



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

**Implementación del Método de Elementos Frontera en
el estudio de placas cuadradas
con condiciones de temperatura y flujo de calor en su
frontera**

Trabajo Especial de Grado presentado ante la
ilustre Universidad Central de Venezuela por
el **Br. Freddy Tapia** para optar al título de
Licenciado en Matemática.

Tutor: Profa. Maira Valera López.

Caracas, Venezuela

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Implementación del Método de Elementos Frontera en el estudio de placas cuadradas con condiciones de temperatura y flujo de calor en su frontera**”, presentado por el **Br. Freddy Tapia**, titular de la Cédula de Identidad **20.652.221**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Profa. Maira Valera López
Tutor

Profa. Mariela Castillo
Jurado

Profa. Carmen Da Silva
Jurado

Resumen

En este trabajo, se realizó una implementación del Método de Elementos Frontera (BEM, por sus siglas en inglés) para la obtención de valores de potencial, sobre placas cuadradas sometidas a diferentes condiciones de temperatura y flujo de calor sobre su frontera.

Los resultados obtenidos mediante este método se comparan con aquellos resultados obtenidos a partir del uso del Método de Elementos Finitos (FEM, por sus siglas en inglés), así como con los valores generados a partir solución analítica correspondiente a cada ejemplo, con el fin de apreciar las bondades del BEM. Se realiza el cálculo del potencial sobre la frontera de las placas, solo discretizando la frontera, obteniendo así una representación del valor del potencial sobre todo el dominio.

Con esta comparación, se muestra la utilidad del BEM al momento de describir el comportamiento térmico sobre las placas cuadradas, mediante la discretización de la frontera de las mismas, lo cual simplifica su tratamiento. Los resultados obtenidos a partir del BEM, mostraron una mejor aproximación a los valores de la solución analítica, que aquellos resultados obtenidos implementando el FEM, lo que resalta las bondades del BEM en la solución de problemas de transferencia de calor en estado estacionario.

Dedicatoria

A mi abuela y a mis tios, **Fanny Rocha** y **Luis E. Calvache**, por su apoyo y afecto incondicional durante mi transitar por el liceo y durante mi etapa en la universidad .

A mis padres, **Luis F. Tapia** y **Nancy M. Calvache**, por brindarme su amor y apoyo durante el transcurso de todos estos años de estudio, puedo decir que gracias a ellos estoy donde estoy y he logrado muchas cosas.

A mis hermanas, **Vanessa Tapia** y **Mayra Tapia**, que muy a su manera me brindaron su cariño asi como muchas alegrías, muy necesarias en estos años de estudio.

En especial a mi abuelo , **Luis H. Calvache**, que desde el cielo me sigue apoyando con su fuerte caracter para seguir siempre adelante y no renunciar jamás.

Agradecimiento

A **Dios** por darme la fuerza y constancia para siempre continuar.

A la **Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela** por contar con personal capacitado que me ayudo a mejorar no sólo en el ámbito académico sino en el plano deportivo que tantas alegrías me dió durante el transcurso de toda la carrera.

A la **Escuela de Matemática** por tener el personal capacitado para formar excelentes profesionales, además de brindar un espacio apto para el logro de tal fin.

A mi tutora la **Profa. Maira Valera** por guiarme y brindarme el apoyo necesario durante el transcurso de la elaboración de la tesis, así como estar siempre dispuesta a aclarar cualquier duda y brindarme las herramientas necesarias para aclararlas.

A mi **familia** por brindarme su amor y cariño, además de siempre contar con su apoyo incondicional, tanto en los malos como en los buenos momentos.

A mis **compañeros y amigos** que me acompañaron durante toda la carrera, en especial a los integrantes de **Sporting**, amigos con los cuales tuve grandes experiencias y alegrías al participar en los torneos de fútbol sala.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Ecuación del calor	5
1. Deducción de la ecuación del calor en dos dimensiones	5
1.1. Teorema de Green	9
1.2. Aplicación del teorema de Green al flujo de calor	9
1.3. Ley de Fourier de la difusión del calor	10
2. Ecuación del calor	10
2.1. Problema de valor inicial y frontera.	11
3. Ecuación de Laplace	13
3.1. Unicidad de la ecuación de Laplace	13
3.2. Principio del máximo y del mínimo para funciones armónicas	14
3.3. Condición de solubilidad de la ecuación de Laplace	14
Capítulo 2. Ecuación Integral de Frontera	16
1. Teorema de la divergencia e identidades de Green	16
1.1. Teorema de Gauss (teorema de la divergencia)	16
1.1.1. Primera identidad de Green	16
1.1.2. Segunda identidad de Green	17
2. Operador autoadjunto a la ecuación de Laplace	17
3. Solución fundamental	20
4. Cálculo de la solución Fundamental	20
5. Potencial de simple y doble capa	25
5.1. Teoría de potencial	25
5.2. Conservación del flujo para fluidos potenciales	25
5.3. Potenciales de superficies	25
6. Cálculo de la ecuación integral	27

7. Dedución ecuación integral de frontera	27
Capítulo 3. Método de Elementos Frontera	33
1. Discretización de la ecuación integral de frontera	37
1.1. Tratamiento de las esquinas	38
2. Sistema de Ecuaciones	40
3. Implementación del método numérico	43
3.1. Código computacional usando Elementos Lineales (POLINBE)	43
3.1.1. Programa principal	43
3.1.2. Rutina INPUTPL	45
3.1.3. Rutina GHMATPL	45
3.1.4. Rutina EXTINPL	47
3.1.5. Rutina LOCINPL	48
3.1.6. Rutina SLNPL	49
3.1.7. Rutina INTERPL	49
3.1.8. Rutina OUTPTPL	49
Capítulo 4. Resultados	50
1. Ejemplo 1	53
2. Ejemplo 2	75
3. Ejemplo 3	85
Conclusiones y Recomendaciones	94
Bibliografía	96

Introducción

En muchos campos de la física y de la ingeniería es imprescindible el uso de ecuaciones en derivadas parciales, como la acústica, dinámica de fluidos, transferencia de calor, entre otros. En este trabajo se utilizará la ecuación del calor, la cual es muy usada en problemas de transferencia de calor o energía térmica causada por la agitación de las moléculas.

Existen dos procesos básicos que intervienen en la transferencia de la energía térmica, estos son la conducción y convección. El primero resulta del contacto directo entre los cuerpos donde el calor fluye desde un cuerpo que tiene mayor temperatura a otro que posee menor temperatura, que está en contacto con el primero. El segundo por su parte, resulta de la traslación de una molécula vibrante de una región a otra, llevando su energía térmica con ella. En este trabajo se estudiarán problemas en los que la conducción de energía térmica predomina sobre la convección, este es el caso del flujo de calor en sólidos.

Al considerar el estado estacionario en la ecuación del calor, es decir, cuando el problema es independiente del tiempo, se obtiene la ecuación de Poisson. Una vez obtenida esta ecuación y suponiendo que no existen fuerzas externas, obtenemos la ecuación de Laplace o la ecuación potencial, como también es conocida, pues tanto el potencial gravitacional como el potencial electrostático, satisfacen esta ecuación.

Dicha ecuación será de mucha utilidad en este trabajo. La ecuación de Laplace escrita en coordenadas cartesianas es muy útil cuando el dominio espacial considerado es un rectángulo, sin embargo en las aplicaciones prácticas es de utilidad expresar esta ecuación en otro tipo de coordenadas, ya sea en coordenadas cilíndricas o esféricas.

Es muy complicado resolver de forma analítica estos problemas, debido a la dificultad de encontrar la solución fundamental asociada a la ecuación diferencial considerada, por lo que se recurre a los métodos numéricos para encontrar una buena aproximación de su solución. Existen varios métodos numéricos, uno de ellos es el Método de Elementos Frontera (BEM, por sus siglas en inglés), el cual representa una gran alternativa en los casos donde se requiere una mayor precisión y descripción del comportamiento térmico de las regiones

estudiadas, enfocándose principalmente en la frontera de dichas regiones, la cual en este trabajo será una placa cuadrada, donde su grosor será despreciable, en comparación con el largo y el ancho de la placa, de esta manera se resolverá un problema bidimensional. Dicho método se implementará en este trabajo.

El establecimiento del BEM, es mucho más reciente que otros métodos numéricos como diferencias finitas o elementos finitos, por tanto, su uso no es muy extenso y salvo muy raras excepciones, su aplicación actual esta restringida a los ambientes académicos. Se han realizado trabajos diversos sobre el BEM, buscando en ellos dar elementos que permitan apreciar sus bondades, alcances y limitaciones. En general se atribuye a Jaswon en 1963 [9] y a Symm en el mismo año [12], el desarrollo de la primera técnica numérica de este método denominada *método directo* para resolver las ecuaciones integrales de Fredholm, que datan de 1903 en el estudio de problemas de potencial.

Cuatro años después Rizzo en 1967 [14], utilizó la versión directa del método aplicada a problemas bidimensionales y basada en la solución fundamental de Kelvin para el método elástico infinito. Por otro lado, Fang y colaboradores en 1972 [7], se encargaron del estudio del comportamiento dinámico en la unión de placas delgadas, donde mediante el BEM se pudo establecer ecuaciones para la parte interna de estas placas.

En los años siguientes fueron desarrollados más artículos que aportaron grandes avances en el estudio del BEM, tales como los realizados por Rizzo y Shippy en 1977 [15] y Nakamura en 1979 [6]. En España, los trabajos con el BEM comenzaron con la tesis doctoral de Dominguez en 1977 [5], quien aplicó el método directo al cálculo de tensiones en anclajes de piezas postensadas. Posteriormente, Gómez y Cerrolaza en 1988 [3], presentaron las expresiones matemáticas vectoriales necesarias para la eficaz implementación y control del refinamiento en problemas de elastostática. Por su parte, Ding Rui y colaboradores en 1996 [16], aplicaron el BEM para resolver la respuesta dinámica de una delgada placa viscoelástica, en un dominio cuadrado, usando la ecuación de Laplace.

Otro estudio fue el realizado por T. Dirgantara y M. H. Aliabadi en 2001 [4], en donde analizaron mediante el BEM las cargas arbitrarias que actúan sobre estructuras planas utilizando una gran cantidad de ejemplos con diferentes configuraciones para demostrar la efectividad de este método. Atalay en 2004 [1], llevó a cabo el estudio de la solución bidimensional en estado estable para la conducción de calor en problemas con varias regiones

en un arreglo de forma no regular. En su trabajo aplicaron el BEM en sistemas homogéneos y heterogéneos.

Mera en 2004 [10], por su parte logró establecer un algoritmo numérico para determinar los coeficientes de conductividad y los datos en la frontera en un problema de conducción en estado estable para un medio anisotrópico. Shiah en 2006 [11], aplicó el método directo del BEM para investigar la conducción de calor que ocurre en compuestos de múltiples medios anisotrópicos que incorporan fuentes de calor.

Zhou en 2007 [17], aplicando las técnicas del BEM, obtuvo un modelo para predecir la conductividad térmica efectiva en camas de empaquetamiento. Su modelo considera los mecanismos de transferencia de calor que ocurren en el proceso de intercambio de calor entre superficies, considerando un cuadrado y un hexágono como elemento en el modelado.

Por otra parte, Terres H. y colaboradores en 2009 [13], utilizaron el BEM en el estudio de placas sometidas a temperatura y flujo de calor en su frontera, donde se analizan los resultados obtenidos por el BEM, implementando elementos constantes, con el FEM. El trabajo realizado por Terres H. y colaboradores en el artículo antes mencionado, es la base para este trabajo especial de grado, donde se realizará el cálculo del potencial a partir de la implementación de elementos lineales para tres ejemplos, variando sus condiciones de contorno. Este estudio tiene como fin mostrar la utilidad y ventaja que tiene el BEM sobre el FEM en cuanto a su precisión, simplificación y una mayor descripción del comportamiento térmico en los valores interiores y de frontera sobre las placas cuadradas.

En el capítulo 1, se presenta la deducción de la ecuación del calor, en consecuencia la ecuación de Laplace. Se definen las condiciones inicial y de contorno que se pueden utilizar y se establece el teorema de existencia y unicidad para la ecuación de Laplace.

En el capítulo 2, se deduce la ecuación integral de frontera, la cual involucra potenciales de simple y doble capa. Los potenciales de simple y doble capa involucran núcleos los cuales son representados por la solución fundamental que es obtenida a partir del operador autoadjunto.

Luego, en el capítulo 3, se presenta una introducción al BEM donde damos a conocer sus características, ventajas y principales atractivos. También se dará a conocer a detalle el programa POLINBE, con el cual calcularemos todas las soluciones del problema en estudio. Para tal fin, se describirán las principales rutinas y subrutinas de este programa.

Posteriormente, en el capítulo 4, se presenta los resultados de tres ejemplos, con los cuales buscaremos mostrar las grandes bondades de este método. Cada ejemplo tiene una variación de las condiciones de potencial y flujo sobre la frontera. Estos ejemplos se basan, en determinar la temperatura o potencial en las caras de una placa cuadrada. Luego, se presentarán las conclusiones y recomendaciones respectivas del trabajo todo esto en concordancia a los resultados obtenidos.

Ecuación del calor

1. Deducción de la ecuación del calor en dos dimensiones

Definamos algunas funciones que nos serán útiles en la demostración, (véase [8]):

- $e(\vec{x}, t)$ la densidad de energía térmica, la cual es la cantidad de energía por unidad de superficie.
- $p(\vec{x})$ la densidad de masa (masa por unidad de superficie).
- $c(\vec{x})$ el calor específico, es decir, la energía térmica necesaria para elevar una unidad la temperatura de una unidad de masa de una sustancia.
- $u(\vec{x}, t)$ la temperatura del material en cuestión.
- $\vec{q}(\vec{x}, t)$ flujo de calor, es decir, cantidad de energía térmica por unidad de tiempo que fluye en alguna dirección por unidad de área.

Considerese una región arbitraria $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (ver Figura 1.1), y una sección infinitesimal en la misma,

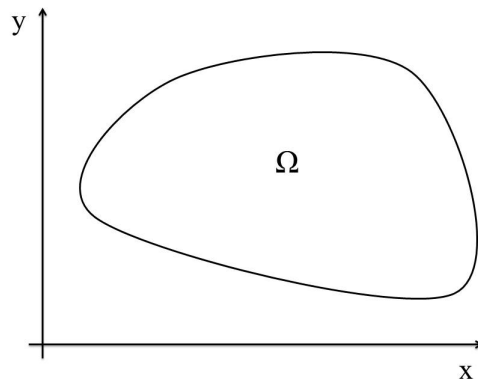


FIGURA 1.1. Región arbitraria $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

La energía térmica de la región Ω varía con el tiempo debido al flujo a través de la frontera y a la energía generada en el interior de la región, que puede ser debido a fuentes positivas o negativas de energía calorífica.

De esta manera la ley de la conservación de la energía (véase [8]), se puede resumir mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{array}{rcccl} \text{Variación de} & & \text{Flujo de calor a} & & \text{Energía térmica} \\ \text{energía térmica en} & = & \text{través de la frontera} & + & \text{generada en el interior} \\ \text{el tiempo} & & \text{por unidad de tiempo} & & \text{por unidad de tiempo} \end{array}$$

Por otro lado, sabemos que la densidad de masa $p(\vec{x})$ viene dada por la expresión,

$$p = \frac{m}{V},$$

donde m es la masa y V el volumen, luego haciendo un simple despeje se puede calcular la masa total involucrada,

$$m = p.V.$$

Por otra parte, la densidad de energía térmica, $e(\vec{x}, t)$ viene dada por,

$$e(\vec{x}, t) = \frac{\text{Energía térmica}}{V},$$

por lo tanto,

$$\text{Energía térmica} = e(\vec{x}, t).V,$$

de esta manera se obtiene que la energía térmica total es,

$$(1.1) \quad \text{Energía térmica total} = \iint_{\Omega} e(\vec{x}, t) d\Omega.$$

Ahora considérese el calor específico $c(\vec{x})$, que viene dado por,

$$(1.2) \quad c(\vec{x}) = \frac{\text{capacidad calorífica}}{m},$$

donde,

$$\text{capacidad calorífica} = \frac{\text{Energía térmica}}{u(\vec{x}, t)}.$$

A partir de estas dos definiciones podemos obtener la expresión de la energía térmica por unidad de masa, para lo cual multiplicamos la ecuación (1.2) por m , luego, sustituyendo el valor del calor específico, esto es,

$$\frac{\text{Energía térmica}}{m} = c(\vec{x}).u(\vec{x}, t).$$

Luego multiplicando la masa en ambos lados, se tiene,

$$\begin{aligned} \text{Energía térmica} &= c(\vec{x}).u(\vec{x}, t).m \\ &= c(\vec{x}).u(\vec{x}, t).p(\vec{x}).V, \end{aligned}$$

por tanto,

$$e(\vec{x}, t) = \frac{\text{Energía térmica}}{V} = c(\vec{x}).u(\vec{x}, t).p(\vec{x}).$$

Así, sustituyendo en la ecuación (1.1), se obtiene que el valor de la energía calorífica total o energía térmica total sobre la región Ω , esto es,

$$\text{Energía calorífica total} = \iint_{\Omega} c(\vec{x}).p(\vec{x}).u(\vec{x}, t) d\Omega.$$

Luego, necesitamos una expresión para el flujo de energía calorífica. En el problema unidimensional, el flujo de calor q se considera positivo hacia la derecha ($q < 0$ significa flujo hacia la izquierda). En el problema bidimensional, el calor fluye en alguna dirección, por tanto, el flujo de calor es un vector \vec{q} , para mayor información véase [8].

