



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Evaluación del Método de Von Rosenberg para la Ecuación de Convección-Difusión

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Iver Grau** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutora: Dra. Nathaly Guanda.

Caracas, Venezuela

Octubre 2015

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Evaluación del Método de Von Rosenberg para la Ecuación de Convección-Difusión**”, presentado por el **Br. Iver D. Grau M.**, titular de la Cédula de Identidad **19.564.164**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Profa. Nathaly Guanda

C.I. 11.203.769

Tutora

Prof. J.M. Guevara Jordán

C.I. 6.006.521

Jurado

Profa. Carmen Da Silva

C.I. 16.924.181

Jurado

Dedicatoria

Dedico esta tesis a Dios y a San Judas Tadeo, por ayudarme a superar en la vida y poder seguir adelante.

A mi madre Carmen María, a mi padre César Grau, a mi hermana Milagros y a todas aquellas personas que siempre han estado presentes dandome todo su apoyo.

A mi tutora, la Dra. Nathaly Guanda y al Dr. Juan Guevara, por toda la ayuda, orientación y consejos durante la realización de este trabajo de grado.

Agradecimientos

Agradezco a Dios y a San Judas Tadeo, por ayudarme a progresar durante toda mi vida y por ayudarme a alcanzar todas mis metas hasta el momento.

Todo mi agradecimiento a la Dra. Nathaly Guanda y al Dr. Juan Guevara, por su paciencia, dedicación, por contribuir con sus observaciones y sugerencias, por los conocimientos transmitidos, por todo del tiempo que invirtieron durante este trabajo de grado. Les doy las gracias por el interés de que este trabajo avanzara cada día, por la confianza y por ayudarme a superar académicamente.

A la profesora Carmen Da Silva, por recomendarme a la Dra. Nathaly Guanda como tutora.

Índice General

Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas	viii
Resumen	1
Introducción	2
Capítulo 1. Ecuación de Convección-Difusión Unidimensional	4
1.1 Ecuación de Convección-Difusión Unidimensional	4
1.2 Condiciones Iniciales y de Contorno	5
1.3 Solución Analítica	6
1.4 Aplicaciones de la Ecuación de Convección-Difusión Unidimensional	6
Capítulo 2. Diferencias Finitas	8
2.1 Diferencias Finitas	8
2.2 Método de Crank-Nicholson	12
Capítulo 3. Método de Von Rosenberg	14
3.1 Método de Von Rosenberg	14
3.2 Estudio de la Consistencia	26
3.3 Estudio de la Estabilidad	34
3.4 Estudio de la Convergencia	37
Capítulo 4. Experimentos Numéricos	38
4.1 Ejemplo 1	39

4.2 Ejemplo 2	47
4.3 Ejemplo 3	56
Capítulo 5. Conclusión	65
Bibliografía	67

Lista de Figuras

1	Malla o red computacional.	9
2	Esquema del método de Crank-Nicholson.	13
3	Comparación de las soluciones aproximadas obtenidas con los métodos VR y DF vs Solución Analítica ($D=0.001, t = 4$).	39
4	Comparación de las soluciones aproximadas obtenidas con los métodos VR y DF vs Solución Analítica ($D=0.1, t = 4$).	42
5	Comparación de las soluciones aproximadas obtenidas con los métodos VR y DF vs Solución Analítica ($D=0.001, t = 4$).	48
6	Comparación de las soluciones aproximadas obtenidas con los métodos VR y DF vs Solución Analítica ($D=0.1, t = 4$).	51
7	Comparación de las soluciones aproximadas obtenidas con los métodos VR y DF vs Solución Analítica ($D=0.001, t = 2$).	57
8	Comparación de las soluciones aproximadas obtenidas con los métodos VR y DF vs Solución Analítica ($D=0.1, t = 2$).	60

Lista de Tablas

1	Resultados del ejemplo 1a ($D=0.001, t=4$).	40
2	Resultados del ejemplo 1b ($D=0.1, t=4$).	43
3	Resultados del ejemplo 2a ($D=0.001, t=4$).	49
4	Resultados del ejemplo 2b ($D=0.1, t=4$).	52
5	Resultados del ejemplo 3a ($D=0.001, t=2$).	58
6	Resultados del ejemplo 3b ($D=0.1, t=2$).	61

Resumen

Se presenta el esquema numérico explícito desarrollado por Von Rosenberg para la ecuación de convección-difusión en una dimensión espacial. Se describe la ecuación de convección-difusión unidimensional, se muestran sus condiciones de contorno e inicial y se mencionan sus aplicaciones en ingeniería y ciencias aplicadas. Para este trabajo de tesis se estudian el método de Diferencias Finitas y el método de Crank-Nicholson, ya que para realizar el estudio del esquema que nos interesa que es el de Von Rosenberg, se necesita conocer esos dos métodos. Al método de Von Rosenberg se le realiza el estudio analítico de convergencia, este estudio corrige el análisis de consistencia presentado por Von Rosenberg [9] y lo complementa con el análisis de estabilidad, el cual es omitido por Rosenberg [9]. En consecuencia el estudio de convergencia es un aporte original de este trabajo de tesis. Para concluir, se muestran los experimentos numéricos, en total son tres ejemplos, los ejemplos 2 y 3 son aportes originales de esta tesis. En los tres ejemplos se compara gráfica y numéricamente el método de Von Rosenberg y el método de Diferencias Finitas y se puede observar en los resultados de estos experimentos, que para obtener las mejores aproximaciones a la solución analítica de la ecuación de convección-difusión unidimensional, se debe usar el método de Von Rosenberg.

Introducción

Los métodos numéricos son muy importantes ya que ayudan a resolver problemas matemáticos, de ingeniería y científicos. Gracias a los métodos numéricos podemos aproximar de una manera eficaz las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. Para este trabajo de tesis nos basamos en el trabajo realizado por D. U. Von Rosenberg [8]. El propósito de este trabajo de tesis es el estudio del esquema numérico explícito desarrollado por Von Rosenberg para la ecuación de convección-difusión unidimensional, este esquema es válido para grandes velocidades con bajos coeficientes de difusión o el caso opuesto, en estos escenarios las técnicas convencionales muestran excesiva difusión numérica. En este contexto, el esquema de Von Rosenberg sigue siendo el más simple de entender e implementar para este tipo de ecuaciones. Muchos autores han realizado estudios matemáticos de la ecuación de convección-difusión, como [5, 6].

El estudio de este trabajo de tesis comienza con el capítulo 1, en él se describe la ecuación de convección-difusión unidimensional y las variables y coeficientes que intervienen en ella, también se explica el fenómeno físico que describe la ecuación y se presentan varios conceptos físicos de transferencia de calor que ayudan a entender el fenómeno físico de convección-difusión. Luego presentamos las condiciones de contorno e inicial para la ecuación de convección-difusión unidimensional y su solución analítica. Al finalizar este capítulo se mencionan las aplicaciones de la ecuación de convección-difusión unidimensional y sus utilidades en la vida diaria. En el capítulo 2 se muestran dos métodos numéricos que nos ayudan a desarrollar el método de Von Rosenberg, ellos son: el método de Diferencias Finitas y el método de Crank-Nicholson. Empezaremos este capítulo explicando el método de Diferencias Finitas, el uso que se le da y en qué consiste. Explicaremos en qué se basa la técnica fundamental para realizar los cálculos numéricos en diferencias finitas, mostraremos el desarrollo de Taylor y su error de truncamiento. El desarrollo de Taylor ayuda a obtener las

aproximaciones por diferencias finitas para las derivadas (en nuestro caso, primera y segunda derivada) y él nos servirá para entender cuando una aproximación por diferencias finitas para una derivada, puede ser mejor que otra, sólo observando su error de truncamiento. Posteriormente se expone el método de Crank-Nicholson, es decir, se explica en qué consiste este método, se muestran sus aproximaciones a las derivadas parciales y se menciona el error de truncamiento de este método. Luego en el capítulo 3 desarrollaremos con todo detalle el método de Von Rosenberg y se podrá evidenciar su simplicidad para obtener la ecuación en diferencias. Empezaremos por mostrar las aproximaciones a las derivadas parciales que se van a sustituir en la ecuación de convección-difusión unidimensional, para así obtener la ecuación en diferencias finitas por el método de Von Rosenberg. Después de obtener el esquema de Von Rosenberg, se realizarán los estudios de consistencia, de estabilidad y de convergencia a éste.

En el capítulo 4 se puede constatar la precisión que tiene el método de Von Rosenberg para aproximarse numéricamente a la solución analítica de la ecuación de convección-difusión unidimensional, mediante diversas pruebas numéricas. Finalmente se presentan las conclusiones de este trabajo en el capítulo 5.

Capítulo 1

1. Ecuación de Convección-Difusión Unidimensional

1.1 Ecuación de Convección-Difusión Unidimensional

La ecuación de convección-difusión

$$(1.1.1) \quad D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Donde:

u es la propiedad del fluido.

x es la variable espacial ($x \geq 0$).

t es la variable temporal ($t \geq 0$).

D es el coeficiente de difusión (constante).

v es la velocidad del fluido (constante).

La ecuación de convección y difusión expresa matemáticamente un proceso físico de la transferencia de calor que combina simultáneamente ambas formas de transmisión. Sin embargo existen otros procesos físicos como el flujo de fluidos en medios porosos que también se rigen por la misma ecuación

Para entender mejor lo que describe la ecuación necesitamos saber los conceptos de convección y difusión.

Convección: Es el modo de transferencia de energía entre una superficie sólida y el líquido o gas adyacente que está en movimiento y comprende los efectos combinados de la conducción y el movimiento de fluidos [10].

Difusión: Es el proceso físico que describe cómo la energía térmica se dispersa [7].

Cuando solo hay convección la ecuación de transmisión de calor es

$$(1.1.2) \quad -v \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Cuando solo hay difusión la ecuación de transmisión de calor es

$$(1.1.3) \quad D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Luego cuando existe un proceso donde hay convección y difusión simultáneamente entonces aplicamos el principio de superposición a las ecuaciones (1.1.2) y (1.1.3), dando como resultado la ecuación (1.1.1).

1.2 Condiciones Iniciales y de Contorno

La condición de frontera general de la ecuación (1.1.1) para todo t es

$$(1.2.1) \quad v(1 - u(0, t)) + D \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0.$$

Cuando D se aproxima a 0, esta condición se simplifica a

$$(1.2.2) \quad u(0, t) = 1.$$

La condición de borde (1.2.2) se aplica a la ecuación (1.1.2). Dado que D es pequeña para los casos de interés, la mayoría de las soluciones numéricas se obtuvieron con (1.2.2). La condición (1.2.2) es la única que se puede aplicar fácilmente a la ecuación en diferencias finitas por el método de Von Rosenberg. La condición inicial utilizada para la mayoría de las soluciones, para todos los valores de x , fue

$$(1.2.3) \quad u(x, 0) = 0.$$

1.3 Solución Analítica

La solución analítica para la ecuación (1.1.1), con condición de borde (1.2.2) y condición inicial (1.2.3) es

$$(1.3.1) \quad u = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x - vt}{2\sqrt{Dt}} \right) + \exp \left(\frac{vx}{D} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + vt}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]$$

donde

$$(1.3.2) \quad \operatorname{erfc}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

La función error complementaria es llamada *erfc*. La integral que se encuentra del lado derecho de la igualdad en (1.3.2) se le llama integral de probabilidad.

1.4 Aplicaciones de la Ecuación de Convección-Difusión Unidimensional

Es común encontrar la transferencia de calor en los sistemas de ingeniería y otros aspectos de la vida y no es necesario ir muy lejos para ver algunas de sus áreas de aplicación. De hecho, no es necesario ir a alguna parte. El cuerpo humano está emitiendo calor en forma constante hacia sus alrededores. Tratamos de controlar esta transferencia de calor al ajustar nuestra ropa a las condiciones ambientales [10].

Muchos aparatos domésticos comunes están diseñados, en su conjunto o en parte, mediante la aplicación de los principios de la transferencia de calor. Algunos ejemplos entran en el dominio de las aplicaciones eléctricas o del uso del gas: el sistema de calefacción y acondicionamiento de aire, el calentador de agua, la plancha y aparatos electrónicos. Los hogares más eficientes se diseñan de manera que puedan minimizar la pérdida y ganancia de

calor en ciertas estaciones del año, ésto se logra usando el espesor óptimo del aislamiento de las paredes y techos de las casas [10].

La ecuación de Convección-Difusión presenta numerosas aplicaciones en ingeniería y ciencias aplicadas. Por ejemplo, los procesos de convección natural se modelan a través de dicha ecuación [10].

Capítulo 2

2. Diferencias Finitas

2.1 Diferencias Finitas

El método de Diferencias Finitas es el que se usa para aproximar numéricamente soluciones de ecuaciones en derivadas parciales, como: la ecuación del calor, la ecuación de ondas y la ecuación de Laplace.

El método de diferencias finitas consiste en reemplazar un dominio continuo espacio-tiempo por un conjunto de puntos (cada uno de ellos llamados nodos), a ese conjunto de puntos se le llama malla o red computacional.

Se debe pasar de la(s) ecuación(es) en derivadas parciales por un sistema de ecuaciones algebraicas, pues se aproximan a los operadores diferenciales por diferencia finita, de esta forma se obtiene una ecuación algebraica en cada punto de la malla, estas ecuaciones algebraicas involucran los valores de las funciones en el punto considerado y en sus vecinos cercanos. Entonces, nuestro problema se transforma en uno de algebra matricial.

En el método de diferencias finitas se trabaja en un dominio $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ acotado en \mathbb{R}^2 con las siguientes particiones.

Supongamos que,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

$$c = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{M-1} < t_M = d.$$

Representan particiones regulares del intervalo $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente, es decir, $x_i = a + i\Delta x$, donde $i = 0, 1, 2, \dots, N$ y $\Delta x = (b - a)/N$ y para $t_m = c + m\Delta t$, donde $m = 0, 1, 2, \dots, M$ y $\Delta t = (d - c)/M$.

Sustituyendo i y m en x_i y t_m queda:

$$x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \dots, \quad x_{N-1} = a + (N-1)\Delta x$$

$$t_1 = c + \Delta t, \quad t_2 = c + 2\Delta t, \dots, \quad t_{M-1} = c + (M-1)\Delta t.$$

Los puntos,

$$(x_1, t_1), \quad (x_2, t_2), \dots, \quad (x_{N-1}, t_{M-1}).$$

Se llaman nodos de malla interior del dominio $[a, b] \times [c, d]$.

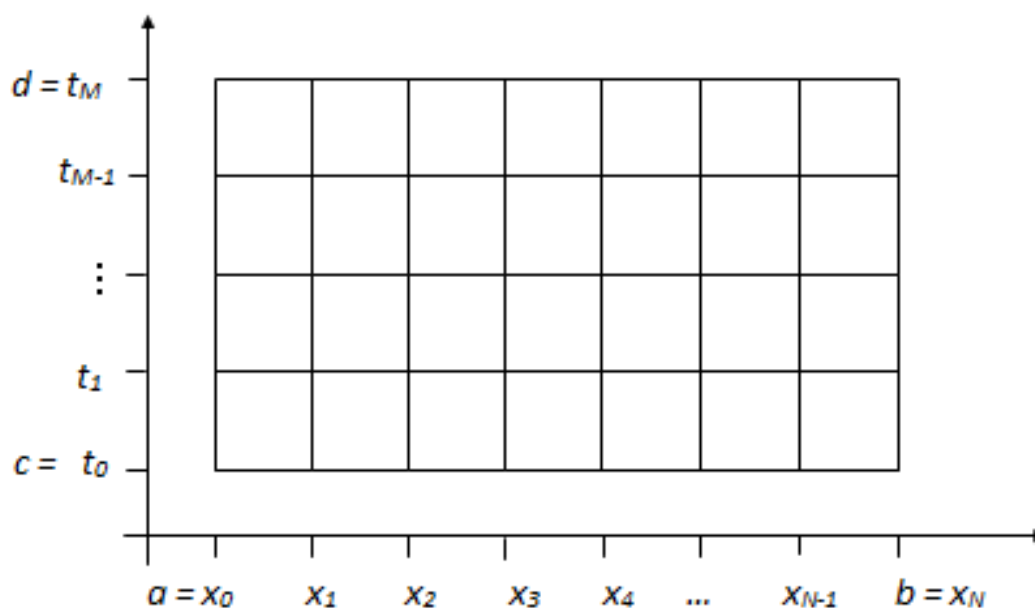


Figura 1: Malla o red computacional.

Aproximaciones polinómicas

La técnica fundamental para los cálculos numéricos en diferencias finitas se basa en las aproximaciones polinómicas de la función $f(x)$ cerca de $x = x_0$.

Sea $x = x_0 + \Delta x$ entonces $\Delta x = x - x_0$. Si aproximáramos $f(x)$ por una constante cerca de $x = x_0$, se elegiría $f(x_0)$.

