hat{Q}_m, \text{ donde } a_i \in Z.$$

El conjunto de las k -cadenas es denotado por C_k^d , la suma de las cadenas es naturalmente definida por:

$$\sum_{i=1}^m a_i \hat{Q}_i + \sum_{i=1}^m b_i \hat{Q}_i := \sum_{i=1}^m (a_i + b_i) \hat{Q}_i.$$

PROPOSICIÓN 2.59. C_k^d es un grupo abeliano libre con base \hat{K}_k^d . Para cada $Q \in K_k^d$ se define $\hat{Q} : K_k^d \rightarrow Z$ tal que:

$$\hat{Q}(P) = \begin{cases} \hat{Q}(P) = 1 & \text{si } P = Q \\ \hat{Q}(P) = 0 & \text{si } P \neq Q \end{cases}$$

la función cero, se define como $0(Q) = 0$, para todo $Q \in K_k^d$.

DEFINICIÓN 2.60. El grupo de K -cadenas C_k^d de R^d es el grupo libre abeliano generado por las cadenas elementales de \hat{K}_k^d . Así los elementos de C_k^d son funciones $c : K_k^d \rightarrow Z$ tales que $c(Q) = 0$, para todo Q excepto un número finito de $Q \in K_k^d$, en particular \hat{K}_k^d es la base para C_k^d . Si $c \in C_k^d$ entonces $\dim(c) = k$.

Acá se tiene que, para los cubos elementales $Q \subset R^d$, con $K < 0$ y $K > d$, $K_k = \emptyset$ y sugrupo de k -cadenas es $C_k^d = 0$.

PROPOSICIÓN 2.61. La transformada $\phi : K_k^d \rightarrow \hat{K}_k^d$ dada por $\phi(Q) = \hat{Q}$ es una función biyectiva.

DEFINICIÓN 2.62. Sea $c \in C_k^d$. El soporte de la cadena c es el conjunto cúbico

$$|c| := \bigcup \{Q \in K_k^d / c(Q) \neq 0\}.$$

PROPOSICIÓN 2.63. El soporte satisface las siguientes propiedades.

- (i) $|c| = \emptyset \Leftrightarrow c = 0$.
- (ii) Sea $a \in Z$ y $c \in C_k^d \Rightarrow$

$$|ac| = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a = 0 \\ |c| & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

- (iii) Si $Q \in K \Rightarrow |\hat{Q}| = Q$.
- (iv) Si $c_1, c_2 \in C_k^d \Rightarrow |c_1 + c_2| \subset |c_1| \cup |c_2|$.

DEMOSTRACIÓN.

(ii) $|ac| := \bigcup\{Q \in K_k^d / ac(Q) \neq 0\}$. Si $a = 0$ entonces $ac(Q) = 0 \forall Q \in K_k^d$, entonces $|ac| = \emptyset$.

Si $a \neq 0$ se tiene que, $ac(Q) \neq 0 \Leftrightarrow c(Q) \neq 0$, luego

$$|ac| := \bigcup\{Q \in K_k^d / ac(Q) \neq 0\} = \bigcup\{Q \in k_k^d / c(Q) \neq 0\} = |c|$$

(iii) sea $\hat{Q} \in C_k^d$, $|\hat{Q}| := \bigcup\{P \in k_k^d / \hat{Q}(P) \neq 0\}$ por definición $\hat{Q} \neq 0 \Leftrightarrow P = Q$, luego $|\hat{Q}| = Q$. \square

OBSERVACIÓN 2.64. La demostración de las propiedades (i) y (iv) para el soporte, se encuentran en [3].

DEFINICIÓN 2.65. Considere $c_1, c_2 \in C_k^d$ donde $c_1 = \sum_{i=1}^m a_i \hat{Q}_i$ y $c_2 = \sum_{i=1}^m b_i \hat{Q}_i$.

El producto escalar de las cadenas se define como:

$$\langle c_1, c_2 \rangle := \sum_{i=1}^m a_i b_i.$$

PROPOSICIÓN 2.66. $|c| := \bigcup\{Q \in k_k^d / \langle c, \hat{Q} \rangle \neq 0\}$.

DEMOSTRACIÓN. Basta con probar que $c(Q) = \langle c, \hat{Q} \rangle$. Como c es una K -cadena C_k^d , entonces existen $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ k -cadenas elementales $\subset \hat{K}_k^d / c = \sum_{i=1}^m a_i \hat{Q}_i$ con $a_i \in Z$, por otra parte sea $\hat{Q} = \hat{Q}_k = \sum_{i=1}^m b_i \hat{Q}_i$, donde

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

luego $\langle c, \hat{Q}_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^m a_i \hat{Q}_i, \hat{Q} \rangle = \langle \sum_{i=1}^m a_i \hat{Q}_i, \sum_{i=1}^m b_i \hat{Q}_i \rangle = \sum_{i=1}^m a_i b_i$, donde

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{Q}_i \neq \hat{Q}_k = Q \\ 1 & \text{si } \hat{Q}_i = \hat{Q}_k = Q \end{cases}$$

por lo tanto se tiene que, $\langle c, \hat{Q}_k \rangle = \langle c, Q \rangle = c(Q)$. \square

PROPOSICIÓN 2.67. El producto escalar define una transformación bilineal, es decir, $\langle ac_1 + bc_2, c_3 \rangle = a \langle c_1, c_3 \rangle + b \langle c_2, c_3 \rangle$ y $\langle c_1, ac_2 + bc_3 \rangle = a \langle c_1, c_2 \rangle + b \langle c_1, c_3 \rangle$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: C_k^d \times C_k^d \longrightarrow Z$$

$$(c_1, c_2) \mapsto \langle c_1, c_2 \rangle .$$

DEFINICIÓN 2.68. Dado dos cubos elementales $P \in K_k^d$ y $Q \in K_{k'}^{d'}$ se define el conjunto $\hat{P} \diamond \hat{Q} := \widehat{P \times Q}$. Esta definición se extiende a cadenas arbitrarias $c_1 \in C_k^d$ y $c_2 \in C_{k'}^{d'}$ por:

$$c_1 \diamond c_2 := \sum_{P \in K_k, Q \in K_{k'}} \langle c_1, \hat{P} \rangle \langle c_2, \hat{Q} \rangle \widehat{P \times Q} .$$

La cadena $c_1 \diamond c_2 \in C_{k+k'}^{d+d'}$ es llamado el producto cúbico de c_1 y c_2 .

EJEMPLO 2.69. Sean $P_1 = [-1, 0] \times [0]$, $P_2 = [0, 1] \times [0]$, $P_3 = [0] \times [-1, 0]$, $P_4 = [0] \times [0, 1]$, $Q_1 = [1, 2]$ y $Q_2 = [0, 1]$ cubos elementales y consideremos las cadenas:

$$c_1 = \widehat{P_1} + \widehat{P_2} + \widehat{P_3} + \widehat{P_4} \qquad c_2 = \widehat{Q_1} + \widehat{Q_2}$$

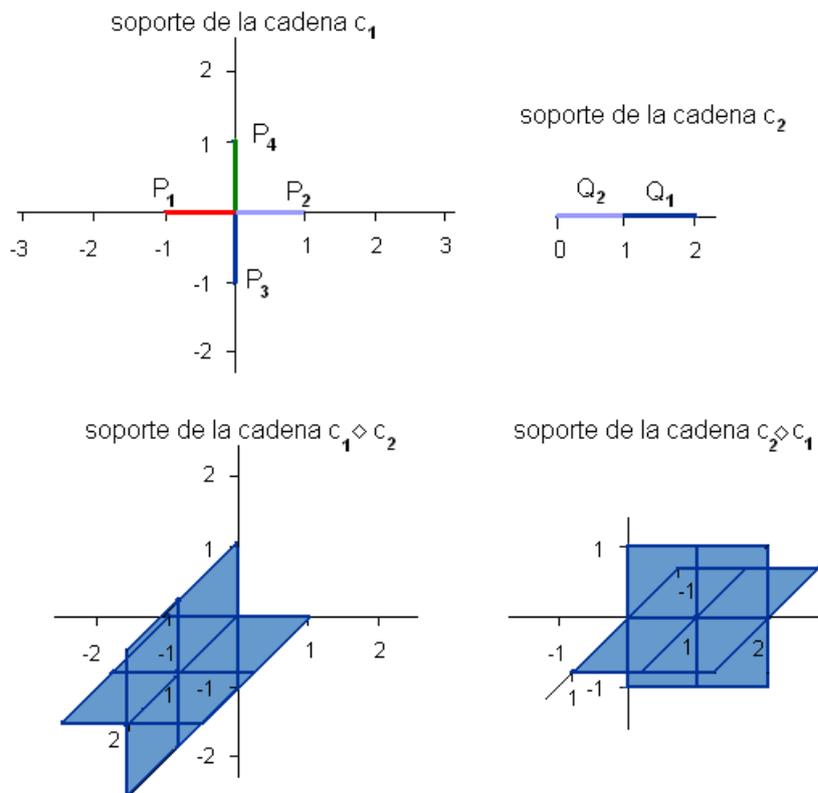


FIGURA 2.3

$$c_1 \diamond c_2 = \widehat{P_1 \times Q_1} + \widehat{P_2 \times Q_1} + \widehat{P_3 \times Q_1} + \widehat{P_4 \times Q_1} \\ + \widehat{P_1 \times Q_2} + \widehat{P_2 \times Q_2} + \widehat{P_3 \times Q_2} + \widehat{P_4 \times Q_2}$$

donde

$$P_1 \times Q_1 = [-1, 0] \times [0] \times [1, 2], P_2 \times Q_1 = [0, 1] \times [0] \times [1, 2], \\ P_3 \times Q_1 = [0] \times [-1, 0] \times [1, 2], P_4 \times Q_1 = [0] \times [0, 1] \times [1, 2], \\ P_1 \times Q_2 = [-1, 0] \times [0] \times [0, 1], P_2 \times Q_2 = [0, 1] \times [0] \times [0, 1], \\ P_3 \times Q_2 = [0] \times [-1, 0] \times [0, 1], P_4 \times Q_2 = [0] \times [0, 1] \times [0, 1].$$

$$c_2 \diamond c_1 = \widehat{Q_1 \times P_1} + \widehat{Q_1 \times P_2} + \widehat{Q_1 \times P_3} + \widehat{Q_1 \times P_4} + \\ \widehat{Q_2 \times P_1} + \widehat{Q_2 \times P_2} + \widehat{Q_2 \times P_3} + \widehat{Q_2 \times P_4}$$

donde

$$Q_1 \times P_1 = [1, 2] \times [-1, 0] \times [0], Q_1 \times P_2 = [1, 2] \times [0, 1] \times [0], \\ Q_1 \times P_3 = [1, 2] \times [0] \times [-1, 0], Q_1 \times P_4 = [1, 2] \times [0] \times [0, 1], \\ Q_2 \times P_1 = [0, 1] \times [-1, 0] \times [0], Q_2 \times P_2 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0], \\ Q_2 \times P_3 = [0, 1] \times [0] \times [-1, 0], Q_2 \times P_4 = [0, 1] \times [0] \times [0, 1].$$

PROPOSICIÓN 2.70. Sean c_1, c_2, c_3, c_4 cadenas, se cumple lo siguiente:

- (i) $c_1 \diamond 0 = 0 \diamond c_1 = 0$
- (ii) $c_1 \diamond (c_2 + c_4) = c_1 \diamond c_2 + c_1 \diamond c_4$, si $c_2, c_4 \in C_k^d$
- (iii) $(c_1 \diamond c_2) \diamond c_3 = c_1 \diamond (c_2 \diamond c_3)$
- (iv) Si $c_1 \diamond c_2 = 0$, entonces $c_1 = 0$ o $c_2 = 0$

$$(v) |c_1 \diamond c_2| = |c_1| \times |c_2|.$$

DEMOSTRACIÓN. Como c_1, c_2, c_3, c_4 son cadenas, podemos decir que $c_1 = \sum_{i=1}^m a_i \widehat{P}_i$, $c_2 = \sum_{j=1}^n b_j \widehat{Q}_j$, $c_3 = \sum_{k=1}^l c_k \widehat{R}_k$, $c_4 = \sum_{j=1}^n d_j \widehat{Q}_j$ y $a_i = \langle c_1, \widehat{P}_i \rangle$, $b_j = \langle c_2, \widehat{Q}_j \rangle$, $c_k = \langle c_3, \widehat{R}_k \rangle$, $d_i = \langle c_4, \widehat{Q}_i \rangle \in Z$, donde $\{\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \dots, \widehat{P}_m\}$, $\{\widehat{Q}_1, \widehat{Q}_2, \dots, \widehat{Q}_n\}$, $\{\widehat{R}_1, \widehat{R}_2, \dots, \widehat{R}_l\}$, son conjuntos finitos de cadenas elementales contenidas en $\widehat{K}_k^d, \widehat{K}_{k'}^{d'}, \widehat{K}_{k''}^{d''}$ respectivamente.

(i)

$$\begin{aligned} c_1 \diamond 0 &= \sum_{i=1}^m a_i \widehat{P}_i \diamond \sum_{j=1}^n 0 \widehat{Q}_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i 0(\widehat{P}_i \times \widehat{Q}_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n 0(\widehat{P}_i \times \widehat{Q}_j) = 0. \end{aligned}$$

De manera análoga se demuestra que $0 \diamond c_1 = 0$.

(ii)

$$\begin{aligned} c_1 \diamond (c_2 + c_4) &= \sum_{i=1}^m a_i \widehat{P}_i \diamond \left(\sum_{j=1}^n b_j \widehat{Q}_j + \sum_{j=1}^n d_j \widehat{Q}_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^m a_i \widehat{P}_i \diamond \left(\sum_{j=1}^n (b_j + d_j) \widehat{Q}_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i (b_j + d_j) (\widehat{P}_i \diamond \widehat{Q}_j). \end{aligned}$$

por propiedad distributiva se tiene que

$$\begin{aligned} c_1 \diamond (c_2 + c_4) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_i b_j + a_i d_j) (\widehat{P}_i \diamond \widehat{Q}_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j (\widehat{P}_i \diamond \widehat{Q}_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i d_j (\widehat{P}_i \diamond \widehat{Q}_j) \\ &= \sum_{i=1}^m a_i \widehat{P}_i \diamond \sum_{j=1}^n b_j \widehat{Q}_j + \sum_{i=1}^m a_i \widehat{P}_i \diamond \sum_{j=1}^n d_j \widehat{Q}_j \\ &= c_1 \diamond c_2 + c_1 \diamond c_4. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
(c_1 \diamond c_2) \diamond c_3 &= \left(\sum_{i=1}^m a_i \widehat{P}_i \diamond \sum_{j=1}^n b_j \widehat{Q}_j \right) \diamond \sum_{k=1}^l c_k \widehat{R}_k \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j \left(\widehat{P}_i \diamond \widehat{Q}_j \diamond \sum_{k=1}^l c_k \widehat{R}_k \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j (\widehat{P}_i \times \widehat{Q}_j) \diamond \sum_{k=1}^l c_k \widehat{R}_k \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l a_i b_j c_k ((\widehat{P}_i \times \widehat{Q}_j) \diamond \widehat{R}_k) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l a_i b_j c_k (\widehat{P}_i \times \widehat{Q}_j \times \widehat{R}_k).
\end{aligned}$$

por definición de producto cúbico se tiene que

$$\begin{aligned}
(c_1 \diamond c_2) \diamond c_3 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l a_i b_j c_k (\widehat{P}_i \diamond (\widehat{Q}_j \times \widehat{R}_k)) \\
&= \sum_{i=1}^m a_i \widehat{P}_i \diamond \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l b_j c_k (\widehat{Q}_j \times \widehat{R}_k) \\
&= \sum_{i=1}^m a_i \widehat{P}_i \diamond \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l b_j c_k (\widehat{Q}_j \diamond \widehat{R}_k) \\
&= \sum_{i=1}^m a_i \widehat{P}_i \diamond \left(\sum_{j=1}^n b_j \widehat{Q}_j \diamond \sum_{k=1}^l c_k \widehat{R}_k \right) \\
&= c_1 \diamond (c_2 \diamond c_3).
\end{aligned}$$

(iv) Si $c_1 \diamond c_2 = 0$,

$$\begin{aligned}
c_1 \diamond c_2 &= \sum_{i=1}^m a_i \widehat{P}_i \diamond \sum_{j=1}^n b_j \widehat{Q}_j \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j (\widehat{P}_i \times \widehat{Q}_j) \\
&= 0 \iff a_i b_j = 0
\end{aligned}$$

esto solo se cumple si $a_i = 0$ o $b_j = 0$ entonces $c_1 = 0$ o $c_2 = 0$.

(v) $c_1 \diamond c_2 \in C_{k+k'}^{d+d'}$

$$\begin{aligned} |c_1| \times |c_2| &= \bigcup \{P_i \in K_k^d / c_1(P_i) \neq 0\} \times \bigcup \{Q_j \in K_{k'}^{d'} / c_2(Q_j) \neq 0\} \\ &= \bigcup \{(P_i \times Q_j) / P_i \in K_k^d, Q_j \in K_{k'}^{d'}, c_1(P_i) \neq 0 \text{ y } c_2(Q_j) \neq 0\} \\ &= \bigcup \{(P_i \times Q_j) / P_i \in K_k^d, Q_j \in K_{k'}^{d'} a_i \neq 0 \text{ y } b_j \neq 0\}. \end{aligned}$$

Como $a_i \neq 0$ y $b_j \neq 0 \iff a_i b_j \neq 0$ y sea h un cubo elemental tal que $h \in K_{k+k'}^{d+d'}$, h se puede escribir como el producto de dos cubos elementales P y Q tales que $P \in K_k^d$ y $Q \in K_{k'}^{d'}$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \bigcup \{(P_i \times Q_j) / P_i \in K_k^d, Q_j \in K_{k'}^{d'} a_i \neq 0 \text{ y } b_j \neq 0\} &= \bigcup \{h \in K_{k+k'}^{d+d'} / a_i b_j \neq 0\} \\ &= \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j (\widehat{P_i \times Q_j}) \right| = \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j (\widehat{P_i} \diamond \widehat{Q_j}) \right| = |c_1 \diamond c_2|. \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.71. Sea \hat{Q} una cadena cúbica elemental de R^d con $d > 1$, entonces existe una única cadena cúbica elemental \hat{I} y \hat{P} con $\text{emb}(I) = 1$ y $\text{emb}(P) = d-1$ tal que $\hat{Q} = \hat{I} \diamond \hat{P}$.