Sin embargo, al considerar la conservación de la energía calorífica, lo único que importa es el flujo de calor a través de la frontera por unidad de tiempo. Consideremos los puntos A y B ubicados en la región Ω (Figura 1.2).

Como se puede apreciar el vector flujo de calor, denotado por \vec{q} en el punto A es paralelo a la frontera de Ω , por lo tanto no hay energía calorífica cruzando la frontera por ese punto. De hecho, como se ve en el punto B , sólo contribuye la componente normal de flujo de calor. Por otro lado, en cada punto existen dos vectores normales, uno interior y otro exterior. Se convendrá en utilizar siempre el vector normal unitario exterior \hat{n} . Según la Figura 1.2 la componente normal exterior del flujo de calor en el punto B es,

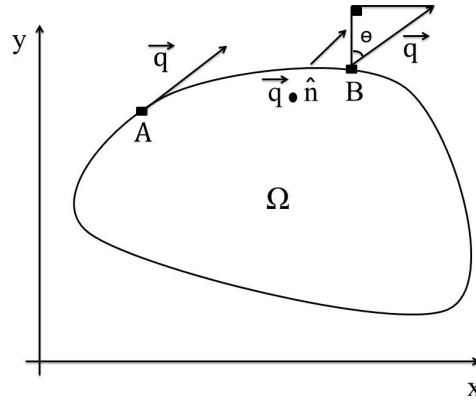


FIGURA 1.2. Componente normal del flujo de calor

$$|\vec{q}| \cos(\theta) = \frac{\vec{q} \cdot \hat{n}}{|\hat{n}|} = \vec{q} \cdot \hat{n}.$$

Así, por definición del producto escalar, si el vector de flujo de calor \vec{q} se dirige hacia el interior, ocurre que $\vec{q} \cdot \hat{n} > 0$, originando un flujo negativo hacia afuera.

Luego, para calcular la energía calorífica total que fluye hacia afuera de Ω por unidad de tiempo, se debe multiplicar $\vec{q} \cdot \hat{n}$ por el elemento de superficie dr y sumar estos diferenciales sobre la superficie que encierra la región Ω , esto se indica mediante la integral de línea,

$$\oint \vec{q} \cdot \hat{n} dr.$$

Por otro lado, si \vec{Q} es la energía calorífica por unidad de superficie que se genera en el interior de Ω , entonces la cantidad total de energía generada es,

$$\iint_{\Omega} \vec{Q} d\Omega.$$

Por lo tanto, la ley de conservación de la energía en una región bidimensional arbitraria Ω se escribe como,

$$(1.3) \quad \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} c\rho u d\Omega = - \oint \vec{q} \cdot \hat{n} dr + \iint_{\Omega} \vec{Q} d\Omega.$$

donde el signo negativo, en la integral de línea representa el flujo de calor que se disipa sobre la frontera de la región Ω .

1.1. Teorema de Green.

Este teorema (véase [8]) establece que la integral doble de la divergencia de un vector diferenciable Z es la integral de trayectoria de la componente normal exterior, es decir,

$$(1.4) \quad \iint_{\Omega} \nabla \cdot Z \, d\Omega = \oint Z \cdot \hat{n} \, dr,$$

donde, para un vector Z (con componentes Z_x y Z_y), su divergencia se define mediante,

$$\nabla \cdot Z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y}.$$

1.2. Aplicación del teorema de Green al flujo de calor.

De acuerdo con el teorema de Green, la integral de trayectoria que aparece en la ecuación (1.3), se puede sustituir por una integral doble, esto es,

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega} cpu \, d\Omega = - \iint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{q} \, d\Omega + \iint_{\Omega} \vec{q} \, d\Omega.$$

Notemos que la derivada puede intercambiarse con la integral debido a que el dominio Ω es un dominio fijo, por tanto, usando la linealidad de la integral, obtenemos que,

$$\iint_{\Omega} \left[cp \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{q}) - \vec{q} \right] d\Omega = 0.$$

Así, como la integral es cero para cualquier región arbitraria Ω , se deduce que el integrando debe ser cero, esto es,

$$cp \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{q}) - \vec{q} = 0,$$

o de igual forma,

$$(1.5) \quad cp \frac{\partial u}{\partial t} = -(\nabla \cdot \vec{q}) + \vec{q}.$$

1.3. Ley de Fourier de la difusión del calor.

En una dimensión de acuerdo a la ley experimental de Fourier (véase [8]), el flujo de calor q es proporcional a la derivada de la temperatura, esto es,

$$q = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x},$$

donde el signo menos indica que la energía térmica fluye de lo más caliente a lo más frío y $\frac{\partial u}{\partial x}$ es la variación de temperatura por unidad de longitud.

Estos mismos principios se aplican a dos dimensiones pero considerando el vector flujo de calor \vec{q} es proporcional al gradiente de temperatura,

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j},$$

por lo tanto,

$$(1.6) \quad \vec{q} = -K_0 \nabla u,$$

donde K_0 es la conductividad térmica.

2. Ecuación del calor

Sustituyendo (1.6) en (1.5) se obtiene la ecuación en derivadas parciales para la temperatura,

$$cp \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K_0 \nabla u) + \vec{q},$$

así,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{K_0}{cp} \nabla u \right) + \frac{\vec{q}}{cp},$$

donde $K = \frac{K_0}{cp}$ es la difusividad térmica y $Q = \frac{\vec{q}}{cp}$ representa las fuentes externas. Si no hay fuentes externas ($Q = 0$) y los coeficientes térmicos son constantes, se tiene que,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \nabla \cdot (\nabla u),$$

a partir de la definición de divergencia se puede calcular la divergencia del gradiente de u ,

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u,$$

donde $\nabla^2 u$ se denomina Laplaciano de u . Por tanto, en este caso,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = K \cdot \nabla^2 u},$$

es la ecuación del calor o de difusión en dos dimensiones sin fuentes externas.

2.1. Problema de valor inicial y frontera. Para poder solucionar la ecuación del calor, hay que añadirle una condición inicial, determinada por la distribución inicial de temperaturas,

$$u(x, y, 0) = f(x, y),$$

por otro lado, la temperatura también satisface alguna condición de contorno o de frontera en cada punto de la superficie considerada. Esta condición puede ser de varios tipos:

- Temperatura prescrita: en este caso es posible fijar la temperatura sobre la frontera como sigue,

$$u(x, y, t) = T(x, y, t),$$

donde T es una función dada dependiente de t , en cada punto de la frontera.

- Frontera aislada: también es muy frecuente fijar el flujo de calor a través de la frontera (o parte de ella); así esta sección quedaría aislada. Esto quiere decir que no hay flujo de calor a través de esa parte de la frontera. Como se dijo anteriormente, el vector flujo de calor es $-K_0 \nabla u$, por tanto, la cantidad de calor que fluye hacia afuera en cada punto será la componente normal exterior del vector flujo de calor, $-K_0 \nabla u \cdot \hat{n}$, donde \hat{n} es el vector normal exterior a la superficie en ese punto. Así, para una superficie aislada se tiene que,

$$\nabla u \cdot \hat{n} = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega.$$

Nótese que $\nabla u \cdot \hat{n}$ es la derivada direccional de u en la dirección del vector normal exterior, también conocida como derivada normal.

- Ley de enfriamiento de Newton

Esta ley es una condición más realista en muchas ocasiones, esta ley establece que la energía calorífica que fluye hacia afuera por unidad de tiempo y por unidad de superficie, es proporcional a la diferencia entre la temperatura en la superficie u y la temperatura fuera de la superficie, u_b . Así, aplicando esta ley, se tiene en la frontera que,

$$-K_0 \nabla u \cdot \hat{n} = H(u - u_b) \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

donde la constante de proporcionalidad H , es usualmente positiva, ya que si $u > u_b$ se espera que el calor fluya hacia afuera y $-K_0 \nabla u \cdot \hat{n}$ sea positivo.

En la Figura 1.3 se ilustra las condiciones de contorno en una región arbitraria Ω , donde \bar{u} y $\frac{\partial u}{\partial n}$ son datos conocidos en la frontera, las cuales son de dos tipos,

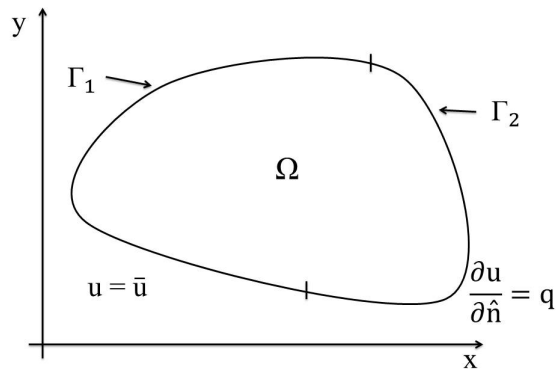


FIGURA 1.3. Dominio Ω con frontera $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

- Tipo Dirichlet

$$u = \bar{u} \text{ en } \Gamma_1,$$

- Tipo Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \text{ en } \Gamma_2,$$

donde la primera condición representa la temperatura en la frontera (temperatura prescrita) y la segunda representa el flujo de calor sobre la frontera (frontera aislada).

3. Ecuación de Laplace

Si las condiciones de frontera y las posibles fuentes de calor son independientes del tiempo, es posible que existan soluciones estacionarias de la ecuación del calor que verifiquen las condiciones de frontera estacionarias, esto es,

$$0 = \nabla \cdot (K \nabla u) + Q.$$

Observemos que en una distribución de temperaturas en equilibrio, $u(x, y, z)$ verifica una ecuación en derivadas parciales con más de una dimensión espacial.

En el caso de tener coeficientes de términos constantes, la distribución de temperaturas en equilibrio satisface,

$$\nabla^2 u = -\frac{Q}{K},$$

conocida como *ecuación de Poisson*.

Si además no hay fuentes ($Q = 0$) entonces,

$$(1.7) \quad \nabla^2 u = 0,$$

la cual se define como *ecuación de Laplace* e indica que el Laplaciano de la distribución de temperaturas es cero. Esta ecuación se conoce también como ecuación potencial pues, tanto el potencial gravitacional como el potencial electrostático satisfacen esta ecuación en ausencia de fuerzas externas.

3.1. Unicidad de la ecuación de Laplace. Con el fin de estudiar la unicidad de la ecuación de Laplace, primero se dará la definición de función armónica,

DEFINICIÓN 1.1. Una función $u(\vec{x})$ se dice armónica en una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si $u(\vec{x}) \in C^2(\Omega)$ y además verifica $\nabla^2 u = 0$.

Ahora enunciaremos el principio del máximo y del mínimo, propiedad de las funciones armónicas que nos permitirá establecer la unicidad de la solución para los problemas que involucran la ecuación de Laplace.

3.2. Principio del máximo y del mínimo para funciones armónicas. Sea $u(\vec{x})$ una función armónica en un dominio bidimensional acotado Ω , que además es continua en $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces el valor máximo y mínimo de $u(\vec{x})$ se alcanzan en la frontera $\partial\Omega$. La función $u(\vec{x})$ alcanza sus valores máximo y mínimo en el interior de Ω si y solo si $u(\vec{x})$ es constante.

TEOREMA 1.2. (Unicidad) *La solución del problema modelado por la ecuación de Laplace en un dominio bidimensional Ω si existe, es única.*

Demostración: Queremos resolver el problemas con condiciones de contorno tipo Dirichlet,

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\vec{x}) = 0 \\ u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \text{ sobre la frontera } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sean u_1 y u_2 dos soluciones del problema anterior entonces,

$$\nabla^2 u_1(\vec{x}) = \nabla^2 u_2(\vec{x}) = 0 \quad \text{donde} \quad u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = f.$$

Ahora bien, si u_1 y u_2 son armónicas en Ω la función $m = u_1 - u_2$ también lo es puesto que el operador Laplaciano es lineal. En estas condiciones se tiene que $w|_{\partial\Omega} = 0$ lo que nos permite afirmar en virtud del principio del máximo y del mínimo que $m = 0$ en Ω , es decir $u_1 - u_2 = 0$ y, por tanto $u_1 = u_2$, lo que establece la unicidad de la solución.

Cabe destacar, que para el caso de tener condiciones tipo Neumann, la demostración es análoga.

3.3. Condición de solubilidad de la ecuación de Laplace. Si sobre la frontera de la región considerada el flujo de calor es el valor prescrito, la ecuación de Laplace puede no tener soluciones. Para ver esto integramos el Laplaciano de u , sobre la región bidimensional considerada,

$$0 = \iint \nabla^2 u \, dx dy = \iint \nabla \cdot (\nabla u) \, dx dy,$$

utilizando el teorema de Green, se concluye que,

$$(1.8) \quad 0 = \oint \nabla u \cdot \hat{n} ds.$$

Como $\nabla \cdot \hat{n}$ es proporcional al flujo de calor a través de la frontera, la ecuación (1.8) implica que el flujo neto de calor a través de la frontera debe ser cero para que exista el estado estacionario. Esto es claro, puesto que de otro modo habría un cambio (con el tiempo) de la energía térmica en el interior, lo que contradice el estado estacionario.

Ecuación Integral de Frontera

Una vez obtenida la ecuación de Laplace, y con el fin de resolverla, se procede a buscar su solución, la cual es una función de Green. Esta solución será de gran utilidad al momento de definir y hallar la ecuación integral, a partir de la cual, se hallará la ecuación integral de frontera. La misma, representa el punto de partida del BEM, y con ella obtención de una solución numérica.

1. Teorema de la divergencia e identidades de Green

Las principales propiedades de funciones potenciales pueden ser obtenidas a través del teorema de Gauss, también conocido como el teorema de la divergencia, del cual se obtienen colorarios importantes como lo son las identidades de Green.

1.1. Teorema de Gauss (teorema de la divergencia).

TEOREMA 2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región acotada por la superficie cerrada Γ , y \vec{F} un campo vectorial actuando en esa región. Entonces, el flujo total del campo vectorial \vec{F} a través de la superficie cerrada Γ debe ser igual a la integral de volumen de la divergencia de estos vectores, es decir,*

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \hat{n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} F_i n_i d\Gamma = \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} d\Omega,$$

donde F_i y \hat{n}_i son las componentes del vector \vec{F} y las componentes del vector normal unitario al elemento de superficie $d\Gamma$, respectivamente, considerando este en la dirección exterior relativa al dominio Ω . Cabe destacar que este teorema también es válido en dos dimensiones.

1.1.1. Primera identidad de Green.

Sea γ y ϕ funciones potenciales en un dominio Ω . Si sustituimos $F_i = \phi \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}$ en el teorema de Gauss, se obtiene que,

$$\oint_{\Gamma} \phi \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} n_i d\Gamma = \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right] d\Omega.$$

Usando la regla de la derivación del producto se tiene,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \phi \nabla^2 \gamma,$$

sustituyendo en el lado derecho de la integral anterior, se obtiene la *primera identidad de Green*,

$$(2.1) \quad \oint_{\Gamma} \phi \frac{\partial \gamma}{\partial n} d\Gamma = \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} d\Omega + \iint_{\Omega} \phi \nabla^2 \gamma d\Omega.$$

1.1.2. *Segunda identidad de Green.*

La identidad (2.1) también es válida cuando intercambiamos ϕ y γ ,

$$(2.2) \quad \oint_{\Gamma} \gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = \iint_{\Omega} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega + \iint_{\Omega} \gamma \nabla^2 \phi d\Omega,$$

restando la ecuación (2.2) de (2.1) obtenemos la *segunda identidad de Green*,

$$\oint_{\Gamma} \left[\gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right] d\Gamma = \iint_{\Omega} [\gamma \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \gamma] d\Omega.$$

En las expresiones anteriores, las funciones ϕ y γ deben ser diferenciables al menos para los órdenes que aparecen en las integrales.