Una mejor aproximación para $f(x)$ se obtiene mediante su recta tangente en $x = x_0$:

$$(2.1.1) \quad f(x) \approx f(x_0) + \Delta x \frac{df}{dx}(x_0).$$

También se puede aproximar $f(x)$ por una aproximación cuadrática en $x = x_0$, esto es:

$$(2.1.2) \quad f(x) \approx f(x_0) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{df}{dx}(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0).$$

Si queremos una aproximación cúbica de $f(x)$ en $x = x_0$ sería de la siguiente forma:

$$(2.1.3) \quad f(x) \approx f(x_0) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{df}{dx}(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3}(x_0).$$

Fórmula de Taylor y Error de Truncamiento

La fórmula de Taylor centrada en x_0 , de una función $f(x)$ es

$$(2.1.4) \quad f(x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \cdots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n.$$

El resto R_n tiene la siguiente forma

$$(2.1.5) \quad R_n = \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{n+1}).$$

Donde: $x_0 < \xi_{n+1} < x_0 + \Delta x$.

Aproximaciones por diferencias finitas. Primera derivada.

Usando la fórmula de Taylor con $n = 1$, se puede aproximar la primera derivada de varias formas.

$$f(x) = f(x_0) + \Delta x \frac{df}{dx}(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi_2)$$

despejando de la ecuación anterior $\frac{df}{dx}(x_0)$ obtenemos

$$(2.1.6) \quad \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi_2).$$

Luego, la aproximación por diferencias finitas para $\frac{df}{dx}$ es:

$$(2.1.7) \quad \frac{df}{dx}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

A esta aproximación se le llama aproximación por **diferencias hacia adelante**.

Si sustituimos Δx por $-\Delta x$ en (2.1.7) queda:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(\bar{\xi}_2)$$

de donde:

$$(2.1.8) \quad \frac{df}{dx}(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}.$$

Esta aproximación se llama aproximación por **diferencias hacia atrás**.

Si queremos una aproximación más precisa de $\frac{df}{dx}(x_0)$ se pueden restar las fórmulas de Taylor de $f(x_0 + \Delta x)$ y $f(x_0 - \Delta x)$, estas fórmulas son:

$$(2.1.9) \quad f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(\xi_3)$$

$$(2.1.10) \quad f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(\bar{\xi}_3)$$

Donde: $x_0 < \xi_3 < x_0 + \Delta x$ y $x_0 - \Delta x < \bar{\xi}_3 < x_0$.

Restando (2.1.9) y (2.1.10), nos queda

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x) = 2\Delta x \frac{df}{dx}(x_0) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{d^3 f}{dx^3}(\xi_3) + \frac{d^3 f}{dx^3}(\bar{\xi}_3) \right)$$

despejando $\frac{df}{dx}(x_0)$ resulta

$$(2.1.11) \quad \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{2(6)} \left(\frac{d^3 f}{dx^3}(\xi_3) + \frac{d^3 f}{dx^3}(\bar{\xi}_3) \right).$$

Así obtenemos una aproximación por **diferencias centrales** de $\frac{df}{dx}(x_0)$:

$$(2.1.12) \quad \frac{df}{dx}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}.$$

El error de truncamiento en las ecuaciones (2.1.7) y (2.1.8) es $O(\Delta x)$ y de la ecuación (2.1.12) es $O((\Delta x)^2)$.

Aproximaciones por diferencias finitas. Segunda derivada.

Sumando las ecuaciones (2.1.9) y (2.1.10) con $n = 3$, obtenemos

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + \frac{2(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) + \frac{2(\Delta x)^4}{4!} \left(\frac{d^4 f}{dx^4}(\xi_4) + \frac{d^4 f(x_0)}{dx^4}(\bar{\xi}_4) \right)$$

Despejando $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$

$$(2.1.13) \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} \left(\frac{d^4 f}{dx^4}(\xi_4) + \frac{d^4 f(x_0)}{dx^4}(\bar{\xi}_4) \right)$$

Donde: $x_0 < \xi_4 < x_0 + \Delta x$ y $x_0 - \Delta x < \bar{\xi}_4 < x_0$.

Así obtenemos la aproximación por diferencias finitas para la segunda derivada con el error de truncamiento de orden $O((\Delta x)^2)$:

$$(2.1.14) \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

2.2 Método de Crank-Nicholson

Este método lo crearon John Crank y Phyllis Nicholson en 1947 [7]. Es un método de diferencias finitas usado para la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales, tales como la ecuación del calor. El método consiste en reemplazar las derivadas espaciales por un promedio de los cocientes en diferencias centrales, un cociente se evalúa en n (recta del n -ésimo tiempo) y el otro en $n + 1$ (recta del $(n + 1)$ -ésimo tiempo). Para la derivada temporal se usan diferencias hacia adelante. Estas aproximaciones para las derivadas las mostramos a continuación:

$$(2.2.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2}$$

$$(2.2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right)$$

$$(2.2.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}.$$

La notación para las aproximaciones anteriores es la siguiente, $u(x_i, t_n) = u_i^n$, así por ejemplo para los términos, $u(x_i + \Delta x_i, t_n)$, $u(x_i - \Delta x_i, t_n)$ y $u(x_i + \Delta x_i, t_n + \Delta t_n)$, con el cambio de notación quedan, u_{i+1}^n , u_{i-1}^n y u_{i+1}^{n+1} , respectivamente.

El error de truncamiento es la suma de dos términos, uno $(\Delta x)^2$ y el otro $(\Delta t)^2$, el error es entonces de orden cuadrático tanto para el espacio como para el tiempo. El método de Crank-Nicholson es implícito ya que se necesita resolver un sistema lineal de $N - 1$ ecuaciones. Sin embargo, por ser implícito, el método no tiene problemas de inestabilidad [7]. Este método utiliza seis puntos, tres de los cuales son en el tiempo posterior. En la figura 2 se puede observar el esquema de Crank-Nicholson al sustituir las aproximaciones (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3) en la ecuación de convección-difusión (1.1.1).

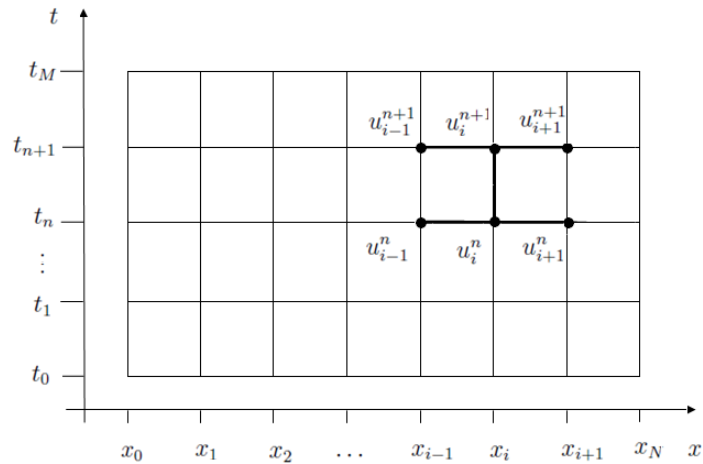


Figura 2: Esquema del método de Crank-Nicholson.

Capítulo 3

3. Método de Von Rosenberg.

3.1 Método de Von Rosenberg.

A continuación presentaremos el método de Von Rosenberg usando la ecuación de convección-difusión unidimensional, mostrada en la siguiente ecuación.

$$(3.1.1) \quad D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

La ecuación (3.1.1) describe los fenómenos de transporte unidimensional de cierta magnitud física (por ejemplo, el calor) en un fluido, debido a los procesos de difusión y convección.

Para obtener el método de Von Rosenberg uniremos el método de Crank-Nicholson y el método de Diferencias Finitas. Este esquema se le aplicará a la ecuación (3.1.1). Las aproximaciones para las derivadas de la ecuación (3.1.1) por el método de Crank-Nicholson, son las que mostramos en el capítulo anterior, es decir, las aproximaciones (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3).

Ahora, vamos a sustituir las aproximaciones para las derivadas por el método de Crank-Nicholson en la ecuación (3.1.1).

$$D \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} \right] - v \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \right] = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

Podemos reescribir las fracciones del lado izquierdo como suma de numeradores con igual denominador.

$$D \frac{[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}]}{2(\Delta x)^2} - v \frac{[u_{i+1}^n - u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}]}{4\Delta x} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}.$$

El común denominador de las fracciones del lado izquierdo es, $4(\Delta x)^2$. Cuando se hace la resta de esas fracciones queda

$$\frac{2D[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}] - v(\Delta x)[u_{i+1}^n - u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}]}{4(\Delta x)^2} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}.$$

Multiplicando la ecuación anterior por $1/v$ resulta

$$\frac{2D[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}] - v(\Delta x)[u_{i+1}^n - u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}]}{4(\Delta x)^2 v} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{v(\Delta t)}.$$

Aplicando propiedad distributiva en el lado izquierdo de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} & \frac{2Du_{i+1}^n - 4Du_i^n + 2Du_{i-1}^n + 2Du_{i+1}^{n+1} - 4Du_i^{n+1} + 2Du_{i-1}^{n+1} - v(\Delta x)u_{i+1}^n + v(\Delta x)u_{i-1}^n - v(\Delta x)u_{i+1}^{n+1} + v(\Delta x)u_{i-1}^{n+1}}{4(\Delta x)^2 v} \\ &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{v(\Delta t)}. \end{aligned}$$

El denominador de la fracción del lado izquierdo de la ecuación anterior se puede escribir como $4(\Delta x)v(\Delta x)$.

$$\begin{aligned} & \frac{2Du_{i+1}^n - 4Du_i^n + 2Du_{i-1}^n + 2Du_{i+1}^{n+1} - 4Du_i^{n+1} + 2Du_{i-1}^{n+1} - v(\Delta x)u_{i+1}^n + v(\Delta x)u_{i-1}^n - v(\Delta x)u_{i+1}^{n+1} + v(\Delta x)u_{i-1}^{n+1}}{4(\Delta x)v(\Delta x)} \\ &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{v(\Delta t)}. \end{aligned}$$

Se multiplica a ambos lados de la ecuación anterior por $4(\Delta x)$.

$$\begin{aligned} & \frac{2Du_{i+1}^n - 4Du_i^n + 2Du_{i-1}^n + 2Du_{i+1}^{n+1} - 4Du_i^{n+1} + 2Du_{i-1}^{n+1} - v(\Delta x)u_{i+1}^n + v(\Delta x)u_{i-1}^n - v(\Delta x)u_{i+1}^{n+1} + v(\Delta x)u_{i-1}^{n+1}}{v(\Delta x)} \\ &= \frac{4(\Delta x)[u_i^{n+1} - u_i^n]}{v(\Delta t)}. \end{aligned}$$

Aplicando propiedad distributiva en el lado derecho de la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} & \frac{2Du_{i+1}^n - 4Du_i^n + 2Du_{i-1}^n + 2Du_{i+1}^{n+1} - 4Du_i^{n+1} + 2Du_{i-1}^{n+1} - v(\Delta x)u_{i+1}^n + v(\Delta x)u_{i-1}^n - v(\Delta x)u_{i+1}^{n+1} + v(\Delta x)u_{i-1}^{n+1}}{v(\Delta x)} \\ &= \frac{4(\Delta x)u_i^{n+1} - 4(\Delta x)u_i^n}{v(\Delta t)}. \end{aligned}$$

Separando las fracciones de la ecuación anterior como suma de fracciones con igual denominador.

$$\begin{aligned} & \frac{2D}{v(\Delta x)}u_{i+1}^n - \frac{4D}{v(\Delta x)}u_i^n + \frac{2D}{v(\Delta x)}u_{i-1}^n + \frac{2D}{v(\Delta x)}u_{i+1}^{n+1} - \frac{4D}{v(\Delta x)}u_i^{n+1} + \frac{2D}{v(\Delta x)}u_{i-1}^{n+1} - \frac{v(\Delta x)}{v(\Delta x)}u_{i+1}^n \\ & + \frac{v(\Delta x)}{v(\Delta x)}u_{i-1}^n - \frac{v(\Delta x)}{v(\Delta x)}u_{i+1}^{n+1} + \frac{v(\Delta x)}{v(\Delta x)}u_{i-1}^{n+1} = \frac{4(\Delta x)}{v(\Delta t)}u_i^{n+1} - \frac{4(\Delta x)}{v(\Delta t)}u_i^n. \end{aligned}$$

Se puede escribir la ecuación anterior de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \frac{2D}{v(\Delta x)}u_{i+1}^n - 2\left(\frac{2D}{v(\Delta x)}\right)u_i^n + \frac{2D}{v(\Delta x)}u_{i-1}^n + \frac{2D}{v(\Delta x)}u_{i+1}^{n+1} - 2\left(\frac{2D}{v(\Delta x)}\right)u_i^{n+1} + \frac{2D}{v(\Delta x)}u_{i-1}^{n+1} \\ & - \frac{v(\Delta x)}{v(\Delta x)}u_{i+1}^n + \frac{v(\Delta x)}{v(\Delta x)}u_{i-1}^n - \frac{v(\Delta x)}{v(\Delta x)}u_{i+1}^{n+1} + \frac{v(\Delta x)}{v(\Delta x)}u_{i-1}^{n+1} = 2\left(\frac{2(\Delta x)}{v(\Delta t)}\right)u_i^{n+1} - 2\left(\frac{2(\Delta x)}{v(\Delta t)}\right)u_i^n. \end{aligned}$$

Llamaremos $R = \frac{2D}{v\Delta x}$ y $Q = \frac{\Delta x}{v\Delta t}$. Así, la ecuación anterior queda

$$Ru_{i+1}^n - 2Ru_i^n + Ru_{i-1}^n + Ru_{i+1}^{n+1} - 2Ru_i^{n+1} + Ru_{i-1}^{n+1} - u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} = 4Qu_i^{n+1} - 4Qu_i^n.$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned} & Ru_{i-1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} - 2Ru_i^{n+1} - 4Qu_i^{n+1} + Ru_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^{n+1} = -Ru_{i-1}^n - u_{i-1}^n + 2Ru_i^n - 4Qu_i^n \\ & - Ru_{i+1}^n + u_{i+1}^n. \end{aligned}$$

Sacando factor común de la ecuación anterior la función u obtenemos la ecuación (3.1.2)

(3.1.2)

$$(R+1)u_{i-1}^{n+1} + (-2R-4Q)u_i^{n+1} + (R-1)u_{i+1}^{n+1} = -(R+1)u_{i-1}^n + (2R-4Q)u_i^n - (R-1)u_{i+1}^n.$$

Cuando $R = 1$ en la ecuación (3.1.2) queda

$$(3.1.2.a) \quad 2u_{i-1}^{n+1} + (-2-4Q)u_i^{n+1} = -2u_{i-1}^n + (2-4Q)u_i^n.$$

Se puede observar que la ecuación (3.1.2.a) es explícita, porque se obtienen nuevos valores de u a partir de los previos inmediatos en el tiempo. Si en la ecuación (3.1.2.a) se sustituye $Q = 1$ (se puede sustituir $Q = 1$ ya que tomamos $v = 1$ y el tamaño espacial de la malla es igual al tamaño temporal de la malla, $\Delta x = \Delta t$), obtenemos:

$$2u_{i-1}^{n+1} - 6u_i^{n+1} = -2u_{i-1}^n - 2u_i^n.$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ la ecuación anterior queda

$$\frac{2u_{i-1}^{n+1} - 6u_i^{n+1}}{2} = \frac{-2u_{i-1}^n - 2u_i^n}{2}$$

$$2\frac{(u_{i-1}^{n+1} - 3u_i^{n+1})}{2} = 2\frac{(-u_{i-1}^n - u_i^n)}{2}.$$

Simplificando

$$u_{i-1}^{n+1} - 3u_i^{n+1} = -u_{i-1}^n - u_i^n.$$

De la ecuación anterior despejamos el término que contiene u_i^{n+1}

$$-3u_i^{n+1} = -u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n+1} - u_i^n.$$

Multiplicando por (-1) la ecuación anterior

$$(-1)(-3u_i^{n+1}) = (-1)(-u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n+1} - u_i^n).$$

Obtenemos la ecuación (3.1.2.b)

$$(3.1.2.b) \quad 3u_i^{n+1} = u_{i-1}^n + u_{i-1}^{n+1} + u_i^n.$$

La ecuación de convección pura es

$$(3.1.3) \quad -v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Las aproximaciones para las derivadas por diferencias finitas que usaremos en la ecuación (3.1.3) son

$$(3.1.4) \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$(3.1.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}.$$

Donde la aproximación para la derivada espacial es un cociente en diferencias finitas hacia atrás y la derivada temporal es un cociente en diferencias finitas hacia adelante.

Sustituyendo las aproximaciones (3.1.4) y (3.1.5) en la ecuación (3.1.3), se obtiene la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} -v\left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}\right) &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \\ -u_i^n + u_{i-1}^n &= \frac{\Delta x}{v\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^n) \\ -u_i^n + u_{i-1}^n &= Q(u_i^{n+1} - u_i^n). \end{aligned}$$

Sustituyendo $Q = 1$ en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} -u_i^n + u_{i-1}^n &= u_i^{n+1} - u_i^n \\ -u_i^n + u_{i-1}^n &= u_i^{n+1} - u_i^n \\ u_i^n - u_i^n + u_{i-1}^n &= u_i^{n+1}. \end{aligned}$$

Cancelando términos semejantes obtenemos la siguiente ecuación

$$(3.1.6) \quad u_i^{n+1} = u_{i-1}^n.$$

Tanto la ecuación de Crank-Nicholson como la de diferencias finitas están centradas en el tiempo $t_{n+1/2}$. Pero en el espacio la ecuación de Crank-Nicholson se centra en x_i , mientras que la de diferencias finitas se centra en $x_{i-1/2}$. El término de convección en diferencias centradas se obtiene de sustituir (3.1.4) y (3.1.5) en $\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}$, para $Q = 1$ [9].