EJEMPLO 2.72. Para $Q = [2, 3] \times [1, 2] \times [0, 1]$ los cubos elementales que satisfacen la proposición anterior son $I = [2, 3]$ y $P = [1, 2] \times [0, 1]$, donde la $\dim(I) = 1$ y la $\dim(P) = 2$. Para $Q = [-1] \times [0, 1] \times [2]$ los cubos elementales que satisfacen $\hat{Q} = \hat{I} \diamond \hat{P}$, con $\text{emb}(I) = 1$ y $\text{emb}(P) = 2$ son $I = [-1]$ y $P = [0, 1] \times [2]$, donde $\dim(I) = 0$ y la $\dim(P) = 1$.

3.3. Cadenas cúbicas en un conjunto cúbico.

DEFINICIÓN 2.73. Sea X contenida en R^d un conjunto cúbico. Se define $\widehat{K}_k := \{\hat{Q} / Q \in K_k(X)\}$, donde $C_k(X)$ es el subgrupo de C_k^d generado por los elementos de $\widehat{K}_k(X)$ y es el conjunto de las K -cadenas de X . Como $\widehat{K}_k(X)$ es base de $C_k(X)$, dado $c \in C_k(X)$ tenemos la descomposición $c = \sum_{i=1}^m a_i \widehat{Q_i}$ tal que $Q_i \in K_k(X)$, con $a_i := c(Q_i) \forall 1 \leq i \leq m$, es decir, $c = \{\sum_{i=1}^m a_i \widehat{Q_i} / Q_i \in K_k^d \text{ y } Q_i \subset X\}$, esto pasa si y sólo si $\forall Q \subset K_k^d / c(Q) = a_i \neq 0$ se tiene que $\bigcup Q \subset X$, es decir, $|c| \subset X$, entonces

$$C_k(X) = \{c \in C_k^d / |c| \subset X\}.$$

PROPOSICIÓN 2.74. $\forall c \in C_k(X)$, $c = \sum_{j=1}^m \langle c, \widehat{Q_j} \rangle \widehat{Q_j}$.

DEMOSTRACIÓN. Como $c \in C_k(X)$, $c = \sum_{j=1}^m a_j \hat{Q}_j$ donde $Q_j \subset X$ para $1 \leq j, k \leq m$ y $Q_j \in K_k^d$, $\langle c, \hat{Q}_j \rangle = \langle \sum_{j=1}^m a_j \hat{Q}_j, \sum_{k=1}^m b_k \hat{Q}_k \rangle$ donde se cumple que:

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$$

Luego por definicion,

$$\langle \sum_{j=1}^m a_j \hat{Q}_j, \sum_{k=1}^m b_k \hat{Q}_k \rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_j b_k = a_j$$

entonces

$$c = \sum_{j=1}^m a_j \hat{Q}_j = \sum_{j=1}^m \langle c, \hat{Q}_j \rangle \hat{Q}_j.$$

□

EJEMPLO 2.75. Sea $c = A + B - C - D$, donde $A = [-1] \times [0, 1]$, $B = [-1, 0] \times [1]$, $C = [0] \times [0, 1]$, $D = [-1, 0] \times [0]$.

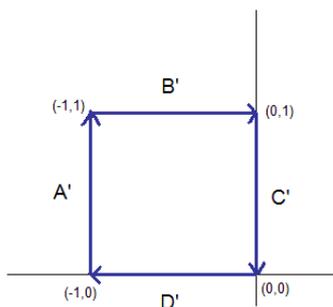


FIGURA 2.4. Frontera de cuadrado unidad $[-1, 0] \times [0, 1]$

Para el ejemplo de la cadena anterior c , los signos están relacionados con la dirección en las flechas, si la flecha va de un extremo inferior a uno superior se representa con un signo positivo (si va de izquierda a derecha o de abajo hacia arriba), mientras que al contrario se representa con un signo negativo.

3.4. El operador frontera.

DEFINICIÓN 2.76. Dado $k \in \mathbb{Z}$, el operador cúbico frontera $\partial_k : C_k^d \rightarrow C_{k-1}^d$ es una aplicación que cumple lo siguiente:

- (i) $\partial_k(0) := 0$
(ii) Si $\widehat{Q} \in \widehat{K}_k^1$, se tiene que Q es un intervalo elemental y $Q = [l] \in K_0^1$ o $Q = [l, l+1] \in K_1^1$ para algún $l \in Z$. Se define

$$\partial_k Q := \begin{cases} 0 & \text{si } Q = [l] \\ \widehat{[l+1]} - \widehat{[l]} & \text{si } Q = [l, l+1] \end{cases}$$

- (iii) si $\widehat{Q} \in \widehat{K}_k^d$ donde $d > 1$, por la proposición 2.71 existen unas únicas cadenas cúbicas elementales \widehat{I}, \widehat{P} con $emb(I) = 1$ y $emb(P) = d - 1$ tal que $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}$, con lo que se define

$$\partial_k \widehat{Q} := \partial_{k_1} \widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{dim(I)} \widehat{I} \diamond \partial_{k_2} \widehat{P}$$

donde $k_1 = dim(I)$ y $k_2 = dim(P)$.

Extendiendo la definición anterior por linealidad se tiene para $c = a_1 \widehat{Q}_1 + \dots + a_m \widehat{Q}_m$ lo siguiente:

$$\partial_k c := a_1 \partial_k \widehat{Q}_1 + \dots + a_m \partial_k \widehat{Q}_m.$$

EJEMPLO 2.77. Sea $Q = [e, e+1] \times [d]$, $I = [e, e+1]$, $P = [d]$, $k_1 = dim I = 1$, $k_2 = dim P = 0$

$$\begin{aligned} \partial_k \widehat{Q} &:= \partial_{k_1} \widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{dim I} \widehat{I} \diamond \partial_{k_2} \widehat{P} \\ &= \partial_1 \widehat{[e, e+1]} \diamond \widehat{[d]} + (-1)^1 \widehat{[e, e+1]} \diamond \partial_0 \widehat{[d]} \\ &= (\widehat{[e+1]} - \widehat{[e]}) \diamond \widehat{[d]} - \widehat{[e, e+1]} \diamond 0 \\ &= \widehat{[e+1]} \diamond \widehat{[d]} - \widehat{[e]} \diamond \widehat{[d]} \\ &= \widehat{[e+1]} \times \widehat{[d]} - \widehat{[e]} \times \widehat{[d]}. \end{aligned}$$

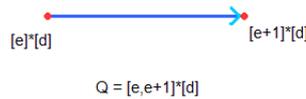


FIGURA 2.5

Sea $Q = [d] \times [e, e+1]$, $P = [e, e+1]$, $I = [d]$, $k_1 = dim I = 0$, $k_2 = dim P = 1$

$$\begin{aligned}
\partial_k \widehat{Q} &:= \partial_{k_1} \widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim I} \widehat{I} \diamond \partial_{k_2} \widehat{P} \\
&= \partial_0 \widehat{[d]} \diamond \widehat{[e, e+1]} + (-1)^0 \widehat{[d]} \diamond \partial_1 \widehat{[e, e+1]} \\
&= 0 \diamond \widehat{[e, e+1]} + \widehat{[d]} \diamond (\widehat{[e+1]} - \widehat{[e]}) \\
&= \widehat{[d]} \diamond \widehat{[e+1]} - \widehat{[d]} \diamond \widehat{[e]} \\
&= (\widehat{[d]} \times \widehat{[e+1]}) - (\widehat{[d]} \times \widehat{[e]}).
\end{aligned}$$

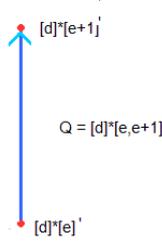


FIGURA 2.6

Sea $c_1 = \widehat{[-1, 0]} \times \widehat{[0]} + \widehat{[0, 1]} \times \widehat{[0]} + \widehat{[0]} \times \widehat{[-1, 0]} + \widehat{[0]} \times \widehat{[0, 1]}$ y $c_2 = \widehat{[0]} \times \widehat{[0, 1]} + \widehat{[-1, 0]} \times \widehat{[0]} + \widehat{[0, 1]} \times \widehat{[0]}$

utilizando el resultado del ejemplo anterior y el hecho de que:

$\partial_k c := a_1 \partial_k \widehat{Q}_1 + \dots + a_m \partial_k \widehat{Q}_m$, se tiene que :

$$\begin{aligned}
\partial_k(c_1) &= \partial_k \widehat{[-1, 0]} \times \widehat{[0]} + \partial_k \widehat{[0, 1]} \times \widehat{[0]} + \partial_k \widehat{[0]} \times \widehat{[-1, 0]} + \partial_k \widehat{[0]} \times \widehat{[0, 1]} \\
&= (\widehat{[0]} \times \widehat{[0]}) - (\widehat{[-1]} \times \widehat{[0]}) + (\widehat{[1]} \times \widehat{[0]}) - (\widehat{[0]} \times \widehat{[0]}) + \\
&\quad (\widehat{[0]} \times \widehat{[0]}) - (\widehat{[0]} \times \widehat{[-1]}) + (\widehat{[0]} \times \widehat{[1]}) - (\widehat{[0]} \times \widehat{[0]}) \\
&= -(\widehat{[-1]} \times \widehat{[0]}) + (\widehat{[1]} \times \widehat{[0]}) - (\widehat{[0]} \times \widehat{[-1]}) + (\widehat{[0]} \times \widehat{[1]}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_k(c_2) &= \partial_k \widehat{[-1, 0]} \times \widehat{[0]} + \partial_k \widehat{[0, 1]} \times \widehat{[0]} + \partial_k \widehat{[0]} \times \widehat{[0, 1]} \\
&= (\widehat{[0]} \times \widehat{[0]}) - (\widehat{[-1]} \times \widehat{[0]}) + (\widehat{[0]} \times \widehat{[0]}) - (\widehat{[1]} \times \widehat{[0]}) + (\widehat{[0]} \times \widehat{[1]}) - (\widehat{[0]} \times \widehat{[0]}) \\
&= -(\widehat{[-1]} \times \widehat{[0]}) - (\widehat{[1]} \times \widehat{[0]}) + (\widehat{[0]} \times \widehat{[1]}) + (\widehat{[0]} \times \widehat{[0]}).
\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2.78. Si sabemos que $c \in C_k^d$, ya que el dominio de ∂_k consiste en las k -cadenas, entonces es redundante escribir $\partial_k(c)$, por ello para simplificar notación se usara ∂ en vez de ∂_k .

PROPOSICIÓN 2.79. Sean c y c' cadenas cúbicas, entonces $\partial(c \diamond c') = \partial c \diamond c' + (-1)^{\dim(c)} c \diamond \partial c'$.

COROLARIO 2.80. Si Q_1, Q_2, \dots, Q_m son cubos elementales, entonces $\partial(\widehat{Q_1} \diamond \widehat{Q_2} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_m}) = \sum_{j=1}^m (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} \dim Q_i} \widehat{Q_1} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_{j-1}} \diamond \partial \widehat{Q_j} \diamond \widehat{Q_{j+1}} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_m}$.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a usar hipótesis inductiva, lo anterior se cumple para $k = 1$ y para $k = 2$, para uno y dos cubos elementales. Supongamos que lo anterior se cumple para el caso k y demostremos que se cumple para $k + 1$. Veamos que:

$$\begin{aligned} \partial(\widehat{Q_1} \diamond \widehat{Q_2} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_{k+1}}) &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} \dim Q_i} \widehat{Q_1} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_{j-1}} \diamond \partial \widehat{Q_j} \diamond \widehat{Q_{j+1}} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_{k+1}} \\ \partial(\widehat{Q_1} \diamond \widehat{Q_2} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_{k+1}}) &= \partial(\widehat{Q_1} \diamond \widehat{Q_2} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_k}) \diamond \widehat{Q_{k+1}} + \\ &\quad (-1)^{\dim(\widehat{Q_1} \diamond \widehat{Q_2} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_k})} \widehat{Q_1} \diamond \widehat{Q_2} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_k} \diamond \partial \widehat{Q_{k+1}} \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} \dim Q_i} \widehat{Q_1} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_{j-1}} \diamond \partial \widehat{Q_j} \diamond \widehat{Q_{j+1}} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_{k+1}} + \\ &\quad (-1)^{\dim(\widehat{Q_1} \diamond \widehat{Q_2} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_k})} \widehat{Q_1} \diamond \widehat{Q_2} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_k} \diamond \partial \widehat{Q_{k+1}} \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} \dim Q_i} \widehat{Q_1} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_{j-1}} \diamond \partial \widehat{Q_j} \diamond \widehat{Q_{j+1}} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_k} \diamond \widehat{Q_{k+1}} + \\ &\quad (-1)^{\sum_{i=1}^k \dim Q_i} \widehat{Q_1} \diamond \widehat{Q_2} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_k} \diamond \partial \widehat{Q_{k+1}} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} \dim Q_i} \widehat{Q_1} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_{j-1}} \diamond \partial \widehat{Q_j} \diamond \widehat{Q_{j+1}} \diamond \dots \diamond \widehat{Q_k} \diamond \widehat{Q_{k+1}}. \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.81. Sea $Q \in R^d$ un cubo elemental n -dimensional con una descomposición en cubos elementales dados por $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d \in R^d$ y, sean los intervalos 1-dimensionales en esta descomposición iguales a $I_{i1}, I_{i2}, \dots, I_{in}$ con $I_{ij} = [k_j, k_j + 1]$. Para

$j = 1, 2, \dots, n$ sea

$$Q_j^- := I_1 \times \cdots \times I_{ij-1} \times [k_j] \times I_{ij+1} \times \cdots \times I_d$$

$$Q_j^+ := I_1 \times \cdots \times I_{ij-1} \times [k_j + 1] \times I_{ij+1} \times \cdots \times I_d$$

denotan las caras primarias de Q . Entonces

$$\partial \widehat{Q} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (\widehat{Q}_j^+ - \widehat{Q}_j^-).$$

DEMOSTRACIÓN. Por el corolario 2.80,

$$\begin{aligned} \partial \widehat{Q} &= \partial(I_1 \times \widehat{I_2} \times \cdots \times I_d) \\ &= \partial(\widehat{I_1} \diamond \widehat{I_2} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_d}) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} \dim I_i} \widehat{I_1} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_{j-1}} \diamond \partial \widehat{I_j} \diamond \widehat{I_{j+1}} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_d} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} \dim I_i} \widehat{I_1} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_{j-1}} \diamond (\widehat{[K_{j+1}]} - \widehat{[K_j]}) \diamond \widehat{I_{j+1}} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_d} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} \dim I_i} \widehat{I_1} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_{j-1}} \diamond \widehat{[K_{j+1}]} \diamond \widehat{I_{j+1}} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_d} \\ &\quad - \sum_{j=1}^n (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} \dim I_i} \widehat{I_1} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_{j-1}} \diamond \widehat{[K_j]} \diamond \widehat{I_{j+1}} \diamond \cdots \diamond \widehat{I_d} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} I_1 \times \cdots \times I_{ij-1} \times \widehat{[K_{j+1}]} \times I_{ij+1} \times \cdots \times I_d - \\ &\quad \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} I_1 \times \cdots \times I_{ij-1} \times \widehat{[K_j]} \times I_{ij+1} \times \cdots \times I_d \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (\widehat{Q}_j^+ - \widehat{Q}_j^-). \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.82. Sea $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_m$ un cubo elemental de dimensión k , demuestre que el soporte de cada término diferente de cero, en la suma del corolario 2.80, es la unión de dos caras $(k-1)$ dimensionales de Q .

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 2.81 $\partial\widehat{Q} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (\widehat{Q}_j^+ - \widehat{Q}_j^-)$, luego

$$\begin{aligned} |(-1)^{j-i} (\widehat{Q}_j^+ - \widehat{Q}_j^-)| &= \bigcup \{Q \in K_k^d / (-1)^{j-1} Q_j^+ - Q_j^-(Q) \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup \{Q \in K_k^d / (-1)^{j-1} (Q_j^+(Q)) - ((-1)^{j-1} Q_j^-(Q)) \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup \{Q \in K_k^d / Q = Q_j^+ \circ Q = Q_j^-\} = Q_j^+ \cup Q_j^-. \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.83.

$$\partial \circ \partial = 0.$$

PROPOSICIÓN 2.84. Para toda cadena $c \in C_k^d$, se cumple que $|\partial c| \subset |c|$.

PROPOSICIÓN 2.85. Sea $X \subset R^d$ un conjunto cúbico, entonces $\partial_k(C_k(X)) \subset C_{k-1}(X)$.

DEFINICIÓN 2.86. El operador frontera del conjunto cúbico X es definido como $\partial_k(X) : C_k(X) \longrightarrow C_{k-1}(X)$ que se obtiene por la restricción de $\partial_k : C_k^d \longrightarrow C_{k-1}^d$ a $C_k(X)$.

DEFINICIÓN 2.87. La cadena cúbica compleja para el conjunto cúbico X en R^d es $C(X) := \{C_k(X), \partial_k(X)\}$, $k \in Z$, donde $C_k(X)$ son el grupo de k -cadenas cúbicas generadas por $K_k(X)$ y $\partial_k(X)$ es el operador frontera cúbico restringido a X .

3.5. Homología de conjuntos cúbicos.

DEFINICIÓN 2.88. Sea X en R^d un conjunto cúbico, una k -cadena $z \in C_k(X)$ es llamada un ciclo en X si $\partial z = 0$, donde definimos $Z_k(X) := \ker \partial_k(X) = C_k(X) \cap \ker \partial_k \subset C_k(X)$.

DEFINICIÓN 2.89. Una k -cadena $z \in C_k(X)$ es llamada una frontera en X si existe un $c \in C_{k+1}(X)$, donde $\partial c = z$. Luego $B_k(X) := \text{imag}(\partial_{k+1}(X)) = \partial_{k+1}(C_{k+1}(X)) \subset C_k(X)$.