2. Operador autoadjunto a la ecuación de Laplace

DEFINICIÓN 2.2. Sea L un operador y u, v funciones de clase C^2 en Ω , definimos M , el operador autoadjunto a L , como aquel que satisface la siguiente igualdad,

$$v(\vec{x})L[u(\vec{x})] - u(\vec{x})M[v(\vec{x})] = \nabla \cdot F,$$

donde $\nabla \cdot F$ es la divergencia de F , donde F es un campo vectorial.

Luego, sea $L[u(\vec{x})] = \nabla^2 u(\vec{x})$, con,

$$(2.3) \quad \nabla^2 u(\vec{x}) = \frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial y^2}.$$

Por otra parte, sean $\vec{x}_0, \vec{x} \in \Omega$ y $\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$ una función de clase C^2 . Multiplicando (2.3) por $\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$ se obtiene que,

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)L[u(\vec{x})] = \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \left[\frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial y^2} \right],$$

desarrollando,

$$(2.4) \quad \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)L[u(\vec{x})] = \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial x^2} + \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial y^2}.$$

Es necesario reescribir el segundo miembro de la ecuación (2.4). Para ello, aplicando la regla de la derivación del producto a la siguiente expresión, se tiene,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x} \right] = \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x} \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x} + \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial x^2}.$$

En particular,

$$(2.5) \quad \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x} \right] - \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x} \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x}.$$

Por otro lado, aplicando la regla de la derivación del producto a la siguiente expresión,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x} u(\vec{x}) \right] = \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x^2} u(\vec{x}) + \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x} \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x},$$

y despejando el segundo término del lado derecho de la expresión anterior, nos queda que,

$$(2.6) \quad \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x} \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x} u(\vec{x}) \right] - \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x^2} u(\vec{x}).$$

Luego, sustituyendo la ecuación (2.6) en la ecuación (2.5) obtenemos,

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x} u(\vec{x}) \right] + \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x^2} u(\vec{x}).$$

Así, por linealidad tenemos que,

$$(2.7) \quad \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x} - \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x} u(\vec{x}) \right] + \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x^2} u(\vec{x}).$$

De igual forma, calculamos la siguiente expresión,

$$(2.8) \quad \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial y} - \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial y} u(\vec{x}) \right] + \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial y^2} u(\vec{x}).$$

Luego, sustituyendo las ecuaciones (2.7) y (2.8) en la ecuación (2.4), resulta que,

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) L[u(\vec{x})] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x} - \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x} u(\vec{x}) \right] + \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x^2} u(\vec{x}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial y} - \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial y} u(\vec{x}) \right] + \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial y^2} u(\vec{x}), \end{aligned}$$

reordenando la expresión anterior, se tiene que,

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) L[u(\vec{x})] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x} - \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x} u(\vec{x}) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial y} - \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial y} u(\vec{x}) \right] \\ &+ \left[\frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial y^2} \right] u(\vec{x}). \end{aligned}$$

Luego, considérese \vec{F} , como el siguiente campo vectorial,

$$(2.9) \quad \vec{F} = \left(\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x} - \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x} u(\vec{x}), \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial y} - \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial y} u(\vec{x}) \right).$$

Así, reescribiendo la ecuación (2.9) y usando la definición de la divergencia, resulta que,

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)L[u(\vec{x})] - \left[\frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial y^2} \right] u(\vec{x}) = \nabla \cdot \vec{F},$$

Así,

$$M[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)] = \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial y^2},$$

por lo tanto,

$$M = L,$$

y así, el operador de Laplace es un operador autoadjunto, puesto que M y L coinciden.

3. Solución fundamental

Existe una función asociada a un problema de ecuaciones diferenciales dado, llamada *función de Green* y puede usarse para describir la influencia tanto de las condiciones de contorno no homogéneas, como de los términos de forzamiento, véase [3].

Para solucionar la ecuación de Laplace descrita anteriormente, es necesario conocer tanto sus condiciones de contorno, como la solución fundamental asociada a ésta, la cual es una función de Green.

La solución de una ecuación diferencial definida sobre una región no acotada, para una fuente puntual con intensidad unitaria, es llamada *solución fundamental de la ecuación*.

Así, para resolver la ecuación (1.7), se requiere conocer su solución fundamental, la cual se deduce a continuación.

4. Cálculo de la solución Fundamental

La solución fundamental que denotaremos por $\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$ representa el campo generado por unidad de carga concentrada que actúa en el punto $\vec{x} = \vec{x}_0$. El efecto de esta carga es propagado de $\vec{x} = \vec{x}_0$ hacia el infinito y se describe mediante la función delta de Dirac (véase [8]), esto es,

$$M[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)] = -\delta(\vec{x}, \vec{x}_0),$$

es decir,

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) + \delta(\vec{x}, \vec{x}_0) = 0,$$

multiplicando ambos lados por la función de temperatura $u(\vec{x})$ e integrando con respecto a Ω , obtenemos que,

$$\iint_{\Omega} u(\vec{x}) \nabla^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Omega = \iint_{\Omega} u(\vec{x}) (-\delta(\vec{x}, \vec{x}_0)) d\Omega.$$

Luego, por propiedades del delta de Dirac,

$$(2.10) \quad \iint_{\Omega} u(\vec{x}) \nabla^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Omega = -u(\vec{x}_0).$$

La ecuación (2.10) resultará muy útil en cálculos posteriores.

Sea,

$$(2.11) \quad \nabla^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) = -\delta(\vec{x}, \vec{x}_0) = \begin{cases} 0, & \text{si } \vec{x} \neq \vec{x}_0, \\ \infty, & \text{si } \vec{x} = \vec{x}_0. \end{cases}$$

Suponiendo $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ se tiene que,

$$(2.12) \quad \nabla^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) = 0.$$

Luego, escribiendo la ecuación de Laplace en coordenadas polares, se obtiene que,

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \theta)}{\partial \theta^2} = 0.$$

donde $r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$, con $|\cdot|$ denotando la norma Euclídea. Así, por la existencia de la simetría axial, es decir, la simetría que existe con respecto a un eje, el efecto de la carga será independiente del ángulo θ , por lo tanto,

$$\nabla^2 \Phi(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right) = 0,$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right) = 0.$$

Integrando en ambos lados con respecto a r , obtenemos que,

$$\int \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right) dr = \int 0 dr,$$

por lo tanto,

$$r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} + C_1 = C_2,$$

luego,

$$r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = C_2 - C_1,$$

así,

$$r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = C \quad \text{con} \quad C = C_2 - C_1,$$

entonces,

$$(2.13) \quad \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = \frac{1}{r} C.$$

Integrando de nuevo se tiene que,

$$\int \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} dr = \int \frac{1}{r} C dr,$$

y finalmente,

$$(2.14) \quad \Phi(r) = C \ln(r) + D,$$

la cual representa la solución fundamental de la ecuación (2.12).

Por otra parte, para calcular C , se considera el círculo $\hat{\Omega}$ centrado en \vec{x}_0 y de radio r mostrado en la Figura 2.1, donde $\hat{\Omega}$ representa la región inicial en coordenadas polares.

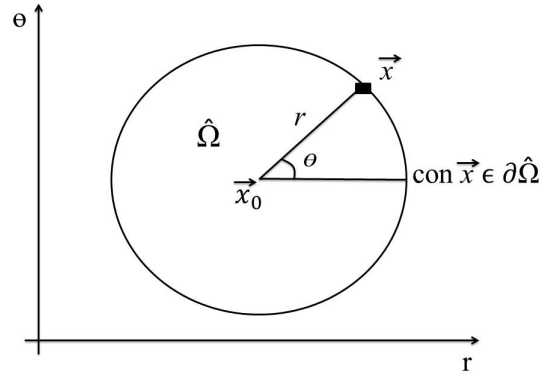


FIGURA 2.1. Círculo Ω centrado en \vec{x}_0

Si integramos la ecuación (2.11) sobre el dominio $\hat{\Omega}$ se tiene que,

$$\iint_{\hat{\Omega}} \nabla^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\hat{\Omega} = - \iint_{\hat{\Omega}} \delta(\vec{x}, \vec{x}_0) d\hat{\Omega},$$

y, por propiedades del delta de Dirac, se obtiene,

$$(2.15) \quad \iint_{\hat{\Omega}} \nabla^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\hat{\Omega} = -1.$$

Por otra parte, si se toma el Laplaciano como la divergencia del gradiente, es decir,

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) = \nabla \cdot (\nabla \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)),$$

y se aplica el teorema de la divergencia sobre el dominio Ω , donde $\Omega = \hat{\Omega}$ y $\partial\hat{\Omega} = \Gamma$, que denota la frontera del dominio $\hat{\Omega}$,

$$\iint_{\hat{\Omega}} \nabla^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\hat{\Omega} = \oint_{\Gamma} \nabla \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \cdot \hat{n} d\Gamma,$$

entonces (2.15) se reescribe como,

$$\oint_{\Gamma} \nabla \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \cdot \hat{n} d\Gamma = -1.$$

Por otra parte, sabemos que,

$$\oint_{\Gamma} \nabla \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \cdot \hat{n} d\Gamma = 2\pi r \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial r},$$

pues el vector normal apunta en la misma dirección que el vector gradiente. Luego,

$$2\pi r \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial r} = -1,$$

y así, por la ecuación (2.13), se obtiene que,

$$2\pi r \frac{C}{r} = -1,$$

entonces,

$$C = -\frac{1}{2\pi},$$

sustituyendo C en la ecuación (2.14),

$$\Phi(r) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) + D.$$

Si se considera $D = 0$, entonces,

$$\Phi(r) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r),$$

o,

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi} (\ln(1) - \ln(r)) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right),$$

devolviendo el cambio $r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$, obtenemos que,

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}\right).$$

que es conocida como la *solución fundamental* de la ecuación de Laplace en dos dimensiones.

5. Potencial de simple y doble capa

5.1. Teoría de potencial.

Históricamente, la aplicación de ecuaciones integrales para formular los problemas fundamentales con valor en la frontera pertenecientes a la teoría de potencial, viene dada desde principios del siglo pasado cuando Fredholm en 1903 demostró la existencia de soluciones para cada ecuación sobre la base del proceso de discretización. Dada la dificultad de encontrar la solución analítica, el uso de ecuaciones integrales fue limitado por investigaciones teóricas de existencia y unicidad de soluciones de problemas de física-matemática.

Las ecuaciones integrales de Fredholm (véase [2]) surgen de la representación de potenciales armónicos de simple y doble capa, y de allí se fundamenta la llamada formulación de la ecuación integral de frontera indirecta.

5.2. Conservación del flujo para fluidos potenciales.

Si ϕ es una función potencial en el dominio Ω , entonces para cualquier superficie cerrada Γ en Ω ,

$$(2.16) \quad \oint_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i d\Gamma = \oint_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = \iint_{\Omega} \nabla^2 \phi d\Omega = 0.$$

Este resultado puede obtenerse del teorema de Gauss simplemente sustituyendo $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ por F_i y tomando en cuenta que ϕ es una función armónica, es decir, $\nabla^2 \phi = 0$.

Físicamente, el resultado anterior significa que en problemas de potencial donde no existan fuentes internas, el flujo a través de la superficie es nulo.

5.3. Potenciales de superficies.

Las funciones armónicas pueden generalizarse por distribuciones continuas de potenciales sobre la superficie de la región. En particular, dos de ellos son de importancia práctica y serán definidas a continuación, para más detalles véase [3].

El primero de ellos es el potencial asociado con una distribución continua de fuente simple extendido sobre la superficie Γ y de densidad σ , el cual es de la forma,

$$V(x, \sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r(x, y)} \sigma(y) d\Gamma_y,$$

el cual representa un *potencial de simple capa*.

Considerese dos superficies Γ_y y $\Gamma_{y'}$ separadas por una distancia $h(y, y')$ pequeña con densidad $\sigma(y)$ y $\sigma(y')$, respectivamente. Estas distribuciones son tales que para los elementos de área correspondientes, se tiene que,

$$\sigma(y)d\Gamma_y = -\sigma(y')\Gamma_{y'}.$$

El potencial debido a las dos superficies es entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\Gamma} \frac{1}{r(x, y)} \sigma(y) d\Gamma_y + \int_{\Gamma} \frac{1}{r(x, y')} \sigma(y') d\Gamma_{y'} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\Gamma} \sigma(y) h(y, y') \left\{ \frac{1}{h(y, y')} \left[\frac{1}{r(x, y)} - \frac{1}{r(x, y')} \right] \right\} d\Gamma_y \right]. \end{aligned}$$

donde se multiplicó y dividió convenientemente por la distancia pequeña $h(y, y')$ de manera que surge la definición de la derivada. Por otra parte si hacemos $h \rightarrow 0$ y $\sigma \rightarrow \infty$ para que $\sigma h \rightarrow \gamma$ converja uniformemente sobre todo Γ , esto con el fin de que los valores de σh se aproximen a los valores de γ , donde Γ es la densidad de superficie. Luego calculando los límites del término entre llaves, se tiene que,

$$\lim_{h(y, y') \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h(y, y')} \left[\frac{1}{r(x, y)} - \frac{1}{r(x, y')} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial n_y} \left[\frac{1}{r(x, y)} \right].$$

Luego, el potencial,

$$W(x, \gamma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_y} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r(x, y)} \gamma(y) dS_y = \int_{\Gamma} K(x, y) \gamma(y) d\Gamma_y,$$

es obtenido como el límite de potencial doble de simple capa de signos opuestos que aproximadamente coinciden, el cual es llamado *potencial de doble capa*. Donde el núcleo del potencial de doble capa $K(x, y)$ es de la forma,

$$K(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n_y} = \frac{1}{4\pi} \frac{(x_j - y_j)}{r^3} n_j(y).$$

6. Cálculo de la ecuación integral

Si aplicamos la segunda identidad de Green a las funciones $u(\vec{x})$ y a $\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$ se obtiene la siguiente expresión,

$$\iint_{\Omega} [\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \nabla^2 u(\vec{x}) - u(\vec{x}) \nabla^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)] d\Omega = \oint_{\Gamma} \left[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{du(\vec{x})}{d\hat{n}} - u(\vec{x}) \frac{d\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{d\hat{n}} \right] d\Gamma,$$

reescribiendo, resulta que,

$$\iint_{\Omega} \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \nabla^2 u(\vec{x}) d\Omega - \iint_{\Omega} u(\vec{x}) \nabla^2 \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) d\Omega = \oint_{\Gamma} \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{du(\vec{x})}{d\hat{n}} d\Gamma - \oint_{\Gamma} u(\vec{x}) \frac{d\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{d\hat{n}} d\Gamma,$$

como $\nabla^2 u = 0$ y por la ecuación (2.10), se obtiene que,

$$0 - (-u(\vec{x}_0)) = \oint_{\Gamma} \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{du(\vec{x})}{d\hat{n}} d\Gamma - \oint_{\Gamma} u(\vec{x}) \frac{d\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{d\hat{n}} d\Gamma,$$

entonces,

$$(2.17) \quad u(\vec{x}_0) = \oint_{\Gamma} \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{du(\vec{x})}{d\hat{n}} d\Gamma - \oint_{\Gamma} u(\vec{x}) \frac{d\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{d\hat{n}} d\Gamma \quad \text{para } \vec{x} \in \Omega,$$

con $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ y es conocida como la *ecuación integral* evaluada en un punto $\vec{x} = \vec{x}_0$ del dominio Ω .

7. Deducción ecuación integral de frontera

La ecuación (2.17), es el punto de partida para el BEM y proporciona el valor de la función u para un punto \vec{x}_0 , conocidos los valores de $u(\vec{x})$ y $\phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$ para $\vec{x} \in \Omega$. Sin embargo, el BEM se basa en la posibilidad de colocar la ecuación integral en puntos \vec{x}_0 tal que $\vec{x}_0 \in \Gamma$ (véase [3]).