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2, n+1/2} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + v\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}.$$

Sumando las fracciones del lado derecho

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2, n+1/2} \approx \Delta x \frac{(u_i^{n+1} - u_i^n) + v \Delta t (u_i^n - u_{i-1}^n)}{\Delta x \Delta t}.$$

Escribiendo la fracción anterior como suma de fracciones con igual denominador

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2, n+1/2} \approx \frac{\Delta x}{\Delta x \Delta t} (u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{v \Delta t}{\Delta x} \frac{(u_i^n - u_{i-1}^n)}{\Delta t}.$$

Cancelando los Δx que se encuentran en la primera fracción y escribiendo $\frac{v \Delta t}{\Delta x}$ como $\frac{1}{Q}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2, n+1/2} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{Q} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta t}.$$

Como $Q = 1$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2, n+1/2} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta t}.$$

Sumando las fracciones anteriores

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2, n+1/2} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n + u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta t}.$$

Cancelando los términos u_i^n

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2, n+1/2} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t}.$$

Luego el término de convección en diferencias centradas es

$$(3.1.7) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2, n+1/2} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t}.$$

El término de convección en diferencias por el método de Crank-Nicholson, con $Q = 1$, se obtiene sustituyendo las aproximaciones para las derivadas (2.2.2) y (2.2.3) en $\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}$ [9].

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n+1/2} &\approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + v \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n+1/2} &\approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + v \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{4\Delta x} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{4\Delta x} \right). \end{aligned}$$

Sacando factor común $\frac{1}{\Delta t}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n+1/2} \approx \frac{1}{\Delta t} \left[(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{v\Delta t}{4\Delta x} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \right].$$

Como $\frac{1}{Q} = \frac{v\Delta t}{\Delta x}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n+1/2} \approx \frac{1}{\Delta t} \left[(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{4Q} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \right].$$

Luego, el término de convección en diferencias por el método de Crank-Nicholson, con $Q = 1$, es

$$(3.1.8) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n+1/2} \approx \frac{1}{\Delta t} \left[(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{4} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \right].$$

Como la ecuación (3.1.7) se aplica cuando $R = 0$ y la ecuación (3.1.8) se aplica cuando $R = 1$, entonces el término de convección en diferencias por el método de Von Rosenberg se obtiene mediante la adición de $(1 - R)$ veces (3.1.7) a R veces (3.1.8) [9].

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2(1-R),n+1/2} &\approx (1 - R) \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} \\ &+ R \left[\frac{1}{\Delta t} (u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{4} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \right]. \end{aligned}$$

Desarrollando la expresión anterior queda

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2(1-R),n+1/2} &\approx \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} - R \left(\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} \right) + R \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \right) \\ &+ \frac{R}{4\Delta t} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2(1-R),n+1/2} &\approx \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} - R \frac{u_i^{n+1}}{\Delta t} + R \frac{u_{i-1}^n}{\Delta t} + R \frac{u_i^{n+1}}{\Delta t} - R \frac{u_i^n}{\Delta t} + \frac{R}{4\Delta t} u_{i+1}^{n+1} \\ &- \frac{R}{4\Delta t} u_{i-1}^{n+1} + \frac{R}{4\Delta t} u_{i+1}^n - \frac{R}{4\Delta t} u_{i-1}^n. \end{aligned}$$

Cancelando los términos $R\frac{u_i^{n+1}}{\Delta t}$ de la expresión anterior

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2(1-R),n+1/2} &\approx \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} + R\frac{u_{i-1}^n}{\Delta t} - R\frac{u_i^n}{\Delta t} + \frac{R}{4\Delta t}u_{i+1}^{n+1} - \frac{R}{4\Delta t}u_{i-1}^{n+1} + \frac{R}{4\Delta t}u_{i+1}^n \\ &\quad - \frac{R}{4\Delta t}u_{i-1}^n. \end{aligned}$$

Sumando las fracciones que contienen los u_{i-1}^n , se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2(1-R),n+1/2} &\approx \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} + \frac{4Ru_{i-1}^n - Ru_{i-1}^n}{4\Delta t} - R\frac{u_i^n}{\Delta t} + \frac{R}{4\Delta t}u_{i+1}^{n+1} - \frac{R}{4\Delta t}u_{i-1}^{n+1} \\ &\quad + \frac{R}{4\Delta t}u_{i+1}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2(1-R),n+1/2} &\approx \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} + \frac{3Ru_{i-1}^n}{4\Delta t} - R\frac{u_i^n}{\Delta t} + \frac{R}{4\Delta t}u_{i+1}^{n+1} - \frac{R}{4\Delta t}u_{i-1}^{n+1} \\ &\quad + \frac{R}{4\Delta t}u_{i+1}^n. \end{aligned}$$

Sumando fracciones

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2(1-R),n+1/2} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} + \frac{3Ru_{i-1}^n - 4Ru_i^n + Ru_{i+1}^{n+1} - Ru_{i-1}^{n+1} + Ru_{i+1}^n}{4\Delta t}.$$

Sacando factor común R

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2(1-R),n+1/2} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} + R\frac{(3u_{i-1}^n - 4u_i^n + u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n)}{4\Delta t}.$$

Sacando factor común $\frac{1}{\Delta t}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2(1-R),n+1/2} \approx \frac{1}{\Delta t}[u_i^{n+1} - u_{i-1}^n + \frac{R}{4}(3u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_{i-1}^{n+1} - 4u_i^n)].$$

Luego, el término de convección en diferencias por el método de Von Rosenberg es

(3.1.9)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2(1-R),n+1/2} \approx \frac{1}{\Delta t}[u_i^{n+1} - u_{i-1}^n + \frac{R}{4}(3u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_{i-1}^{n+1} - 4u_i^n)].$$

El término de difusión por el método de Crank-Nicholson, se obtiene sustituyendo la aproximación para la segunda derivada espacial, (2.2.1), en $D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ para $Q = 1$ [9].

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx D \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} \right].$$

Sumando fracciones con igual denominador

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx D \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} \right].$$

Sacando factor común $2(\Delta x)^2$

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{D}{2(\Delta x)^2} [u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}].$$

Multiplicando y dividiendo 2 en la expresión anterior y escribiendo $(\Delta x)^2$ como $\Delta x \Delta x$

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2D}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta x} [u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}].$$

Como, $\frac{\Delta x}{v \Delta t} = 1$, porque la velocidad del fluido la tomamos como uno, ($v = 1$) y ($\Delta t = \Delta x$).

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{2D}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{v \Delta t} [u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}].$$

Aplicando doble c, queda

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{2D}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x v \Delta t} [u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}].$$

Cancelando los Δx

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{2D}{v \Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta t} [u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}].$$

Como, $R = \frac{2D}{v \Delta x}$

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{R}{4 \Delta t} [u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}].$$

Por lo tanto, el término que contiene el coeficiente de difusión es

$$(3.1.10) \quad D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \left(\frac{1}{\Delta t}\right) \left(\frac{R}{4}\right) [u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n].$$

La ecuación en diferencias por el método de Von Rosenberg se obtiene mediante la adición de (3.1.9) y (3.1.10) [9].

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &\approx \frac{1}{\Delta t} [u_i^{n+1} - u_{i-1}^n + \frac{R}{4} (3u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_{i-1}^{n+1} - 4u_i^n)] \\ &\quad - \left(\frac{1}{\Delta t}\right) \left(\frac{R}{4}\right) [u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n]. \end{aligned}$$

Aplicando propiedad distributiva en el paréntesis

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &\approx \frac{1}{\Delta t} [u_i^{n+1} - u_{i-1}^n + \frac{R}{4} 3u_{i-1}^n + \frac{R}{4} u_{i+1}^{n+1} + \frac{R}{4} u_{i+1}^n - \frac{R}{4} u_{i-1}^{n+1} - \frac{R}{4} 4u_i^n] \\ &\quad - \left(\frac{1}{\Delta t}\right) \left(\frac{R}{4}\right) [u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &\approx \frac{u_i^{n+1}}{\Delta t} - \frac{u_{i-1}^n}{\Delta t} + \frac{3Ru_{i-1}^n}{4\Delta t} + \frac{Ru_{i+1}^{n+1}}{4\Delta t} + \frac{Ru_{i+1}^n}{4\Delta t} - \frac{Ru_{i-1}^{n+1}}{4\Delta t} - \frac{4Ru_i^n}{4\Delta t} - \frac{Ru_{i+1}^{n+1}}{4\Delta t} \\ &\quad + \frac{2Ru_i^{n+1}}{4\Delta t} - \frac{Ru_{i-1}^{n+1}}{4\Delta t} - \frac{Ru_{i+1}^n}{4\Delta t} + \frac{2Ru_i^n}{4\Delta t} - \frac{Ru_{i-1}^n}{4\Delta t}. \end{aligned}$$

Multiplicando y dividiendo 4 en los términos $\frac{u_i^{n+1}}{\Delta t}$, $\frac{u_{i-1}^n}{\Delta t}$ y cancelando los términos $\frac{Ru_{i+1}^{n+1}}{4\Delta t}$ y $\frac{Ru_{i+1}^n}{4\Delta t}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &\approx \frac{4u_i^{n+1}}{4\Delta t} + \frac{2Ru_i^{n+1}}{4\Delta t} - \frac{4u_{i-1}^n}{4\Delta t} + \frac{3Ru_{i-1}^n}{4\Delta t} - \frac{Ru_{i-1}^n}{4\Delta t} + \frac{2Ru_i^n}{4\Delta t} - \frac{4Ru_i^n}{4\Delta t} \\ &\quad - \frac{Ru_{i-1}^{n+1}}{4\Delta t} - \frac{Ru_{i-1}^{n+1}}{4\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &\approx \frac{4u_i^{n+1}}{4\Delta t} + \frac{2Ru_i^{n+1}}{4\Delta t} - \frac{4u_{i-1}^n}{4\Delta t} + \frac{3Ru_{i-1}^n}{4\Delta t} - \frac{Ru_{i-1}^n}{4\Delta t} + \frac{2Ru_i^n}{4\Delta t} - \frac{4Ru_i^n}{4\Delta t} \\ &\quad - \frac{2Ru_{i-1}^{n+1}}{4\Delta t}. \end{aligned}$$

Sumando fracciones

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &\approx \frac{4u_i^{n+1} + 2Ru_i^{n+1}}{4\Delta t} + \frac{(-4u_{i-1}^n + 3Ru_{i-1}^n - Ru_{i-1}^n)}{4\Delta t} \\ &\quad + \frac{2Ru_i^n - 4Ru_i^n - 2Ru_{i-1}^{n+1}}{4\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &\approx \frac{2(2+R)u_i^{n+1}}{4\Delta t} + \frac{(-4u_{i-1}^n + 2Ru_{i-1}^n)}{4\Delta t} + \frac{(-2Ru_i^n - 2Ru_{i-1}^{n+1})}{4\Delta t} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &\approx \frac{2(2+R)u_i^{n+1}}{4\Delta t} - \frac{2(2-R)u_{i-1}^n}{4\Delta t} - \frac{2R(u_i^n + u_{i-1}^{n+1})}{4\Delta t}. \end{aligned}$$

Escribiendo $4\Delta t$ como $2(2\Delta t)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &\approx \frac{2(2+R)u_i^{n+1}}{2(2\Delta t)} - \frac{2(2-R)u_{i-1}^n}{2(2\Delta t)} - \frac{2R(u_i^n + u_{i-1}^{n+1})}{2(2\Delta t)} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &\approx \frac{(2+R)u_i^{n+1}}{2\Delta t} - \frac{(2-R)u_{i-1}^n}{2\Delta t} - \frac{R(u_i^n + u_{i-1}^{n+1})}{2\Delta t}. \end{aligned}$$

Sacando factor común $\frac{1}{2\Delta t}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \approx \frac{1}{2(\Delta t)} [(2+R)u_i^{n+1} - (2-R)u_{i-1}^n - R(u_i^n + u_{i-1}^{n+1})].$$

La adición de (3.1.9) y (3.1.10) es

$$(3.1.11) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \approx \frac{1}{2(\Delta t)} [(2+R)u_i^{n+1} - (2-R)u_{i-1}^n - R(u_i^n + u_{i-1}^{n+1})].$$

La ecuación (3.1.1) se puede escribir como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Cuando (3.1.11) se aplica a la ecuación anterior, queda

$$\frac{1}{2(\Delta t)} [(2+R)u_i^{n+1} - (2-R)u_{i-1}^n - R(u_i^n + u_{i-1}^{n+1})] = 0.$$

Pasando $2(\Delta t)$ multiplicando al lado derecho de la ecuación

$$(2 + R)u_i^{n+1} - (2 - R)u_{i-1}^n - R(u_i^n + u_{i-1}^{n+1}) = 0.$$

Despejando, $(2 + R)u_i^{n+1}$

$$(2 + R)u_i^{n+1} = (2 - R)u_{i-1}^n + R(u_i^n + u_{i-1}^{n+1}).$$

Aplicando propiedad distributiva al tercer paréntesis, obtenemos la ecuación en diferencias finitas por el método de Von Rosenberg.

$$(3.1.11.a) \quad (2 + R)u_i^{n+1} = (2 - R)u_{i-1}^n + Ru_{i-1}^{n+1} + Ru_i^n.$$

La cual, es explícita, dado que se determinan nuevos valores de u a partir de los valores previos inmediatos en el tiempo [9].

Si sustituimos en la ecuación (3.1.11.a) $R = 0$, ésta se simplifica a la ecuación (3.1.6) y se simplifica a la ecuación (3.1.2.b) cuando $R = 1$ [9].

En resumen, tenemos que el método de Von Rosenberg aplicado a la ecuación de convección-difusión unidimensional consiste, en primer lugar, obtener el término de convección en diferencias centradas, como también el término de convección en diferencias por el método de Crank-Nicholson, ambos términos para $Q = 1$, de segundo lugar, obtener el término de convección en diferencias por el método de Von Rosenberg, este término se obtiene mediante la adición de $(1 - R)$ veces el término de convección en diferencias centradas y R veces el término de convección en diferencias por el método de Crank-Nicholson. De tercer lugar, obtener el término de difusión, este se consigue usando la aproximación para la segunda derivada por el método de Crank-Nicholson, para $Q = 1$. De cuarto y último lugar se tiene la ecuación en diferencias para la ecuación de convección-difusión unidimensional por el método de Von Rosenberg efectuando la adición del término de convección en diferencias por el método de Von Rosenberg y el término de difusión por el método de Crank-Nicholson.

La ecuación en diferencias por el método de Von Rosenberg, para la ecuación de Convección-Difusión, con su condición inicial y condición de contorno, es la siguiente

$$(3.1.11.a) \quad (2 + R)u_i^{n+1} = (2 - R)u_{i-1}^n + Ru_{i-1}^{n+1} + Ru_i^n$$

$$(3.1.12) \quad u_0^n = 1 \quad n = 1, \dots, M - 1$$

$$(3.1.13) \quad u_i^0 = 0 \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

3.2 Estudio de la Consistencia

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un entorno abierto y $u : D \rightarrow \mathbb{R}$. La fórmula de Taylor de u alrededor de (x_0, t_0) , es

$$\begin{aligned} u(x_i, t_n) &= u(x_0, t_0) + \frac{(x - x_0)u_x + (t - t_0)u_t}{1!} \\ &+ \frac{1}{2!}((x - x_0)^2 u_{xx} + 2(x - x_0)(t - t_0)u_{xt} + (t - t_0)^2 u_{tt}) \\ &+ \frac{1}{3!}((x - x_0)^3 u_{xxx} + 3(x - x_0)^2(t - t_0)u_{xxt} + 3(x - x_0)(t - t_0)^2 u_{xtt} + (t - t_0)^3 u_{ttt}) \\ &+ \frac{1}{4!} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (x - x_0)^k (t - t_0)^{4-k} u_{x^k t^{4-k}}(c, d). \end{aligned}$$

Donde $(c, d) \in D$.

Usando la siguiente notación

$$u(x_i, t_n) = u_i^n$$

La fórmula de Taylor queda

$$\begin{aligned} u_i^n &= u_{i_0}^{n_0} + \frac{(x - x_0)u_x + (t - t_0)u_t}{1!} \\ &+ \frac{1}{2!}((x - x_0)^2 u_{xx} + 2(x - x_0)(t - t_0)u_{xt} + (t - t_0)^2 u_{tt}) \\ &+ \frac{1}{3!}((x - x_0)^3 u_{xxx} + 3(x - x_0)^2(t - t_0)u_{xxt} + 3(x - x_0)(t - t_0)^2 u_{xtt} + (t - t_0)^3 u_{ttt}) \\ &+ \frac{1}{4!} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (x - x_0)^k (t - t_0)^{4-k} u_{x^k t^{4-k}}(c, d). \end{aligned}$$

El error de truncamiento se obtiene mediante la sustitución de la fórmula de Taylor de u alrededor del punto en donde las diferencias finitas por el método de Von Rosenberg están centradas [9], es decir, $x_{i-1/2(1-R)}, t_{n+1/2}$.

$$(3.2.1) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \approx \frac{1}{2(\Delta t)} [(2+R)u_i^{n+1} - (2-R)u_{i-1}^n - Ru_{i-1}^{n+1} - Ru_i^n].$$

Usando el cambio de notación y el centro $(x_0, t_0) = (x - \frac{\Delta x}{2}(1-R), t + \frac{\Delta t}{2})$, tenemos.