Sea z una frontera en X , se tiene que existe un $c \in C_{k+1}(X)$ donde $\partial c = z$, usando el hecho de que $\partial \circ \partial = 0 \implies \partial \circ \partial(c) = \partial z = 0$, por lo tanto toda frontera es un ciclo y así $B_k(X)$ es un subgrupo de $Z_k(X)$.

DEFINICIÓN 2.90. Dos ciclos $z_1, z_2 \in Z_k(X)$ son homólogos si $z_1 - z_2 \in B_k(X)$ y el k -ésimo grupo de homología de X es el grupo cociente:

$$H_k(X) := \frac{Z_k(X)}{B_k(X)}.$$

DEFINICIÓN 2.91. La homología de X es la colección de todos los grupos de homología de X denotada por

$$H_*(X) := \{H_k(X)\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

DEFINICIÓN 2.92. Dado $z \in C_k(X)$, $[z]_X \in H_k(X)$ es la clase de homología de z en X . Para simplificar notación se usara $[z] := [z]_X$.

3.6. Componentes conexas y $H_0(X)$.

DEFINICIÓN 2.93. Para un espacio topológico X y $x \in X$, la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x es un subconjunto conexo de X , estos son llamados las componentes conexas de x en X y se denotara por $cc_X(x)$.

TEOREMA 2.94. $\forall x, y \in X$ se tiene que:

$$cc_X(x) = cc_X(y) \text{ ó } cc_X(x) \cap cc_X(y) = \emptyset.$$

PROPOSICIÓN 2.95. Para cada $x \in X$ existe un vértice $V \in K_0(X)$ tal que $cc_X(x) = cc_X(V)$.

COROLARIO 2.96. Un conjunto cúbico tiene solo un número finito de componentes conexas.

DEFINICIÓN 2.97. Una secuencia de vértices $V_0, V_1, \dots, V_n \in K_0(X)$, es un camino de aristas en X , si existen aristas $E_1, \dots, E_n \in K_1(X)$ tal que V_{i-1}, V_i son dos caras de E_i para $i = 1, 2, \dots, n$.

Para $V, W \in K_0(X)$ escribimos $V \sim_X W$ si existe un camino de aristas $V_0, V_1, \dots, V_n \in K_0(X)$ en X tal que $V = V_0$ y $W = V_n$. Decimos que X esta conectada por aristas si $V \sim_X V'$ para cualquier $V, V' \in K_0(X)$.

DEFINICIÓN 2.98. Una secuencia de vértices $V_1, \dots, V_{n+1} \in K_0(X)$, es un camino conexo cerrado en X , si es un camino de aristas y además $V_1 = V_{n+1}$.

OBSERVACIÓN 2.99. En lo que sigue, $[a_1 a_2 \dots a_n]^T$, representara a la traspuesta de un vector de 1-columna por n -filas con a_i en la i -ésima posición, $1 \leq i \leq n$.

PROPOSICIÓN 2.100. *Sea X un conjunto cúbico formado por n vértices $V_1, \dots, V_n, V_{n+1} \in K_0(X)$ que forman un camino conexo cerrado, entonces $H_1(X)$ tiene un solo elemento como base.*

DEMOSTRACIÓN. $K_0(X) = \{V_1 = [10 \dots 0]^T, V_2 = [01 \dots 0]^T, \dots, V_{n+1} = V_1\}$ donde $V_i = [0 \dots 1 \dots 0]^T$ es un vector de n filas por 1 columna, con 1 en la i -ésima fila y 0 en el resto.

$K_1(X) = \{A_1 = [10 \dots 0]^T, A_2 = [01 \dots 0]^T, \dots, A_n = [0 \dots 01]^T\}$ donde $A_i = [0 \dots 1 \dots 0]^T$ es un vector de n filas por una columna, con 1 en la i -ésima fila y 0 en el resto.

Sea $z \in C_1(X)$, $z = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$ con $\alpha_i \in \mathbb{Z}$.

$\partial_1(z) = \sum_{i=1}^n \partial_1 \alpha_i A_i$ por ser ∂_1 transformación lineal.

Ya que $V_1, \dots, V_n \in K_0(X)$ es un camino de aristas donde $A_i = [V_i, V_{i+1}]$ y $A_n = [V_n, V_{n+1}] = [V_n, V_1]$, con $1 \leq i \leq n$.

$\partial_1(A_i) = \partial_1([V_i, V_{i+1}]) = V_{i+1} - V_i = [0 \dots 1 - 1 \dots 0]$ con 1 en la i -ésima fila y -1 en la $i + 1$ -ésima fila

$\partial_1(A_n) = \partial_1([V_n, V_1]) = V_1 - V_n = [10 \dots - 1]$

Luego se tiene

$$\partial_1(z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n - \alpha_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} - \alpha_n \end{pmatrix}$$

Si $\partial_1(z) = 0$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} \alpha_n - \alpha_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} - \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = \alpha_n, \alpha_1 = \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} = \alpha_n$, luego sea $\alpha = \alpha_1$ se tiene que $z = \alpha[11 \dots 1]^T$ vector de n -filas por 1-columna con $\alpha \in Z_2$, entonces $\ker \partial_1^X = \alpha[11 \dots 1]^T$.

$H_1(X) = Z_1(X)/B_1(X) = \frac{\ker \partial_1^X}{\partial_2(C_2(X))} = \frac{\ker \partial_1^X}{\partial_2(0)} = \frac{\alpha[11 \dots 1]^T}{0} = \alpha[[1 - 1 - 11]^T]$, por ser ∂_2 una transformación lineal y $C_2(X) = 0$.

Como el único elemento de la base de $H_1(X)$ es $[[1 - 1 - 11]^T]$, Se tiene entonces, que los conjuntos cúbicos con vértices que forman un camino conexo cerrado, poseen un solo elemento en la base para $H_1(X)$. \square

COROLARIO 2.101. *El número de componentes conexas de un conjunto cúbico X , de n vértices, es igual a n .*

DEMOSTRACIÓN. $K_0(X) = \{V_1, V_2, \dots, V_n\} = \{[10 \dots 0]^T, [01 \dots 0]^T, \dots, [00 \dots 1]^T\}$ elementos base de $K_0(X)$

$H_0(X) = \frac{Z_0(X)}{B_0(X)} = \frac{\ker \partial_0^X}{\partial_1(C_1(X))}$ Como $C_1(X) = 0$ y el operador frontera es una transformación lineal $\partial_1(C_1(X)) = \partial_1(0) = 0$, por otra parte como $\text{img}(\partial_0) = 0$, entonces $\ker \partial_0^X = C_0(X)$

Sea $c \in C_0(X)$, $c = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$, $= [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]^T$ donde $\alpha_i \in Z_2$ con $1 < i < n$

$$H_0(X) = \frac{\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n}{0} = \frac{\alpha_1 [10 \dots 0]^T + \alpha_2 [01 \dots 0]^T + \dots + \alpha_n [00 \dots 1]^T}{0} =$$

$$\alpha_1 [10 \dots 0]^T + \alpha_2 [01 \dots 0]^T + \dots + \alpha_n [00 \dots 1]^T$$

donde $V_i + V_j \neq 0 \forall i \neq j$, es decir $V_i + V_j$ no pertenece a $B_0(X)$, luego ningún par de vértices son homólogos por lo que la base para $H_0(X)$ son los n vértices, por lo tanto n es el número de componentes conexas del complejo cúbico de n vértices. \square

PROPOSICIÓN 2.102. (i) *Cada cubo elemental esta conectado por aristas.*

(ii) *Si X e Y son conjuntos cúbicos conectados por aristas y $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces $X \cup Y$ es conectado por aristas.*

PROPOSICIÓN 2.103. *Asumamos que $V \sim_X W$ para algunos $V, W \in K_0(X)$, entonces existe una cadena $c \in C_1(X)$ tal que $|c|$ es conexo y $\partial c = \hat{W} - \hat{V}$.*

DEFINICIÓN 2.104. Para $x \in X$ se define la componente conectada por aristas, como la unión de todo subconjunto cúbico de X conectado por aristas que contiene a x . Denotamos esto por $ecc_X(x)$.

PROPOSICIÓN 2.105. Para algún $x \in X$, $ecc_X(x)$ es conectado por arista.

PROPOSICIÓN 2.106. Para algún $x, y \in X$ se tiene que $ecc_X(x) = ecc_X(y)$ ó $ecc_X(x) \cap ecc_X(y) = \emptyset$.

TEOREMA 2.107. Un conjunto cúbico X es conexo \Leftrightarrow es conectado por aristas.

COROLARIO 2.108. Si X es cúbico, entonces para cada $x \in X$ sus componentes conexas y componentes conectadas por aristas coinciden.

LEMA 2.109. Asumamos que X es un conjunto cúbico y X_1, X_2, \dots, X_n son sus componentes conexas. Si $c_i \in C_k(X_i)$ son cadenas k -dimensionales entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i \right| = \bigcup_{i=1}^n |c_i|.$$

TEOREMA 2.110. Sea X un conjunto cúbico. Entonces $H_0(X)$ es un grupo libre abeliano. Mas aún, si $\{P_i/i = 1, \dots, n\}$ es una colección de vértices en X consistente de un vértice de cada componente conexa de X , entonces $\{\widehat{[P_i]} \in H_0(X)/i = 1, \dots, n\}$ forman una base para $H_0(X)$.

3.7. Colapsos elementales. El colapso elemental es un proceso en los cubos elementales análogo al colapso simplicial que se da en los simplices. Consiste en un método utilizado para la reducción en el número de cubos elementales de un complejo cúbico X , que facilite los cálculos y que tenga la misma información homológica que la del complejo cúbico X .

DEFINICIÓN 2.111. Sea X un conjunto cúbico y sea $Q \in K(X)$. Si Q no es una cara propia de algún $P \in K(X)$, entonces esta es una cara maximal en X . $K_{max}(X)$ es el conjunto de las caras maximales en X .

Una cara, que es cara propia de exactamente un cubo elemental en X , es una cara libre en X .

LEMA 2.112. Dado un conjunto cúbico X , $Q \in K(X)$, una cara libre en X y asumamos que $Q < P \in K(X)$. Entonces $P \in K_{max}(X)$ y $Q = \dim(P) - 1$.

DEFINICIÓN 2.113. Sea Q una cara libre en X y sea P el único cubo en $K(X)$ tal que Q es una cara propia de P . Sea $K'(X) := K(X) - \{Q, P\}$. Se define:

$$X' := \bigcup_{R \in K'(X)} R$$

entonces X' es un espacio cúbico obtenido de X vía colapso elemental de P por Q .

PROPOSICIÓN 2.114. Si X' es un espacio cúbico obtenido de X vía un colapso de P por Q entonces $K(X') = K'(X)$.

LEMA 2.115. Asumamos que X es un conjunto cúbico y X' es obtenido de X vía colapso elemental de $P_0 \in K_k(X)$ por $Q_0 \in K_{k-1}(X)$. Entonces

- (i) $\{c \in C_k(X) / \partial c \in C_{k-1}(X')\} \subset C_k(X')$.
- (ii) Para cada $c \in C_{k-1}(X)$, existe $c' \in C_{k-1}(X')$ tal que $c - c' \in B_{k-1}(X)$.

TEOREMA 2.116. Asumamos que X es un conjunto cúbico y que X' es obtenido vía colapso elemental de $P_0 \in K_k(X)$ por $Q_0 \in K_{k-1}(X)$. Entonces

$$H_*(X) \cong H_*(X').$$

COROLARIO 2.117. Sea $Y \subset X$ conjuntos cúbicos. Además asumamos que Y puede ser obtenido de X vía una serie de colapsos elementales, entonces

$$H_*(X) \cong H_*(Y).$$

4. Cohomología de Čech

DEFINICIÓN 2.118. Sea X un espacio topológico, y $Q = \{Q_i\}$ un cubrimiento abierto de X . Se define el nervio de Q o complejo simplicial $N(Q)$, de la siguiente forma:

- (1) Hay un vértice para cada Q_i
- (2) Si $Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$ entonces existe un eje entre Q_i y Q_j
- (3) En general, existe un k -simplex para cada $k+1$ elementos $\{Q_0 \dots Q_k\}$ el subconjunto $Q_0 \cap \dots \cap Q_k \neq \emptyset$.

DEFINICIÓN 2.119. Para un cubrimiento Q de X dado, se define la cohomología Čech de X , con valores en un grupo G , como la cohomología simplicial del nervio, es decir

$$\hat{H}^k(Q, G) = H^k(N(Q), G) = H_k(\text{Hom}(N(Q), G)).$$

Imágenes digitales

En este capítulo se presentan algunos conceptos para el estudio de las imágenes digitales $2D$ y $3D$, como malla, conectividad y adyacencia, los cuales permiten obtener información importante que se encuentra en la misma.

El estudio de las imágenes digitales, puede realizarse asociando a ésta, un conjunto cúbico, y por medio de la homología se puede destacar información topológica de la imagen, como el número de componentes conexas.

Optimizar el tiempo en el análisis digital de imágenes, es de gran interés, esto se puede conseguir en ciertos casos, utilizando sólo el borde de los objetos presentes en la imagen, ya que se reduce el número de píxeles a considerar.

1. Imagen digital 2D

DEFINICIÓN 3.1. Sean $m, n > 0$ enteros fijos. Una malla $2D$ es un subconjunto discreto $G_{m,n} \subset \mathbb{R}^2$, que se define como:

$$G_{m,n} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq x \leq m, 1 \leq y \leq n\}.$$

DEFINICIÓN 3.2. Un píxel $c(x, y)$ es un cuadrado unitario con centro $(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2})$ y vértices (x, y) , $(x, y - 1)$, $(x + 1, y - 1)$, $(x + 1, y)$, donde (x, y) es un elemento de una malla $2D$ $G_{m,n}$, y representa la posición del píxel $c(x, y)$.

En lo que sigue, usaremos el término píxel para referirnos tanto al punto de la malla (x, y) como al cuadrado determinado por él.

DEFINICIÓN 3.3. Sea $G_{m,n}$ una malla $2D$ y $[N]$ el conjunto de valores $\{0, 1, \dots, N - 1\}$. Una imagen digital $2D$ de N -colores, es una función $I : G_{m,n} \rightarrow [N]$.

OBSERVACIÓN 3.4. Para diferenciar y apreciar mejor una imagen digital, los valores que toman los píxeles, son asociados a ciertos colores, por ejemplo si tenemos una imagen de 4 colores, cada número natural se puede asociar a cuatro colores distintos como el rosado, morado, negro y azul, sin embargo esta asignación no se hace de manera biunívoca.

Una imagen digital se dice que es binaria, cuando $N = 2$, y en ese caso asignamos blanco a un píxel con valor 1 y negro a un píxel con valor 0, donde el blanco representa el fondo de la imagen y el negro representa al objeto dentro de la imagen.

Dada una imagen digital $2D$, podemos asociarle una matriz de tamaño $m \times n$, donde la entrada ij de la matriz, corresponde con el valor de la imagen en el píxel (i, j) , esta asignación constituye una correspondencia uno a uno entre el espacio de todas las imágenes digitales $2D$ de tamaño $m \times n$ y las matrices de igual tamaño. Por ejemplo en la figura 3.1, tenemos la representación matricial de una imagen digital binaria con valores 0 o 1 y, la misma imagen asociada a los colores blanco o negro.

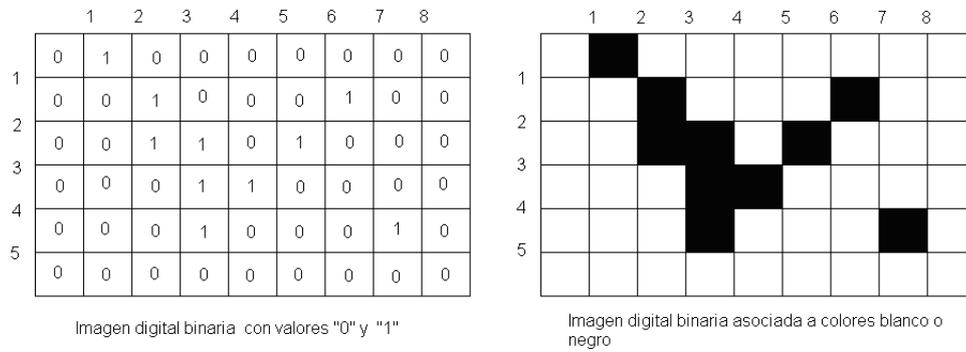


FIGURA 3.1

En el estudio de imágenes digitales, usualmente se desea trabajar con imágenes binarias, pues esto economiza los cálculos computacionales. Por ello, en éste trabajo nos enfocamos en el estudio de las propiedades topológicas usando la teoría de homología de complejos cúbicos, donde es necesario llevar una imagen digital con mas de dos valores digitales, a una imagen digital binaria, y esto se hace mediante el proceso de umbralización, el cual considera ciertos valores de la imagen que son transformados en uno, mientras que el resto es llevado a cero.

DEFINICIÓN 3.5. Sea $I : G_{m,n} \rightarrow [N]$ una imagen digital $2D$, consideremos una función $g : [N] \rightarrow [2]$, la umbralización de I mediante g es la imagen binaria que resulta de componer I con g .

OBSERVACIÓN 3.6. De la definición se sigue que la umbralización de la imagen depende de la función g escogida, esta puede ser tan arbitraria como se quiera, pero usualmente se

consideran funciones del tipo:

$$g_t(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq t, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Donde $0 \leq t \leq N$ es el parámetro de la umbralización, en pocas palabras, la umbralización de una imagen mediante funciones del tipo g_t , lo que hace es producir una imagen binaria, que transforma a los píxeles con valor digital menor que t en negro y al resto en blanco.

DEFINICIÓN 3.7. Consideremos el espacio \mathbb{R}^2 y sea $d > 0$ un número real cualquiera. Se define la retícula de tamaño $m \times n$ y ancho d , como el conjunto de puntos

$$R_{m,n}^d = \{(id, jd) \in \mathbb{R}^2, i, j \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}.$$

Una retícula $R_{m,n}^d$ determina una cuadrícula al considerar todos los segmentos de líneas paralelas a los ejes, que contienen a los puntos de $R_{m,n}^d$.

Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto y sean $m = [\max\{x : (x, y) \in S\}]$, $n = [\max\{y : (x, y) \in S\}]$ fijamos $d > 0$ un valor real arbitrario y construimos la retícula $R_{m,n}^d$.