En consecuencia, es necesario hallar una expresión alternativa de esta ecuación cuando $\vec{x}_0 \in \Gamma$, lo cual presenta dificultades, debido a que puede existir un \vec{x} sobre la frontera Γ tal que sea el mismo \vec{x}_0 , y esta condición provocaría una singularidad, esto debido a la forma en que viene dada la solución fundamental.

Para hallar la expresión alternativa de la ecuación integral para los puntos en la frontera, se toma el límite cuando un punto en el interior del dominio tiende a la frontera.

Para ello consideremos la segunda identidad de Green,

$$(2.18) \quad \iint_{\Omega} [u(\vec{x})\nabla^2\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) - \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)\nabla^2u(\vec{x})] d\Omega = \oint_{\Gamma} \left[u(\vec{x})\frac{\partial\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial\hat{n}} - \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial\hat{n}} \right] d\Gamma,$$

donde Ω ahora es una región bidimensional acotada y Γ es la frontera cerrada de Ω . Como $\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)$, es singular en $\vec{x} = \vec{x}_0$, es necesario excluir este punto de Ω mediante la extracción de una parte del dominio, cuya forma es un círculo de radio ϵ y centrado en \vec{x}_0 , como se muestra en la figura 2.2, donde $\epsilon > 0$.

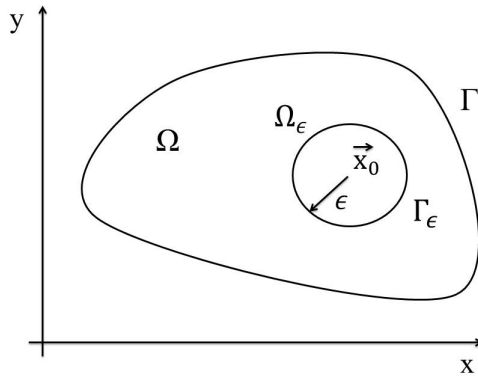


FIGURA 2.2. Extracción de una parte del dominio

Aplicando la segunda identidad de Green a la nueva región $\Omega - \Omega_\epsilon$, delimitada exteriormente por Γ e interiormente por Γ_ϵ , obtenemos,

$$(2.19) \quad \iint_{\Omega - \Omega_\epsilon} [u(\vec{x})\nabla^2\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) - \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)\nabla^2u(\vec{x})] d\Omega = \oint_{\Gamma} \left[u(\vec{x})\frac{\partial\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial\hat{n}} - \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial\hat{n}} \right] d\Gamma \\ + \oint_{\Gamma_\epsilon} \left[u(\vec{x})\frac{\partial\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial\hat{n}} - \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial\hat{n}} \right] d\Gamma_\epsilon.$$

En la nueva región $\Omega - \Omega_\epsilon$, las funciones u y Φ satisfacen la ecuación de Laplace y la integral de dominio se puede transformar en una integral de frontera. Luego, tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se recupera la región original.

En el lado derecho de la ecuación (2.19) tenemos dos integrales, una de doble capa y otra de simple capa. En primer lugar, analizaremos el potencial de doble capa sobre Γ_ϵ . Sumando y restando $u(\vec{x}_0) \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial\hat{n}} d\Gamma_\epsilon$, tenemos que,

$$(2.20) \quad \oint_{\Gamma_\epsilon} u(\vec{x}) \frac{\partial\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial\hat{n}} d\Gamma_\epsilon = \oint_{\Gamma_\epsilon} [u(\vec{x}) - u(\vec{x}_0)] \frac{\partial\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial\hat{n}} d\Gamma_\epsilon + u(\vec{x}_0) \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial\hat{n}} d\Gamma_\epsilon.$$

Concentrándonos en la segunda integral del lado derecho de la ecuación (2.20). Recordemos, que la solución fundamental de la ecuación de Laplace en dos dimensiones escrita en coordenadas polares es,

$$\Phi(\epsilon) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\epsilon),$$

y su derivada direccional con respecto al vector normal \hat{n} , viene dada por,

$$\frac{\partial\Phi(\epsilon)}{\partial\hat{n}} = \left| \frac{\partial\Phi(\epsilon)}{\partial\epsilon} \right| = \frac{1}{2\pi\epsilon}.$$

Luego, escribiendo la integral en coordenadas polares, se considera el siguiente cambio,

$$d\Gamma_\epsilon = \epsilon d\theta$$

y tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene,

$$(2.21) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial\hat{n}} d\Gamma_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\epsilon} \epsilon d\theta = 1.$$

Todavía tenemos que evaluar el límite de la primera integral en el lado derecho de la ecuación (2.20). Usando el mismo razonamiento que antes y suponiendo que la función u es continua en \vec{x}_0 , se tiene que,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\epsilon} [u(\vec{x}) - u(\vec{x}_0)] \frac{\partial\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial\hat{n}} d\Gamma_\epsilon = 0,$$

así,

$$(2.22) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\epsilon} u(\vec{x}) \frac{\partial\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial\hat{n}} d\Gamma_\epsilon = u(\vec{x}_0).$$

Basándonos en las mismas ideas anteriores, se evalúa el límite para el potencial de simple capa, obteniendo,

$$(2.23) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\epsilon} \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \hat{n}} d\Gamma_\epsilon = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \ln(\epsilon) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \hat{n}} \epsilon d\theta = 0,$$

donde la derivada normal de la función u podría presentar discontinuidades, siempre y cuando éstas sean finitas.

Considerando las ecuaciones (2.22) y (2.23), el límite de la integral sobre Γ_ϵ en la ecuación (2.19) es de la forma,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\epsilon} \left[u(\vec{x}) \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}} - \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \hat{n}} \right] d\Gamma_\epsilon = u(\vec{x}_0),$$

y la siguiente ecuación integral se obtiene de la ecuación (2.19),

$$u(\vec{x}_0) = \oint_{\Gamma} \left[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \hat{n}} - u(\vec{x}) \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}} \right] d\Gamma,$$

que no es más que la segunda identidad de Green.

Con el fin de obtener una ecuación que relacione los valores de la integral de borde sólo con los valores en la frontera, el límite se toma en el punto \vec{x} tendiendo a un punto \vec{x}_0 sobre la frontera Γ . Una vez más, es necesario excluir el punto \vec{x}_0 antes de tomar el límite, sin embargo, si \vec{x}_0 pertenece a una parte suave de la frontera, bastará con tomar un semicírculo, como se muestra en la Figura 2.3,

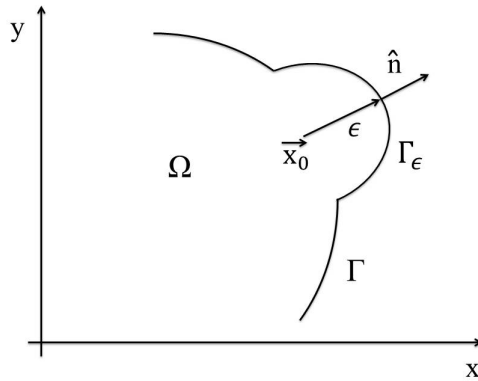


FIGURA 2.3. Extracción del semicírculo

En este caso, se puede aplicar el mismo procedimiento visto anteriormente, con la única diferencia que el límite superior de la integral en las ecuaciones (2.21) y (2.23), será π en lugar de 2π , es decir,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}} d\Gamma_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{1}{2\pi\epsilon} \epsilon d\theta = \frac{1}{2},$$

tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se tiene que,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\epsilon} \left[u(\vec{x}) \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}} - \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \hat{n}} \right] d\Gamma_\epsilon = \frac{1}{2} u(\vec{x}_0),$$

obteniendo así, la siguiente ecuación integral de frontera,

$$\frac{1}{2} u(\vec{x}_0) = \oint_\Gamma \left[\Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \hat{n}} - u(\vec{x}) \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}} \right] d\Gamma,$$

para cualquier punto \vec{x}_0 sobre una superficie suave de la frontera. La ecuación integral anterior se puede generalizar de la forma,

$$C(\vec{x}_0) u(\vec{x}_0) = \oint_{\Gamma_2} \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \hat{n}} d\Gamma_2 - \oint_{\Gamma_1} u(\vec{x}) \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}} d\Gamma_1,$$

para cualquier punto \vec{x}_0 en la frontera Γ .

El factor $C(\vec{x}_0)$ depende de la geometría de la frontera en el punto \vec{x}_0 , si la frontera en \vec{x}_0 no es una parte suave (presenta vértices o aristas), entonces el valor de $C(\vec{x}_0)$ es un factor que varía entre 0 y 1.

En caso de problemas, con borde que no sean suaves, el proceso que acabamos de describir se puede repetir sólo con cambios menores, es decir, cambiando el límite superior en las integrales de las ecuaciones (2.21) y (2.23). La Figura 2.4 muestra una de estas situaciones, donde α representa el ángulo que se forma en la esquina. Para este caso el coeficiente $c(\vec{x}_0)$ se convierte en:

$$C(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad \text{con} \quad 0 \leq C(\xi) \leq 1,$$

El resultado de la integral de los otros términos para el caso de los contornos no lisos, es de nuevo igual a cero.

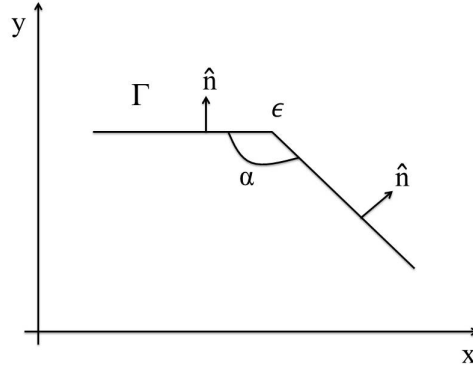


FIGURA 2.4. Caso de bordes no suaves

De todos los resultados obtenidos, la ecuación integral deducida anteriormente, puede ser generalizada de la forma que sigue,

$$(2.24) \quad C(\vec{x}_0)u(\vec{x}_0) = \oint_{\Gamma_2} \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \hat{n}} d\Gamma_2 - \oint_{\Gamma_1} u(\vec{x}) \frac{\partial \Phi(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}} d\Gamma_1,$$

para cualquier punto \vec{x}_0 en la frontera Γ . La ecuación anterior es conocida como *ecuación integral de frontera*, donde podemos expresar el valor del factor $C(\vec{x}_0)$, como sigue,

$$C(\vec{x}_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{x}_0 \notin \bar{\Omega} \\ 1 & \text{si } \vec{x}_0 \in \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{si } \vec{x}_0 \text{ se encuentra en una superficie suave de } \Gamma \\ \frac{\alpha}{2\pi} & \text{si } \vec{x}_0 \text{ se encuentra en una esquina de } \Gamma, \text{ con } 0 \leq \alpha \leq 2\pi. \end{cases}$$

Método de Elementos Frontera

La teoría básica para algunas clases de ecuaciones integrales fue muy estudiada a finales de las primeras dos décadas del siglo pasado. El desarrollo y análisis de métodos numéricos para hallar la solución de dichas ecuaciones, ha sido rápido durante los últimos veinte años. El Método de Elementos Frontera (BEM), ha evolucionado considerablemente y ha sido aplicado para resolver un gran número de problemas prácticos.

El BEM es un método numérico computacional usado para resolver ecuaciones en derivadas parciales (EDP), las cuales describen el comportamiento de un dominio interior y sobre una frontera, que han sido transformadas a ecuaciones integrales, que sólo relacionan los valores de borde o frontera y su solución numérica. Este método se basa en la discretización de la frontera del dominio del problema en una serie de elementos, sobre los que el potencial y su derivada normal pueden variar.

La geometría de estos elementos puede ser modelado utilizando líneas rectas, curvas, parábolas, etc. Utilizando el método de colocación, la ecuación discretizada se aplica a un número de nodos dentro de cada elemento, donde los valores del potencial y su derivada normal están asociados. Mediante la adopción de una solución fundamental práctica se planteará una ecuación integral en la cual, en general, las integrales que en ella intervienen son calculadas de forma numérica y, posteriormente, nos llevará a un sistema de ecuaciones algebraicas.

La aplicación de este método requiere de dos tipos de aproximación, la primera es geométrica, en la cual la frontera Γ se subdivide en N segmentos o elementos pequeños Γ_j , tales que $\sum_{j=1}^N \Gamma_j = \Gamma$ (Figura 3.1). Los puntos donde los valores son desconocidos son llamados nodos y serán tomados en los extremos de dichos elementos lineales, es decir, estamos considerando una variación lineal de \vec{u} (potencial) y $\vec{q} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}}$ (flujo de potencial).

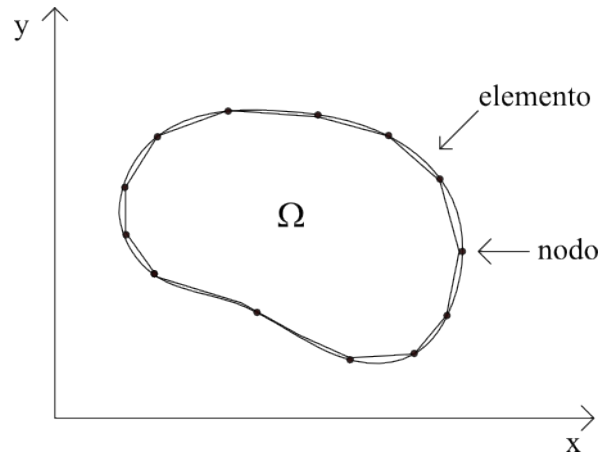


FIGURA 3.1. Región subdividida

La segunda aproximación es para los valores de \vec{u} y \vec{q} , que en algún punto del elemento, pueden ser definidos en términos de sus valores nodales y dos funciones de interpolación lineal en el espacio, además de dos funciones de interpolación lineal sobre el tiempo.

La geometría del método puede variar dependiendo del problema estudiado, a continuación se presentan los modelos más utilizados,

- Elemento constante

En este caso la frontera es discretizada en N elementos y se tiene un nodo por cada elemento. Estos nodos están ubicados justo en el centro de cada elemento como se muestra en la Figura 3.2. Es muy importante tener en cuenta que para este tipo de elementos el potencial y su derivada se consideran constantes a lo largo del mismo.

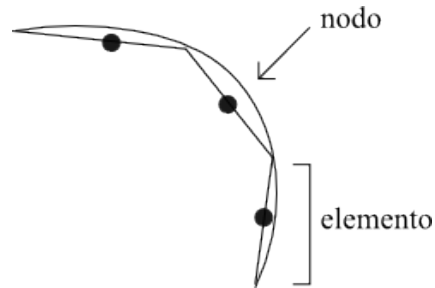


FIGURA 3.2. Elemento constante

- Elemento lineal

La frontera del dominio es discretizada en N elementos, y tenemos dos nodos por elemento. Los nodos se ubican en los extremos tal como se muestra en la Figura 3.3, por lo tanto, un mismo nodo puede pertenecer a dos elementos distintos.

Para estos elementos el potencial se puede considerar que varía a lo largo del elemento, y a diferencia de los elementos constantes, su derivada (el flujo) también puede variar, ya que para un mismo nodo se puede tener dos flujos distintos, y esto se debe a que el flujo depende de la dirección del vector normal, por ende, va a ser de mucha importancia el tratamiento que se debe dar a las esquinas formadas por los elementos.

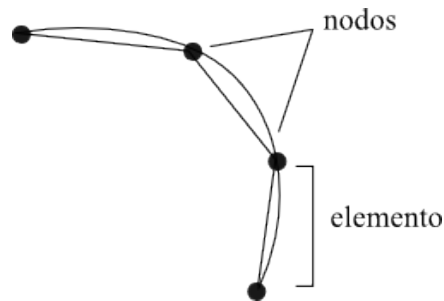


FIGURA 3.3. Elemento lineal

- Elemento cuadrático

Para este caso la frontera es discretizada en N elementos, y se tienen tres nodos por elemento. Los nodos se ubican de la siguiente forma: dos en los extremos y uno en el medio como se muestra en la Figura 3.4, por lo tanto, al igual que en los elementos lineales, un nodo puede pertenecer a dos elementos distintos. Para estos elementos el potencial se puede considerar que varía a lo largo del elemento, debido a que el potencial puede tener valores distintos para cada uno de los nodos.

Al igual que en el caso anterior, el flujo también varía ya que en los extremos del elemento para un mismo nodo se pueden tener dos valores distintos del flujo de potencial, debido a que el mismo depende de la dirección del vector normal. Será de mucha importancia el tratamiento de las esquinas de los elementos. Estos elementos se caracterizan por ser curvos, y son los que más se pueden adaptar a la geometría del dominio dependiendo de como sea éste.