Para u_i^{n+1} la diferencia de $x - x_0$ es

$$x - x_0 = x - \left(x - \frac{\Delta x}{2}(1-R) \right) = x - x + \frac{\Delta x}{2}(1-R) = \frac{\Delta x}{2}(1-R).$$

Así, $x - x_0 = \frac{\Delta x}{2}(1-R)$.

La diferencia $t - t_0$ es

$$t - t_0 = t + \Delta t - \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = t + \Delta t - t - \frac{\Delta t}{2} = \frac{\Delta t}{2}.$$

Así, $t - t_0 = \frac{\Delta t}{2}$. La fórmula de Taylor para u_i^{n+1} es

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_{i_0}^{n_0} + \frac{\Delta x}{2}(1-R)u_x + \frac{\Delta t}{2}u_t \\ &+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R) \right)^2 u_{xx} + 2 \left(\frac{\Delta x}{2}(1-R) \right) \left(\frac{\Delta t}{2} \right) u_{xt} + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 u_{tt} \right) \\ &+ \frac{1}{3!} \left(\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R) \right)^3 u_{xxx} + 3 \left(\frac{\Delta x}{2}(1-R) \right)^2 \left(\frac{\Delta t}{2} \right) u_{xxt} + 3 \left(\frac{\Delta x}{2}(1-R) \right) \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 u_{xtt} + \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3 u_{ttt} \right) \\ &+ \frac{1}{4!} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \left(\frac{\Delta x}{2}(1-R) \right)^k \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^{4-k} u_{x^k t^{4-k}}(c_1, d_1). \end{aligned}$$

$D_1 \subset \mathbb{R}^2$ un entorno abierto y $(c_1, d_1) \in D_1$. Al resto de la fórmula de Taylor anterior lo llamaremos R_1 .

Para u_{i-1}^n la diferencia de $x - x_0$ es

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x - \Delta x - \left(x - \frac{\Delta x}{2}(1-R) \right) = x - \Delta x - x + \frac{\Delta x}{2}(1-R) \\ &= \frac{-2\Delta x + \Delta x - R\Delta x}{2} = \frac{-\Delta x - R\Delta x}{2} = -\frac{\Delta x}{2}(1+R). \end{aligned}$$

Así, $x - x_0 = -\frac{\Delta x}{2}(1+R)$.

La diferencia $t - t_0$ es

$$t - t_0 = t - \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = t - t - \frac{\Delta t}{2} = -\frac{\Delta t}{2}.$$

Así, $t - t_0 = -\frac{\Delta t}{2}$. La fórmula de Taylor para u_{i-1}^n es

$$\begin{aligned} u_{i-1}^n &= u_{i_0}^{n_0} - \frac{\Delta x}{2}(1+R)u_x - \frac{\Delta t}{2}u_t \\ &+ \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2 u_{xx} + 2\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt}\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\left(\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^3 u_{xxx} + 3\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + 3\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt}\right) \\ &+ \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^k \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^{4-k} u_x^k u_t^{4-k}(c_2, d_2). \end{aligned}$$

$D_2 \subset \mathbb{R}^2$ un entorno abierto y $(c_2, d_2) \in D_2$. Al resto de la fórmula de Taylor anterior lo llamaremos R_2 .

Para u_{i-1}^{n+1} la diferencia de $x - x_0$ es la misma de u_{i-1}^n que es

$$x - x_0 = -\frac{\Delta x}{2}(1+R).$$

La diferencia de $t - t_0$ es la misma de u_i^{n+1} que es

$$t - t_0 = \frac{\Delta t}{2}.$$

La fórmula de Taylor para u_{i-1}^{n+1} es

$$\begin{aligned} u_{i-1}^{n+1} &= u_{i_0}^{n_0} - \frac{\Delta x}{2}(1+R)u_x + \frac{\Delta t}{2}u_t \\ &+ \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2 u_{xx} + 2\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt}\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\left(\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^3 u_{xxx} + 3\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + 3\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt}\right) \\ &+ \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^k \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{4-k} u_x^k u_t^{4-k}(c_3, d_3). \end{aligned}$$

$D_3 \subset \mathbb{R}^2$ un entorno abierto y $(c_3, d_3) \in D_3$. Al resto de la fórmula de Taylor anterior lo llamaremos R_3 .

Para u_i^n la diferencia de $x - x_0$ es la misma de u_i^{n+1} que es

$$x - x_0 = \frac{\Delta x}{2}(1-R).$$

La diferencia de $t - t_0$ es la misma de u_{i-1}^n que es

$$t - t_0 = -\frac{\Delta t}{2}.$$

La fórmula de Taylor para u_i^n es

$$\begin{aligned}
u_i^n &= u_{i_0}^{n_0} + \frac{\Delta x}{2}(1-R)u_x - \frac{\Delta t}{2}u_t \\
&+ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2 u_{xx} + 2\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt}\right) \\
&+ \frac{1}{3!}\left(\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^3 u_{xxx} + 3\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + 3\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt}\right) \\
&+ \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!}\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^k \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^{4-k} u_x^k t^{4-k} (c_4, d_4).
\end{aligned}$$

$D_4 \subset \mathbb{R}^2$ un entorno abierto y $(c_4, d_4) \in D_4$. Llamaremos R_4 al resto de la fórmula de Taylor anterior. Ahora, vamos a sustituir las fórmulas de Taylor mostradas anteriormente en el lado derecho de la aproximación (3.2.1).

$$\begin{aligned}
&(2+R) \left[u_{i_0}^{n_0} + \frac{\Delta x}{2}(1-R)u_x + \frac{\Delta t}{2}u_t \right. \\
&+ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2 u_{xx} + 2\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt}\right) \\
&+ \frac{1}{3!}\left(\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^3 u_{xxx} + 3\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + 3\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt} + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt}\right) \\
&+ R_1] - (2-R) \left[u_{i_0}^{n_0} - \frac{\Delta x}{2}(1+R)u_x - \frac{\Delta t}{2}u_t \right. \\
&+ \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2 u_{xx} + 2\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt}\right) \\
&+ \frac{1}{3!}\left(\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^3 u_{xxx} + 3\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + 3\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt}\right) \\
&+ \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} + R_2] - R \left[u_{i_0}^{n_0} - \frac{\Delta x}{2}(1+R)u_x + \frac{\Delta t}{2}u_t \right. \\
&+ \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2 u_{xx} + 2\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt}\right) \\
&+ \frac{1}{3!}\left(\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^3 u_{xxx} + 3\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + 3\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt}\right) \\
&+ \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} + R_3] - R \left[u_{i_0}^{n_0} + \frac{\Delta x}{2}(1-R)u_x - \frac{\Delta t}{2}u_t \right. \\
&+ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2 u_{xx} + 2\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt}\right) \\
&+ \frac{1}{3!}\left(\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^3 u_{xxx} + 3\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + 3\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt}\right) \\
&+ \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} + R_4]
\end{aligned}$$

Aplicando propiedad distributiva y llamando *H.O.T.* la adición de los restos se tiene

$$\begin{aligned}
& 2u_{i_0}^{n_0} + \Delta x(1-R)u_x + \Delta t u_t + \left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2 u_{xx} + 2\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt} \\
& + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^3 u_{xxx} + \left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + \left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} \\
& + Ru_{i_0}^{n_0} + R\frac{\Delta x}{2}(1-R)u_x + R\frac{\Delta t}{2}u_t + \frac{R}{2}\left(\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2 u_{xx} + R\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt}\right. \\
& + \left.\frac{R}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt} + \frac{R}{6}\left(\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^3 u_{xxx} + \frac{R}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + \frac{R}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt}\right.\right. \\
& + \left.\left.\frac{R}{6}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} - 2u_{i_0}^{n_0} + \Delta x(1+R)u_x + \Delta t u_t - \left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2 u_{xx}\right. \\
& - 2\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} - \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt} - \frac{1}{3}\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^3 u_{xxx} \\
& - \left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} - \left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt} - \frac{1}{3}\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} + Ru_{i_0}^{n_0} \\
& - R\frac{\Delta x}{2}(1+R)u_x - R\frac{\Delta t}{2}u_t + \frac{R}{2}\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2 u_{xx} + R\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} \\
& + \frac{R}{2}\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt} + \frac{R}{6}\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^3 u_{xxx} + \frac{R}{2}\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} \\
& + \frac{R}{2}\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt} + \frac{R}{6}\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} - Ru_{i_0}^{n_0} + R\frac{\Delta x}{2}(1+R)u_x \\
& - R\frac{\Delta t}{2}u_t - \frac{R}{2}\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2 u_{xx} - R\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} - \frac{R}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt} \\
& - \frac{R}{6}\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^3 u_{xxx} - \frac{R}{2}\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} - \frac{R}{2}\left(-\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt} \\
& - \frac{R}{6}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} - Ru_{i_0}^{n_0} - R\frac{\Delta x}{2}(1-R)u_x + R\frac{\Delta t}{2}u_t - \frac{R}{2}\left(\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2 u_{xx}\right. \\
& - R\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} - \left.\frac{R}{2}\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{tt} - \frac{R}{6}\left(\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^3 u_{xxx}\right.\right. \\
& \left.\left.- \frac{R}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} - \frac{R}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt} - \frac{R}{6}\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} + H.O.T.\right.
\end{aligned}$$

Sumando algebraicamente términos semejantes queda

$$\begin{aligned}
& \Delta x(1-R)u_x + \Delta x(1+R)u_x + 2\Delta t u_t + \left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2 u_{xx} - \left(\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2 u_{xx} \\
& + 2R\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + 2R\left(\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + 2\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} \\
& - 2\left(\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^3 u_{xxx} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^3 u_{xxx} \\
& + \left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + \left(\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + R\left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} \\
& - R\left(\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + \left(\frac{\Delta x}{2}(1-R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt} + \left(\frac{\Delta x}{2}(1+R)\right)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u_{xtt} + \frac{2}{3}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 u_{ttt} \\
& + H.O.T.
\end{aligned}$$

Aplicando propiedad distributiva y la propiedad de potencia, tenemos

$$\begin{aligned}
& \Delta x u_x - R\Delta x u_x + \Delta x u_x + R\Delta x u_x + 2\Delta t u_t + \frac{(\Delta x)^2}{4}(1-R)^2 u_{xx} - \frac{(\Delta x)^2}{4}(1+R)^2 u_{xx} \\
& + R\Delta x(1-R)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + R\Delta x(1+R)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} + \Delta x(1-R)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} - \Delta x(1+R)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt} \\
& + \frac{1}{3}\frac{(\Delta x)^3}{8}(1-R)^3 u_{xxx} + \frac{1}{3}\frac{(\Delta x)^3}{8}(1+R)^3 u_{xxx} + \frac{(\Delta x)^2}{4}(1-R)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} \\
& + \frac{(\Delta x)^2}{4}(1+R)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} + R\frac{(\Delta x)^2}{4}(1-R)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} - R\frac{(\Delta x)^2}{4}(1+R)^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt} \\
& + \frac{\Delta x}{2}(1-R)\frac{(\Delta t)^2}{4}u_{xtt} + \frac{\Delta x}{2}(1+R)\frac{(\Delta t)^2}{4}u_{xtt} + \frac{2}{3}\frac{(\Delta t)^3}{8}u_{ttt} + H.O.T.
\end{aligned}$$

Aplicando operaciones algebraicas a la expresión anterior nos queda

$$\begin{aligned}
& 2\Delta x u_x + 2\Delta t u_t + \frac{(\Delta x)^2}{4}u_{xx}[(1-R)^2 - (1+R)^2] \\
& + \Delta x\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xt}[R(1-R) + R(1+R) + 1 - R - (1+R)] + \frac{(\Delta x)^3}{24}u_{xxx}[(1-R)^3 + (1+R)^3] \\
& + \frac{(\Delta x)^2}{4}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)u_{xxt}[(1-R)^2 + (1+R)^2 + R(1-R)^2 - R(1+R)^2] \\
& + \frac{\Delta x}{2}\frac{(\Delta t)^2}{4}u_{xtt}[1 - R + 1 + R] + \frac{2(\Delta t)^3}{24}u_{ttt} + H.O.T.
\end{aligned}$$

Desarrollando los términos dentro de los corchetes y luego sumando algebraicamente los términos que queden dentro de los corchetes, obtenemos

$$2\Delta x u_x + 2\Delta t u_t + \frac{(\Delta x)^2}{4} u_{xx}[-4R] + \Delta x \left(\frac{\Delta t}{2}\right) u_{xt}[0] + \frac{(\Delta x)^3}{24} u_{xxx}[6R^2 + 2] \\ + \frac{(\Delta x)^2}{8} (\Delta t) u_{xxt}[-2R^2 + 2] + \frac{\Delta x (\Delta t)^2}{8} u_{xtt}[2] + \frac{(\Delta t)^3}{12} u_{ttt} + H.O.T.$$

La expresión anterior puede escribirse como

$$2\Delta x u_x + 2\Delta t u_t - (\Delta x)^2 u_{xx} R + \frac{(\Delta x)^3}{12} u_{xxx}[1 + 3R^2] + \frac{(\Delta x)^2}{4} (\Delta t) u_{xxt}[1 - R^2] \\ + \frac{\Delta x (\Delta t)^2}{4} u_{xtt} + \frac{(\Delta t)^3}{12} u_{ttt} + H.O.T.$$

Multiplicando la expresión anterior por $\frac{1}{2(\Delta t)}$, obtenemos

$$\frac{1}{2(\Delta t)} (2\Delta x u_x + 2\Delta t u_t - (\Delta x)^2 u_{xx} R + \frac{(\Delta x)^3}{12} u_{xxx}[1 + 3R^2] + \frac{(\Delta x)^2}{4} (\Delta t) u_{xxt}[1 - R^2] \\ + \frac{\Delta x (\Delta t)^2}{4} u_{xtt} + \frac{(\Delta t)^3}{12} u_{ttt}) + H.O.T.$$

Aplicando propiedad distributiva, se tiene

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} u_x + u_t - \frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta t)} R u_{xx} + \frac{(\Delta x)^2 (\Delta x)}{24(\Delta t)} u_{xxx}[1 + 3R^2] + \frac{(\Delta x)^2}{8} u_{xxt}[1 - R^2] + \frac{(\Delta x)(\Delta t)}{8} u_{xtt} \\ + \frac{(\Delta t)^2}{24} u_{ttt} + H.O.T.$$

Como, $Q = \frac{\Delta x}{v\Delta t} = 1$, tenemos que $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$.

Como, $R = \frac{2D}{v\Delta x}$, entonces

$$\frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta t)} R = \frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta t)} \frac{2D}{v\Delta x} = \frac{(\Delta x) D}{(\Delta t) v} = v \frac{D}{v} = D.$$

Así, $\frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta t)} R = D$.

Haciendo los cambios respectivos de v y D , obtenemos

$$v u_x + u_t - D u_{xx} + [1 + 3R^2] v u_{xxx} \frac{(\Delta x)^2}{24} + [1 - R^2] u_{xxt} \frac{(\Delta x)^2}{8} + u_{xtt} \frac{(\Delta x)(\Delta t)}{8} \\ + u_{ttt} \frac{(\Delta t)^2}{24} + H.O.T.$$

La expansión de la ecuación de convección-difusión unidimensional es

$$\begin{aligned} vu_x + u_t - Du_{xx} &= \frac{[(2+R)u_i^{n+1} - (2-R)u_{i-1}^n - Ru_{i-1}^{n+1} - Ru_i^n]}{2(\Delta t)} + [1+3R^2]vu_{xxx} \frac{(\Delta x)^2}{24} \\ &+ [1-R^2]u_{xxt} \frac{(\Delta x)^2}{8} + u_{xtt} \frac{(\Delta x)(\Delta t)}{8} + u_{ttt} \frac{(\Delta t)^2}{24} + H.O.T. \end{aligned}$$

Con error de truncamiento

$$[1+3R^2]vu_{xxx} \frac{(\Delta x)^2}{24} + [1-R^2]u_{xxt} \frac{(\Delta x)^2}{8} + u_{xtt} \frac{(\Delta x)(\Delta t)}{8} + u_{ttt} \frac{(\Delta t)^2}{24} + H.O.T.$$

Recordemos que *H.O.T.* es la suma de los restos de las fórmulas de Taylor.

Este error de truncamiento es de orden cuadrático tanto para el espacio como para el tiempo, es decir, $O((\Delta x)^2, (\Delta t)^2)$.

Por lo tanto, por el estudio realizado anteriormente, el esquema de Von Rosenberg es consistente, ya que el error de truncamiento se anula cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$.