DEFINICIÓN 3.8. Definimos la imagen digitalizada de S como $I : R_{m,n}^d \rightarrow [2]$ dada por:

$$I(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } c(x, y) \cap S \neq \emptyset, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Donde $c(x, y)$ es el cuadrado de la retícula que contiene al punto (x, y) .

OBSERVACIÓN 3.9. En otras palabras, si un punto del objeto cae en el interior de un cuadrado de la retícula coloreamos el cuadrado de negro.

EJEMPLO 3.10. Veamos un ejemplo de la digitalización de una imagen. Supongamos que la figura 3.2, muestra una línea continua en el espacio euclideo \mathbb{R}^2 , esta línea por ser continua tiene un número infinito de valores y los computadores tienen una capacidad limitada y finita para almacenar información en su memoria. Por ello si quisiéramos sacar una imagen digital de esa línea tendríamos que digitalizarla, intuitivamente esto consiste en colocar una retícula sobre el espacio como en la figura 3.2, y si la línea pasa por un cuadro de la red o de la retícula en esa figura, entonces todo el cuadrado tomara el valor 0 o será pintado de negro, como se puede apreciar en la figura 3.3.

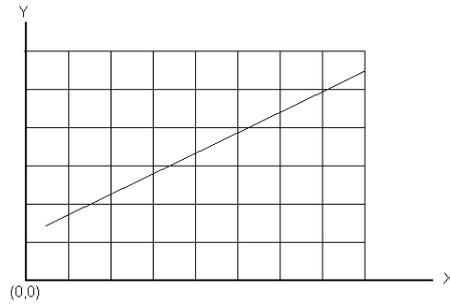


FIGURA 3.2

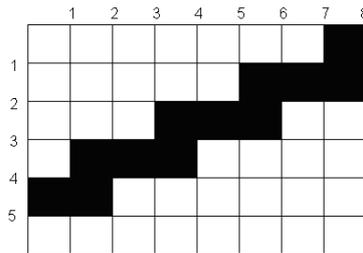


FIGURA 3.3

OBSERVACIÓN 3.11. Al digitalizar el espacio, esta la idea de asemejar cada píxel, con un punto en el espacio R^2 , mientras mas pequeños sean los píxeles, es decir, mientras la malla considere un número mayor de valores digitales, más se aproximará un píxel a un punto del espacio R^2 . Por ejemplo si consideramos una malla con mas valores que la presentada en la figura 3.3, y hacemos el mismo proceso que se hizo en esta con la línea de la figura 3.2, entonces nuestra línea se verá mas parecida en la figura 3.2 que en la figura 3.3, como se puede apreciar en la figura 3.4.

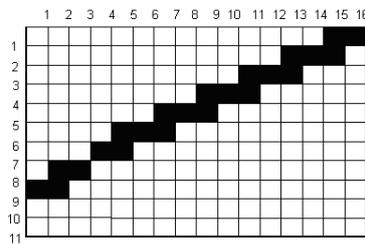


FIGURA 3.4

1.1. Conectividad en 2D. Para hablar de conectividad en imágenes digitales primero debemos revisar el concepto de adyacencia. En imágenes digitales 2D existe dos tipos de

adyacencia, estas nociones nos permiten caracterizar la cantidad de componentes conexas de una imagen.

DEFINICIÓN 3.12. Sea I una imagen digital 2D, decimos que dos píxeles son 4-adyacentes si ellos tienen una cara común, y son 8-adyacentes si tienen al menos un vértice en común.

OBSERVACIÓN 3.13. Por la definición 3.12, un píxel $I(x, y)$ es 4-adyacente a los píxeles $I(x, y + 1)$, $I(x, y - 1)$, $I(x - 1, y)$, $I(x + 1, y)$. Mientras que es 8-adyacente a los píxeles $I(x, y + 1)$, $I(x, y - 1)$, $I(x - 1, y)$, $I(x + 1, y)$, $I(x - 1, y - 1)$, $I(x - 1, y + 1)$, $I(x + 1, y - 1)$, $I(x + 1, y + 1)$.

La figura 3.5, muestra un ejemplo de 4-adyacencia, donde los píxeles adyacentes al píxel negro de posición (x, y) , son los píxeles de color azul, análogamente en la figura 3.6 se muestra un ejemplo de 8-adyacencia.

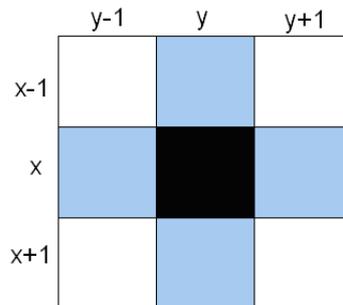


FIGURA 3.5

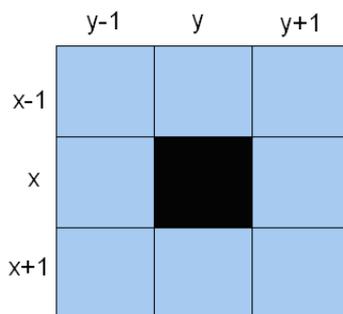


FIGURA 3.6

DEFINICIÓN 3.14. Sea I una imagen digital 2D, la conectividad en I , es un par (a, b) , donde $a \in \{4\text{-adyacencia}, 8\text{-adyacencia}\}$ y $b \in \{0, 1\}$, existe conectividad entre dos píxeles si ambos tienen valor b y su tipo de adyacencia es a .

EJEMPLO 3.15. Si tenemos la conectividad ($8\text{-}adyacencia, 0$), los píxeles que en la figura 3.7 están en conectividad o existe un cierto tipo de camino entre ellos son los píxeles negros asociados al valor 0 que son 8-adyacentes, esos píxeles son los de la posición $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$.

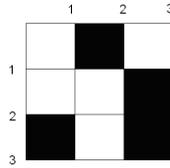


FIGURA 3.7

Para el mismo ejemplo de la figura 3.7, si cambiamos la conectividad al tipo de 4-adyacencia, el píxel $(1, 0)$ que en 8-adyacencia, estaba conectado con los píxeles $(2, 1)$ y $(2, 2)$, ya no lo está.

OBSERVACIÓN 3.16. Es importante cuando se habla de conectividad en una imagen binaria, escoger el tipo adecuado de adyacencia para los píxeles del fondo y del objeto. Si escogemos para los píxeles negros la 8-adyacencia, debemos escoger para los píxeles blancos la 4-adyacencia y viceversa, ya que podría ocurrir que un conjunto de píxeles negros con 8-adyacencia encierre una región de píxeles blancos, y si estos también tienen 8-adyacencia, entonces la región externa de píxeles blancos, estará conectada con la región interior delimitada por los píxeles negros. Por ejemplo, en la figura 3.7, si consideramos 8-adyacencia para píxeles blancos y negros, entonces la región blanca tendría una sola componente conexa.

2. Imagen digital 3D

DEFINICIÓN 3.17. Una malla 3D es un subconjunto discreto del espacio R^3 , que se define como:

$$G_{l,m,n} = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : 1 \leq x \leq l, 1 \leq y \leq m, 1 \leq z \leq n\}$$

A los elementos de $G_{l,m,n}$ se les denominan vóxeles.

DEFINICIÓN 3.18. Dada una malla $G_{l,m,n}$, cada vóxel $v(x, y, z)$ determina un cubo unitario con centro $(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2})$ y vértices (x, y, z) , $(x, y, z - 1)$, $(x, y - 1, z)$, $(x - 1, y, z)$, $(x - 1, y - 1, z)$, $(x - 1, y, z - 1)$, $(x, y - 1, z - 1)$ y $(x - 1, y - 1, z - 1) \in G_{l,m,n}$ en lo que

sigue, usaremos el término vóxel para referirnos tanto al punto de la malla (x, y, z) como al cubo determinado por él.

DEFINICIÓN 3.19. Sea $G_{l,m,n}$ una malla 3D y $[N]$ el conjunto de valores $\{0, 1, \dots, N-1\}$. Una imagen digital 3D de N -colores, es una función $I : G_{l,m,n} \rightarrow [N]$.

OBSERVACIÓN 3.20. Podemos asociar una imagen digital 3D con un arreglo tridimensional o hiper-matriz, de modo que la entrada ijk de la hiper-matriz corresponde con el valor de la imagen en el vóxel (i, j, k) .

OBSERVACIÓN 3.21. El eje del espacio euclideo N^3 estará en el sentido de la figura 3.8.

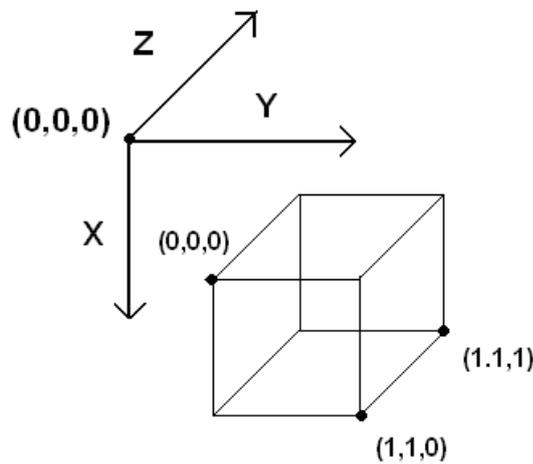


FIGURA 3.8

Los conceptos de umbralización y digitalización se extienden de la manera obvia para el caso de imágenes 3D, un concepto de mucha importancia en el estudio de imágenes 3D, es el de sección transversal.

DEFINICIÓN 3.22. Sea $I : G_{l,m,n} \rightarrow [N]$ una imagen digital 3D y fijemos k , tal que $1 \leq k \leq n$. Definimos la k -ésima sección transversal de I (I_k) como la imagen digital 2D dada por $I_k(x, y) = I(x, y, k)$.

OBSERVACIÓN 3.23. La sección transversal que estamos definiendo corresponde a realizar un corte a lo largo del eje z , sin embargo se pueden considerar otro tipo de secciones transversales.

2.1. Conectividad en imagen digital 3D. En imágenes digitales 3D, existen tres tipos de adyacencia (6-adyacencia, 18-adyacencia, 26-adyacencia), que nos permitirán definir la conectividad en esas imágenes.

OBSERVACIÓN 3.24. Sea I una imagen digital 3D, de ahora en adelante, denotaremos a $I(x, y, z)$ como el píxel de I ubicado en la posición $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.

DEFINICIÓN 3.25. Sea I una imagen digital 3D, con $I(x, y, z)$ un vóxel cualquiera de I , se dice que $I(x, y, z)$ es 6-adyacente a los vóxeles $I(x - 1, y, z)$, $I(x + 1, y, z)$, $I(x, y - 1, z)$, $I(x, y + 1, z)$, $I(x, y, z - 1)$, $I(x, y, z + 1)$, es decir, $I(x, y, z)$ es 6-adyacente a los vóxeles con los que tiene una cara en común.

EJEMPLO 3.26. En la figura 3.9, el vóxel verde $I(x, y, z)$ es 6-adyacentes a los vóxeles de color lila. La figura 3.10, es otra representación mas sencilla de la figura 3.9, donde los puntos negros representan los vóxeles del objeto 6-adyacentes al vóxel P .

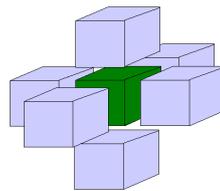


FIGURA 3.9

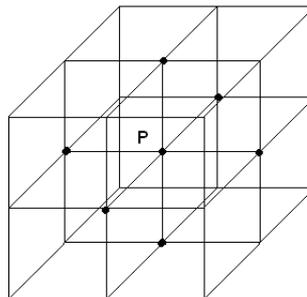


FIGURA 3.10

DEFINICIÓN 3.27. Sea I una imagen digital 3D, con $I(x, y, z)$ un vóxel cualquiera de I , se dice que $I(x, y, z)$ es 18-adyacente a los vóxeles con los que comparte una cara o lado común, estos vóxeles son $I(x - 1, y, z)$, $I(x + 1, y, z)$, $I(x, y - 1, z)$, $I(x, y + 1, z)$, $I(x, y, z - 1)$,

$I(x, y, z+1), I(x-1, y, z-1), I(x+1, y, z+1), I(x-1, y, z+1), I(x+1, y, z-1), I(x-1, y-1, z),$
 $I(x+1, y+1, z), I(x+1, y-1, z), I(x-1, y+1, z), I(x, y-1, z-1), I(x, y-1, z+1),$
 $I(x, y+1, z-1), I(x, y+1, z+1).$

EJEMPLO 3.28. Los vóxeles 18-adyacentes de $P = (x, y, z)$ son los puntos negros que se ilustran en la figura 3.11.

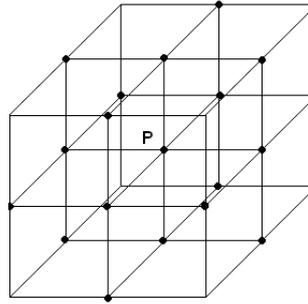


FIGURA 3.11

DEFINICIÓN 3.29. Sea I una imagen digital 3D, con $I(x, y, z)$ un vóxel cualquiera de I , se dice que $I(x, y, z)$ es 26-adyacente a los vóxeles con los que comparte una cara, lado o vértice común, estos son los vóxeles 18-adyacentes, además de los vóxeles $I(x-1, y-1, z-1),$
 $I(x-1, y+1, z+1), I(x-1, y-1, z+1), I(x+1, y-1, z-1), I(x+1, y+1, z-1),$
 $I(x-1, y+1, z-1), I(x+1, y-1, z+1), I(x+1, y+1, z+1)$.

EJEMPLO 3.30. En la figura 3.12, los puntos negros representan los vóxeles 26-adyacentes de P .

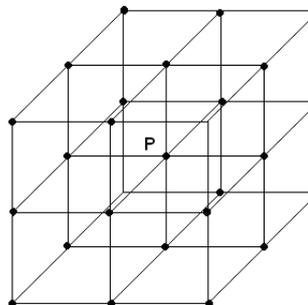


FIGURA 3.12

DEFINICIÓN 3.31. Sea I una imagen digital $3D$, la conectividad en I , es un par (a, b) , donde $a \in \{6\text{-adyacencia}, 18\text{-adyacencia}, 26\text{-adyacencia}\}$ y $b \in \{0, 1\}$, existe conectividad entre dos vóxeles si ambos tienen valor b y su tipo de adyacencia es a .

OBSERVACIÓN 3.32. Supongamos que tenemos un número determinado de vóxeles negros o del objeto que forman una superficie cerrada, en la que se encierra un volumen de vóxeles blancos. Si queremos realizar un cálculo de las componentes conexas de la imagen, es necesario una diferenciación entre el interior y exterior de los volúmenes que encierran los vóxeles negros. Por ello se requiere que los vóxeles negros sean 26-adyacentes y los vóxeles blancos 6-adyacentes, ya que si los vóxeles blancos tienen 18-adyacencia o 26-adyacencia, un vóxel que este dentro del volumen encerrado por los vóxeles negros, tendrá conectividad con algún vóxel que esta afuera de ese volumen encerrado.

Una imagen digital binaria $3D$, será representada por $(V, 26\text{-adyacencia}, 6\text{-adyacencia}, B)$, donde V representa el conjunto de vóxeles de la imagen $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 / x < N_x, y < N_y, z < N_z\}$, se usa la 26-adyacencia para los vóxeles del objeto (vóxeles negros de valor digital 0) y 6-adyacencia para los vóxeles del fondo (vóxeles blancos de valor digital 1), donde B representa el conjunto de puntos o vóxeles del objeto.

3. Borde de una imagen digital 2D

El cálculo del complejo y la homología de una imagen es costoso en tiempo por lo que para minimizar ese proceso se busca calcular, en vez de la homología de la imagen, la homología del borde, lo cual involucra un menor número de píxeles, que son asociados al complejo cúbico y que conserva la misma información respecto al número de componentes conexas.

OBSERVACIÓN 3.33. En esta sección, vamos a considerar imágenes $2D$ en escala de grises, donde los objetos a considerar en la imagen, son aquellas componentes con los diferentes valores digitales $\in P$, con $P = \{1, \dots, 255\}$ y el fondo esta compuesto por píxeles negros.

Recordemos que, en principio, para los píxeles del objeto se considera la 8-adyacencia, además los píxeles del objeto no encierren píxeles que pertenecen al fondo, ya que al tener una región de píxeles del objeto conectadas con estas características, contabilizan sólo una componente conexa al igual que si se extrae sólo el borde de esa región.

En matlab el Algoritmo para el cálculo del borde de una imagen 2D en escala de grises sería el siguiente:

```
function Bd=bordeFN(I,N1,N2)
Bd=zeros(size(I));
for i=1:255
  for x=2:N1-1
    for y=2:N2-1
      if I(x,y)==i & I(x-1,y)==0 | I(x+1,y)==0 | I(x,y-1)==0 | I(x,y+1)==0
        Bd(x,y)=I(x,y);
      end
    end
  end
end
end
```

EJEMPLO 3.34. Vamos a calcular el borde de la figura 3.13, donde se tiene el fondo negro (con valor digital 0) y el objeto es blanco (con valor digital 1). Para el fondo se consideraría la 4-adyacencia y para el objeto la 8-adyacencia.



FIGURA 3.13

Al aplicar el algoritmo en matlab,

```
W3 = imread('prueba3.png');
figure,imshow(W3)
W31=W3(:,:,1);
BFN1=BordeFN(W31,244,248);
figure(2),imshow(BFN1,[])
```

se obtiene la figura 3.14.

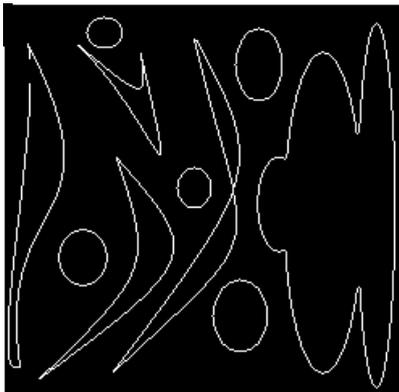


FIGURA 3.14

Como se puede observar en la imagen del borde del objeto de la figura 3.13, se tiene un número muchísimo menor de píxeles blancos, los cuales son asociados al complejo cúbico de esa imagen, disminuyendo el costo en tiempo de cálculo de la homología de esa imagen, en comparación con la imagen a la que no se le ha sacado el borde.