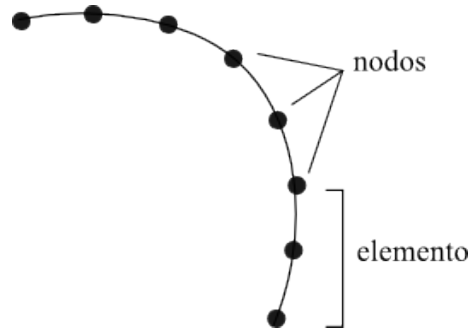


FIGURA 3.4. Elemento cuadrático

- Elemento de orden superior

Los elementos de orden superior rara vez se utilizan en la práctica en comparación al del segundo orden, sin embargo su estudio podría ser interesante. Para este caso los elementos se describen mediante la adopción de cuatro nodos en cada uno de ellos, tal como se muestra en la Figura 3.5.

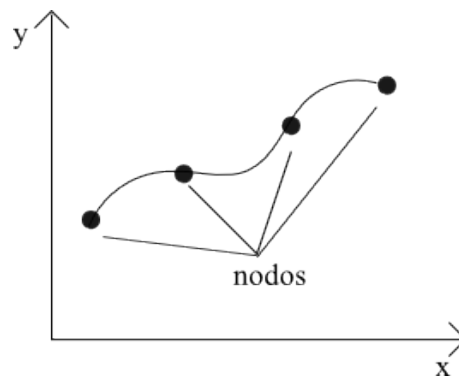


FIGURA 3.5. Elemento de orden superior

1. Discretización de la ecuación integral de frontera

Una vez obtenida la ecuación integral de frontera, procedemos a aplicar el BEM. Para ello es necesario discretizar esta ecuación en N elementos, como sigue,

$$(3.1) \quad C(\vec{x}_0)^i u(\vec{x}_0)^i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u(\vec{x}_i) \frac{\partial \Phi(\vec{x}_i, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}} d\Gamma = \sum_{j=1}^{2N} \int_{\Gamma_j} \Phi(\vec{x}_i, \vec{x}_0) q(x_i) d\Gamma,$$

con $q(x_i) = \frac{\partial u(\vec{x}_i)}{\partial \hat{n}}$, donde i es el punto de colocación, con $1 \leq i \leq 2N$ y Γ_j el segmento en el que el j -ésimo nodo se encuentra y sobre el cual la integración se lleva a cabo; \vec{x}_i es el punto nodal del i -ésimo elemento.

En nuestro caso, utilizaremos los elementos lineales para esta discretización, por lo que existirán dos nodos por elemento, uno ubicado en cada extremo. Por tal razón el límite de la suma del lado derecho de la ecuación (3.1) llega hasta $2N$.

Las integrales involucradas en la ecuación (3.1), son muy difíciles de evaluar puesto que tanto u como q varían linealmente sobre cada elemento. Los valores de u y q en cualquier punto, pueden ser definidos en términos de los valores nodales y de dos funciones de interpolación lineales γ_1 y γ_2 , que dependen de la coordenada homogénea ϵ , tales que,

$$\begin{aligned} u(\epsilon) &= \gamma_1 u^1 + \gamma_2 u^2 = [\gamma_1 \quad \gamma_2] \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \gamma^T u^n, \\ q(\epsilon) &= \gamma_1 q^1 + \gamma_2 q^2 = [\gamma_1 \quad \gamma_2] \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = \gamma^T q^n. \end{aligned}$$

donde las funciones γ_1 y γ_2 , vienen dadas por,

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(1 - \epsilon), \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}(1 + \epsilon), \quad \text{donde} \quad -1 < \epsilon < 1.$$

Las integrales, ubicadas en el miembro izquierdo de la ecuación (3.1), pueden reescribirse como sigue,

$$\int_{\Gamma_j} u(\vec{x}_i) \frac{\partial \Phi(\vec{x}_i, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\gamma_1 \quad \gamma_2] \frac{\partial \Phi(\vec{x}_i, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}} d\Gamma \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = [h_1^{ij} \quad h_2^{ij}] \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix},$$

donde,

$$h_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} \gamma_1 \frac{\partial \Phi(\vec{x}_i, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}} d\Gamma, \quad h_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} \gamma_2 \frac{\partial \Phi(\vec{x}_i, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}} d\Gamma.$$

Los términos h_k^{ij} son los coeficientes de influencia que definen la interacción entre el punto i bajo consideración y un nodo particular k sobre un elemento j .

De igual forma, las integrales del miembro derecho de la ecuación (3.1), pueden ser escritas como sigue,

$$\int_{\Gamma_j} \Phi(\vec{x}_i, \vec{x}_0) q(x_i) d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [\gamma_1 \quad \gamma_2] \Phi(\vec{x}_i, \vec{x}_0) d\Gamma \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = [G_1^{ij} \quad G_2^{ij}] \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix},$$

donde,

$$G_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} \gamma_1 \Phi(\vec{x}_i, \vec{x}_0) d\Gamma, \quad G_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} \gamma_2 \Phi(\vec{x}_i, \vec{x}_0) d\Gamma.$$

1.1. Tratamiento de las esquinas.

Cuando la frontera es discretizada en elementos lineales, el segundo nodo del elemento j es el mismo punto que el primer nodo del elemento $j + 1$. Dado que el potencial es único en el punto borde, el valor será el mismo para los dos nodos. Sin embargo, este argumento no se aplica como regla general para el flujo, puesto que existen puntos en la frontera para los cuales el flujo no tiene un valor único (Figura 3.6).

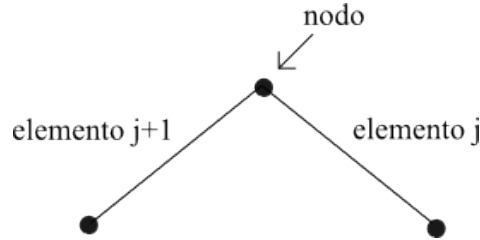


FIGURA 3.6. Intersección de elementos

Esto ocurre en aquellos puntos, donde el vector normal de la frontera no es único (puntos esquinas), esto también puede deberse a un flujo prescrito, que presente discontinuidades a lo largo de la frontera en ciertos puntos. Mientras que las esquinas con diferentes valores de flujo en ambos lados, existe en muchos problemas prácticos, los valores discontinuos de flujo a lo largo de la frontera son rara vez prescritos.

Hay que tomar en cuenta la posibilidad de que el flujo del nodo 2 de un elemento, puede ser diferente al flujo del nodo 1 del elemento siguiente, así los flujos pueden ser guardados en un arreglo de tamaño $2 \times n$.

Para escribir la ecuación correspondiente al nodo i discretizada, debemos añadir la contribución de los dos elementos adjuntos a este, $j - 1$ y j , definidos por los coeficientes nodales. Esto genera la siguiente ecuación,

$$(3.2) \quad C(\vec{x}_0)^i u(\vec{x}_0)^i + [\hat{H}^{i1} \quad \hat{H}^{i2} \quad \dots \quad \hat{H}^{iN}] \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^N \end{pmatrix} = [G^{i1} \quad G^{i2} \quad \dots \quad G^{iN}] \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^N \end{pmatrix}$$

donde cada término \hat{H}_{ij} es igual a la suma del término h^2 del elemento $j - 1$ más el término h^1 del elemento j , para un sistema de numeración antihorario. Por tanto, la ecuación (3.2) representa la ecuación discretizada para el nodo i , la cual puede ser escrita como sigue,

$$C(\vec{x}_0)^i u(\vec{x}_0)^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{2N} G^{ij} q^j,$$

o mas simplificada,

$$(3.3) \quad \sum_{j=1}^N H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{2N} G^{ij} q^j,$$

donde,

$$H^{ij} = \begin{cases} \hat{H}^{ij} & \text{para } i \neq j \\ \hat{H}^{ij} + C(\vec{x}_0)^i & \text{para } i = j. \end{cases}$$

En esta expresión todos los nodos son tomados en consideración, por lo tanto la ecuación (3.3) produce un sistema de ecuaciones, el cual puede ser respresentado matricialmente como sigue,

$$(3.4) \quad HU = GQ,$$

con H una matriz de $N \times N$ y G una matriz de $N \times 2N$.

2. Sistema de Ecuaciones

Solo existe una incógnita por nodo para los primeros tres casos, y dos incógnitas para el último caso. Debido a que hay una sola incógnita por nodo, el sistema (3.4) puede ser reordenado de manera tal que todas las incógnitas estén en el lado izquierdo y así obtener un sistema de ecuaciones de dimensión $N \times N$, es decir,

$$(3.5) \quad AX = F,$$

donde X es un vector de dimensión N que contiene las incógnitas; A es la matriz $N \times N$ de coeficientes, cuyas columnas son columnas de la matriz H , y columnas de la matriz G después de aplicar operaciones con el fin de despejar las incógnitas. F es un vector conocido calculado mediante el producto de las condiciones de borde conocidas y los coeficientes correspondientes de las matrices G y H . Cuando el número de incógnitas en un nodo es dos, una ecuación extra es necesaria para el nodo. El problema puede ser resuelto usando la idea de elementos discontinuos.

Una vez obtenida la ecuación anterior para los nodos ubicados sobre la frontera de la región, es posible calcular cualquier valor interno de u y su derivada. Los valores de u son calculados en cualquier punto interno i usando la siguiente fórmula,

$$(3.6) \quad u^i(x_0) = \int_{\Gamma_j} \Phi(\vec{x}_i, \vec{x}_0) q(x_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_j} u(\vec{x}_i) \Phi^*(\vec{x}_i, \vec{x}_0) d\Gamma,$$

donde $\Phi^*(\vec{x}_i, \vec{x}_0) = \frac{\partial \Phi(\vec{x}_i, \vec{x}_0)}{\partial \hat{n}}$. Nótese que ahora la solución fundamental actúa sobre un punto interno i y todos los valores de u y q son conocidos.

El proceso es entonces una integración (usualmente numérica), la misma discretización es usada para las integrales de frontera, es decir,

$$u^i = \sum_{j=1}^{2N} G^{ij} q^j - \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u^j,$$

los coeficientes G_{ij} y \hat{H}_{ij} deben ser calculados nuevamente para cada punto interno.

Los valores de los flujos internos $q_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ y $q_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$, en las dos direcciones x_1 y x_2 , son calculados derivando la ecuación (3.6), es decir,

$$\begin{aligned}(q_{x_1})^i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^i = \int_{\Gamma} q \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^i d\Gamma - \int_{\Gamma} u \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1} \right)^i d\Gamma, \\(q_{x_2})^i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^i = \int_{\Gamma} q \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^i d\Gamma - \int_{\Gamma} u \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2} \right)^i d\Gamma,\end{aligned}$$

Nótese que las derivadas se llevan a cabo, sólo sobre las funciones de la solución fundamental Φ y Φ^* , ya que estamos calculando las variaciones del flujo alrededor del nodo i .

Las integrales de frontera son discretizadas en integrales a lo largo de los elementos,

$$\begin{aligned}(q_{x_1})^i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^i = \sum_{j=1}^{2N} \left(\int_{\Gamma} q \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} d\Gamma \right) - \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma} u \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1} d\Gamma \right), \\(q_{x_2})^i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^i = \sum_{j=1}^{2N} \left(\int_{\Gamma} q \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} d\Gamma \right) - \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma} u \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2} d\Gamma \right),\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de potencial y del flujo en términos de sus valores nodales se tiene que,

$$(3.7) \quad (q_{x_1})^i = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^i = \sum_{j=1}^{2N} \left(\int_{\Gamma} [\gamma_1 \quad \gamma_2] \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} d\Gamma \right) \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma} [\gamma_1 \quad \gamma_2] \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1} d\Gamma \right) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix},$$

$$(3.8) \quad (q_{x_2})^i = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^i = \sum_{j=1}^{2N} \left(\int_{\Gamma} [\gamma_1 \quad \gamma_2] \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} d\Gamma \right) \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma} [\gamma_1 \quad \gamma_2] \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2} d\Gamma \right) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix},$$

los núcleos a ser integrados a lo largo de los elementos son,

$$(3.9) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right)^i = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} (-\ln(r)) = \frac{1}{2\pi} r_{,k},$$

$$(3.10) \quad \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_k} \right)^i = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{1}{r} (r_{,1}n_1 + r_{,2}n_2) \right) = -\frac{1}{2\pi r^2} [(2r_{,1}^2 - 1)n_1 + 2r_{,1}r_{,2}n_2],$$

$$(3.11) \quad \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2} \right)^i = -\frac{1}{2\pi r^2} [(2r_{,2}^2 - 1)n_2 + 2r_{,1}r_{,2}n_1],$$

donde $r_{,k}$ indica la derivada en el punto de integración, es decir,

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \right)^i = -r_{,k},$$

y, n_1 y n_2 son las componentes del vector normal unitario. La integración de las expresiones dadas en la ecuaciones (3.10) y (3.11) son hechas numéricamente usando una cuadratura de Gauss estandar (véase [2]), puesto que en estas expresiones no existe singularidad alguna, por ende esta fórmula representa la manera más sencilla y practica de obtener dichos valores.

Integrales como G^{ij} y H^{ij} , las cuales forman la matrices G y H respectivamente, pueden ser calculadas usando la fórmula anteriormente descrita, para el caso $i \neq j$. Sin embargo, para el caso $i = j$ existe una singularidad, por tal razón, es necesario una integración más precisa. Para el caso de los términos \hat{H}^{ii} (elementos de la diagonal), su valor será cero pues la normal \hat{n} y el elemento coordenado siempre serán perpendiculares, es decir,

$$(3.12) \quad \hat{H}^{ii} = \int_{\Gamma_i} [\gamma_1 \quad \gamma_2] \Phi^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = 0.$$

Recapitulando, muchas situaciones pueden ocurrir en un nodo sobre la frontera, una de esas situaciones es que la frontera sea suave en el nodo. En este caso ambos flujos, el anterior al nodo y el posterior al nodo son el mismo, a menos que sean prescritos diferentes, pero en cualquier caso, una sola variable sera desconocida, ya sea el potencial o el flujo. Otra de esas situaciones es que el nodo esté ubicado sobre una esquina. En este caso, cuatro diferentes casos son posibles dependiendo de las condiciones de frontera,

- Valores conocidos: Flujo antes y después de la esquina. Valor desconocido: Potencial.
- Valores conocidos: Potencial, flujo antes de la esquina. Valor desconocido: Flujo después de la esquina.
- Valores conocidos: Potencial, flujo después de la esquina. Valor desconocido: Flujo antes de la esquina.
- Valor conocido: Potencial. Valores desconocido: Flujo antes y después de la esquina.

3. Implementación del método numérico

Como se dijo anteriormente, en este trabajo nos basaremos en el BEM para obtener los resultados correspondientes a nuestro problema, el cual no es más que un método numérico que nos aproxima la solución deseada. En donde se utilizarán, los elementos lineales, puesto que ellos son los elementos que más se adaptan a la región a estudiar.

Luego para obtener esta solución, se utilizará un código creado por Brebbia y Dominguez en 1989 (Véase [3]), el cual fue diseñado para obtener cada uno de los coeficientes del sistema algebraico $AX = F$, con el fin de obtener los valores de temperatura y flujo de calor sobre la frontera de nuestra región, mediante el uso de varias rutinas y subrutinas que serán explicadas brevemente en esta sección, todo esto bajo el uso de los elementos lineales.

3.1. Código computacional usando Elementos Lineales (POLINBE).

A continuación se presentará el código computacional denominado POLINBE, el cual proviene de la abreviatura en inglés de *Elemento de Frontera Lineal para Potencial (Potential Linear Boundary Elements)*, usado para resolver problemas aplicados a la ecuación de Laplace. Este código se diferencia sustancialmente de los programas para Elementos Finitos, ya que su organización es más simple y produce todos los valores de frontera (potencial y flujo), con una gran precisión.

3.1.1. Programa principal.

El programa principal define la dimensión máxima del sistema de ecuaciones a resolver, en éste caso será de 100. Este programa está compuesto por cinco subrutinas las cuales se muestran en la Figura 3.7.