Observación

En el artículo de Von Rosenberg [9] aparece la expansión de la ecuación de convección-difusión unidimensional como

$$\begin{aligned} vu_x + u_t - Du_{xx} &= \frac{[(2+R)u_i^{n+1} - (2-R)u_{i-1}^n - Ru_{i-1}^{n+1} - Ru_i^n]}{2(\Delta t)} - [1+3R]^2vu_{xxx} \frac{(\Delta x)^2}{24} \\ &- [1-R]^2u_{xxt} \frac{(\Delta x)^2}{8} - u_{xtt} \frac{(\Delta x)(\Delta t)}{8} - u_{ttt} \frac{(\Delta t)^2}{24} - H.O.T. \end{aligned}$$

Con error de truncamiento

$$-[1+3R]^2vu_{xxx} \frac{(\Delta x)^2}{24} - [1-R]^2u_{xxt} \frac{(\Delta x)^2}{8} - u_{xtt} \frac{(\Delta x)(\Delta t)}{8} - u_{ttt} \frac{(\Delta t)^2}{24} - H.O.T.$$

Esto es un error en el artículo, ya que por los cálculos hechos anteriormente la expansión de la ecuación de convección-difusión unidimensional es

$$vu_x + u_t - Du_{xx} = \frac{[(2+R)u_i^{n+1} - (2-R)u_{i-1}^n - Ru_{i-1}^{n+1} - Ru_i^n]}{2(\Delta t)} + [1+3R^2]vu_{xxx}\frac{(\Delta x)^2}{24} \\ + [1-R^2]u_{xxt}\frac{(\Delta x)^2}{8} + u_{xtt}\frac{(\Delta x)(\Delta t)}{8} + u_{ttt}\frac{(\Delta t)^2}{24} + H.O.T.$$

Con error de truncamiento

$$[1+3R^2]vu_{xxx}\frac{(\Delta x)^2}{24} + [1-R^2]u_{xxt}\frac{(\Delta x)^2}{8} + u_{xtt}\frac{(\Delta x)(\Delta t)}{8} + u_{ttt}\frac{(\Delta t)^2}{24} + H.O.T.$$

3.3 Estudio de la Estabilidad

Para el estudio de la estabilidad del método de Von Rosenberg usaremos el siguiente teorema. **Teorema del Círculo de Gershgorin** [2, 7], el cual establece que. "Los autovalores de una matriz $(N-1) \times (N-1)$ están contenidos en la unión de los círculos c_1, \dots, c_{N-1} del plano complejo, tales que cada c_i tiene su centro en el coeficiente i -ésimo de la diagonal y su radio es igual a la suma de los valores absolutos del resto de elementos de la fila i -ésima".

"Si a_{ij} son los coeficientes de la matriz, entonces cada autovalor λ está en alguno de los siguientes círculos:

$$(3.3.1) \quad |\lambda - a_{ij}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N-1} |a_{ij}| \quad i, j = 1, \dots, N-1$$

La ecuación en diferencias por el método de Von Rosenberg (3.1.11.a), para la ecuación de convección-difusión unidimensional, con condición de contorno (3.1.12) y condición inicial (3.1.13), es la siguiente:

$$(3.1.11.a) \quad (2+R)u_i^{n+1} = (2-R)u_{i-1}^n + Ru_{i-1}^{n+1} + Ru_i^n$$

$$(3.1.12) \quad u_0^n = 1 \quad n = 1, \dots, M-1$$

$$(3.1.13) \quad u_i^0 = 0 \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Se puede escribir como

$$(2+R)u_i^{n+1} - Ru_{i-1}^{n+1} = (2-R)u_{i-1}^n + Ru_i^n$$

La ecuación anterior matricialmente se puede escribir así

$$\begin{pmatrix} (2+R) & 0 & \dots & 0 \\ -R & (2+R) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -R & (2+R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ (2-R) & R & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (2-R) & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \end{pmatrix} \\ + R \begin{pmatrix} u_0^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (2-R) \begin{pmatrix} u_0^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Llamemos A la matriz del lado izquierdo de la igualdad y B la del lado derecho de la igualdad, es decir

$$A = \begin{pmatrix} (2+R) & 0 & \dots & 0 \\ -R & (2+R) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -R & (2+R) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ (2-R) & R & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (2-R) & R \end{pmatrix}$$

Se puede hacer el estudio de estabilidad con estas matrices, utilizando la desigualdad (3.3.1) que incluye los autovalores de las matrices a estudiar

$$(3.3.1) \quad |\lambda - a_{ij}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N-1} |a_{ij}|$$

Comenzaremos usando la desigualdad para la matriz A y cuando tengamos su desigualdad la invertiremos, para obtener la desigualdad de A^{-1} y poder realizarle el estudio de los autovalores a esta matriz.

Entonces de la desigualdad (3.3.1), tenemos:

$$\begin{aligned}
 & |\lambda - (2 + R)| \leq |-R| \\
 & |\lambda - (2 + R)| \leq R \\
 & -R \leq \lambda - (2 + R) \leq R \\
 & -R + 2 + R \leq \lambda \leq R + 2 + R \quad (\text{Sumando en la desigualdad anterior } 2 + R) \\
 & 2 \leq \lambda \leq 2R + 2 \quad (\text{Sumando y restando términos semejantes}) \\
 (3.3.2) \quad & 2 \leq \lambda \leq 2(R + 1) \quad (\text{Sacando factor común } 2)
 \end{aligned}$$

La desigualdad, (3.3.2) implica la desigualdad (3.3.3), usaremos (3.3.3) ya que esta es la que nos sirve para hacer el estudio de los autovalores a la matriz A^{-1} . La explicación de porqué usamos (3.3.3) es que cuando despejamos de la ecuación matricial la columna que tiene los términos $u_i^{n+1} (i = 1, \dots, N - 1)$, tenemos que multiplicar por A^{-1} esa ecuación (podemos hacer este paso ya que la matriz A es no singular, $\det(A) \neq 0$), luego en el lado derecho de la ecuación queda el producto de $A^{-1} \cdot B$, por ende, para hacer el estudio de los autovalores de la matriz A^{-1} se usa el recíproco de la desigualdad (3.3.2).

$$(3.3.3) \quad \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{2(R + 1)}$$

Haremos el mismo estudio para la matriz B . Utilizando la desigualdad (3.3.1)

$$\begin{aligned}
 |\beta - a_{ij}| &\leq \sum_{j=1}^{N-1} |b_{ij}| \\
 & \quad (j \neq i)
 \end{aligned}$$

De la desigualdad anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
|\beta - R| &\leq |2 - R| \\
|\beta - R| &\leq 2 - R \\
-(2 - R) &\leq \beta - R \leq 2 - R \\
-(2 - R) + R &\leq \beta \leq 2 - R + R \quad (\text{Sumando en la desigualdad anterior } R) \\
-2 + R + R &\leq \beta \leq 2 \quad (\text{Cancelando términos semejantes}) \\
2R - 2 &\leq \beta \leq 2 \quad (\text{Sumando las } R)
\end{aligned}$$

Sacando factor común 2 de la última desigualdad, obtenemos (3.3.4)

$$(3.3.4) \quad 2(R - 1) \leq \beta \leq 2$$

Para el estudio de los autovalores de $A^{-1} \cdot B$, necesitamos multiplicar las desigualdades (3.3.3) y (3.3.4).

$$\begin{aligned}
2 \cdot \frac{1}{2} &\geq \beta \cdot \frac{1}{\lambda} \geq 2(R - 1) \cdot \frac{1}{2(R + 1)} \\
1 &\geq \beta \cdot \frac{1}{\lambda} \geq \frac{R - 1}{R + 1}
\end{aligned}$$

Como $\frac{R-1}{R+1} \geq -1$ porque $R = \frac{2D}{v \Delta x} > 0$ entonces se tiene que

$$\left| \frac{\beta}{\lambda} \right| \leq 1$$

Entonces, el método de Von Rosenberg es incondicionalmente estable.

3.4 Estudio de la Convergencia

El estudio de la convergencia para el método de Von Rosenberg aplicado a la ecuación de convección-difusión unidimensional lo vamos a efectuar usando el Teorema de Equivalencia de Lax, el cual establece que: *en las aproximaciones por diferencias finitas consistentes de ecuaciones en derivadas parciales lineales dependientes del tiempo que están bien propuestas, el sistema numérico converge si y sólo si es estable* [7].

Como el método de Von Rosenberg es consistente y estable, implica que es convergente.

Capítulo 4

4. Experimentos Numéricos

En este capítulo mostraremos tres ejemplos numéricos, cada ejemplo estará compuesto por dos gráficas, la difusión de la primera gráfica será de 0.001 y de la segunda 0.1. En cada uno de estos ejemplos se podrá observar lo excelente que es el método de Von Rosenberg y lo bien que converge a la solución analítica de la ecuación de convección-difusión unidimensional, en comparación con el método de Diferencias Finitas. La comparación del método de Von Rosenberg con el método de Diferencias Finitas será tanto gráfica como numérica. Cada gráfica tendrá su leyenda para que se pueda diferenciar cada método. Numéricamente se presentará una tabla por cada gráfica, en estas tablas aparecerán los valores de la partición del intervalo espacial, los valores de la solución analítica, los valores de la aproximación a la solución analítica por el método de Von Rosenberg y los valores de la aproximación a la solución analítica por el método de Diferencias finitas, también se mostrarán los errores de cada método y se podrá notar que los errores por el método de Von Rosenberg son más pequeños que los errores por el método de Diferencias Finitas.

Para todas las tablas, se tiene que:

$ua(x, t)$: Valores de la Solución Analítica.

$u(x, t)$: Valores de la aproximación a la solución analítica por el método de Von Rosenberg.

$udf(x, t)$: Valores de la aproximación a la solución analítica por el método de Diferencias Finitas.

$|ua(x, t) - u(x, t)|$: Error absoluto para las soluciones obtenidas por el método de Von Rosenberg.

$|ua(x, t) - udf(x, t)|$: Error absoluto para las soluciones obtenidas por el método de Diferencias Finitas.

Para cada ejemplo se cambiarán algunos datos, por ejemplo: la condición inicial, la condición de contorno, el tiempo en que se hace cada gráfica. El valor que no cambia es el de la velocidad del fluido, ($v = 1$).

4.1 Ejemplo 1

Usaremos la condición de contorno (3.1.12) y la condición inicial (3.1.13). El dominio espacial y temporal de este ejemplo es $[0, 8]$, la velocidad del fluido es $v = 1$, el tiempo donde se hizo la gráfica es $t = 4$ y la difusión para esta primera gráfica (Ejemplo 1a) es, $D=0.001$. Para este primer ejemplo, por el método de Von Rosenberg se usaron cuarenta pasos en el espacio ($N = 40$) y cuarenta pasos en el tiempo ($M = 40$) y para el método de Diferencias Finitas se usó $N = 40$ y $M = 1000$.

A continuación se muestra la primera gráfica del ejemplo 1:

Ejemplo 1a

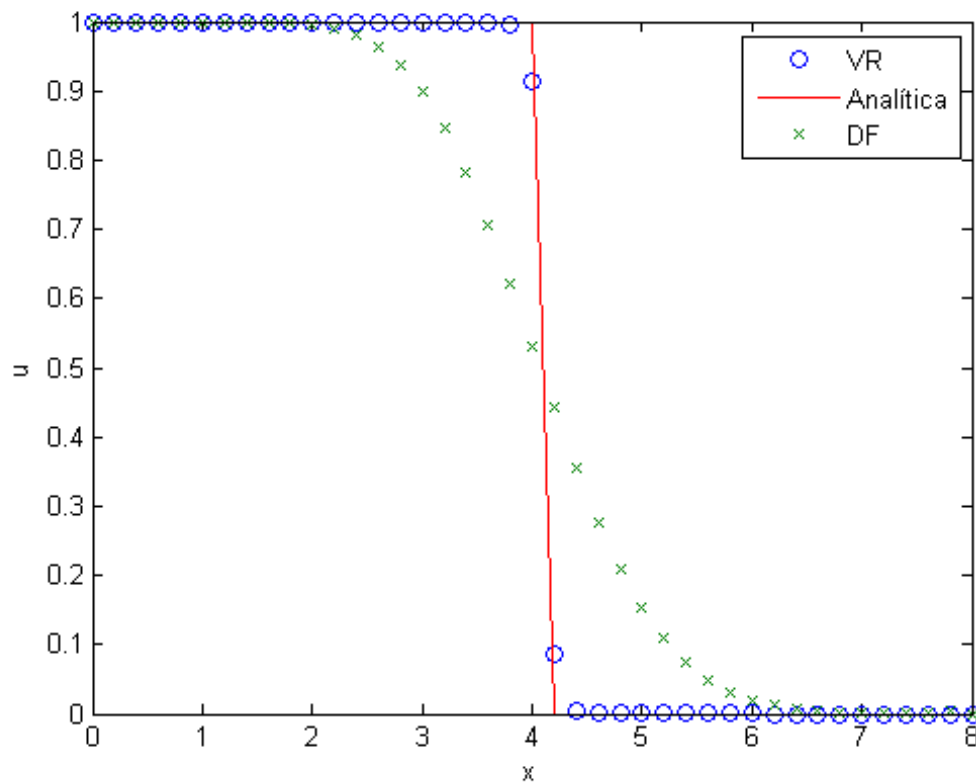


Figura 3: Comparación de las soluciones aproximadas obtenidas con los métodos VR y DF vs Solución Analítica ($D=0.001$, $t = 4$).

En la Figura 3, **VR** sirve para identificar la gráfica de la aproximación a la solución analítica por el método de Von Rosenberg y está representada con puntos abiertos de color azul (o). **Analítica**, se refiere a la gráfica de la solución analítica de la ecuación de convección-difusión unidimensional, el color de ésta es rojo. **DF**, se refiere a la gráfica de la aproximación

a la solución analítica por el método de Diferencias Finitas y está representada con equis de color verde. En la siguiente tabla se muestran los resultados numéricos.

x	$ua(x, t)$	$u(x, t)$	$udf(x, t)$	$ ua(x, t) - u(x, t) $	$ ua(x, t) - udf(x, t) $
0	1	1	1	0	0
0.2	1	1	0.999999996924552	0	0.000000003075448
0.4	1	1	0.999999949567250	0	0.000000050432750
0.6	1	1	0.999999530666890	0	0.000000469333110
0.8	1	1	0.999996907819782	0	0.000003092180218
1	1	1	0.999984203139173	0	0.000015796860827
1.2	1	1	0.999934095433067	0	0.000065904566933
1.4	1	1	0.999767651820623	0	0.000232348179377
1.6	1	1	0.999290643388676	0	0.000709356611324
1.8	1	1	0.998089616719255	0	0.001910383280745
2	1	1	0.995395084082049	0	0.004604915917951
2.2	1	1	0.989947075464799	0	0.010052924535201
2.4	1	1	0.979927551553463	0	0.020072448446537
2.6	1	0.99999999999958	0.963035793809337	0.000000000000042	0.036964206190663
2.8	1	0.99999999994819	0.936759179804306	0.000000000005181	0.063240820195694
3	1	0.999999999483327	0.898830002337067	0.000000000516673	0.101169997662933
3.2	1	0.999999958758280	0.847778980062675	0.000000041241720	0.152221019937325
3.4	1	0.999997425283157	0.783433889164357	0.000002574716843	0.216566110835643
3.6	1	0.999878736768324	0.707201210659767	0.000121263231676	0.292798789340233
3.8	1	0.995938791004284	0.622021804424863	0.004061208995716	0.377978195575137
4	1	0.913262953765097	0.531990142522326	0.086737046234903	0.468009857477674
4.2	0	0.086325626125962	0.441730766769853	0.086325626125962	0.441730766769853
4.4	0	0.004431564598616	0.355694184254748	0.004431564598616	0.355694184254748
4.6	0	0.000160272537543	0.277544265574898	0.000160272537543	0.277544265574898
4.8	0	0.000004560859491	0.209763689708342	0.000004560859491	0.209763689708342
5	0	0.000000108534791	0.153527405821612	0.000000108534791	0.153527405821612
5.2	0	0.000000002244265	0.108817760548211	0.000000002244265	0.108817760548211

x	$ua(x, t)$	$u(x, t)$	$udf(x, t)$	$ ua(x, t) - u(x, t) $	$ ua(x, t) - udf(x, t) $
5.4	0	0.000000000041394	0.074703144840185	0.000000000041394	0.074703144840185
5.6	0	0.000000000000694	0.049684433118186	0.000000000000694	0.049684433118186
5.8	0	0.000000000000011	0.032025691241532	0.000000000000011	0.032025691241532
6	0	0	0.020014961547638	0	0.020014961547638
6.2	0	0	0.012133591937607	0	0.012133591937607
6.4	0	0	0.007138638473913	0	0.007138638473913
6.6	0	0	0.004078060338726	0	0.004078060338726
6.8	0	0	0.002263232783302	0	0.002263232783302
7	0	0	0.001220867591762	0	0.001220867591762
7.2	0	0	0.000640468515026	0	0.000640468515026
7.4	0	0	0.000327041292178	0	0.000327041292178
7.6	0	0	0.000187199333698	0	0.000187199333698
7.8	0	0	0.005053660133056	0	0.005053660133056
8	0	0	0	0	0

Tabla 1: Resultados del ejemplo 1a ($D=0.001$, $t = 4$).