4. Homología en una imagen digital

4.1. Conjunto cúbico asociado a una imagen digital binaria. Para asociar una imagen digital binaria a un conjunto cúbico X , como se definió en 2.49, se consideran el conjunto de píxeles y vóxeles que conforman al objeto de valor digital 1, en la imagen digital $2D$ y $3D$ respectivamente, donde en el caso de imágenes $2D$, los bordes de los píxeles son asociados a las aristas del conjunto cúbico de X .

DEFINICIÓN 3.35. Sea I una imagen digital binaria $2D$, se define el conjunto cúbico asociado a I , X_I , como:

$$X_I = \{c(x, y) : I(x, y) = 1, (x, y) \in G_{m,n}\}.$$

OBSERVACIÓN 3.36. X_I , por la definición 3.35, es un conjunto de píxeles de valor 1, donde en la definición 3.2, los vértices del píxel $c(x, y)$ determinan un cuadrado unitario de la forma $[y - 1, y] \times [x, x + 1]$ con $x, y \in \mathbb{Z}$, por lo que el píxel $c(x, y)$ satisface la definición 2.38, de cubo elemental, entonces el conjunto de píxeles de X_I , es un conjunto de cubos elementales, que cumplen con la definición de conjunto cúbico.

Consideremos el caso de una imagen con mas de dos colores, es decir, que al menos posee tres colores, A_1 , A_2 y A_3 , donde el color A_3 representa el fondo, y los objetos en la imagen son solo los píxeles de color A_1 y A_2 . Supongamos que tenemos un píxel A_1 4-adyacente a el píxel de color A_2 , el lado común presenta una ambigüedad, ya que es de color A_1 ó A_2 , si el lado es de color A_1 , entonces el píxel de color A_2 no tiene un lado y por lo tanto no es un cubo elemental y, ya que un conjunto cúbico es unión de cubos elementales entonces tampoco pertenece a un conjunto cúbico, lo mismo pasa con el píxel de color A_1 si el lado es de color A_2 . Por lo anterior se concluye que el conjunto cúbico solo puede ser asociado a imágenes digitales binarias.

DEFINICIÓN 3.37. Sea I , una imagen digital binaria, la homología de I , se define como la homología de X_I , es decir:

$$H_*(I) = H_*(X_I).$$

De modo que podemos obtener información topológica de la imagen, a partir del estudio de sus grupos de homología, de especial interés es el grupo $H_0(I)$ que mide las componentes conexas de la imagen.

4.2. Homología en una imagen digital de n -colores.

OBSERVACIÓN 3.38. En esta subsección, al considerar a una imagen de n -colores, en realidad, nos referimos a una imagen en escala de grises que puede ser coloreada. Es decir, la imagen de n -colores, esta compuesta por una sola matriz con n valores digitales, y no debe confundirse con una imagen a color o RGB (imagen que se compone de tres canales o tres matrices en escala de grises).

Como se dijo antes, en el caso de una imagen de n -colores o valores digitales $\in [n - 1] = \{0, 1, \dots, n - 1\}$, $n > 2$, no se puede asociar un conjunto cúbico de forma directa, sin embargo nos gustaría poder calcular H_0 , para obtener el número de componentes conexas de la imagen, donde las componentes conexas que corresponde a un color o valor digital, es diferente a las componentes conexas de otro color o valor digital.

Así podríamos separar la imagen digital en n - imágenes digitales, donde cada j -ésima imagen digital posee únicamente las regiones del j -ésimo color con $0 \leq j \leq n - 1$, de ese modo se tendría que las componentes conexas de una imagen digital de n -colores sería la

suma de las componentes conexas de cada j -ésima imagen digital, con las regiones de un j -ésimo color.

Se denotará por X_{I_j} al j -ésimo conjunto cúbico asociado a la j -ésima imagen digital binaria I .

Se tiene entonces que, el k -ésimo grupo de homología de una imagen digital I de n colores, asociado al conjunto cúbico X_I , $H_k(X_I)$, es la suma de los k -ésimos grupos de homologías de los conjuntos cúbicos X_{I_j} con $0 \leq j \leq n - 1$, donde el k -ésimo grupo de homología del j -ésimo conjunto cúbico de I se denotará por H_k^j , de este modo se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} H_k(X_I) &= H_k^0 + H_k^1 + \cdots + H_k^{n-1} \\ &= H_k(X_{I_0}) + H_k(X_{I_1}) + \cdots + H_k(X_{I_{n-1}}) \\ &= \frac{Z_k(X_{I_0})}{B_k(X_{I_0})} + \frac{Z_k(X_{I_1})}{B_k(X_{I_1})} + \cdots + \frac{Z_k(X_{I_{n-1}})}{B_k(X_{I_{n-1}})}. \end{aligned}$$

Supongamos que queremos calcular H_0 a una imagen digital I , de n colores (donde se considera que el objeto es blanco de valor digital n y el fondo es negro de valor digital 0 ó viceversa), digamos que los elementos base que componen $H_0(X_{I_i})$ son $[V_1^i], [V_2^i], \dots, [V_{p_i}^i]$, donde $[V_{p_i}^i]$ son vértices en X_{I_i} con $p_i \in N$, $0 \leq i \leq n - 1$. Sea $s = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}$, se tiene que $[V_j^i]$, es un vector de una columna por s filas, con 1 en la $(p_0 + \cdots + p_{i-1} + j)$ -ésima posición.

OBSERVACIÓN 3.39. Si se considera que en la imagen el fondo es negro de valor digital 0, y el objeto blanco de valor digital $n - 1$, entonces se tiene que $p_0 = 0$, ya que $H_0(X_{I_0}) = 0$, es decir, el número de componentes conexas de la imagen digital cero (0-ésima imagen digital), es cero, ya que esta imagen esta compuesta solo por el fondo y no contiene a ningún objeto.

EJEMPLO 3.40. Cálculo de la homología de la imagen digital I , de tres colores o valores digitales, representada en la figura 3.15.

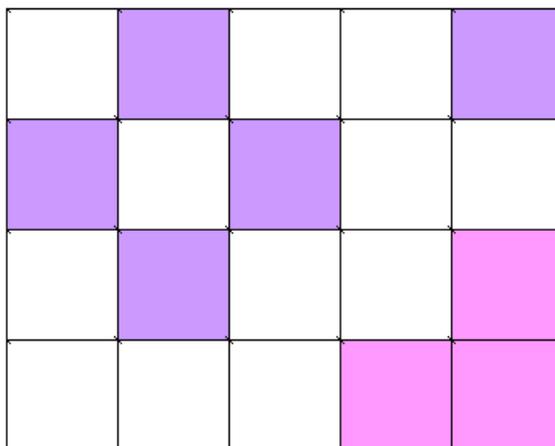


FIGURA 3.15

En la figura 3.15, se considera cada cuadrado como un píxel, la primera figura representaría una imagen digital de 5×5 píxeles, la cual es asociada al conjunto cúbico X_I , en esta imagen llamaremos X_{I_1} el conjunto cúbico asociado a la imagen digital considerando solo las regiones de color morado y X_{I_2} el conjunto cúbico asociado a la imagen considerando solo la región rosada. El tercer color se refiere al blanco, el cual para este caso no es considerado en el conjunto cúbico, ya que se toma como fondo de la imagen.

Para facilitar los cálculos de $H_k(X_I)$ de la imagen digital de tres colores, se procede a realizar un colapso elemental de los conjuntos cúbicos X_{I_1} y X_{I_2} del siguiente modo y como se muestra en la figura 3.16:

1- En la imagen se consideran las aristas libres del conjunto cúbico X_{I_1} asociado a las regiones de color morado, en la imagen se representan con el color amarillo etiquetados como Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 , que son las caras respectivas de los cubos $P_1, P_2, P_3, P_4, y P_5$.

2- Se consideran las aristas libres del conjunto cúbico X_{I_2} asociado a las regiones de color rosado, en la imagen se representan con el color amarillo etiquetados como S_1, S_2 que son las caras respectivas de los cubos R_1 y R_2 .

3- Luego se retiran de la imagen esas aristas y los cubos de los que son caras libres.

4- Se consideran también los vértices libre y las aristas a las que pertenecen para ser retiradas y se sigue este procedimiento hasta que no queden caras libres como se muestra en la figura 3.17.

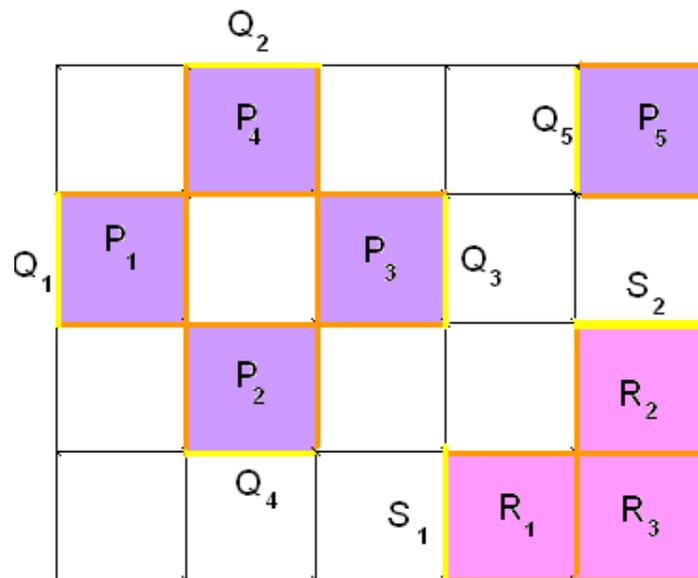


FIGURA 3.16

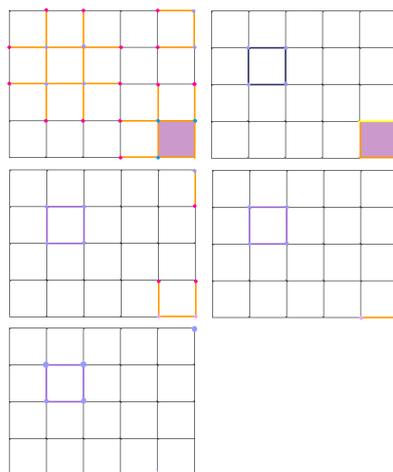


FIGURA 3.17

Ahora vamos a calcular H_0 y H_1 del conjunto cúbico asociado a la imagen representada con el color morado (X_{I_1}) que ha sido simplificada por medio del colapso elemental, haciendo uso del corolario 2.117.

Los vértices del conjunto cúbico X_{I_1} son etiquetados por $V_1^1, V_2^1, V_3^1, V_4^1$ y V_5^1 , las aristas del conjunto cúbico X_{I_1} son etiquetados por A_1^1, A_2^1, A_3^1 y A_4^1 como se indica en la figura 3.18.

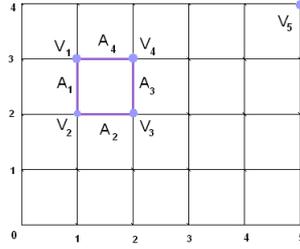


FIGURA 3.18

OBSERVACIÓN 3.41. En lo que sigue, $[a_1 a_2 \dots a_n]^T$, representara a la traspuesta de un vector de 1-columna por n -filas con a_i en la i -ésima posición, $1 \leq i \leq n$.

Para la figura 3.18 se tiene lo siguiente:

$$K_0(X_{I_1}) = \{[V_1^1] = [100000]^T, [V_2^1] = [010000]^T, V_3^1 = [001000]^T, V_4^1 = [000100]^T, V_5^1 = [000010]^T\}$$

$$K_1(X_{I_1}) = \{[A_1^1] = [1000]^T, [A_2^1] = [0100]^T, [A_3^1] = [0010]^T, [A_4^1] = [0001]^T\}$$

$$V_1^1 = [1] \times [3], V_2^1 = [1] \times [2], V_3^1 = [2] \times [2], V_4^1 = [2] \times [3], V_5^1 = [5] \times [4]$$

$$A_1^1 = [1] \times [2, 3], A_2^1 = [1, 2] \times [2], A_3^1 = [2] \times [2, 3], A_4^1 = [1, 2] \times [3]$$

usando la definición 2.76, del operador frontera se tiene

$$(3.1) \quad \partial_1(A_1^1) = \partial_1([1] \times [2, 3]) = [1] \times [3] - [1] \times [2] = V_1^1 - V_2^1 = [1 - 10000]^T$$

$$(3.2) \quad \partial_1(A_2^1) = \partial_1([1, 2] \times [2]) = [2] \times [2] - [1] \times [2] = V_3^1 - V_2^1 = [0 - 11000]^T$$

$$(3.3) \quad \partial_1(A_3^1) = \partial_1([2] \times [2, 3]) = [2] \times [3] - [2] \times [2] = V_4^1 - V_3^1 = [00 - 1100]^T$$

$$(3.4) \quad \partial_1(A_4^1) = \partial_1([1, 2] \times [3]) = [2] \times [3] - [1] \times [3] = V_4^1 - V_1^1 = [-10010]^T$$

Como cada arista $c \in C_1(X_{I_1})$, por definición 2.73, es combinación lineal de los elementos de la base y se tiene que:

$$\begin{aligned} c &= \alpha_1[A_1^1] + \alpha_2[A_2^1] + \alpha_3[A_3^1] + \alpha_4[A_4^1] \\ &= \alpha_1[1000]^T + \alpha_2[0100]^T + \alpha_3[0010]^T + \alpha_4[0001]^T \\ &= [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4]^T \end{aligned}$$

con $\alpha_i \in \mathbb{Z}_2$.

Por otra parte, ya que el operador frontera es una transformación lineal y usando las ecuaciones 3.2, 3.3, 3.4 y 3.4, se tiene lo siguiente:

$$\partial_1(c) = \alpha_1\partial_1(A_1^1) + \alpha_2\partial_1(A_2^1) + \alpha_3\partial_1(A_3^1) + \alpha_4\partial_1(A_4^1) = \alpha_1[1 - 10000]^T + \alpha_2[0 - 11000]^T + \alpha_3[00 - 1100]^T + \alpha_4[-100100]^T$$

Entonces se tiene que:

$$\partial_1(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_4 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_3 + \alpha_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si igualamos $\partial_1(c)$ a cero, se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_4 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_3 + \alpha_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea $\alpha = \alpha_1$ y resolviendo la matriz anterior se tiene

$$\ker(\partial_1) = \alpha[1 - 1 - 11]^T \text{ con } \alpha \in \mathbb{Z}_2$$

$H_1(X_{I_1}) = \frac{Z_1(X_{I_1})}{B_1(X_{I_1})} = \frac{\ker(\partial_1)}{\partial_2(C_2(X_{I_1}))} = \frac{\ker(\partial_1)}{\partial_2(0)} = \frac{\alpha[1-1-11]^T}{0} = \alpha[[1 - 1 - 11]^T]$, por ser ∂_2 una transformación lineal y $C_2(X_{I_1}) = 0$.

Ya que la base de $H_1(X_{I_1})$ posee sólo un elemento, quiere decir que la imagen digital considerando sólo la región morada tiene un hueco.

Cálculo de $H_0(X_{I_1})$

$$H_0(X_{I_1}) = \frac{Z_0(X_{I_1})}{B_0(X_{I_1})} = \frac{\ker(\partial_1)}{\partial_1(C_1(X_{I_1}))} = \frac{C_0(X_{I_1})}{\partial_1(C_1(X_{I_1}))}$$

Sea $z \in C_0(X_{I_1})$ entonces $z = \alpha_1[V_1^1] + \alpha_2[V_2^1] + \alpha_3[V_3^1] + \alpha_4[V_4^1] + \alpha_5[V_5^1] = \alpha_1[100000]^T + \alpha_2[010000]^T + \alpha_3[001000]^T + \alpha_4[000100]^T + \alpha_5[000010]^T = [\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_50]^T$ con $\alpha_i \in \mathbb{Z}_2$

Ahora sea $c \in C_1(X_{I_1})$, se cumple que:

$$\partial_1(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_4 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_3 - \alpha_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte se tiene:

$$\partial_1(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_4 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_3 - \alpha_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $[V_5^1]$ no pertenece a $B_0(X_{I_1})$, análogamente se comprueba que $[V_1^1]$ no pertenece a $B_0(X_{I_1})$ y, ya que $[V_1^1] - [V_2^1]$, $[V_3^1] - [V_2^1]$, $[V_4^1] - [V_3^1]$ y $[V_4^1] - [V_1^1] \in B_0(X_{I_1})$, siguiendo la definición 2.90, los vértices $[V_1^1]$, $[V_2^1]$, $[V_3^1]$ y $[V_4^1]$ son homólogos.

Como en general se cumple lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_4 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_3 - \alpha_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ -\alpha_3 \\ -\alpha_4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir que $\partial(c) \neq [V_5^1] - [V_i^1]$, con $1 \leq i \leq 4$, lo que quiere decir que $[V_5^1]$ no es homólogo a V_1^1 , V_2^1 , V_3^1 o V_4^1 .

Por lo tanto, sea $z \in C_0(X_{I_1})$, $z = \alpha_1[V_1^1] + \alpha_2[V_2^1] + \alpha_3[V_3^1] + \alpha_4[V_4^1] + \alpha_5[V_5^1]$ implica que $[z]_{X_{I_1}} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)[V_1^1] + \alpha_5[V_5^1]$ con $\alpha_i \in Z_2$

$$H_0(X_{I_1}) = \frac{Z_0(X_{I_1})}{B_0(X_{I_1})} = \frac{\ker \partial_0(X_{I_1})}{\partial_1(C_1(X_{I_1}))} = [z]_{X_1} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)[V_1^1] + \alpha_5[V_5^1]$$

Como $H_0(X_{I_1})$ posee dos elementos base o dos vértices, por el teorema 2.110, esto quiere decir que el número de componentes conexas de la imagen asociada a X_{I_1} es dos.