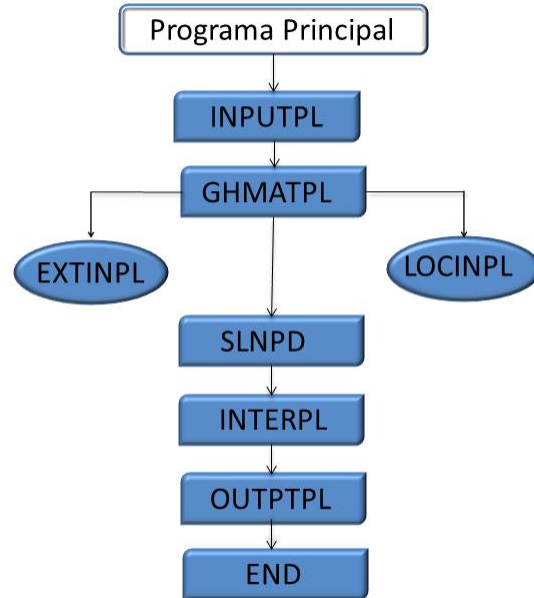


FIGURA 3.7. Diagrama

La función de cada rutina se presenta a continuación,

- INPUTPL - Esta rutina lee la entrada para el programa.
- GHMATPL - Esta rutina calcula y genera el sistema de matrices H y Q , además reordena las mismas según las condiciones de frontera en la matriz A . También genera el vector F del sistema $AX = F$.
- SLNPD - Esta subrutina es usada para resolver sistemas de ecuaciones con pivoteo.
- INTERPL - Esta rutina calcula los valores del potencial y del flujo en los puntos internos.
- OUTPTPL - Esta rutina muestra los resultados.

Este programa permite que el flujo, tanto el anterior al nodo como el posterior al nodo, sean diferentes. Cuando dos flujos, ya sean iguales o diferentes, son prescritos en un nodo, el potencial es calculado; si el potencial y un flujo son prescritos, el otro flujo es calculado; y en el caso de que sólo el potencial esté prescrito, ambos flujos son considerados iguales. Cabe destacar, que en problemas con sólo una región uniforme, el caso del potencial prescrito con dos valores desconocidos y diferentes para el flujo, van a tener lugar en una esquina, donde el

potencial es prescrito a lo largo de dos elementos que se unen en la esquina. Por otra parte, la rutina principal también lee y abre los archivos de entrada y salida.

3.1.2. Rutina *INPUTPL*.

Toda la entrada requerida por el programa es leída en esta rutina y guardada en un archivo cuyo nombre es solicitado por el programa principal. Este archivo debería contener las siguientes líneas de entrada,

- (1) *Título de línea*. Una línea que contiene el título del problema.
- (2) *Línea de parámetros básicos*. Una línea que contiene el número de elementos de frontera y el número de los puntos internos donde la función es requerida.
- (3) *Líneas de los puntos extremos de los elementos de frontera*. En estas líneas se encuentran las coordenadas del elemento leído en sentido antihorario para el caso de tener un dominio cerrado, en caso de tener un dominio abierto la dirección se toma en sentido horario.
- (4) *Líneas de condiciones de frontera*. Habrá tantas líneas como nodos dados, dando los valores del KODE y el valor del potencial si KODE= 0 ó el valor del flujo si KODE= 1.
- (5) *Líneas de las coordenadas de los puntos internos*. En estas líneas se leen las coordenadas x_1, x_2 de los puntos internos, los cuales pueden ser ubicados en una o más líneas.

Esta subrutina muestra el título, los parámetros básicos, los puntos extremos de los elementos de frontera y las condiciones de frontera. En nuestro caso, habrá dos condiciones de frontera por elemento, las cuales se encuentran en el arreglo *DFI*, por lo tanto, un nodo j puede tener diferentes valores del flujo, uno al final el elemento $j - 1$ y otro al comienzo del elemento j . Las coordenadas de los puntos internos son mostradas en la rutina *OUTPTPL*.

3.1.3. Rutina *GHMATPL*.

Esta rutina calcula y ordena las matrices H y G de la ecuación (3.4) a través de las subrutinas *EXTINPL* y *LOCINPL*. Luego de esto, reordena sus columnas y forma la matriz A y el vector F de la ecuación (3.5). Estas subrutinas cumplen con las siguientes funciones,

- *EXTINPL*: esta subrutina calcula los elementos de las matrices H y G , mediante la integración numérica a lo largo de los elementos de frontera (usando cuatro puntos

de cuadratura de Gauss). Donde se calcula todos los elementos excepto los de la diagonal.

- LOCINPL: esta subrutina calcula solo los elementos de la diagonal de la matriz G donde exista singularidad.

Los términos de la diagonal de la matriz H son calculados implícitamente. Asumiendo un potencial constante sobre toda la frontera el flujo debe ser cero y, por lo tanto,

$$HI = 0,$$

donde I es un vector que para todos los nodos tiene un potencial unitario. Dado que la ecuación (3.12) debe satisfacerse, se obtiene que,

$$H^{ii} = - \sum_{j=1}^N H^{ij} \quad \text{para } i \neq j,$$

lo que nos da los coeficientes de la diagonal en términos del resto de los términos de la matriz H . Estas consideraciones son estrictamente válidas para dominios cerrados. Cuando se trabaja con una región infinita o semi-infinita, la ecuación (3.4) debe ser modificada. Si un potencial unitario es prescrito para un dominio sin frontera, la integral,

$$\int_{\Gamma_\infty} p^* d\Gamma,$$

sobre la frontera externa Γ_∞ en el infinito no será cero y, por ende, p^* se debe a una fuente unitaria, así,

$$\int_{\Gamma_\infty} p^* d\Gamma = -1,$$

y los términos de la diagonal para este caso serán,

$$H^{ii} = 1 - \sum_{j=1}^N H^{ij} \quad \text{para } i \neq j,$$

nótese que como todos los términos H^{ij} y G^{ij} son multiplicados por 2π en el programa, debido a que la solución fundamental ha sido tomada como $\ln(\frac{1}{r})$, la ecuación anterior también es escrita en el programa como,

$$H^{ii} = 2\pi \left(1 - \sum_{j=1}^N H^{ij} \right) \quad \text{para } i \neq j.$$

Reordenando las columnas de G y H se genera la matriz A , la cual es guardada en el espacio original usado por H . Las columnas de esta matriz son las columnas de H o G multiplicadas por valores desconocidos de u o q . El vector del lado derecho F es llamado

FI en el código y es obtenido multiplicando las columnas de H o G por valores conocidos (condiciones de frontera o contorno) de u o q , respectivamente.

3.1.4. Rutina *EXTINPL*.

Esta subrutina calcula los valores de los coeficientes de las matrices H y G , que no se encuentran en la diagonal usando cuatro puntos de la fórmula de integración de Gauss, la cual establece que la integral de una función $f(x)$ cuyo dominio esté sobre el intervalo $[-1, 1]$, se puede aproximar mediante la selección óptima de ciertos puntos de evaluación ξ_k , mediante los cuales se puede reescribir nuestra función inicial como,

$$f(x) = \omega_k f(\xi_k),$$

donde ω_k son los pesos, los cuales son conocidos. Así nuestra integral inicial se puede expresar como,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^N \omega_k f(\xi_k).$$

En esta subrutina, usando el proceso descrito anteriormente se calcula las integrales de la solución fundamental y sus derivadas, las cuales son requeridas para el cálculo de los potenciales y flujos en puntos internos (ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.11)).

Considérese en lugar del sistema, $x_1 - x_2$, el sistema de coordenadas $x - y$. En este caso, los pares $(X1, Y1)$ y $(X2, Y2)$ serán las coordenadas de los puntos extremos de cada elemento, considerándolos en sentido horario (dominio abierto) o antihorario (dominio cerrado).

Usando integración numérica y haciendo un cambio de coordenadas (coordenadas adimensionales) los términos G^{ij} y H^{ij} para cada elemento y punto de colocación pueden ser escritos como sigue,

$$\begin{aligned} G^{ij} &= \sum_{i=1}^4 \ln \left(\frac{1}{(r)_k} \right) \omega_k \frac{((X1 - X2)^2 + (Y1 - Y2)^2)^{\frac{1}{2}}}{2}, \\ H^{ij} &= \sum_{i=1}^4 \frac{d}{dn} \ln \left(\frac{1}{(r)_k} \right) \omega_k \frac{((X1 - X2)^2 + (Y1 - Y2)^2)^{\frac{1}{2}}}{2}, \\ &= - \sum_{i=1}^4 \ln \left(\frac{1}{(RA)_k} \right) (RD1 * ETA1 + RD2 * ETA2) \omega_k \frac{((X1 - X2)^2 + (Y1 - Y2)^2)^{\frac{1}{2}}}{2}, \end{aligned}$$

donde,

$$RD1 = r_{,1} = \frac{(X)_k - XP}{(RA)_k},$$

$$RD2 = r_{,2} = \frac{(Y)_k - YP}{(RA)_k},$$

ω_k es el peso para cada punto, XP, YP son las coordenadas del punto de colocación y $ETA1$ y $ETA2$ son las componentes de la normal unitaria. Cabe destacar, que los valores de ω_k y la ubicación de los puntos k sobre el elemento son conocidos.

3.1.5. Rutina *LOCINPL*.

Esta subrutina calcula el valor de aquellos elementos pertenecientes a la matriz G , que corresponden a las integrales a lo largo de los elementos, que tienen singularidad. Estas integrales son,

$$B1 = \int_{\Gamma_j} \gamma_1 \ln \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma,$$

$$B2 = \int_{\Gamma_j} \gamma_2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma.$$

Usando un sistema local de coordenadas (Figura 3.8), las integrales anteriores pueden ser escritas como sigue,

$$B1 = \int_{\text{Punto 1}}^{\text{Punto 2}} (1 - \eta) \ln \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = l \int_0^1 (1 - \eta) \ln \left(\frac{1}{\eta l} \right) d\eta,$$

$$B2 = \int_{\text{Punto 1}}^{\text{Punto 2}} \eta \ln \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = l \int_0^1 \eta \ln \left(\frac{1}{\eta l} \right) d\eta,$$

$$B1 = \frac{l}{2} \left[\frac{3}{2} - \ln(l) \right],$$

$$B2 = \frac{l}{2} \left[\frac{1}{2} - \ln(l) \right].$$

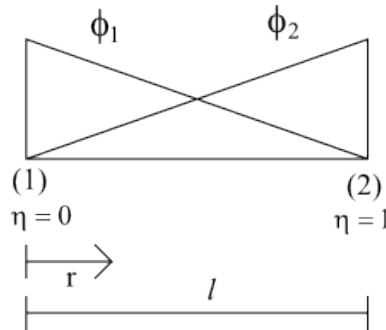


FIGURA 3.8. Sistema de coordenadas local para elementos lineales

3.1.6. Rutina *SLNPL*.

Esta subrutina resuelve el sistema de ecuaciones (3.5) usando pivoteo si es necesario. Si la matriz A tiene algún cero en la diagonal esta subrutina intercambia filas hasta conseguir un coeficiente no nulo, este programa decide que la matriz es singular cuando ningún intercambio de filas produce una diagonal sin ceros. Si ésto llegase a ocurrir, se mostrará un mensaje indicando la singularidad en la respectiva fila.

Este programa usa el método de eliminación de Gauss, para resolver el sistema el cual se basa en factorizar la matriz A en dos matrices una triangular superior U y otra triangular inferior L , de tal manera que $A = LU$, luego de esta factorización es posible despejar fácilmente las incógnitas buscadas. Después de la eliminación y cálculo de las incógnitas los resultados son guardados en el vector FI .

3.1.7. Rutina *INTERPL*.

Esta subrutina reordena los vectores FI (vector de incógnitas) y DFI (vector de condiciones de contorno), de tal manera que el vector FI contenga el valor de los potenciales y el vector DFI los flujos. Este programa también calcula el valor del potencial para los puntos internos usando la fórmula descrita en la ecuación (3.6) y los flujos a lo largo de las direcciones x_1 y x_2 usando las ecuaciones (3.7) y (3.8). En este caso, los términos de las matrices H y G para los puntos internos, son multiplicados por $\frac{1}{2\pi}$.

3.1.8. Rutina *OUTPTPL*.

Esta subrutina muestra los resultados finales. Imprime tanto las coordenadas de los nodos de frontera como sus correspondientes valores de potencial y flujo, los cuales son mostrados en arreglos X y Y . Cabe destacar, que para cada nodo se imprime dos valores de flujo uno “antes” del nodo y otro “después” del nodo.

Resultados

Para generar soluciones aplicables a la teoría mostrada, consideraremos los siguientes casos referidos a una placa cuadrada sometida a condiciones de frontera tipo Dirichlet (temperatura prescrita) y tipo Neumann (flujo prescrito), sobre la cual se consideran 16 nodos exteriores y 9 nodos interiores, como se muestra en la Figura 4.1, donde el número correspondiente a cada elemento se encuentra entre paréntesis. El grosor de esta placa es de 1 mm, por lo tanto, el problema que se plantea resolver será tratado como un problema bidimensional.

Las soluciones logradas para la ecuación de Laplace se comparan tanto con la solución obtenida por el FEM, como con la solución analítica del problema planteado. La solución obtenida mediante el FEM se alcanza a partir de una caja de herramientas de un sistema de álgebra computacional (SAC) para ecuaciones en derivadas parciales.

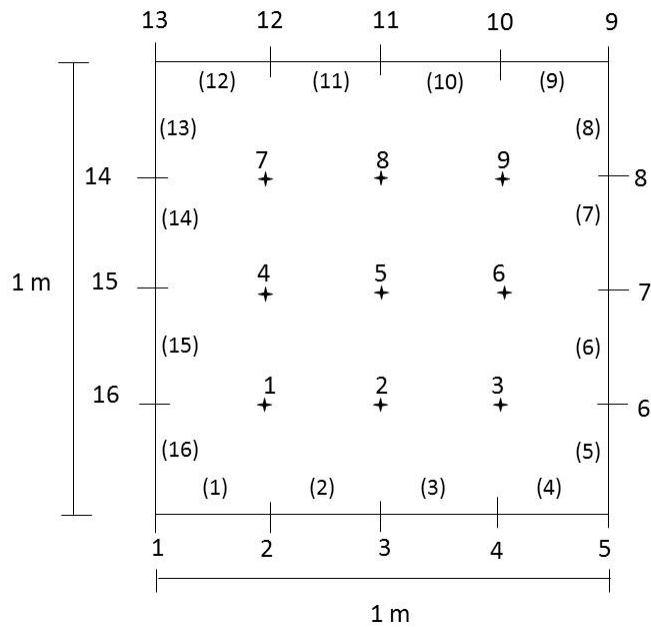


FIGURA 4.1. Placa cuadrada con 16 nodos exteriores y 9 nodos interiores

Con la finalidad de estudiar y observar la precisión y eficiencia del BEM, daremos la definición del error porcentual. Para ello primero definamos el error absoluto.

DEFINICIÓN 4.1. Sea X el valor exacto y X_1 el valor de la medida, se llama *error absoluto* al módulo de la diferencia entre estos dos valores,

$$EA = |\Delta X| = |X - X_1|,$$

Sin embargo, con este error no se aprecia por completo la precisión del método, por ello consideramos el error relativo.