Ejemplo 1b

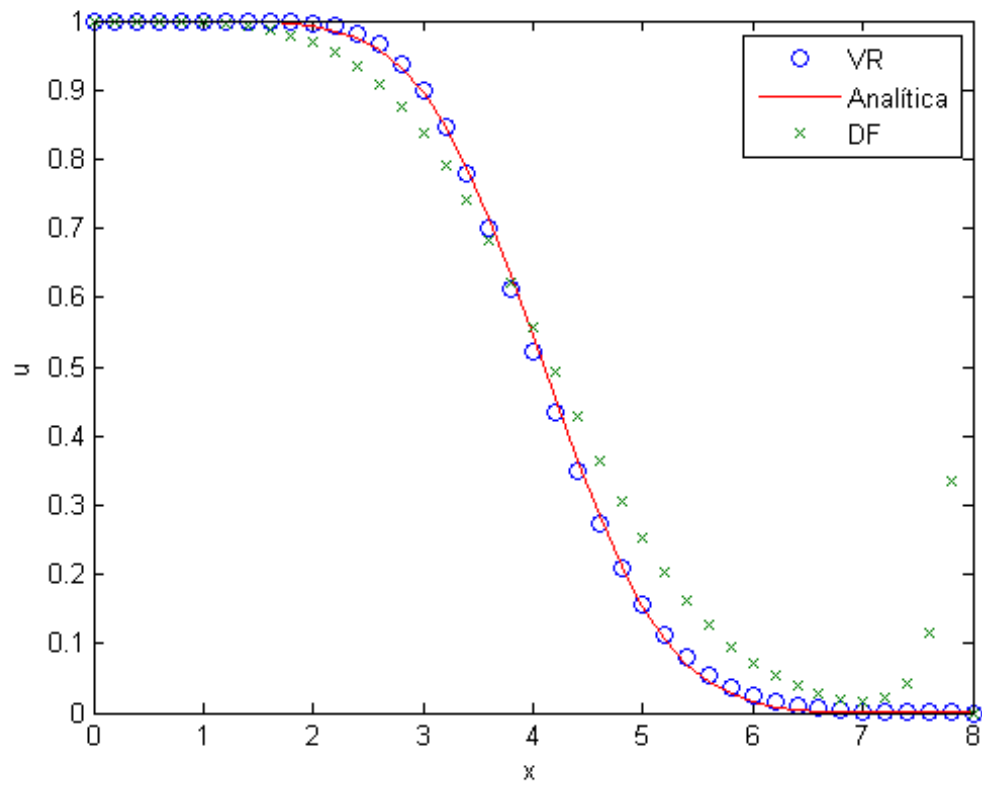


Figura 4: Comparación de las soluciones aproximadas obtenidas con los métodos VR y DF vs Solución Analítica ($D=0.1$, $t = 4$).

Proseguimos con la tabla que muestra los resultados numéricos correspondientes a la figura 4.

x	$ua(x, t)$	$u(x, t)$	$udf(x, t)$	$ ua(x, t) - u(x, t) $	$ ua(x, t) - udf(x, t) $
0	1	1	1	0	0
0.2	0.999999055200389	0.99999999713203	0.999921765705181	0.000000944512814	0.000077289495208
0.4	0.999995207351372	0.999999992065277	0.999739109687057	0.000004784713905	0.000256097664316
0.6	0.999982588423516	0.999999892642248	0.999363808259256	0.000017304218732	0.000618780164260
0.8	0.999946302922073	0.999999052220234	0.998655330372719	0.000052749298161	0.001290972549354
1	0.999851717340674	0.999993853047306	0.997401495570392	0.000142135706632	0.002450221770282
1.2	0.999624484535478	0.999968728932852	0.995297943714808	0.000344244397373	0.004326540820671
1.4	0.999116621158931	0.999869868671543	0.991929568108847	0.000753247512612	0.007187053050084
1.6	0.998054468346917	0.999543767798150	0.986758363747062	0.001489299451233	0.011296104599855
1.8	0.995967708717264	0.998622275330991	0.979123003821860	0.002654566613727	0.016844704895404
2	0.992106053463189	0.996353452219439	0.968255433867338	0.004247398756250	0.023850619595851
2.2	0.985361762125285	0.991418819797655	0.953318489193853	0.006057057672370	0.032043272931432
2.4	0.974229296128258	0.981827990909444	0.933465847616851	0.007598694781185	0.040763448511407
2.6	0.956842471073346	0.965005368694607	0.907921732478840	0.008162897621261	0.048920738594506
2.8	0.931126753021020	0.938144703007397	0.876073295464467	0.007017949986377	0.055053457556553
3	0.895083446614480	0.898803097919602	0.837564485603965	0.003719651305121	0.057518961010515
3.2	0.847183125356165	0.845581939730734	0.792377533191432	0.001601185625431	0.054805592164733
3.4	0.786797133752492	0.778668598466723	0.740887866738495	0.008128535285769	0.045909267013997
3.6	0.714556767169305	0.700038054280339	0.683880799582823	0.014518712888965	0.030675967586482
3.8	0.632520707277227	0.613230304413714	0.622523472015713	0.019290402863513	0.009997235261514
4	0.544065268092220	0.522769598355818	0.558292433584865	0.021295669736402	0.014227165492645
4.2	0.453484548932255	0.433404779155303	0.492864516514600	0.020079769776952	0.039379967582345
4.4	0.365375396110521	0.349383411169262	0.427984744619884	0.015991984941259	0.062609348509363
4.6	0.283951592238815	0.273927223783203	0.365328645503238	0.010024368455612	0.081377053264423
4.8	0.212454500540947	0.208987057499073	0.306376769493766	0.003467443041874	0.093922268952818
5	0.152794183780733	0.155264810608049	0.252316497533577	0.002470626827316	0.099522313752844
5.2	0.105480170447951	0.112428334274079	0.203981079318538	0.006948163826128	0.098500908870587
5.4	0.069815167142253	0.079422844333006	0.161829500681685	0.009607677190753	0.092014333539432
5.6	0.044259962765555	0.054792404497213	0.125964614344488	0.010532441731657	0.081704651578933
5.8	0.026852587977421	0.036952711947230	0.096182230691914	0.010100123969809	0.069329642714493
6	0.015579764927901	0.024387487846471	0.072041567877031	0.008807722918570	0.056461802949130
6.2	0.008639066739898	0.015765862050736	0.052948677121080	0.007126795310837	0.044309610381182
6.4	0.004575872556565	0.009993560815932	0.038251551538728	0.005417688259367	0.033675678982163

x	$ua(x, t)$	$u(x, t)$	$udf(x, t)$	$ ua(x, t) - u(x, t) $	$ ua(x, t) - udf(x, t) $
6.6	0.002314112705940	0.006216996273239	0.027365925385785	0.003902883567299	0.025051812679845
6.8	0.001116935640781	0.003799154142310	0.020007339043578	0.002682218501529	0.018890403402797
7	0.000514348367699	0.002282488895259	0.016768547409960	0.001768140527560	0.016254199042261
7.2	0.000225914484567	0.001349262483019	0.020765165821920	0.001123347998451	0.020539251337352
7.4	0.000094618626785	0.000785383941147	0.042517396049689	0.000690765314362	0.042422777422904
7.6	0.000037779602859	0.000450483465801	0.114562562564324	0.000412703862942	0.114524782961465
7.8	0.000014378068903	0.000254790217034	0.335253777222850	0.000240412148131	0.335239399153947
8	0.000005214715112	0	0	0.000005214715112	0.000005214715112

Tabla 2: Resultados del ejemplo 1b ($D=0.1$, $t = 4$).

Análisis del Ejemplo 1

Comenzaremos por analizar la gráfica y los resultados del Ejemplo 1a.

En la figura 3 se usa $D=0.001$ y se puede observar que la gráfica por el método de Von Rosenberg coincide con la gráfica de la solución analítica, mientras que por el método de Diferencias Finitas, la gráfica se acerca a la solución analítica sólo en los intervalos $[0, 2]$, $[6, 8]$ y $x \approx 4.2$. Esto quiere decir que el método de Von Rosenberg funciona muy bien y sin necesidad de usar un número tan elevado de pasos en el espacio y en el tiempo (en nuestro caso fue $N = 40$ y $M = 40$). Por lo tanto el método de Von Rosenberg converge muy rápido a la solución analítica. También se puede notar que la gráfica por el método de Von Rosenberg se mantiene pareja con respecto a la gráfica de la solución analítica y no como la gráfica por el método de Diferencias Finitas, ya que ésta decrece antes de lo debido y eso ocasiona una mala aproximación.

En la tabla 1 se puede observar que los errores de aproximación por el método de Von Rosenberg en comparación con los errores de aproximación por el método de Diferencias Finitas, son mucho más pequeños en todos los casos e inclusive hay valores de x donde el error es cero, como en los intervalos $[0.2, 2.4]$ y $[6, 7.8]$, esto significa que el resultado por el método de Von Rosenberg da igual que el resultado de la solución analítica, eso sin considerar los errores para $x = 0$ y $x = 8$, ya que esos valores pertenecen a las condiciones de contorno y los dos métodos dan el mismo resultado.

Para el Ejemplo 1b se usó una difusión un poco más alta, $D=0.1$. Observando la gráfica por el método de Von Rosenberg se puede notar que coincide con la gráfica de la solución analítica igual que en el Ejemplo 1a. En la figura 4 se puede ver que con este coeficiente de difusión, la gráfica por el método de Diferencias Finitas se aproxima un poco más a la gráfica de la solución analítica que en el ejemplo 1a, el problema es que se puede ver dispersión numérica a partir de $x = 7$ y eso no es bueno para un método numérico. Gráficamente el método de Von Rosenberg gana.

Observando las tablas se puede notar que los errores de aproximación por el método de Von Rosenberg siempre tienen el orden de magnitud menor, en comparación con el orden de magnitud de los errores de aproximación por el método de Diferencias Finitas. Gracias a la tabla se puede verificar que con el método de Von Rosenberg se obtienen mejores resultados, incluso para los valores de u del método de Diferencias Finitas que están muy cercanos a la gráfica de la solución analítica, como puede verse en la figura 4. Por los resultados gráficos, numéricos y el análisis hecho anteriormente, el método de Von Rosenberg es la opción más favorable para obtener mejores aproximaciones numéricas para la ecuación de convección-difusión unidimensional, con la condición de contorno y condición inicial, (3.1.12) y (3.1.13), respectivamente.

4.2 Ejemplo 2

Para este ejemplo se usa el intervalo espacial $[0,8]$ y el intervalo temporal $[0, 4]$, la velocidad del fluido es $v = 1$, el tiempo en que se graficó es $t = 4$. Las difusiones que se usan son, $D=0.001$ y $D=0.1$ (para el ejemplo 2a y ejemplo 2b respectivamente). Las condiciones de contorno, son

$$u(0, t) = 0, \quad u(8, t) = 0, \quad t > 0.$$

La condición inicial para este ejemplo, es

$$\begin{cases} u(x, 0) = 1, & \text{para } 0.1 < x < 1.1 \\ u(x, 0) = 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para el método de Von Rosenberg, los pasos en el espacio y en el tiempo son, $N = 40$ y $M = 40$. Para el método de Diferencias Finitas, los pasos en el espacio son, $N = 40$ y el $\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{4(\Delta x v + 2D)}$.

Para la ecuación de convección-difusión unidimensional con las condiciones de contorno y la condición inicial mencionadas anteriormente, no tenemos solución analítica, así que usamos la aproximación a la solución analítica por el método de Diferencias Finitas con $N = 4000$, como nuestra solución analítica.

Ahora mostramos la primera gráfica del ejemplo 2:

Ejemplo 2a

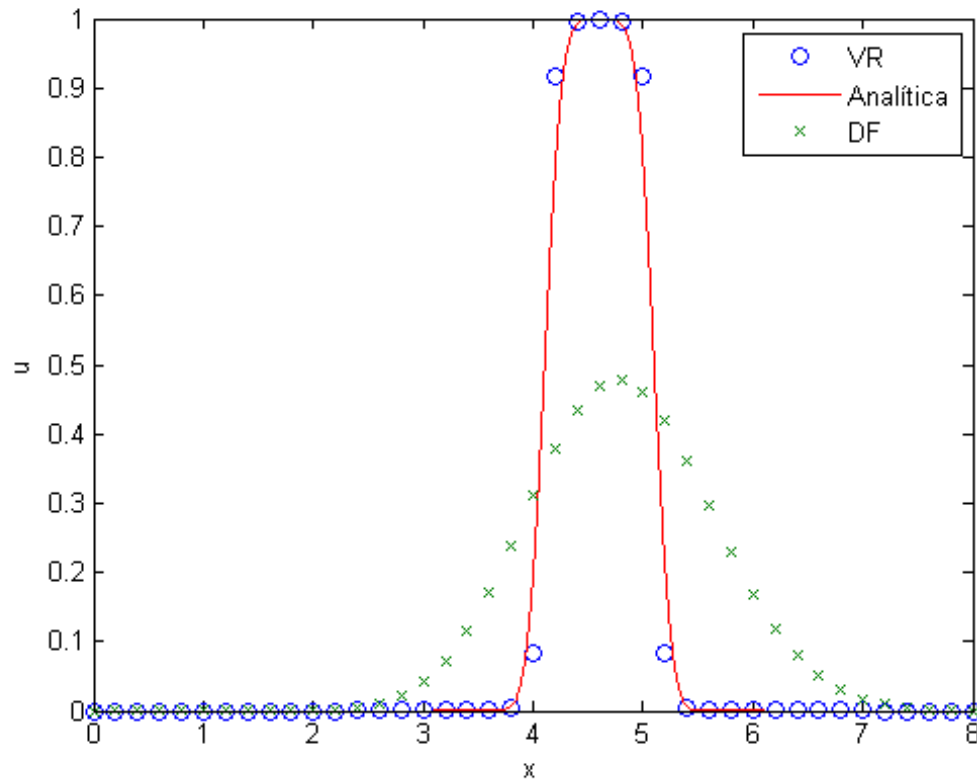


Figura 5: Comparación de las soluciones aproximadas obtenidas con los métodos VR y DF vs Solución Analítica ($D=0.001$, $t = 4$).

Para la figura 5, se representa la solución analítica (aproximación de la solución analítica con el método de Diferencias Finitas para $N = 4000$) con color rojo, la aproximación a la solución analítica por el método de Von Rosenberg con puntos abiertos de color azul (o) y el método de Diferencias Finitas, se representa con (x).

En la siguiente página se muestran los resultados numéricos.

x	$ua(x, t)$	$u(x, t)$	$udf(x, t)$	$ ua(x, t) - u(x, t) $	$ ua(x, t) - udf(x, t) $
0	0	0	0	0	0
0.2	5.6839x10 ⁻²²⁸	0	2.9268x10 ⁻¹¹	5.6839x10 ⁻²²⁸	2.9268x10 ⁻¹¹
0.4	2.9012x10 ⁻²⁰⁵	1.7349x10 ⁻⁴⁴	6.4102x10 ⁻¹⁰	1.7349x10 ⁻⁴⁴	6.4102x10 ⁻¹⁰
0.6	8.7078x10 ⁻¹⁸⁴	6.5616x10 ⁻⁴¹	8.4652x10 ⁻⁹	6.5616x10 ⁻⁴¹	8.4652x10 ⁻⁹
0.8	1.6103x10 ⁻¹⁶³	1.1756x10 ⁻³⁷	7.9920x10 ⁻⁸	1.1756x10 ⁻³⁷	7.9920x10 ⁻⁸
1	1.8436x10 ⁻¹⁴⁴	1.3261x10 ⁻³⁴	5.7875x10 ⁻⁷	1.3261x10 ⁻³⁴	5.7875x10 ⁻⁷
1.2	1.3111x10 ⁻¹²⁶	1.0560x10 ⁻³¹	3.3611x10 ⁻⁶	1.0560x10 ⁻³¹	3.3611x10 ⁻⁶
1.4	5.8157x10 ⁻¹¹⁰	6.3073x10 ⁻²⁹	1.6164x10 ⁻⁵	6.3073x10 ⁻²⁹	1.6164x10 ⁻⁵
1.6	1.6168x10 ⁻⁹⁴	2.9302x10 ⁻²⁶	6.5947x10 ⁻⁵	2.9302x10 ⁻²⁶	6.5947x10 ⁻⁵
1.8	2.8332x10 ⁻⁸⁰	1.0836x10 ⁻²³	2.3264x10 ⁻⁴	1.0836x10 ⁻²³	2.3264x10 ⁻⁴
2	3.1499x10 ⁻⁶⁷	3.2368x10 ⁻²¹	7.2042x10 ⁻⁴	3.2368x10 ⁻²¹	7.2042x10 ⁻⁴
2.2	2.2387x10 ⁻⁵⁵	7.8791x10 ⁻¹⁹	0.0020	7.8791x10 ⁻¹⁹	0.0020
2.4	1.0257x10 ⁻⁴⁴	1.5695x10 ⁻¹⁶	0.0049	1.5695x10 ⁻¹⁶	0.0049
2.6	3.0598x10 ⁻³⁵	2.5586x10 ⁻¹⁴	0.0110	2.5586x10 ⁻¹⁴	0.0110
2.8	6.0101x10 ⁻²⁷	3.3996x10 ⁻¹²	0.0223	3.3996x10 ⁻¹²	0.0223
3	7.8802x10 ⁻²⁰	3.6500x10 ⁻¹⁰	0.0418	3.6500x10 ⁻¹⁰	0.0418
3.2	7.0157x10 ⁻¹⁴	3.1211x10 ⁻⁸	0.0722	3.1211x10 ⁻⁸	0.0722
3.4	4.3404x10 ⁻⁹	2.0780x10 ⁻⁶	0.1155	2.0737x10 ⁻⁶	0.1155
3.6	1.9331x10 ⁻⁵	1.0395x10 ⁻⁴	0.1719	8.4619x10 ⁻⁵	0.1719
3.8	0.0066	0.0037	0.2386	0.0029	0.2320
4	0.1996	0.0830	0.3101	0.1166	0.1105
4.2	0.7853	0.9174	0.3781	0.1321	0.4072
4.4	0.9923	0.9960	0.4336	0.0037	0.5587
4.6	1	0.9998	0.4684	0.0002	0.5316
4.8	0.9931	0.9963	0.4775	0.0032	0.5156
5	0.7958	0.9170	0.4599	0.1212	0.3359
5.2	0.2100	0.0826	0.4192	0.1274	0.2092