Ahora vamos a calcular H_0 del conjunto X_{I_2} , asociado a la imagen representada con el color rosado, que ha sido simplificada por medio del colapso elemental presentando solo un vértice, como se muestra en la figura 3.19:

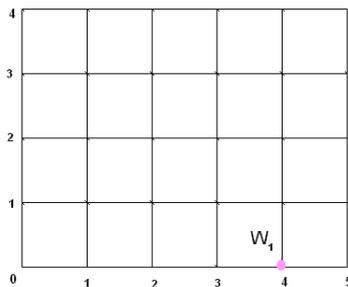


FIGURA 3.19

Donde $V_1^2 = [4] \times [0]$ $K_0(X_{I_2}) = [V_1^2] = 1$ $C_1(X_{I_2}) = 0$, (ya que no posee aristas) $C_2(X_{I_2}) = 0$ (ya que no posee cuadrados)

$$H_0(X_{I_2}) = \frac{Z_0(X_{I_2})}{B_0(X_{I_2})} = \frac{\ker \partial_0(X_{I_2})}{\partial_1(C_1(X_{I_2}))} = \frac{C_0(X_{I_2})}{\partial_1(C_1(X_{I_2}))} = \frac{C_0(X_{I_2})}{\partial_1(0)} = \frac{C_0(X_{I_2})}{0}$$

$$H_1(X_{I_2}) = \frac{Z_1(X_{I_2})}{B_1(X_{I_2})} = \frac{\ker \partial_1(X_{I_2})}{\partial_2(C_2(X_{I_2}))} = \frac{0}{0} = [0]$$

Sea $c \in C_0(X_{I_2})$, entonces $c = \beta_1$, con $\beta_1 \in Z_2$, luego $H_0(X_{I_2}) = \beta_1[V_1^2]$.

Como $H_0(X_{I_2})$ solo tiene un elemento base, por el teorema 2.110, el número de componentes conexas de $H_0(X_{I_2})$ es uno y como $H_1(X_{I_2}) = [0]$ el número de huecos de X_{I_2} es cero.

Por lo anterior se tiene que la homología cero de la imagen de dos colores $H_0(X_I) = H_0(X_{I_1}) + H_0(X_{I_2}) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)[V_1^1] + \alpha_5[V_2^1] + \beta_1[V_1^2]$ con $\beta_1, \alpha_i \in Z_2$, $1 \leq i \leq 5$, por lo que las componentes conexas de la imagen de dos colores son la suma de las componentes conexas de la imagen digital de cada color por separado, como la base para $H_0(X_I)$ es tres, las componentes conexas de la imagen asociada al conjunto cúbico X_I es tres.

$$H_0(X_I) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_5 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

$H_1(X_I) = H_1(X_{I_1}) + H_1(X_{I_2}) = \alpha[[1 - 1 - 11]^T]$ con $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, por lo que los huecos de la imagen de dos colores es uno.

5. Homología de una imagen descompuesta en sus tres canales

En el procesamiento digital de imágenes, las imágenes consideradas para sacar de ella, su conjunto cúbico y homología, deben ser binarizadas. Para ello se toma una imagen que si es a color se pasa a escala de grises y luego mediante un proceso de umbralización, que consiste en elegir un intervalo de los valores digitales de la imágenes colocándolos en uno y el resto en cero, la imagen es binarizada. Esto, por ejemplo, podría permitir calcular el número de componentes conexas de una imagen, que no son más que regiones dentro de la imagen que están representados por altos valores de intensidad.

Ahora podríamos pensar en el conjunto cúbico que es asociado a una imagen a color sin pasarla directamente a una escala de grises y binarizarla. Para ello, como toda imagen digital esta representada por tres canales (rojo , verde y azul), donde cada canal se representa en escala de grises, se puede tomar la imagen de cada canal y binarizarlo de modo que se coloca en 1 los valores digitales de una imagen superiores a 128. Esto representaría altas intensidades de azul, verde y rojo en los canales respectivos, así con el cálculo de la homología H_0 aplicado en la imagen se obtendría el número de componentes conexas o regiones con alta intensidad de azul, rojo y verde en la imagen a color.

EJEMPLO 3.42. Consideremos la imagen a color superior izquierda, que se presenta en la figura 3.20, donde también se muestra la descomposición de esa imagen en sus tres canales.

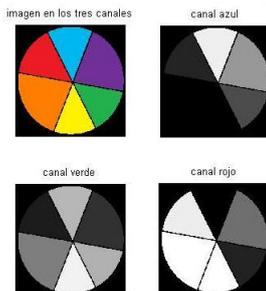


FIGURA 3.20

Si consideramos las altas intensidades, como los valores digitales que en cada canal son mayores a 128, umbralizamos a cada canal mediante la siguiente función

$$g_{128}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 128 < n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces al aplicar la umbralización en cada canal a la imagen original, nos queda la figura 3.21.

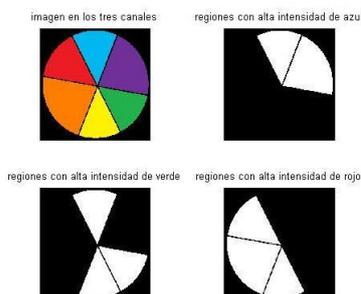


FIGURA 3.21

En los anexos, en la sección 3, se presenta los comandos usados para aplicar lo antes expuestos en Matlab. Al final el algoritmo para el comando `homolo0`, se encuentra en los anexos, en la sección 2, éste permite calcular el número de componentes conexas para las imágenes binarizadas, dando como resultado 2 componentes conexas para el canal azul y, tres componentes conexas para el canal rojo y verde.

OBSERVACIÓN 3.43. En el cálculo de H_0 o número de componentes conexas del conjunto cúbico asociado a la figura 3.13, se tiene que en las imágenes binarias de la figura 3.21, se aplica el proceso de colapso elemental de forma reiterada de modo que en las imágenes de

las regiones con alta intensidad de azul al final de ese proceso nos queda dos vértices A_1 y A_2 , en la imagen de regiones con alta intensidad de verde solo quedan tres vértices V_1, V_2, V_3 y en la figura de regiones con alta intensidad de rojo quedan tres vértices R_1, R_2, R_3 , luego por el corolario 2.117, el problema de calcular el número de las componentes conexas de las imágenes binarizadas se reducen a calcular el número de elementos diferentes de cero de H_0 , en los conjuntos asociados a las imágenes con dos y tres vértices.

Por el corolario 2.101, el número de componentes conexas o elementos bases de $H_0(X)$ de un conjunto cúbico X de n vértices, es n , por la definición 3.37, el número de componentes conexas de la imagen digital asociada al conjunto cúbico X es el mismo que para X , por lo tanto el número de componentes conexas de la región con alta intensidad de azul es dos mientras que el número de componentes conexas de las imágenes con altas intensidades de rojo y verde es tres.

Aplicaciones del álgebra homológica y perspectiva lineal en imágenes

Este capítulo, trata sobre algunas aplicaciones de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores. En las dos primeras secciones, se presenta el estudio en las componentes conexas de imágenes a color y la continuidad que representan obras de artistas como las de René Magritte y Julius, utilizando la teoría de álgebra homológica y la teoría de imágenes digitales, con Matlab como herramienta.

En la última sección se presentan ciertos elementos que permiten considerar cuando una imagen es imposible en función de la perspectiva lineal y la cohomología.

OBSERVACIÓN 4.1. En todos los comandos, que involucran cálculos de componentes conexas, se utiliza la conectividad $(8 - \textit{adyacencia}, 1)$ para el objeto y, la conectividad $(4 - \textit{adyacencia}, 0)$ para el fondo.

1. Homología paramétrica

Al tener una imagen en escala de grises, consideramos al fondo de valor digital 0 (píxeles negros) y como objetos, las diferentes componentes conexas de todos los valores digitales del conjunto $\{1, 2, \dots, 255\}$. Dentro de esta sección, se dividirá a una imagen I en escala de grises, en una serie de imágenes binarias, llamadas cuadros de I , en las que la pérdida de objetos al pasar de un cuadro al consecutivo permite calcular el número de objetos presentes en la imagen I .

DEFINICIÓN 4.2. Sea $I : G_{m,n} \rightarrow [N]$ una imagen digital 2D de n -colores, $[N] = \{0, 1, \dots, n\}$ y $0 \leq j \leq n$, el j -ésimo cuadro de I, I_j , es la imagen digital binaria que resulta de aplicar a I la función $g_j : [N] \rightarrow [2]$ definida como

$$g_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

También podemos decir que

$$I_j = \{(x, y) \in G_{m,n} : I(x, y) > j\}.$$

De la definición 4.2, se tiene que para $0 \leq j \leq n$, $I_n \subset I_{n-1}$, luego se tiene una secuencia de funciones inclusión para los cuadros

$$i_0 : I_1 \rightarrow I_0, i_1 : I_2 \rightarrow I_1, \dots, i_{n-1} : I_n \rightarrow I_{n-1}$$

Al sacar la homología a los conjuntos cúbicos asociados a los cuadros, se obtiene la siguiente secuencia

$$H_*(X_{I_0}) \rightarrow H_*(X_{I_1}) \rightarrow \dots \rightarrow H_*(X_{I_{n-1}}) \rightarrow 0$$

Mediante la homología, de los conjuntos cúbicos asociados a los cuadros, y las funciones inducida por la secuencia de funciones inclusión se tiene

$$i_{0*} : H_*(X_{I_1}) \rightarrow H_*(X_{I_0}), \dots, i_{(n-1)*} : 0 \rightarrow H_*(X_{I_{n-1}})$$

Entonces el grupo de homología de una imagen en escala de grises I , es el producto de los kernels de las funciones anteriores, esto es

$$Ker(i_{0*}) \times Ker(i_{1*}) \times \dots \times Ker(i_{(n-1)*}).$$

OBSERVACIÓN 4.3. El siguiente algoritmo de la función `h0parametrica`, permite separar a una imagen digital 2D de 255-colores, I , en 255 cuadros de I , y luego permite calcular las componentes conexas de cada cuadro.

```
function H= h0parametrica(Q);
P =1 : 255;
H = zeros(size(P));
for x= 1:255
    Q1= zeros(size(Q));
    Q1(Q >x)=255;
    [E,n]= bwlabel(Q1);
    H(x,1)=n;
end
```

end

EJEMPLO 4.4. Consideremos al conjunto cúbico X_I , el cual está asociado a una imagen en escala de grises I , como en la figura 4.1, a esa imagen se le aplica la función borde como se muestra en la figura 4.2, la cual preserva la misma información sobre $H_0(X_I)$ pero que reduce el costo en tiempo para el cálculo de sus componentes conexas.

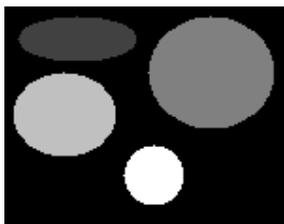


FIGURA 4.1

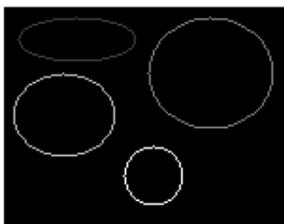


FIGURA 4.2

Luego al aplicar el comando `h0parametrica`, sobre la figura 4.2, genera una tabla como en la figura 4.3, en donde se pierde una componente conexa al llegar al parámetro $t = 65$, análogamente, para t igual a 128, 192 y 255, esas componentes conexas son aquellas que se anulan o van al kernel en las funciones inclusión antes definidas para la homología de los j -ésimos cuadros. Al contabilizar el número de componentes conexas que desaparecen al pasar de un cuadro a otro, se tiene 4 pérdidas en total, por lo tanto la figura 4.1 tiene cuatro objetos.

Por otra parte, la pérdida de una componente conexa para el parámetro $t = 65$, indica que existe un objeto en la imagen de valor digital 65, análogamente para t igual a 128, 192 y 255.

Valor digital del pixel t	Número de componentes conexas para el parámetro t
$0 < t < 65$	4
$64 < t < 128$	3
$127 < t < 192$	2
$191 < t < 255$	1
$t = 255$	0

FIGURA 4.3

Los siguientes comandos, son los utilizados para el análisis anterior en la figura 4.1.

```
Q3 = imread('grises.bmp');
figure, imshow(Q3)
Q31=Q3(:,:,1);
BFN=BordeFN(Q31,119,151);
figure(2), imshow(BFN, [])
P=h0parametrica(BFN);
```

OBSERVACIÓN 4.5. En los algoritmos y comandos usados en esta sección, se considera el hecho de que los objetos de la imagen de diferentes valores digitales no se intersecan y una componente conexas que no es adyacente al fondo, no es considerado un objeto.

2. Estudio homológico en pinturas

2.1. Análisis para una pintura binaria. La figura 4.4, muestra una obra del artista Julius, llamada Equinidad. En esa obra nos interesa ver la continuidad en el trazo del caballo presente en la imagen, para ello se utilizaron los siguientes comandos en Matlab:

```
J = imread('juliosequinidad.jpg');
J3=J(:,:,1);
figure, imshow(J3)
J3(J3<100)= 0;
J3(J3>=100)= 1;
figure(2), imshow(J3, [])
[G1,n1]= bwlabel(J3);
L1=limpieza12345FN(J3,423,376);
```

```
L2=limpieza12345FN(L1,423,376);  
L3=limpieza12345FN(L2,423,376);  
L4=limpieza12345FN(L3,423,376);  
L5=limpieza12345FN(L4,423,376);  
L6=limpieza12345FN(L5,423,376);  
figure(4),imshow(L6, [])  
[G2,n2]= bwlabel(L6);
```



FIGURA 4.4

En los comando anteriores, después de leer la imagen, se binarizó como se muestra en la figura 4.5, colocando todos los valores digitales mayores o iguales a 100 en 1 (objeto blanco) y el resto en 0 (fondo negro), luego se obtuvo 56 componentes conexas por medio del comando `bwlabel` (comando que usa 8-adyacencia para el objeto y 4-adyacencia para el fondo), todas esas componentes provienen del caballo y los puntos blancos alrededor de él.



FIGURA 4.5

El comando `limpieza12345FN`, sirve para eliminar ciertos conjunto de píxeles que forman puntos o manchas que no se desean, ese comando se aplica a la figura 4.5, luego a la imagen que resulta se le vuelve aplicar tantas veces como se requiera, este proceso se realizó 6 veces para la imagen anterior, hasta que nos queda una imagen como la de la figura 4.7, en donde se han eliminado todas las manchas o conjunto de píxeles aislados, que no forman parte del contorno del caballo.

El algoritmo para el comando `limpieza1234F`, que se encuentra en los anexos, en la sección 6, lo que hace es que para cada píxel central que es adyacente a otros píxeles como se muestra en la figura 4.6, lo coloca del color del fondo (negro), de modo que lo hace desaparecer como objeto en la imagen.

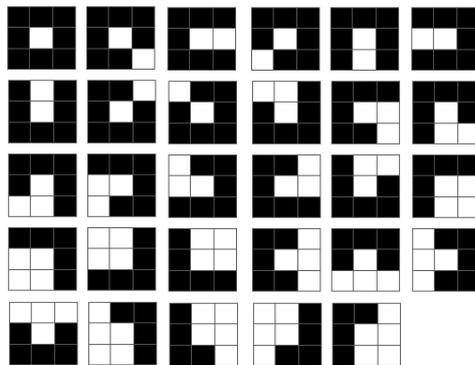


FIGURA 4.6



FIGURA 4.7

En la figura 4.7, al calcular el número de componentes conexas, da como resultado 1, esto indica que el trazo con el que se pintó el caballo es continuo.

Un resultado importante, en el uso de este tipo de herramientas, para el cálculo de las componentes conexas, es que nos permite obtener información respecto al nivel de continuidad ó ruptura que se puede presentar en una obra, y de este modo se puede caracterizar el estilo de un pintor.

2.2. Análisis para una pintura RGB. En la figura 4.8, se presenta una obra de la artista René Magritte, donde nos interesa analizar el número de componentes conexas de ciertas zonas en que es dividida la imagen. Para poder sacar las componentes conexas de una imagen es necesario que sea binarizada, para ello primero se divide la imagen (RGB) en sus tres canales, rojo, verde y azul , como se muestra en la figura 4.9, éstos se encuentran en escala de grises, luego cada canal mediante el comando Homolo0, es llevado a una secuencia de imágenes binarizadas.



FIGURA 4.8

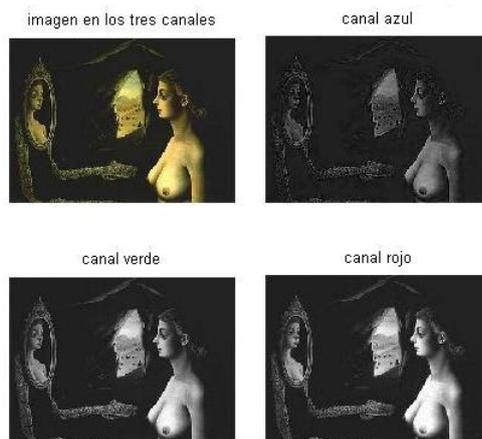


FIGURA 4.9

Para disminuir el número de valores a considerar, a la figura 4.9, se le aplica una función que agrupa los valores digitales de 64 en 64, reduciéndola a una imagen de solo cuatro valores

digitales como se muestra en la figura 4.10. Esa función es $P : G \rightarrow C$, con $G = \{0, 1, \dots, 255\}$ y $C = \{32, 96, 160, 224\}$, donde la definimos como;

$$P(t) = \begin{cases} 32 & \text{si } 0 \leq t < 64 \\ 96 & \text{si } 64 \leq t < 128 \\ 160 & \text{si } 128 \leq t < 192 \\ 224 & \text{si } 192 \leq t < 256. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 4.6. El algoritmo en Matlab para la función paletacuatro(I , $N1$, $N2$), donde I representa la matriz y $N1$, $N2$ las dimensiones de la misma, se encuentra en los anexos, en la sección 4.