DEFINICIÓN 4.2. Sea X el valor exacto y EA el error absoluto, se llama *error relativo* al módulo del cociente entre el error absoluto y el valor exacto,

$$e = \left| \frac{EA}{X} \right|.$$

Luego, si multiplicamos el error relativo por 100, obtenemos el error que cometemos por cada 100 unidades, es decir, el error porcentual:

$$e \% = 100 \cdot \left| \frac{EA}{X} \right| \%.$$

Por otra parte, la Figura 4.2 nos muestra las distintas caras de la placa, y cómo las denominaremos,

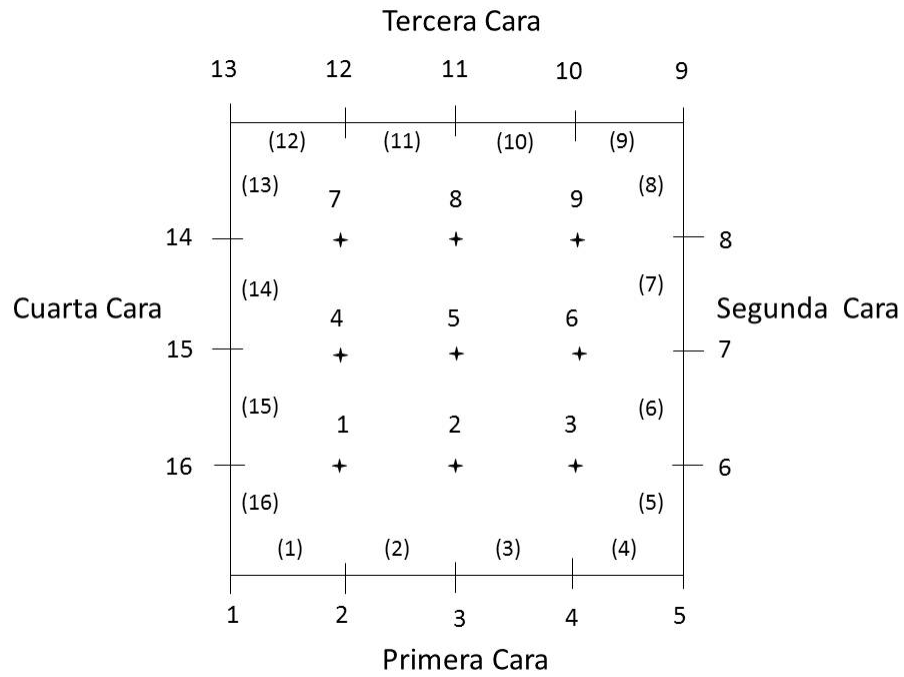


FIGURA 4.2. Caras de la placa

1. Ejemplo 1

En este caso las condiciones que actúan sobre la placa cuadrada se indican a detalle en la Figura 4.3, la cual representa dos lados con temperatura conocida y dos lados aislados,

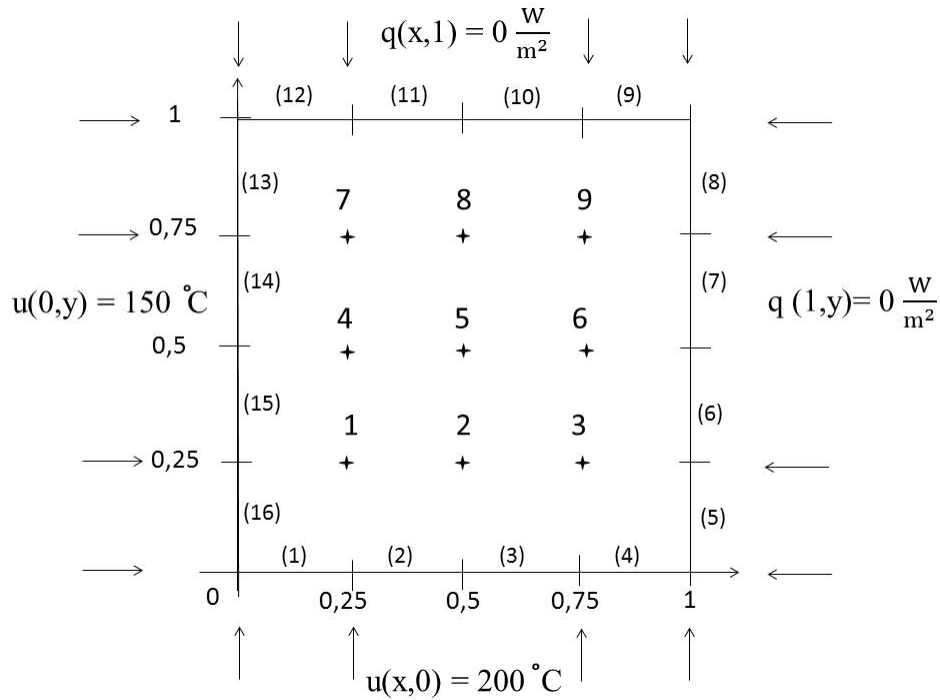


FIGURA 4.3. Condiciones de frontera del Ejemplo 1

donde u representa la temperatura de la placa y viene dada en grados centígrados ($^{\circ}C$), y q indica el flujo de calor, el cual representa la cantidad de energía por unidad de superficie y viene dada en $\frac{W}{m^2}$ (vatio entre metro cuadrado).

Para obtener la solución analítica de este problema, notemos que el mismo puede reescribirse como sigue. Con el fin de aplicar y resolver la ecuación de Laplace en un rectángulo, consideremos la división del problema en dos subproblemas, ya que sólo en dos caras de la placa tenemos condiciones de borde no-homogéneas, las caras restantes no serán tomadas en cuenta, puesto que presentan condiciones de borde homogéneas. La subdivisión realizada se muestra en la Figura 4.4, (Véase [8]).

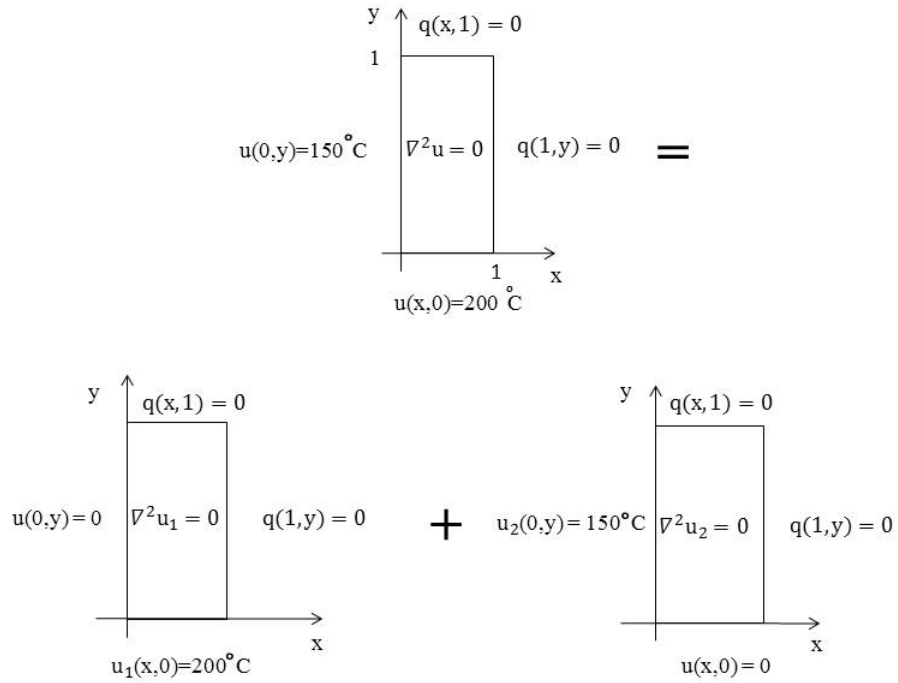


FIGURA 4.4. Subdivisión del problema del Ejemplo 1

En consecuencia, se propone como solución del problema,

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

donde cada u_i , con $i = 1, 2$ es solución de cada subproblema propuesto.

Consideremos el estudio del subproblema u_1 ,

$$(4.1) \quad \begin{cases} \nabla^2 u_1(x, y) = 0 & \text{con } 0 < x < 1 \text{ y } 0 < y < 1, \\ u_1(x, 0) = f(x) = 200^\circ C, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(1, y) = \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 1) = 0 & \text{y } u_1(0, y) = 0. \end{cases}$$

Luego, al tener condiciones de contorno homogéneas, se aplica el método de separación de variables, escribiendo,

$$u_1(x, y) = \Phi(x)\Psi(y) \neq 0.$$

Derivando u_1 , se tiene,

$$\frac{\partial^2 u_1(x, y)}{\partial x^2} = \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} \Psi(y), \quad \frac{\partial^2 u_1(x, y)}{\partial y^2} = \Phi(x) \frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2},$$

luego, al sustituir en la ecuación diferencial, se obtiene,

$$\nabla^2 u_1(x, y) = \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} \Psi(y) + \Phi(x) \frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2} = 0.$$

Dividiendo la ecuación diferencial por $\Phi(x)\Psi(y)$, resulta,

$$\frac{1}{\Phi(x)} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + \frac{1}{\Psi(y)} \frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2} = 0,$$

entonces la expresión anterior se puede escribir como,

$$(4.2) \quad \frac{1}{\Phi(x)} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = - \frac{1}{\Psi(y)} \frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2}.$$

Así se ha separado, las variables x e y , de manera tal que en el lado derecho de la ecuación (4.2), hay una función que sólo depende de y y del lado izquierdo una función que sólo depende de x .

Ahora, considérese la función del lado izquierdo de la ecuación (4.2) que sólo depende de x . Si derivamos esta función con respecto a y , obtenemos que la misma se anula. Por otra parte, como la función del lado izquierdo de la ecuación (4.2) sólo depende de la variable y , se obtiene que ésta debe ser constante, pues su derivada es cero. Considérese λ como esa constante y, por conveniencia, ésta será positiva.

Así, tenemos la siguiente igualdad,

$$\frac{1}{\Phi(x)} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = \lambda = - \frac{1}{\Psi(y)} \frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2}.$$

Luego, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{cases} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - \lambda\Phi(x) = 0, \\ \frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} + \lambda\Psi(y) = 0. \end{cases}$$

Usando las condiciones de contorno, se obtiene,

- $\frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \Phi'(1)\Psi(y) = 0.$

Por tanto, $\Phi'(1) = 0$ ó $\Psi(y) = 0$. Luego, si suponemos que $\Psi(y) = 0$ entonces nuestra solución $u_1(x, y) = 0$ (solución trivial) lo cual no puede ocurrir pues estamos suponiendo $u_1(x, y) \neq 0$, entonces $\Phi'(1) = 0$.

- $\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 1) = \Phi(x)\Psi'(1) = 0.$

Análogamente, se obtiene que $\Psi'(1) = 0$, pues $\Phi(x) \neq 0$.

- $u_1(0, y) = \Phi(0)\Psi(y) = 0.$

De igual forma, $\Phi(0) = 0$.

Por lo tanto, el problema inicial (4.1) se reescribe en dos problemas de contorno,

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - \lambda\Phi(x) = 0, \\ \Phi(0) = \Phi'(1) = 0, \end{cases} \quad (4.4) \quad \begin{cases} \frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} + \lambda\Psi(y) = 0, \\ \Psi'(1) = 0. \end{cases}$$

Resolviendo primero el problema (4.3), notemos que su solución viene dada por,

$$\Phi(x) = e^{rx}$$

donde r es una constante, entonces al derivar dos veces con respecto a x , se tiene,

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = r^2 e^{rx}.$$

Sustituyendo en (4.3), se obtiene,

$$e^{rx}[r^2 - \lambda] = 0.$$

Por lo tanto,

$$r = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Para hallar el valor de λ se debe considerar tres casos,

Caso 1 ($\lambda = 0$): en este caso $r = 0$ es una raíz con multiplicidad dos. Por lo tanto,

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = 0,$$

entonces,

$$\Phi(x) = C_1x + C_2 \quad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Usando las condiciones de borde, se obtiene,

$$\Phi(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 0,$$

así $C_2 = 0$. Por otra parte,

$$\Phi'(x) = C_1,$$

$$\Phi'(1) = C_1 = 0,$$

por ende $C_1 = 0$. Entonces,

$$\Phi(x) = 0,$$

la cual no es más que la solución trivial. Por lo tanto, $\lambda = 0$ no es un autovalor.

Caso 2 ($\lambda > 0$): en este caso tenemos que $r = \pm\sqrt{\lambda}$, donde su solución viene dada por,

$$\Phi(x) = C_1e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Usando las condiciones de borde,

$$\Phi(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = C_1 + C_2 = 0,$$

así $C_2 = -C_1$. Luego,

$$\Phi(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} = 2C_1 \left[e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x} \right].$$

Derivando, se tiene que,

$$\Phi'(x) = 2C_1 \sqrt{\lambda} \left[e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x} \right],$$

por lo tanto,

$$\Phi'(1) = 2C_1 \sqrt{\lambda} \left[e^{\sqrt{\lambda}L} + e^{-\sqrt{\lambda}L} \right] = 4C_1 \sqrt{\lambda} \cosh(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Luego, $\cosh(\sqrt{\lambda}) \neq 0$ pues $\sqrt{\lambda} \neq 0$. Así, $C_1 = 0 = -C_2$ y, por tanto, $\Phi(x) = 0$ (solución trivial). Luego, $\lambda > 0$ no es un autovalor.

Caso 3 ($\lambda < 0$): en este caso $r = \pm\sqrt{\lambda}i$. Su solución viene dada por,

$$\Phi(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Usando las condiciones de borde,

$$\Phi(0) = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = 0,$$

entonces $C_2 = 0$. Así,

$$\Phi'(x) = C_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Luego,

$$\Phi'(1) = C_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Si $C_1 = 0$, tenemos la solución trivial, por lo tanto, $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$ cuando $\sqrt{\lambda} = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ para $n = 1, 2, \dots$. En consecuencia,

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right)^2, \quad \text{con } n = 1, 2, \dots,$$

donde la autofunción asociada es,

$$\Phi_n(x) = C_1 \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} \right) \quad \text{con } n = 1, 2, \dots$$

Consideremos ahora el problema definido en (4.4). La solución de este problema se obtiene de la siguiente forma,

$$\Psi(y) = e^{ry}.$$

Derivando dos veces, se obtiene que,

$$\frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} = r^2 e^{ry}.$$

Sustituyendo en (4.4), se tiene,

$$e^{ry}[r^2 + \lambda] = 0,$$

entonces,

$$r^2 = -\lambda.$$

Por lo tanto,

$$r = \pm \sqrt{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2} = \pm \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) i.$$

La solución general puede ser expresada como una combinación lineal de funciones exponenciales o como una combinación lineal de funciones hiperbólicas; se puede usar cualquiera de las dos representaciones.

Para el caso del problema (4.4), existe una condición de borde definida sobre H dada por $\Psi'(1) = 0$. Así nos resulta de mayor utilidad usar las combinaciones lineales de las funciones hiperbólicas, donde se ha realizado una traslación con el fin de obtener los valores de las constantes C_1 y C_2 ,

$$\Psi(y) = C_1 \operatorname{senh} \left(\frac{(2n-1)\pi(1-y)}{2} \right) + C_2 \operatorname{cosh} \left(\frac{(2n-1)\pi(1-y)}{2} \right).$$

Derivando la expresión anterior se obtiene,

$$\Psi'(y) = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right) \left[C_1 \cosh \left(\frac{(2n-1)\pi(1-y)}{2} \right) + C_2 \sinh \left(\frac{(2n-1)\pi(1-y)}{2} \right) \right].$$

Usando la condición de contorno, se tiene,

$$\Psi'(1) = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right) [C_1 \cosh(0) + C_2 \sinh(0)] = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right) C_1 = 0,$$

de donde se obtiene que $C_1 = 0$. Por lo tanto,

$$\Psi(y) = C_2 \cosh \left(\frac{(2n-1)\pi(1-y)}{2} \right) \quad \text{con } n = 1, 2, \dots$$

Por el principio de superposición generalizado, la solución de u_1 viene dada por el producto de las soluciones de los problemas (4.3) y (4.4), así se obtiene que,

$$(4.5) \quad u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^1 \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} \right) \cosh \left(\frac{(2n-1)\pi(1-y)}{2} \right).$$

Para hallar el coeficiente B_n^1 , se usará la condición inicial $u_1(x, 0) = 200$, es decir,

$$200 = u_1(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^1 \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} \right) \cosh \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right).$$

Se define C_n , como sigue,

$$C_n = B_n^1 \cosh \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right),$$

entonces,

$$200 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} \right).$$

Para hallar C_n , se multiplica ambos lados por $\text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right)$ y se integra con respecto a x , entre 0 y 1,

$$\begin{aligned} \int_0^1 200 \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right) dx &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^1 \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Usando la ortogonalidad de la función seno, se obtiene lo siguiente,

$$\int_0^1 \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = m \neq 0, \end{cases}$$

por ende, si $m = n \neq 0$, entonces,

$$\int_0^1 200 \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx = C_n \frac{1}{2}.$$

Luego, se tiene que,

$$C_n = B_n^1 \cosh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = 400 \int_0^1 \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx.$$

Por lo tanto,

$$B_n^1 = \frac{400}{\cosh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)} \int_0^1 \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx.$$

Así se tiene una expresión para la temperatura (ecuación (4.5)) del subproblema que está definido por u_1 .