x	$ua(x, t)$	$u(x, t)$	$udf(x, t)$	$ ua(x, t) - u(x, t) $	$ ua(x, t) - udf(x, t) $
5.4	0.0074	0.0040	0.3618	0.0034	0.3544
5.6	2.3938×10^{-5}	1.3960×10^{-4}	0.2961	1.1566×10^{-4}	0.2961
5.8	6.2762×10^{-9}	3.8009×10^{-6}	0.2299	3.7946×10^{-6}	0.2299
6	1.2769×10^{-13}	8.6698×10^{-8}	0.1695	8.6698×10^{-8}	0.1695
6.2	1.9860×10^{-19}	1.7213×10^{-9}	0.1188	1.7213×10^{-9}	0.1188
6.4	2.3549×10^{-26}	3.0530×10^{-11}	0.0791	3.0530×10^{-11}	0.0791
6.6	2.1351×10^{-34}	4.9296×10^{-13}	0.0501	4.9296×10^{-13}	0.0501
6.8	1.4892×10^{-43}	7.3496×10^{-15}	0.0302	7.3496×10^{-15}	0.0302
7	8.0528×10^{-54}	1.0229×10^{-16}	0.0173	1.0229×10^{-16}	0.0173
7.2	3.4064×10^{-65}	1.3407×10^{-18}	0.0095	1.3407×10^{-18}	0.0095
7.4	1.1380×10^{-77}	1.6664×10^{-20}	0.0049	1.6664×10^{-20}	0.0049
7.6	3.0326×10^{-91}	1.9759×10^{-22}	0.0025	1.9759×10^{-22}	0.0025
7.8	6.5127×10^{-106}	2.2459×10^{-24}	0.0012	2.2459×10^{-24}	0.0012
8	0	0	0	0	0

Tabla 3: Resultados del ejemplo 2a ($D=0.001$, $t = 4$).

Ejemplo 2b

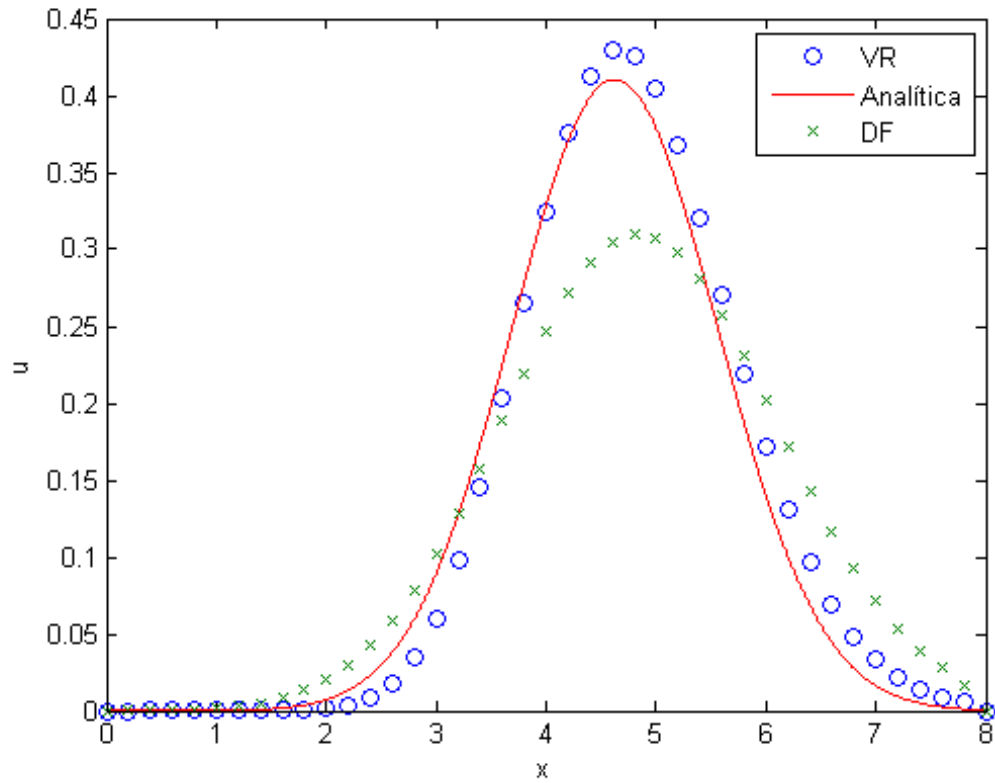


Figura 6: Comparación de las soluciones aproximadas obtenidas con los métodos VR y DF vs Solución Analítica ($D=0.1$, $t = 4$).

Los resultados de la figura 6 se encuentran a continuación.

x	$ua(x, t)$	$u(x, t)$	$udf(x, t)$	$ ua(x, t) - u(x, t) $	$ ua(x, t) - udf(x, t) $
0	0	0	0	0	0
0.2	9.1567×10^{-7}	0	4.8809×10^{-5}	9.1567×10^{-7}	4.7893×10^{-5}
0.4	4.6031×10^{-6}	2.8680×10^{-10}	1.6294×10^{-4}	4.6028×10^{-6}	1.5834×10^{-4}
0.6	1.6581×10^{-5}	7.9347×10^{-9}	3.9802×10^{-4}	1.6573×10^{-5}	3.8144×10^{-4}
0.8	5.0726×10^{-5}	1.0736×10^{-7}	8.4320×10^{-4}	5.0619×10^{-5}	7.9247×10^{-4}
1	1.3901×10^{-4}	9.4778×10^{-7}	0.0016	1.3806×10^{-4}	0.0015
1.2	3.4947×10^{-4}	6.1470×10^{-6}	0.0030	3.4332×10^{-4}	0.0027
1.4	8.1625×10^{-4}	3.1271×10^{-5}	0.0051	7.8498×10^{-4}	0.0043
1.6	0.0018	1.3012×10^{-4}	0.0084	0.0017	0.0066
1.8	0.0037	4.5612×10^{-4}	0.0133	0.0032	0.0096
2	0.0071	0.0014	0.0202	0.0057	0.0131
2.2	0.0131	0.0036	0.0298	0.0095	0.0167
2.4	0.0229	0.0085	0.0424	0.0144	0.0195
2.6	0.0379	0.0180	0.0585	0.0199	0.0206
2.8	0.0596	0.0345	0.0783	0.0251	0.0187
3	0.0893	0.0605	0.1017	0.0288	0.0124
3.2	0.1274	0.0976	0.1284	0.0298	1×10^{-3}
3.4	0.1733	0.1458	0.1576	0.0275	0.0157
3.6	0.2247	0.2032	0.1882	0.0215	0.0365
3.8	0.2781	0.2650	0.2186	0.0131	0.0595
4	0.3284	0.3249	0.2472	0.0035	0.0812
4.2	0.3703	0.3760	0.2721	0.0057	0.0982
4.4	0.3989	0.4122	0.2918	0.0133	0.1071
4.6	0.4104	0.4293	0.3048	0.0189	0.1056
4.8	0.4034	0.4261	0.3102	0.0227	0.0932
5	0.3789	0.4042	0.3077	0.0253	0.0712
5.2	0.3402	0.3675	0.2975	0.0273	0.0427

x	$ua(x, t)$	$u(x, t)$	$udf(x, t)$	$ ua(x, t) - u(x, t) $	$ ua(x, t) - udf(x, t) $
5.4	0.2918	0.3210	0.2804	0.0292	0.0114
5.6	0.2393	0.2700	0.2577	0.0307	0.0184
5.8	0.1875	0.2191	0.2310	0.0316	0.0435
6	0.1404	0.1720	0.2019	0.0316	0.0615
6.2	0.1004	0.1309	0.1722	0.0305	0.0718
6.4	0.0687	0.0967	0.1433	0.0280	0.0746
6.6	0.0448	0.0694	0.1163	0.0246	0.0715
6.8	0.0280	0.0486	0.0921	0.0206	0.0641
7	0.0167	0.0332	0.0712	0.0165	0.0545
7.2	0.0095	0.0221	0.0537	0.0126	0.0442
7.4	0.0051	0.0144	0.0394	0.0093	0.0343
7.6	0.0027	0.0092	0.0278	0.0065	0.0251
7.8	0.0013	0.0058	0.0169	0.0045	0.0156
8	0	0	0	0	0

Tabla 4: Resultados del ejemplo 2b ($D=0.1$, $t = 4$).

Análisis del Ejemplo 2

Debemos recordar que la gráfica de la solución analítica es la gráfica del método de Diferencias Finitas con $N = 4000$, ya que para esas condiciones de contorno y condición inicial no tenemos solución analítica. Ésta nos sirve para saber el comportamiento de la solución analítica y así poder realizar las comparaciones con los métodos numéricos.

Debido a las condiciones de contorno e inicial para este ejemplo, las gráficas van a parecerse a la gaussiana. En el Ejemplo 2a la difusión es pequeña ($D=0.001$) y como puede verse en la figura 5, la gráfica por el método de Von Rosenberg está muy cercana a la gráfica de la solución analítica y en la mayoría de los valores del intervalo $[0,8]$ las dos coinciden, mientras que la gráfica por el método de Diferencias Finitas ($N = 40$), no tiene una buena aproximación a la gráfica de la solución analítica, sólo se aproxima bien para algunos valores de u que son cercanos a cero, eso sucede aproximadamente en los intervalos $[0, 2.5]$ y $[7, 8]$. En valores de u que no estén cercanos a cero, la aproximación por el método de Diferencias Finitas es mala y de hecho no hay ningún valor de u que logre acercarse a 1.

En la tabla del Ejemplo 2a sólo hay un error por el método de Diferencias Finitas que es más pequeño que el error por el método de Von Rosenberg, eso pasa en $x = 4$, en los otros errores, el método de Von Rosenberg siempre gana, debido a que sus errores tienen un orden de magnitud mucho menor que los errores por el método de Diferencias Finitas, por ejemplo: el error que corresponde a $x = 0.2$ es 5.6839×10^{-228} .

Para el Ejemplo 2b se usa una difusión un poco mayor ($D = 0,1$). En la figura 6 se tiene algo similar a la figura 5, porque la gráfica por el método de Von Rosenberg se aproxima a la gráfica de la solución analítica, no tanto como en la figura 5, pero si lo suficiente para ganarle al método de Diferencias Finitas. El método de Diferencias Finitas sigue teniendo problemas en los valores de u cercanos a la mitad del intervalo $[0,8]$, no hay valores de u por el método de Diferencias Finitas que logren aproximarse a 0.4, en cambio por el método de Von Rosenberg si los hay.

Observando los errores de aproximación en la tabla del Ejemplo 2b, casi todos los errores que se obtienen por el método de Von Rosenberg son más pequeños que los errores que se obtienen por el método de Diferencias Finitas. Por éste método, solamente 6 errores son más pequeños que los del método de Von Rosenberg, estos corresponden a los siguientes intervalos: $[2.8, 3.4]$ y $[5.4, 5.6]$. La ventaja del método de Diferencias Finitas con respecto al método de Von Rosenberg en esos valores de x , no es muy alta, el método de Diferencias Finitas gana por algunas centésimas. Por lo antes dicho, el mejor método en el Ejemplo 2, es el de Von Rosenberg.

4.3 Ejemplo 3

Para este ejemplo, el intervalo espacial es $[0, 8]$, el intervalo temporal es $[0, 2]$, la velocidad del fluido $v = 1$ y las difusiones para el ejemplo 3a y 3b son $D=0.001$ y $D=0.1$, respectivamente. El tiempo en que se grafica, es en $t = 2$. Las condiciones de contorno para este ejemplo, son

$$u(0, t) = 1, \quad u(8, t) = 0, \quad t > 0.$$

La condición inicial, es

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0.5, & \text{para } 0.2 \leq x \leq 1.8 \\ u(x, 0) = 0.7, & \text{para } 2 \leq x < 8 \end{cases}$$

Para el método de Von Rosenberg, los pasos en el espacio y en el tiempo son $N = 40$ y $M = 40$, respectivamente. Para el método de Diferencias Finitas los pasos en el espacio son $N = 40$ y el $\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{4(\Delta x v + 2D)}$.

No tenemos solución analítica para la ecuación de convección-difusión unidimensional con las condiciones de contorno y condición inicial mencionadas anteriormente, así que usaremos la aproximación a la solución analítica por el Método de Diferencias Finitas con $N = 4000$, como nuestra solución analítica.

En la siguiente página se muestra la primera gráfica del ejemplo número tres.

Ejemplo 3a

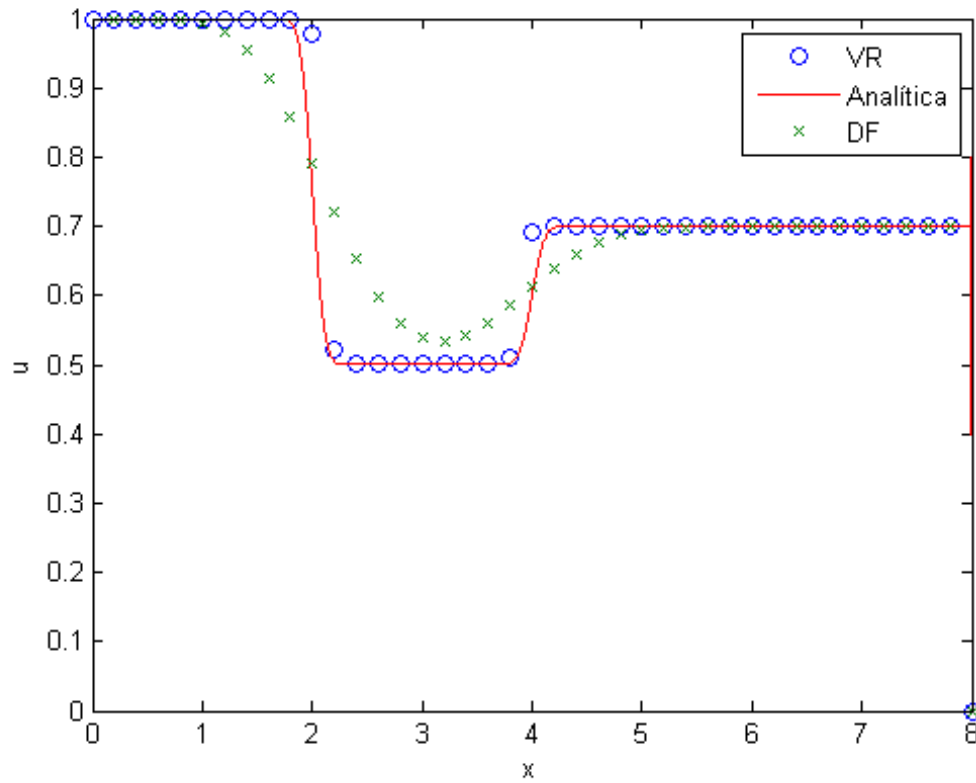


Figura 7: Comparación de las soluciones aproximadas obtenidas con los métodos VR y DF vs Solución Analítica ($D=0.001$, $t = 2$).

Igual que en los ejemplos anteriores, Von Rosenberg (o), Analítica color rojo y Diferencias Finitas (x).