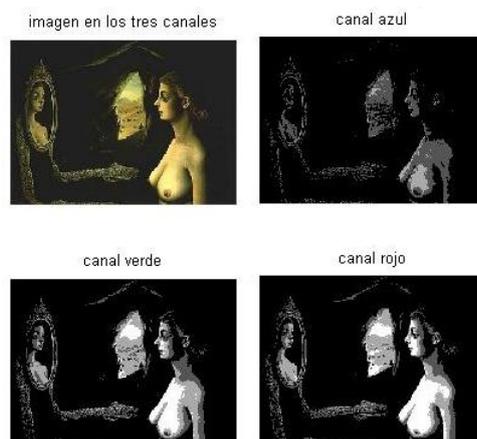


FIGURA 4.10

Al calcular el número de componentes conexas de los cuatro valores digitales, mediante el comando Homolo0, se tiene la información suministrada en la tabla de la figura 4.11. Acá se observa que existen mayor conectividad o continuidad para los valores digitales con mayor o menor intensidad en cada canal (32 y 224), por tener un número menor de componentes conexas en comparación con los valores digitales intermedios (96 y 224). Además en esta tabla es notable, cómo en el canal azul, aparecen sólo cuatro componentes conexas para el valor digital 224, lo que quiere decir que las altas intensidades de azul son las más uniformes en toda la imagen.

Canal	Valor digital del píxel	Número de componentes conexas
Rojo	32	104
	96	303
	160	246
	224	73
Verde	32	113
	96	310
	160	234
	224	70
Azul	32	44
	96	425
	160	134
	224	4

FIGURA 4.11

Ahora consideremos la figura 4.12, donde se muestra lo contenido en la figura 4.8, pero sin la decoración en el espejo. A la figura 4.12, la descomponemos en sus tres canales y a cada canal le aplicamos la función que la reduce a una imagen de 4 valores digitales como se hizo para la figura 4.8 y luego se le aplica el comando Homolo0, lo cual genera la tabla de la figura 4.13.



FIGURA 4.12

Canal	Valor digital del píxel	Número de componentes conexas
Rojo	32	28
	96	186
	160	86
	224	56
Verde	32	27
	96	187
	160	70
	224	51
Azul	32	41
	96	123
	160	67
	224	3

FIGURA 4.13

Es notable, como en la tabla para la figura sin la decoración del espejo en los valores digitales intermedios (96 y 160), las componentes conexas son reducidas entre aproximadamente

el 41 % y el 71 %, lo que indica que la decoración del espejo, la cual representa una pequeña área en la imagen, tiene una gran discontinuidad o poca conectividad, en comparación con el resto de la imagen para esos valores.

Al final en los anexos, en la sección 5, se encuentran los comandos en Matlab para el análisis anterior de las figuras 4.8 y 4.12.

3. Figuras imposibles

3.1. Nociones de imposibilidad. Al referirnos a las figuras imposibles son varias las nociones que se presentan al respecto. Entre ellas podríamos considerar la noción de ambigüedad, inexistencia, contradicción e inconsistencia.

Al hablar de ambigüedad en la figura imposible, esta se refiere, a la presencia de dos proposiciones P y Q que se pueden extraer de lo que representa la imagen, las cuales son igualmente validas pero diferentes entre si ($P \neq Q$).

Por otra parte, si consideramos la contradicción en una figura, se presenta una proposición P valida, que se extrae de la imagen y a su vez es valida la proposición contraria o negación de P ($\neg P$). Por ejemplo en la figura 4.14 tenemos una imagen de René Magritte, titulada "La Trahison des images" (1929), en donde la contradicción proviene de lo que representa y lo que dice la frase en esa figura.



FIGURA 4.14. "La Trahison des images" (1929)

En la noción de inexistencia, la imposibilidad viene de aquello que no es real en el presente, de lo que realmente no existe. Por ejemplo, los centauros, las sirenas, objetos animados y otros personajes que sólo provienen de la imaginación. Mientras que la noción de inconsistencia en una figura, trata de aquellos objetos que pueden ser representados, más no pueden ser

creados en el espacio $3D$, por no tener una coherencia entre sus partes, mas sin embargo, se puede realizar una partición de esa imagen en piezas que sean posibles de construir. Esta última noción de imposibilidad, es la que consideraremos en el presente trabajo.

3.2. Imposibilidad de una imagen mediante su estudio en perspectiva lineal.

Ahora vamos a construir una imagen imposible partiendo de tres puntos de fuga, como se presenta en la figura 4.15, donde por el teorema 1.8, las líneas que fugan al mismo punto son paralelas entre si, y consideramos que las líneas que fugan a puntos distintos son perpendiculares entre si.

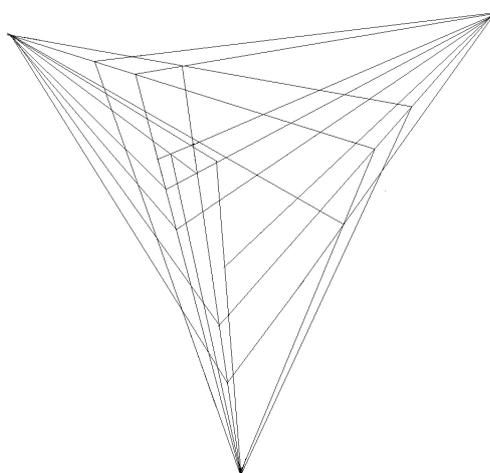


FIGURA 4.15. Construcción de una figura imposible con tres puntos de fuga

De la figura 4.15 dejando sólo lo que nos interesa, nos queda una imagen como la figura 4.16, para la cual se probará su inconsistencia o imposibilidad:

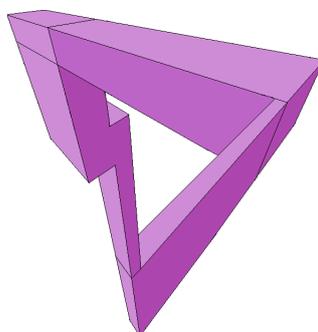


FIGURA 4.16. Figura imposible

Consideremos una partición como se presenta en la figura 4.17, donde esta ha sido dividida en 4 regiones posibles o perfectamente consistentes como estructura $3D$, denotadas Q_1 , Q_2 , Q_3 y Q_4 .

En cada uno de los abiertos Q_1 , Q_2 , Q_3 y Q_4 , se considera un punto que se corresponde y debe coincidir con un punto en un abierto diferente con el que se solape, donde el punto $A_{12} \in Q_1$, se corresponde con el punto $A_{21} \in Q_2$, el punto $A_{23} \in Q_2$, se corresponde con el punto $A_{32} \in Q_3$, el punto $A_{34} \in Q_3$, se corresponde con el punto $A_{43} \in Q_4$ y el punto $A_{41} \in Q_4$, se corresponde con el punto $A_{14} \in Q_1$.

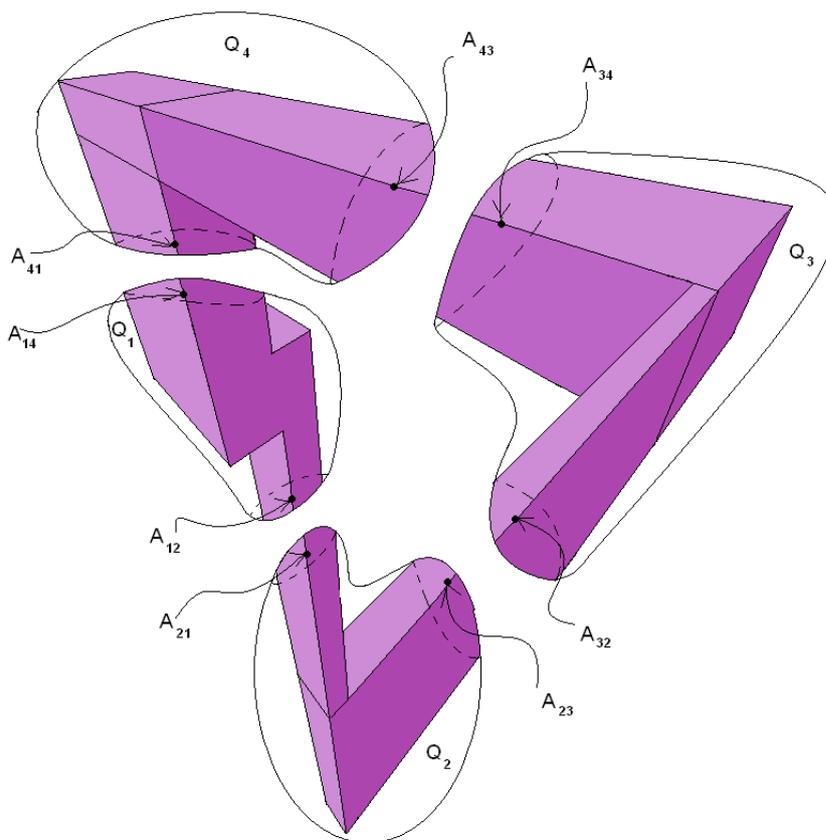


FIGURA 4.17. Partición de la figura imposible

Denotemos a las distancias de las partes en la imagen anterior, como se muestra en la figura 4.18 donde $a, b, c, d, e > 0$.

Ahora coloquemos al objeto que proviene de la figura 4.15 en el espacio $3D$, como se muestra en la figura 4.19. Supongamos que $A_{12} = A_{21}$, $A_{23} = A_{32}$, $A_{14} = A_{41}$, donde las coordenadas de los puntos han sido obtenidos mediante las relaciones de perpendicularidad

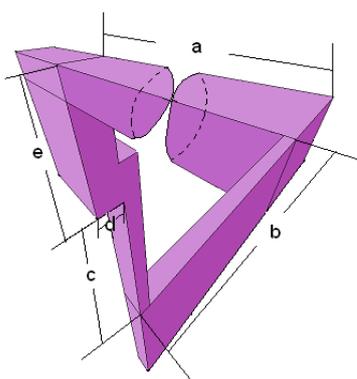


FIGURA 4.18

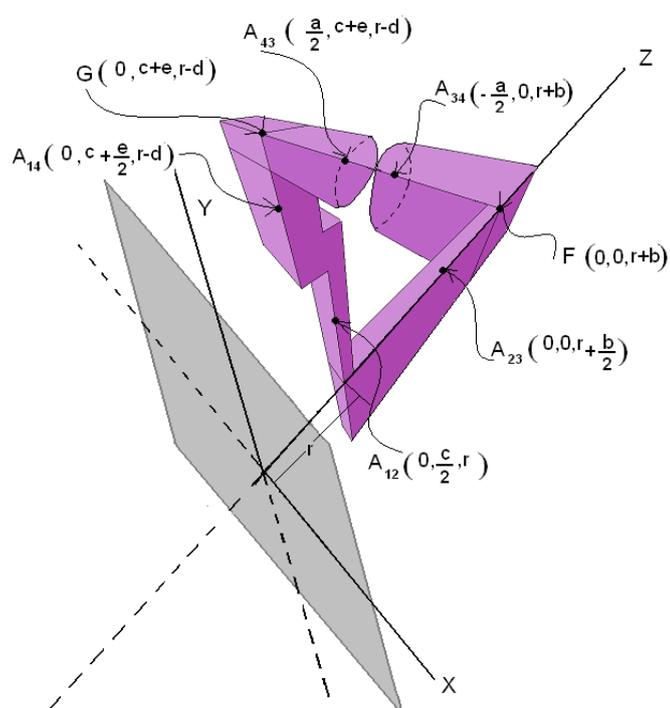


FIGURA 4.19

y paralelismo presentes en el objeto, además de las distancias presentadas en la figura 4.18 y la ubicación que se le ha dado al objeto.

En la figura 4.19, $(\frac{a}{2}, c+e, r-d) \neq (-\frac{a}{2}, 0, r+b)$, ya que se cumple lo siguiente:

$$-\frac{a}{2} = \frac{a}{2} \iff a = 0$$

$$c+e = 0 \iff c, e = 0$$

$$r - d = r + b \iff d, b = 0$$

Como todas las distancias consideradas en la figura tienen que ser mayor a cero se concluye que los puntos A_{34} y A_{43} no pueden coincidir, por lo tanto existen una inconsistencia o imposibilidad en la construcción de la figura.

3.3. Cohomología de una figura imposible. Ahora veamos como intervienen la cohomología en la figura imposible 4.16, para ello usaremos las definiciones de nervio y de la cohomología de Čech, presentes en la sección 4, del capítulo II.

En la figura 4.16, vamos a presentar al primer grupo de cohomología $H^1(Q, G)$, donde Q representa al soporte o la región del plano donde el dibujo se encuentra, por otra parte G es el grupo multiplicativo abeliano R^+ , donde R^+ es el conjunto de los d_{ij} como se define posteriormente.

Supongamos que tenemos un arreglo de puntos como se explico en la figura 4.17 y, un cubrimiento $Q = \{Q_i\}$ con $1 \leq i \leq 4$, que representan figuras posibles del espacio topológico X (espacio definido por la figura total), donde Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 , son imagen en perspectiva lineal de un objeto $3D$, O_1, O_2, O_3 y O_4 respectivamente.

La imposibilidad en la figura, proviene del hecho de que la distancia del espectador a un punto en el objeto O_i , representado por A_{ij} , es diferente de la distancia del espectador a un punto en el objeto O_j (con $i \neq j$), representado por A_{ji} , y donde esos puntos en el objeto O_i y O_j , tienen como imagen puntos que coinciden en la figura en perspectiva lineal.

Digamos que:

$$d_{ij} = \frac{\text{distancia de E al punto } O_i \text{ representado por } A_{ij}}{\text{distancia de E al punto } O_j \text{ representado por } A_{ji}}$$

Entonces la imposibilidad de la figura viene dada cuando $d_{ij} \neq 1$, para algún par de puntos que en la imagen son puntos correspondientes y que pertenecen a abiertos diferentes en Q . Es fácil verificar que se cumple las siguientes relaciones con d_{ij} :

$$d_{ij} = \frac{1}{d_{ji}}$$

$$(d_{ij}, d_{ik}) \longrightarrow (\lambda d_{ij}, \lambda d_{ik}), \text{ para algún número positivo } \lambda$$

Consideremos nuevamente la figura 4.16 como un espacio topológico X , en la figura 4.17, tomamos un cubrimiento Q de la figura formado por cuatro abiertos, en esa imagen si pensamos en el nervio de Q , elegimos cuatro vértices donde e_i es el vértice para el cubrimiento Q_i , con $1 < i < 4$.

Luego entre los vértices que conforman los 0-símplices, se forman los ejes que conforman las aristas o 1-símplices para los cubrimientos que se intersecan, de modo que queda lo siguiente:

e_{12} eje entre el vértice e_1 y e_2

e_{23} eje entre el vértice e_2 y e_3

e_{34} eje entre el vértice e_3 y e_4

e_{41} eje entre el vértice e_4 y e_1

Luego extraemos de la figura 4.17, un complejo simplicial del nervio de Q , $N(Q)$, como se presenta en la figura 4.20.

$$N(Q) : 0 \longrightarrow C^1(Q) \longrightarrow C^0(Q) \longrightarrow 0$$

donde $C^1(Q)$ esta conformado por los 1-símplices del complejo y $C^0(Q)$ por los 0-símplices y definimos al operador frontera ∂ en este complejo como en 2.76.

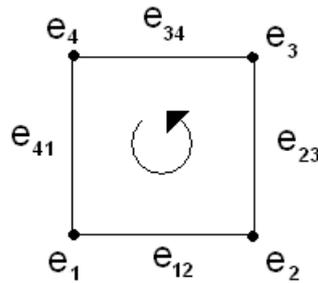


FIGURA 4.20

Ahora buscamos una aplicación que me mande el nervio de Q en d_{ij} (el grupo abeliano multiplicativo $G = R^+$) como fue definida con anterioridad. La aplicación sería la que cumple con lo siguiente:

$$f(e_{ij}) = d_{ij}$$

denotando a $d_{ij} := \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$ se cumple que:

$$f(e_{ij}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$$

Como la función f , es un homomorfismo de grupo se tiene que:

$$\begin{aligned} f(e_{ij} + e_{jk}) &= d_{ij}d_{jk} \\ f(e_{ij} - e_{jk}) &= \frac{d_{ij}}{d_{jk}} \end{aligned}$$

como f pertenece a la cohomología de Čech de U y se define en los 1-símplices, se tiene que por definición, $f \in \widehat{H}^1(Q, G) = H^1(N(Q), G) = H_1(\text{Hom}(N(Q)), R^+)$

Luego $(\text{Hom}(N(Q)), R^+)$, representa un complejo de cocadenas como sigue:

$$0 \longleftarrow \text{Hom}(C^1(Q), R^+) \longleftarrow \text{Hom}(C^0(Q), R^+) \longleftarrow 0$$

donde se tiene como operador a $h \circ \partial$, con ∂ como operador frontera inducido por el complejo simplicial $N(Q)$, y h como función tal que $h \in \text{Hom}(C^k(Q), R^+)$.

Sea $g \in \text{Hom}(C^0(Q), R^+)$, veamos que para todo g definido como $g(e_i) = \lambda_i$, se tiene que $g \circ \partial = f$.

como $f \in H_1(\text{Hom}(N(Q)), R^+)$, entonces $f \in \text{Hom}(C^1(Q), R^+)$

Por definición y homomorfismo se tiene lo siguiente:

$$g \circ \partial(e_{12}) = g(\partial(e_{12})) = g(e_2 - e_1) = \frac{g(e_2)}{g(e_1)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = f(e_{12})$$

Análogamente se prueba para todos los 1-símplices que:

$$g \circ \partial(e_{23}) = f(e_{23})$$

$$g \circ \partial(e_{34}) = f(e_{34})$$

$$g \circ \partial(e_{41}) = f(e_{41})$$

Luego para todo $f \in \text{Hom}(C^1(Q), R^+) \exists g \in \text{Hom}(C^0(Q), R^+)$, tal que

$$g \circ \partial = f.$$

f cumple la definición 2.14, por lo tanto f es exacto.

En conclusión, siempre podemos tomar para una figura imposible, un cubrimiento Q de abiertos que se solapen y que contengan figuras posibles, para luego considerar un vértice en cada abierto y unas aristas que relacionan a cada dos abiertos. Esto permite llevar a la figura imposible a un complejo simplicial o nervio de Q , en donde se presentan unas funciones que son homomorfismos entre el nervio y un grupo multiplicativo abeliano R^+ , definido de tal forma, que cuando $f \in \text{Hom}(C^1(Q), R^+)$, esta permite transformar la arista e_{12} entre dos abiertos Q_1 y Q_2 de la figura, al cociente entre la distancia del espectador a los objetos O_1 y O_2 que tienen como imagen a Q_1 y Q_2 , así la figura es posible, cuando $f(e_{ij}) = 1$ para toda arista en el complejo simplicial, es decir, cuando $R^+ = 1$ en $\text{Hom}(C^1(Q), R^+)$.