Los resultados numéricos referente a la figura 7 se muestran en la siguiente tabla.

x	$ua(x, t)$	$u(x, t)$	$udf(x, t)$	$ ua(x, t) - u(x, t) $	$ ua(x, t) - udf(x, t) $
0	1	1	1	0	0
0.2	0.99999999999912	1	0.999993947475149	8.8041×10^{-14}	6.0525×10^{-6}
0.4	0.99999999999823	1	0.999924491381256	1.7697×10^{-13}	7.5509×10^{-5}
0.6	0.99999999999734	1	0.999501461822721	2.6601×10^{-13}	4.9854×10^{-4}
0.8	0.99999999999645	0.99999999999996	0.997769159690199	3.5105×10^{-13}	0.0022
1	0.99999999999557	0.99999999998466	0.992495635186555	1.0910×10^{-12}	0.0075
1.2	0.99999999999468	0.999999999633069	0.979866183334151	3.6640×10^{-10}	0.0201
1.4	0.99999999998785	0.999999939032393	0.955189163704159	6.0966×10^{-8}	0.0448
1.6	0.999999197655528	0.999993046922248	0.914840271179320	6.1507×10^{-6}	0.0852
1.8	0.995135106582725	0.999478605340075	0.858598247105431	0.0043	0.1365
2	0.754489476411157	0.976718429359698	0.790821230082761	0.2222	0.0363
2.2	0.505575511320341	0.523168323199698	0.719448319521351	0.0176	0.2139
2.4	0.500001127791439	0.500628984753720	0.653297678454483	6.2786×10^{-4}	0.1533
2.6	0.500000000001553	0.500012467811315	0.599296828383442	1.2468×10^{-5}	0.0993
2.8	0.500000000000190	0.500000201117588	0.561133373908010	2.0112×10^{-7}	0.0611
3	0.500000000000235	0.500000002943982	0.539588364158051	2.9437×10^{-9}	0.0396
3.2	0.500000000000279	0.500000024421796	0.533646420857039	2.4422×10^{-8}	0.0336
3.4	0.500000000000643	0.500002781231497	0.541293945158882	2.7812×10^{-6}	0.0413
3.6	0.500000386017583	0.500208557863975	0.559655204750753	2.0817×10^{-4}	0.0597
3.8	0.502142756867045	0.509312628256122	0.584929060758852	0.0072	0.0828
4	0.600967400146381	0.690732670720122	0.612734656835378	0.0898	0.0118
4.2	0.697957535147076	0.699748406098513	0.638969894205401	0.0018	0.0590
4.4	0.699999613338745	0.699995012875476	0.660737695429453	4.6005×10^{-6}	0.0393
4.6	0.699999999999534	0.699999919553211	0.676808387229433	8.0446×10^{-8}	0.0232
4.8	0.7	0.69999998881118	0.687437734737669	1.1189×10^{-9}	0.0126
5	0.7	0.69999999986099	0.693764979733879	1.3901×10^{-11}	0.0062
5.2	0.7	0.69999999999842	0.697165938905941	1.5798×10^{-13}	0.0028
5.4	0.7	0.69999999999998	0.698820756072328	1.9984×10^{-15}	0.0012

x	$ua(x, t)$	$u(x, t)$	$udf(x, t)$	$ ua(x, t) - u(x, t) $	$ ua(x, t) - udf(x, t) $
5.6	0.7	0.7	0.699551001167355	0	4.4900×10^{-4}
5.8	0.7	0.7	0.699843641657243	0	1.5636×10^{-4}
6	0.7	0.7	0.699950231936953	0	4.9768×10^{-5}
6.2	0.7	0.7	0.699985533587149	0	1.4466×10^{-5}
6.4	0.7	0.7	0.699996164141845	0	3.8359×10^{-6}
6.6	0.7	0.7	0.699999073533926	0	9.2647×10^{-7}
6.8	0.7	0.7	0.699999796541974	0	2.0346×10^{-7}
7	0.7	0.7	0.699999959466455	0	4.0534×10^{-8}
7.2	0.7	0.7	0.699999992876901	0	7.1231×10^{-9}
7.4	0.7	0.7	0.700000035718831	0	3.5719×10^{-8}
7.6	0.7	0.7	0.700007424264080	0	7.4243×10^{-6}
7.8	0.7	0.7	0.701492519223593	0	0.0015
8	0	0	0	0	0

Tabla 5: Resultados del ejemplo 3a ($D=0.001$, $t = 2$).

Ejemplo 3b

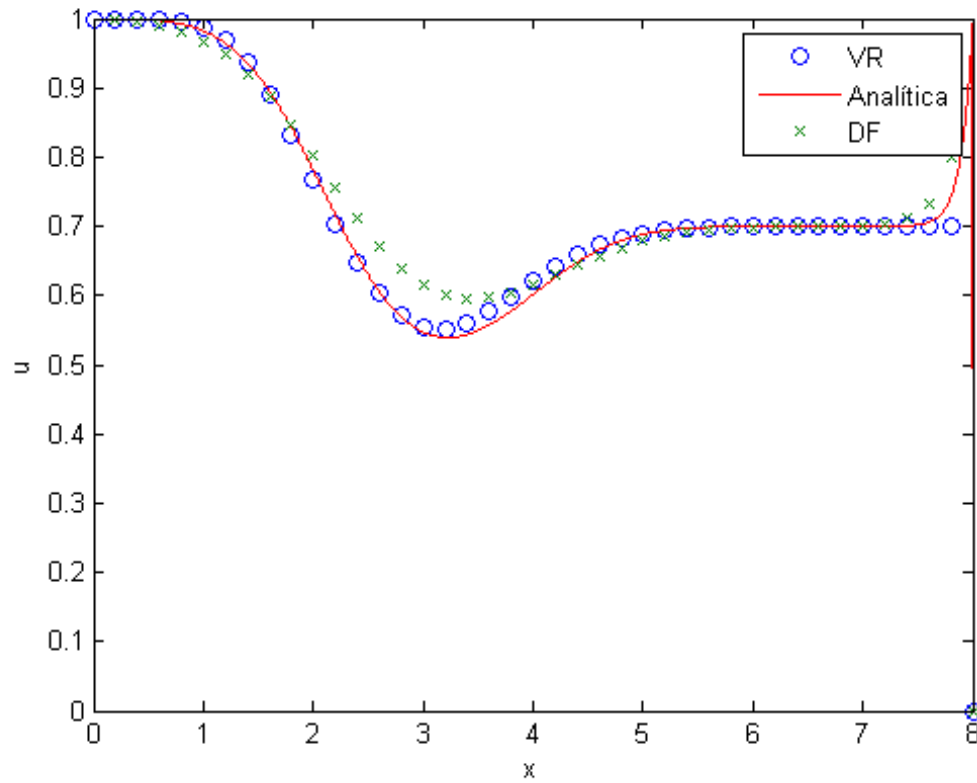


Figura 8: Comparación de las soluciones aproximadas obtenidas con los métodos VR y DF vs Solución Analítica ($D=0.1$, $t = 2$).

En la próxima página se muestran los resultados numéricos de la figura 7.

x	$ua(x, t)$	$u(x, t)$	$udf(x, t)$	$ ua(x, t) - u(x, t) $	$ ua(x, t) - udf(x, t) $
0	1	1	1	0	0
0.2	0.999817090048270	0.999991532456096	0.998770534030451	1.7444×10^{-4}	0.0010
0.4	0.999135032485223	0.999878631870706	0.996020684000149	7.4360×10^{-4}	0.0031
0.6	0.997184609425108	0.999163594829906	0.990764938686111	0.0020	0.0064
0.8	0.992518262032055	0.996290902157217	0.981777258504022	0.0038	0.0107
1	0.982858443703434	0.988032433411130	0.967732934087547	0.0052	0.0151
1.2	0.965268871776996	0.969839828218275	0.947450033527376	0.0046	0.0178
1.4	0.936834439571390	0.937683604286608	0.920194347893696	8.4916×10^{-4}	0.0166
1.6	0.895797005052304	0.890477066379419	0.885974592412896	0.0053	0.0098
1.8	0.842731523126894	0.831297594330381	0.845736573073812	0.0114	0.0030
2	0.781117974899569	0.766458274143231	0.801379356095237	0.0147	0.0203
2.2	0.716833119441028	0.703170923214188	0.755562799860045	0.0137	0.0387
2.4	0.656647022573184	0.647389223239406	0.711338059336029	0.0093	0.0547
2.6	0.606402249802129	0.602912078700931	0.671686154932871	0.0035	0.0653
2.8	0.569727720210306	0.571683045470572	0.639073562889832	0.0020	0.0693
3	0.547755407581976	0.554413217321673	0.615121325108152	0.0067	0.0674
3.2	0.539674329352534	0.550753842179078	0.600444718269030	0.0111	0.0608
3.4	0.543551373484063	0.559034898377011	0.594672493316710	0.0155	0.0511
3.6	0.556913666189357	0.576184325579990	0.596615188649222	0.0193	0.0397
3.8	0.576969330961185	0.598255498959302	0.604529608431610	0.0213	0.0276
4	0.600685955397114	0.621371945784352	0.616420742397399	0.0207	0.0157
4.2	0.625002201681376	0.642565373595347	0.630327987623747	0.0176	0.0053
4.4	0.647244370763609	0.660147376600838	0.644554496691318	0.0129	0.0027
4.6	0.665577462316009	0.673606766243357	0.657814005333606	0.0080	0.0078
4.8	0.679244513555895	0.683242559496207	0.669286979264906	0.0040	0.0100
5	0.688472288930781	0.689758513698248	0.678595142433769	0.0013	0.0099
5.2	0.694118143061080	0.693952928913671	0.685717084298466	1.6521×10^{-4}	0.0084
5.4	0.697248961968090	0.696539246422993	0.690874529497525	7.0972×10^{-4}	0.0064

x	$ua(x, t)$	$u(x, t)$	$udf(x, t)$	$ ua(x, t) - u(x, t) $	$ ua(x, t) - udf(x, t) $
5.6	0.698822629449867	0.698074700549752	0.694417769047211	7.4793×10^{-4}	0.0044
5.8	0.699539606211774	0.698956138247143	0.696731219743853	5.8347×10^{-4}	0.0028
6	0.699835705287977	0.699447169357527	0.698169651113146	3.8854×10^{-4}	0.0017
6.2	0.699946551119387	0.699713436816191	0.699026325440835	2.3311×10^{-4}	9.2023×10^{-4}
6.4	0.699984189455947	0.699854352190897	0.699529483109437	1.2984×10^{-4}	4.5471×10^{-4}
6.6	0.699995976213255	0.699927300271520	0.699866393052041	6.8676×10^{-5}	1.2958×10^{-4}
6.8	0.700000881773450	0.699964312034782	0.700250985406947	3.6570×10^{-5}	2.5010×10^{-4}
7	0.700014283103389	0.699982748758773	0.701101918873896	3.1534×10^{-5}	0.0011
7.2	0.700107229044767	0.699991779075005	0.703545731337345	1.1545×10^{-4}	0.0034
7.4	0.700784535387163	0.699996133971909	0.710896247565956	7.8840×10^{-4}	0.0101
7.6	0.705706040330459	0.699998204225977	0.733064096604836	0.0057	0.0274
7.8	0.741394741350442	0.699999175405178	0.799752570591936	0.0414	0.0584
8	0	0	0	0	0

Tabla 6: Resultados del ejemplo 3b ($D=0.1$, $t = 2$).

Análisis del Ejemplo 3

Antes de empezar con el análisis del Ejemplo 3, debemos recordar que para la ecuación de convección-difusión unidimensional, con las condiciones de contorno y condición inicial de este ejemplo, no tenemos solución analítica así usaremos como nuestra solución analítica la gráfica por el método de Diferencias Finitas con $N = 4000$.

En la figura 7, podemos notar que la gráfica de la solución analítica tiene una apariencia muy diferente a la de los ejemplos anteriores. Esto se debe a las condiciones de contorno y condición inicial que se usaron en este ejemplo. La gráfica que mejor cumple con lo descrito anteriormente es la del método de Von Rosenberg. Por el método de Diferencias Finitas hay un comportamiento similar, pero hay partes donde no es totalmente constante y por eso no se aproxima tanto a la gráfica de la solución analítica. Se puede apreciar que la gráfica por el método de Von Rosenberg está a la par con la gráfica de la solución analítica en casi todo el intervalo $[0,8]$, se puede notar que hay dos valores de u por el método de Von Rosenberg que no están sobre la gráfica de la solución analítica, éstos corresponden a $x = 2$ y $x = 4$. Sin embargo estos valores son muy cercanos.

Revisando las tablas se pueden ver los dos errores por el método de Von Rosenberg que dan más altos que los errores por el método de Diferencias Finitas, éstos corresponden a $x = 2$ y $x = 4$ (ya mencionados anteriormente en el análisis gráfico). Los demás errores numéricos por el método de Von Rosenberg son más pequeños que los errores por el método de Diferencias Finitas, también hay resultados por el método de Von Rosenberg que dan igual a los resultados de la solución analítica, es decir, que el error de aproximación es cero.

En la figura 8 se puede ver que la gráfica por el método de Von Rosenberg se aproxima mejor a la solución analítica en todo el intervalo trabajado, en la gráfica por el método de Diferencias Finitas hay algunas aproximaciones que no son tan buenas como las del método de Von Rosenberg, éstas se encuentran alrededor del intervalo $[2, 4]$. Se puede percatar en la figura 8 que al final del intervalo $[0, 8]$ la solución analítica no cumple muy bien con la condición inicial ya que ésta debe ser aproximadamente igual a 0.7 y la gráfica empieza a

crecer. Por el contrario, la gráfica por el método de Von Rosenberg cumple con la condición inicial a la perfección y se mantiene aproximadamente en 0.7 al final del intervalo $[0, 8]$, esto muestra lo estable que es el método de Von Rosenberg en los casos donde la difusión es alta.

En los resultados numéricos que aparecen en la tabla correspondiente a la figura 8, vuelve a ganar el método de Von Rosenberg ya que solamente 5 errores son un poco más altos que los errores por el método de Diferencias Finitas, estos errores corresponden a: $x = 1.8$ y el intervalo $[4, 4.6]$.

Capítulo 5

5. Conclusión

Los resultados obtenidos en este trabajo de grado, dan certeza de que para obtener la mejor aproximación a la solución analítica de la ecuación de convección-difusión unidimensional, se debe usar el método de Von Rosenberg. Como hemos visto en los ejemplos, siempre el método de Von Rosenberg aporta los mejores resultados. Para demostrar la exactitud del método de Von Rosenberg las difusiones que usamos en los ejemplos son muy pequeñas (esto equivale a $0 < R \leq 1$), es ahí donde los demás métodos numéricos con pocos pasos de espacio y tiempo no convergen tan rápido. Para difusiones muy altas, $D > 1$, no presentamos ejemplos, pero se realizaron pruebas numéricas y se obtuvo que la solución por el método de Von Rosenberg converge a la solución analítica.

Con respecto a las gráficas por el método de Von Rosenberg estas son óptimas y se puede observar que la solución por este método se solapa con la solución analítica en la mayoría de los intervalos trabajados. Para despejar las dudas de si en los ejemplos que presentamos el método de Von Rosenberg gana en comparación con el método de Diferencias Finitas, sólo tenemos que observar los errores de aproximación que se encuentran en las tablas, los errores de aproximación que se obtienen por el método de Von Rosenberg son muy pequeños si los comparamos con los errores de aproximación que se obtienen por el método de Diferencias Finitas, esto siempre ocurre porque se demostró que el método de Von Rosenberg converge.

Una de las ventajas del esquema de Von Rosenberg es que continua siendo el más simple de entender e implementar, porque es la combinación del método de Diferencias Finitas

centrado y del método implícito de Crank-Nicholson. Otra ventaja es que el error de truncamiento es de orden cuadrático tanto para el espacio como para el tiempo, en ese sentido el método es muy preciso. El estudio analítico de convergencia del método de Von Rosenberg corrige el análisis de consistencia presentado en [9] y lo complementa con el análisis de estabilidad, el cual es omitido en [9]. En consecuencia el estudio de convergencia es un aporte original de este trabajo de grado.

Una desventaja del método de Von Rosenberg, es que no puede extenderse a dos o tres dimensiones de cualquier manera obvia, es por eso que se debe seguir investigando este tipo de problemas en más dimensiones espaciales.

Al culminar esta tesis podemos decir que se han obtenido los resultados esperados para el método de Von Rosenberg y por eso es uno de los mejores métodos para obtener una aproximación a la solución analítica de la ecuación de convección-difusión unidimensional.

Bibliografía

- [1] BRUCE A. FINLAYSON, " *Numerical Methods for Problems With Moving Fronts*," Ravenna Park Publishing, Inc, 1992, Seattle, Washington USA.
- [2] BULIRSCH R., STOER J., " *Introduction to Numerical Analysis*," Second Edition, Springer-Verlag, 1993.
- [3] BURDEN RICHARD L., FAIRES DOUGLAS J., " *Numerical Analysis*," Ninth Edition, Cengage Learning, 2010, Canada.
- [4] E. H. HERRON, JR. AND D.U. VON ROSENBERG, " *An efficient numerical method for the solution of pure convective transport problems with split boundary conditions*," *Chem. Eng. Sci.* **21**, 337–342 (1966).
- [5] D. D. LAUMBACH, " *A high-accuracy finite-difference technique for treating the convection-diffusion equation*," *SPE Journal* **15**, 517 – 531 (1975)
- [6] H. S. PRICE, R. S. VARGA, AND J. E. WARREN, " *Application of oscillation matrices to diffusion-convection equations*," *J. Math. and Phys.* **45**, 301 – 311 (1966).
- [7] RICHARD HABERMAN, " *Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno*," 3^{ra} ed. Prentice Hall, 2003, Madrid.
- [8] D. U. VON ROSENBERG, R. P. CHAMBERS, AND G. A. SWAN, " *A numerical solution of surface controlled fixed-bed absorption*," *I&EC Fundamentals* **16**, 154 – 157 (1977) .
- [9] D.U. VON ROSENBERG, " *An explicit finite difference solution to the convection-dispersion equation*," *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **2**, 229 – 237 (1986).
- [10] YUNUS A. ÇENGEL, " *Transferencia de Calor y Masa: Un Enfoque Práctico*," 3^{ra} ed. McGraw-Hill, 2007, México.