Capítulo 5

Anexos

1. Tablas para el complejo simplicial

i	σ_i	h
1	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$
2	$\langle 2 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$
3	$\langle 3 \rangle$	$\langle 1, 2, 3 \rangle$
4	$\langle 4 \rangle$	$\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$
5	$\langle 5 \rangle$	$\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$
6	$\langle 6 \rangle$	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$
7	$\langle 1, 3 \rangle$	$\langle 1, 2, 4, 5, 6 \rangle$
8	$\langle 1, 4 \rangle$	$\langle 1, 2, 5, 6 \rangle$
9	$\langle 1, 6 \rangle$	$\langle 1, 2, 5 \rangle$
10	$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 2, 5 \rangle$
11	$\langle 2, 5 \rangle$	$\langle 2 \rangle$
12	$\langle 3, 4 \rangle$	$\langle 2, 3, 4 \rangle$
13	$\langle 3, 5 \rangle$	$\langle 2, 3, 4, 3, 5 \rangle$
14	$\langle 3, 6 \rangle$	$\langle 2, 3, 4, 3, 5, 3, 6 \rangle$
15	$\langle 4, 6 \rangle$	$\langle 2, 3, 4, 3, 5, 3, 6, 4, 6 \rangle$
16	$\langle 1, 3, 4 \rangle$	$\langle 2, 3, 5, 3, 6, 4, 6 \rangle$
17	$\langle 1, 3, 6 \rangle$	$\langle 2, 3, 5, 4, 6 \rangle$
18	$\langle 1, 4, 6 \rangle$	$\langle 2, 3, 5 \rangle$
19	$\langle 2, 3, 5 \rangle$	$\langle 2 \rangle$
20	$\langle 3, 4, 6 \rangle$	$\langle 2, 3, 4, 6 \rangle$
21	$\langle 1, 3, 4, 6 \rangle$	$\langle 2 \rangle$

FIGURA 5.1. Adelgazamiento del complejo K , $h = \langle 2 \rangle$

1	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 3 \rangle$	$\langle 4 \rangle$	$\langle 5 \rangle$	$\langle 6 \rangle$	$\langle 1,3 \rangle$	$\langle 1,4 \rangle$	$\langle 1,6 \rangle$	$\langle 2,3 \rangle$	$\langle 2,5 \rangle$	$\langle 3,4 \rangle$	$\langle 3,5 \rangle$	$\langle 3,6 \rangle$	$\langle 4,6 \rangle$	$\langle 1,3,4 \rangle$	$\langle 1,3,6 \rangle$	$\langle 1,4,6 \rangle$	$\langle 2,3,5 \rangle$	$\langle 3,4,6 \rangle$	$\langle 1,3,4,6 \rangle$	
2	$\langle 2 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	$\langle 3 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 3 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	$\langle 4 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 3 \rangle$	$\langle 4 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$\langle 5 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 3 \rangle$	$\langle 4 \rangle$	$\langle 5 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$\langle 6 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 3 \rangle$	$\langle 4 \rangle$	$\langle 5 \rangle$	$\langle 6 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	$\langle 1,3 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 4 \rangle$	$\langle 5 \rangle$	$\langle 6 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\langle 1,4 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 5 \rangle$	$\langle 6 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	$\langle 1,6 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 5 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	$\langle 2,3 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 5 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	$\langle 2,5 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	$\langle 3,4 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0	0	0	0	0	$\langle 3,4 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	$\langle 3,5 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0	0	0	0	0	$\langle 3,4 \rangle$	$\langle 3,5 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	$\langle 3,6 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0	0	0	0	0	$\langle 3,4 \rangle$	$\langle 3,5 \rangle$	$\langle 3,6 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0
15	$\langle 4,6 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0	0	0	0	0	$\langle 3,4 \rangle$	$\langle 3,5 \rangle$	$\langle 3,6 \rangle$	$\langle 4,6 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0
16	$\langle 1,3,4 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	$\langle 3,5 \rangle$	$\langle 3,6 \rangle$	$\langle 4,6 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0
17	$\langle 1,3,6 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	$\langle 3,5 \rangle$	0	$\langle 4,6 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0
18	$\langle 1,4,6 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	$\langle 3,5 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	$\langle 2,3,5 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	$\langle 3,4,6 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\langle 3,4,6 \rangle$	0
21	$\langle 1,3,4,6 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					

FIGURA 5.2. Tabla de adelgazamiento para la función f aplicada al complejo simplicial K

2. Algoritmo homolo0

```
function H1= homolo0(Q);
P =1 : 255;
H1 = zeros(size(P));
    for x= 1:255
        Q1= zeros(size(Q));
        Q1(Q==x-1)=255;
        [E,n]= bwlabel(Q1);
        H1(x,1)=n;
    end
end
```

3. Comandos en Matlab, para el cálculo de H_0 en una imagen a color

```
% descomposicion de la imagen a color en sus tres canales
A1=imread('circulo.png');
figure(1),subplot(2,2,1)
imshow(A1), title('imagen en los tres canales')
subplot(2,2,2);
imshow(A1(:,:,3)),title('canal azul')
subplot(2,2,3);
imshow(A1(:,:,2)),title('canal verde')
subplot(2,2,4);
imshow(A1(:,:,1)),title('canal rojo')
B1 =A1(:,:,3);%imagen en el canal azul
B2 =A1(:,:,2);% imagen en el canal verde
B3 =A1(:,:,1);% imagen en el canal rojo
B=zeros(size(B1));
B(B1>128)=1;% binarizacion de la imagen en el canal azul
C=zeros(size(B2));
C(B2>128)=1;% binarizacion de la imagen en el canal verde
D=zeros(size(B3));
```

```

D(B3>128)=1; % binarizacion de la imagen en el canal rojo
figure(2),subplot(2,2,1)%canales binarizados
imshow(A1), title('imagen en los tres canales')
subplot(2,2,2);
imshow(B),title('regiones con alta intensidad de azul')
subplot(2,2,3);
imshow(C),title('regiones con alta intensidad de verde')
subplot(2,2,4);
imshow(D),title('regiones con alta intensidad de rojo')
H_0A=homolo0(B);%número de componentes conexas en cada canal
H_0V=homolo0(C);
H_0R=homolo0(D);

```

4. Algoritmo paletacuatro

```

function R=paletacuatro(I,N1,N2)
R=zeros(size(I));
    for x=1:N1
        for y=1:N2
            if I(x,y)>=0 & I(x,y)<64
                R(x,y)=64/2; %promedio 32
            elseif I(x,y)>=64 & I(x,y)<128
                R(x,y)=(128 +64)/2; %promedio 96
            elseif I(x,y)>=128 & I(x,y)<192
                R(x,y)=(128 + 192)/2; %promedio 160
            elseif I(x,y)>=192 & I(x,y)<256
                R(x,y)=(256 + 192)/2; %promedio 224
            end
        end
    end
end
end
end

```

5. Comandos para el análisis de la obra de René Magritte

```

Q3 = imread('rene magritte.bmp');
figure,imshow(Q3)
ICR3=Q3(:,:,1);
ICV3=Q3(:,:,2);
ICA3=Q3(:,:,3);
figure(2) ,subplot(2,2,1)
imshow(Q3), title('imagen en los tres canales')
subplot(2,2,2);
imshow(Q3(:,:,3)),title('canal azul')
subplot(2,2,3);
imshow(Q3(:,:,2)),title('canal verde')
subplot(2,2,4);
imshow(Q3(:,:,1)),title('canal rojo')
CR=paletacuatro(ICR3,235,320);
CV=paletacuatro(ICV3,235,320);
CA=paletacuatro(ICA3,235,320);
figure(3) ,subplot(2,2,1)
imshow(Q3), title('imagen en los tres canales')
subplot(2,2,2);
imshow(CA,[]),title('canal azul')
subplot(2,2,3);
imshow(CV,[]),title('canal verde')
subplot(2,2,4);
imshow(CR,[]),title('canal rojo')
CCR= homolo0(CR);
CCV= homolo0(CV);
CCA= homolo0(CA);

%figura de la obra de Rene sin la decoración del espejo
Q4 = imread('de magritte sin espejo.bmp');

```

```
figure,imshow(Q4)
ICR2=Q4(:,:,1);
ICV2=Q4(:,:,2);
ICA2=Q4(:,:,3);
figure(2) ,subplot(2,2,1)
imshow(Q4), title('imagen en los tres canales')
subplot(2,2,2);
imshow(Q4(:,:,3)),title('canal azul')
subplot(2,2,3);
imshow(Q4(:,:,2)),title('canal verde')
subplot(2,2,4);
imshow(Q4(:,:,1)),title('canal rojo')
CR2=paletacuatro(ICR2,235,320);
CV2=paletacuatro(ICV2,235,320);
CA2=paletacuatro(ICA2,235,320);
figure(3) ,subplot(2,2,1)
imshow(Q4), title('imagen en los tres canales')
subplot(2,2,2);
imshow(CA2,[]),title('canal azul')
subplot(2,2,3);
imshow(CV2,[]),title('canal verde')
subplot(2,2,4);
imshow(CR2,[]),title('canal rojo')
CCR2= homolo0(CR2);
CCV2= homolo0(CV2);
CCA2= homolo0(CA2);
```

6. Algoritmo de limpieza para imágenes binarias

```

function Bd=limpieza1234FN(I,N1,N2);
Bd=I;
for x=2:N1-1
    for y=2:N2-1
        if I(x,y)~=0 & I(x-1,y)==0 & I(x+1,y)==0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)==0 &
            I(x-1,y-1)==0 & I(x-1,y+1)==0 & I(x+1,y-1)==0 & I(x+1,y+1)==0 |
            I(x-1,y)==0 & I(x+1,y)==0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)==0 &
            I(x-1,y-1)==0 & I(x-1,y+1)==0 & I(x+1,y-1)==0 & I(x+1,y+1)~=0 |
            I(x-1,y)==0 & I(x+1,y)==0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)~=0 &
            I(x-1,y-1)==0 & I(x-1,y+1)==0 & I(x+1,y-1)==0 & I(x+1,y+1)==0 |
            I(x-1,y)==0 & I(x+1,y)==0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)==0 &
            I(x-1,y-1)==0 & I(x-1,y+1)==0 & I(x+1,y-1)~=0 & I(x+1,y+1)==0 |
            I(x-1,y)==0 & I(x+1,y)~=0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)==0 &
            I(x-1,y-1)==0 & I(x-1,y+1)==0 & I(x+1,y-1)==0 & I(x+1,y+1)==0 |
            I(x-1,y)==0 & I(x+1,y)==0 & I(x,y-1)~=0 & I(x,y+1)==0 &
            I(x-1,y-1)==0 & I(x-1,y+1)==0 & I(x+1,y-1)==0 & I(x+1,y+1)==0 |
            I(x-1,y)~=0 & I(x+1,y)==0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)==0 &
            I(x-1,y-1)==0 & I(x-1,y+1)==0 & I(x+1,y-1)==0 & I(x+1,y+1)==0 |
            I(x-1,y)==0 & I(x+1,y)==0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)==0 &
            I(x-1,y-1)==0 & I(x-1,y+1)~=0 & I(x+1,y-1)==0 & I(x+1,y+1)==0 |
            I(x-1,y)==0 & I(x+1,y)==0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)==0 &
            I(x-1,y-1)~=0 & I(x-1,y+1)==0 & I(x+1,y-1)==0 & I(x+1,y+1)==0 |
            I(x-1,y)~=0 & I(x+1,y)==0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)==0 &
            I(x-1,y-1)~=0 & I(x-1,y+1)==0 & I(x+1,y-1)==0 & I(x+1,y+1)==0 |
            I(x-1,y)==0 & I(x+1,y)==0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)~=0 &
            I(x-1,y-1)==0 & I(x-1,y+1)==0 & I(x+1,y-1)==0 & I(x+1,y+1)~=0 |
            I(x-1,y)==0 & I(x+1,y)~=0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)==0 &

```

$I(x-1,y-1)==0 \ \& \ I(x-1,y+1)==0 \ \& \ I(x+1,y-1)==0 \ \& \ I(x+1,y+1)\sim=0 \ |$
 $I(x-1,y)==0 \ \& \ I(x+1,y)\sim=0 \ \& \ I(x,y-1)==0 \ \& \ I(x,y+1)==0 \ \&$
 $I(x-1,y-1)==0 \ \& \ I(x-1,y+1)==0 \ \& \ I(x+1,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x+1,y+1)==0 \ |$
 $I(x-1,y)==0 \ \& \ I(x+1,y)==0 \ \& \ I(x,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x,y+1)==0 \ \&$
 $I(x-1,y-1)==0 \ \& \ I(x-1,y+1)==0 \ \& \ I(x+1,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x+1,y+1)==0 \ |$
 $I(x-1,y)==0 \ \& \ I(x+1,y)==0 \ \& \ I(x,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x,y+1)==0 \ \&$
 $I(x-1,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x-1,y+1)==0 \ \& \ I(x+1,y-1)==0 \ \& \ I(x+1,y+1)==0 \ |$
 $I(x-1,y)==0 \ \& \ I(x+1,y)==0 \ \& \ I(x,y-1)==0 \ \& \ I(x,y+1)\sim=0 \ \&$
 $I(x-1,y-1)==0 \ \& \ I(x-1,y+1)\sim=0 \ \& \ I(x+1,y-1)==0 \ \& \ I(x+1,y+1)==0 \ |$
 $I(x-1,y)\sim=0 \ \& \ I(x+1,y)==0 \ \& \ I(x,y-1)==0 \ \& \ I(x,y+1)==0 \ \&$
 $I(x-1,y-1)==0 \ \& \ I(x-1,y+1)\sim=0 \ \& \ I(x+1,y-1)==0 \ \& \ I(x+1,y+1)==0 \ |$
 $I(x-1,y)==0 \ \& \ I(x+1,y)\sim=0 \ \& \ I(x,y-1)==0 \ \& \ I(x,y+1)\sim=0 \ \&$
 $I(x-1,y-1)==0 \ \& \ I(x-1,y+1)==0 \ \& \ I(x+1,y-1)==0 \ \& \ I(x+1,y+1)\sim=0 \ |$
 $I(x-1,y)==0 \ \& \ I(x+1,y)\sim=0 \ \& \ I(x,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x,y+1)==0 \ \&$
 $I(x-1,y-1)==0 \ \& \ I(x-1,y+1)==0 \ \& \ I(x+1,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x+1,y+1)==0 \ |$
 $I(x-1,y)\sim=0 \ \& \ I(x+1,y)==0 \ \& \ I(x,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x,y+1)==0 \ \&$
 $I(x-1,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x-1,y+1)==0 \ \& \ I(x+1,y-1)==0 \ \& \ I(x+1,y+1)==0 \ |$
 $I(x-1,y)\sim=0 \ \& \ I(x+1,y)==0 \ \& \ I(x,y-1)==0 \ \& \ I(x,y+1)\sim=0 \ \&$
 $I(x-1,y-1)==0 \ \& \ I(x-1,y+1)\sim=0 \ \& \ I(x+1,y-1)==0 \ \& \ I(x+1,y+1)\sim=0 \ |$
 $I(x-1,y)==0 \ \& \ I(x+1,y)\sim=0 \ \& \ I(x,y-1)==0 \ \& \ I(x,y+1)==0 \ \&$
 $I(x-1,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x-1,y+1)==0 \ \& \ I(x+1,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x+1,y+1)==0 \ |$
 $I(x-1,y)\sim=0 \ \& \ I(x+1,y)==0 \ \& \ I(x,y-1)==0 \ \& \ I(x,y+1)==0 \ \&$
 $I(x-1,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x-1,y+1)\sim=0 \ \& \ I(x+1,y-1)==0 \ \& \ I(x+1,y+1)==0 \ |$
 $I(x-1,y)==0 \ \& \ I(x+1,y)\sim=0 \ \& \ I(x,y-1)\sim=0 \ \& \ I(x,y+1)==0 \ \&$

```
I(x-1,y-1)~=0 & I(x-1,y+1)==0 & I(x+1,y-1)~=0 & I(x+1,y+1)==0 |
I(x-1,y)~=0 & I(x+1,y)==0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)~=0 &
I(x-1,y-1)==0 & I(x-1,y+1)~=0 & I(x+1,y-1)==0 & I(x+1,y+1)~=0 |
I(x-1,y)~=0 & I(x+1,y)==0 & I(x,y-1)~=0 & I(x,y+1)==0 &
I(x-1,y-1)~=0 & I(x-1,y+1)==0 & I(x+1,y-1)~=0 & I(x+1,y+1)==0 |
I(x-1,y)==0 & I(x+1,y)~=0 & I(x,y-1)==0 & I(x,y+1)~=0 &
I(x-1,y-1)==0 & I(x-1,y+1)~=0 & I(x+1,y-1)==0 & I(x+1,y+1)~=0
Bd(x,y)=0;
    end
end
end
```

Bibliografía

- [1] FRANTZ MARC, Mathematics and Art. Indianapolis, Indiana, 1997.
- [2] SAMUEL Y, EDGERTON JR, Arte y Ciencia. La Visión en el Renacimiento. Department of Art, Williams College, Maryland, 2002.
- [3] KACZYNSKI TOMASZ, MISCHAIKOW KONSTANTIN, MROZEK MARIAN, Computational Homology, Appl. Math. Sci., vol. 157, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [4] GONZÁLEZ ÁLVARO, POSTIGO JOSÉ, Estudio Homológico de Imágenes en 2D y 3D, Sevilla, Junio de 2009.
- [5] GUTIERREZ ROSA, Análisis Homológico de Imágenes Reales de Resonancia Magnética. Sevilla, Junio del 2008.
- [6] PENROSE ROGER, On the Cohomology of Impossible Figures. Leonardo, Vol. 25, No. 3/4, Visual Mathematics: Special Double Issue (1992), pp. 245-247. Oxford.
- [7] SVELIEV PETER, Topological Analysis of Parametric Images. Preprint (2006), Marshall University.
- [8] SZE-TSEN HU, Introducción al Álgebra Homológica. Barcelona : Vicens-Vives, (1974)