Resolvamos ahora el subproblema u_2 ,

$$(4.6) \quad \begin{cases} \nabla^2 u_2(x, y) = 0 & \text{con } 0 < x < 1 \text{ y } 0 < y < 1, \\ u_2(0, y) = \hat{g}(y) = 150 \text{ } ^\circ\text{C}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}(1, y) = \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, 1) = 0 & \text{y } u_2(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando el método de separación de variables, se obtiene,

$$\begin{cases} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - \lambda\Phi(x) = 0, \\ \frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} + \lambda\Psi(y) = 0. \end{cases}$$

Usando las condiciones de borde, se tiene que,

- $\frac{\partial u_2}{\partial x}(1, y) = \Phi'(1)\Psi(y) = 0.$

Así $\Phi'(1) = 0$ ó $\Psi(y) = 0$, luego si suponemos que $\Psi(y) = 0$ entonces nuestra solución $u_2(x, y) = 0$ (solución trivial). Por tanto $\Phi'(1) = 0$.

- $\frac{\partial u_2}{\partial y}(x, 1) = \Phi(x)\Psi'(1) = 0.$

Análogamente se obtiene que $\Psi'(1) = 0$, pues $\Phi(x) \neq 0$.

- $u_2(x, 0) = \Phi(x)\Psi(0) = 0.$

De igual forma, $\Psi(0) = 0$.

Así el problema (4.6) se convierte en dos problemas de contorno,

$$(4.7) \quad \begin{cases} \frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} + \lambda\Psi(y) = 0, \\ \Psi(0) = \Psi'(1) = 0, \end{cases} \quad (4.8) \quad \begin{cases} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - \lambda\Phi(x) = 0, \\ \Phi'(1) = 0. \end{cases}$$

Resolviendo primero el problema de contorno (4.7), su solución viene dada por,

$$\Psi(y) = e^{ry}.$$

Derivando dos veces, se tiene que,

$$\frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} = r^2 e^{ry}.$$

Sustituyendo en (4.7), se obtiene,

$$e^{ry}[r^2 + \lambda] = 0.$$

Luego, resulta que,

$$r^2 = -\lambda \quad \text{así } r = \pm\sqrt{-\lambda}.$$

Al igual que en el subproblema u_1 , para hallar el valor de λ se consideran tres casos,

Caso 1 ($\lambda = 0$): en este caso $r = 0$ es una raíz con multiplicidad dos. Por lo tanto,

$$\frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} = 0,$$

luego,

$$\Psi(y) = C_1y + C_2 \quad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Usando las condiciones de contorno,

$$\Psi(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 0,$$

de esta manera se obtiene que $C_2 = 0$, por otra parte,

$$\Psi'(y) = C_1,$$

$$\Psi'(1) = C_1 = 0.$$

Luego $C_1 = 0$. Por ende,

$$\Psi(y) = 0,$$

la cual no es más que la solución trivial, por lo tanto $\lambda = 0$ no es un autovalor.

Caso 2 ($\lambda < 0$): en este caso llamemos $s = -\lambda$ con $s > 0$, así $r^2 = s$ y por tanto $r = \pm\sqrt{s}$.

Como en el subproblema u_1 su solución viene dada por,

$$\Psi(y) = C_1e^{\sqrt{s}y} + C_2e^{-\sqrt{s}y} \quad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Usando las condiciones de borde, se obtiene,

$$\Psi(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = C_1 + C_2 = 0,$$

así resulta que $C_2 = -C_1$. Luego,

$$\Psi(y) = C_1 e^{\sqrt{s}y} - C_1 e^{-\sqrt{s}y} = 2C_1 \left[e^{\sqrt{s}y} - e^{-\sqrt{s}y} \right].$$

Derivando la expresión anterior se tiene que,

$$\Psi'(y) = 2C_1 \sqrt{s} \left[e^{\sqrt{s}y} + e^{-\sqrt{s}y} \right],$$

de esta manera, se tiene que,

$$\Psi(1) = 2C_1 \sqrt{s} \left[e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}} \right] = 4C_1 \sqrt{s} \cosh(\sqrt{s}) = 0,$$

luego $\cosh(\sqrt{s}) \neq 0$ pues $\sqrt{s} \neq 0$. Así, $C_1 = 0 = -C_2$ y por tanto $\Psi(y) = 0$ (solución trivial).

Por lo tanto $\lambda < 0$ no es un autovalor.

Caso 3 ($\lambda > 0$): en este caso $r = \pm \sqrt{\lambda}i$. Su solución viene dada por,

$$\Psi(y) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}y) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}y) \quad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Usando las condiciones de borde,

$$\Psi(0) = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = 0, \quad \text{entonces } C_2 = 0.$$

Derivando la expresión anterior, se tiene que,

$$\Psi'(y) = C_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}y),$$

entonces, se obtiene,

$$\Psi'(1) = C_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Al igual que antes, si $C_1 = 0$ obtenemos la solución trivial. Por lo tanto, $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$, cuando $\sqrt{\lambda} = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ para $n = 1, 2, \dots$. De esta manera,

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right)^2, \quad \text{con } n = 1, 2, \dots,$$

donde la autofunción asociada es,

$$\Psi_n(y) = C_1 \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi y}{2} \right) \quad \text{con } n = 1, 2, \dots$$

Consideremos ahora el problema definido en (4.8), la solución de este problema se obtiene como sigue,

$$\Phi(x) = e^{rx},$$

derivando la expresión anterior, se tiene que,

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = r^2 e^{rx}.$$

Sustituyendo en (4.8), se obtiene,

$$e^{rx}[r^2 - \lambda] = 0,$$

entonces, se tiene que,

$$r = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Por lo tanto,

$$r = \pm\sqrt{\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2} = \pm\frac{(2n-1)\pi}{2}.$$

Al igual que en el subproblema anterior, expresaremos nuestra solución como una combinación lineal de funciones hiperbólicas; ya que para este problema existe una condición de borde definida sobre L dada por $\Phi'(1) = 0$, dicha solución es,

$$\Phi(x) = C_1 \operatorname{senh} \left(\frac{(2n-1)\pi(1-x)}{2} \right) + C_2 \operatorname{cosh} \left(\frac{(2n-1)\pi(1-x)}{2} \right).$$

Derivando la expresión anterior, resulta que,

$$\Phi'(x) = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right) \left[C_1 \operatorname{cosh} \left(\frac{(2n-1)\pi(1-x)}{2} \right) + C_2 \operatorname{senh} \left(\frac{(2n-1)\pi(1-x)}{2} \right) \right].$$

Usando la condición de borde,

$$\Phi'(1) = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right) [C_1 \cosh(0) + C_2 \sinh(0)] = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right) C_1 = 0,$$

de esta manera $C_1 = 0$. Por ende,

$$\Phi(x) = C_2 \cosh \left(\frac{(2n-1)\pi(1-x)}{2} \right) \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Por el principio de superposición generalizado, resulta que,

$$(4.9) \quad u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi y}{2} \right) \cosh \left(\frac{(2n-1)\pi(1-x)}{2} \right).$$

Usando la condición inicial $u_2(0, y) = 150$, se obtiene que,

$$150 = u_2(0, y) = \hat{g}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi y}{2} \right) \cosh \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right).$$

Luego, si se define,

$$\hat{C}_n = B_n^2 \cosh \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right),$$

entonces, se tiene que,

$$150 = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi y}{2} \right).$$

Luego al igual que en el subproblema u_1 para hallar \hat{C}_n , se multiplica ambos lados por $\operatorname{sen} \left(\frac{(2m+1)\pi y}{2} \right)$ y se integra con respecto a la variable “ y ”, entre 0 y 1,

$$\begin{aligned} \int_0^1 150 \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi y}{2} \right) dy &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi y}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi y}{2} \right) dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_n \int_0^1 \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi y}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(2m-1)\pi y}{2} \right) dy. \end{aligned}$$

Usando la ortogonalidad de la función seno, si $m = n \neq 0$, entonces,

$$\int_0^1 150 \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi y}{2} \right) dy = \hat{C}_n \frac{1}{2}.$$

Luego, se tiene,

$$\hat{C}_n = B_n^2 \cosh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = 300 \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2}\right) dy,$$

despejando, se obtiene el valor del coeficiente buscado,

$$B_n^2 = \frac{300}{\cosh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)} \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2}\right) dy,$$

así se obtiene la temperatura para el subproblema u_2 , la cual esta dada por la ecuación (4.9).

Así la solución $u(x, y)$ viene dada por,

$$(4.10) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^1 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \cosh\left(\frac{(2n-1)\pi(1-y)}{2}\right) \\ &+ B_n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2}\right) \cosh\left(\frac{(2n-1)\pi(1-x)}{2}\right). \end{aligned}$$

Con el fin de obtener la solución analítica en los puntos del dominio donde se requiera, se construyó un código mediante un sistema de álgebra computacional. Se observó que para $N = 25$ los valores de la serie en la ecuación (4.10) se mantenían constantes, los mismos fueron utilizados al momento de la comparación de los métodos BEM y FEM.

Los valores de temperatura y flujo obtenidos a partir del programa POLINBE para los nodos exteriores e interiores, se presentan en la Figura 1,

HEAT FLOW EXAMPLE (16 LINEAR ELEMENTS)

DATA

NUMBER OF BOUNDARY ELEMENTS = 16

NUMBER OF INTERNAL POINTS WHERE THE FUNCTION IS CALCULATED = 9

COORDINATES OF THE EXTREME POINTS OF THE BOUNDARY ELEMENTS

POINT	X	Y
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.25000E+00	0.00000E+00
3	0.50000E+00	0.00000E+00
4	0.75000E+00	0.00000E+00
5	0.10000E+01	0.00000E+00
6	0.10000E+01	0.25000E+00
7	0.10000E+01	0.50000E+00
8	0.10000E+01	0.75000E+00
9	0.10000E+01	0.10000E+01
10	0.75000E+00	0.10000E+01
11	0.50000E+00	0.10000E+01
12	0.25000E+00	0.10000E+01
13	0.00000E+00	0.10000E+01
14	0.00000E+00	0.75000E+00
15	0.00000E+00	0.50000E+00
16	0.00000E+00	0.25000E+00

BOUNDARY CONDITIONS

ELEMENT	-----FIRST NODE-----		-----SECOND NODE-----	
	PRESCRIBED VALUE	CODE	PRESCRIBED VALUE	CODE
1	0.2000000E+03	0	0.2000000E+03	0
2	0.2000000E+03	0	0.2000000E+03	0
3	0.2000000E+03	0	0.2000000E+03	0
4	0.2000000E+03	0	0.2000000E+03	0
5	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
6	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
7	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
8	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
9	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
10	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
11	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
12	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
13	0.1500000E+03	0	0.1500000E+03	0
14	0.1500000E+03	0	0.1500000E+03	0
15	0.1500000E+03	0	0.1500000E+03	0
16	0.1500000E+03	0	0.1500000E+03	0

RESULTS

BOUNDARY NODES

X	Y	POTENTIAL	POTENTIAL BEFORE NODE	DERIVATIVE AFTER NODE
0.00000E+00	0.00000E+00	0.20000E+03	0.11462E+03	0.11462E+03
0.25000E+00	0.00000E+00	0.20000E+03	0.11202E+03	0.11202E+03
0.50000E+00	0.00000E+00	0.20000E+03	0.56673E+02	0.56673E+02
0.75000E+00	0.00000E+00	0.20000E+03	0.43985E+02	0.43985E+02
0.10000E+01	0.00000E+00	0.20000E+03	0.39298E+02	0.00000E+00
0.10000E+01	0.25000E+00	0.19026E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.10000E+01	0.50000E+00	0.18230E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.10000E+01	0.75000E+00	0.17729E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.10000E+01	0.10000E+01	0.17578E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.75000E+00	0.10000E+01	0.17405E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.50000E+00	0.10000E+01	0.16882E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.25000E+00	0.10000E+01	0.16045E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.10000E+01	0.15000E+03	0.00000E+00	-0.42554E+02
0.00000E+00	0.75000E+00	0.15000E+03	-0.49137E+02	-0.49137E+02
0.00000E+00	0.50000E+00	0.15000E+03	-0.49027E+02	-0.49027E+02
0.00000E+00	0.25000E+00	0.15000E+03	-0.23226E+03	-0.23226E+03

INTERNAL POINTS

X	Y	POTENTIAL
0.25000E+00	0.25000E+00	0.17724E+03
0.50000E+00	0.25000E+00	0.18580E+03
0.75000E+00	0.25000E+00	0.18930E+03
0.25000E+00	0.50000E+00	0.16571E+03
0.50000E+00	0.50000E+00	0.17571E+03
0.75000E+00	0.50000E+00	0.18081E+03
0.25000E+00	0.75000E+00	0.16151E+03
0.50000E+00	0.75000E+00	0.17035E+03
0.75000E+00	0.75000E+00	0.17563E+03

FIGURA 4.5. Temperatura y flujo de calor para los nodos internos y sobre la frontera del Ejemplo 1

En la Tabla 1.1 se muestra una comparación entre la solución obtenida por el BEM, el FEM y la solución analítica, para los nodos en la frontera. En esta tabla sólo se muestra la comparación para los nodos del 5 al 13, los cuales se ubican en la segunda y tercera cara de la placa, donde para cada método (BEM y FEM) se calcula el error porcentual correspondiente, respecto a la solución analítica del problema.

Coord. Nodos Frontera			Temperatura (°C)			Errores porcentuales	
Nodo	X	Y	BEM	FEM	Sol. Analítica	Error BEM	Error FEM
5	1	0	200	196,59	199,71	0,14 %	1,56 %
6	1	0,25	190,26	190,29	189,92	0,17 %	0,19 %
7	1	0,50	182,30	182,35	181,79	0,28 %	0,30 %
8	1	0,75	177,29	177,32	176,70	0,33 %	0,35 %
9	1	1	175,78	175,82	175,00	0,44 %	0,46 %
10	0,75	1	174,05	172,49	173,29	0,43 %	0,46 %
11	0,50	1	168,82	167,53	168,20	0,36 %	0,39 %
12	0,25	1	160,45	159,67	160,07	0,23 %	0,24 %
13	0	1	150	153,40	149,78	0,14 %	2,41 %

Tabla 1.1 : Temperaturas en los nodos sin valor prescrito del Ejemplo 1.

En la Tabla 1.1, se aprecia que el error porcentual del BEM es menor que el error porcentual del FEM. Esto sucede para todos los nodos considerados, lo cual nos indica que los valores del BEM se aproximan mejor a la solución analítica que aquellos obtenidos mediante el FEM. En el caso del BEM, su error porcentual nunca supera el 0,44 %, mientras que el error porcentual del FEM llega hasta un 2,41 %.

Por otra parte, cabe destacar que los resultados obtenidos mediante el BEM; para los nodos ubicados en la primera y cuarta cara de la placa son bastante aproximados a la solución analítica, en comparación con los del FEM (ver Tabla (1.2)). Esto se debe principalmente a que estos nodos, al igual que los anteriores se ubican sobre la frontera de la placa, y el BEM se basa precisamente en discretizar el contorno y no todo el dominio como es el caso del FEM .

Coordenadas			Temperatura (°C)		
Nodo	X	Y	BEM	FEM	Sol. Analítica
1	0	0	200	175	200
2	0,25	0	200	189,45	199,99
3	0,50	0	200	196,36	200,39
4	0,75	0	200	197,40	200,00
13	0	1	150	153,40	149,78
14	0	0,75	150	152,59	150,00
15	0	0,50	150	153,63	150,29
16	0	0,25	150	160,54	149,99

Tabla 1.2 : Temperaturas primera y cuarta cara del Ejemplo 1.

De igual manera que para los nodos sobre la frontera, en la Tabla 1.3 se muestra la comparación con cuatro nodos internos,

Coord. Nodos internos			Temperatura (°C)			Errores porcentuales	
Nodo	X	Y	BEM	FEM	Sol. Analítica	Error BEM	Error FEM
3	0,75	0,25	189,30	187,62	188,87	0,22 %	0,66 %
4	0,25	0,50	165,71	165,78	164,97	0,44 %	0,49 %
5	0,50	0,50	175,71	175,86	175,00	0,40 %	0,49 %
7	0,25	0,75	161,51	162,38	161,12	0,24 %	0,78 %

Tabla 1.3 : Errores porcentuales nodos internos del Ejemplo 1.

En la Tabla 1.3, se muestra la comparación respectiva del BEM y FEM con la solución analítica, mediante el uso del error porcentual, donde se observa una mayor precisión del BEM, puesto que los errores porcentuales del BEM para cada nodo, siempre son menores a los errores obtenidos mediante el FEM.

La distribución de temperatura para el primer ejemplo mediante el BEM y el FEM, se muestran en las Figuras 4.6 y 4.7, respectivamente.

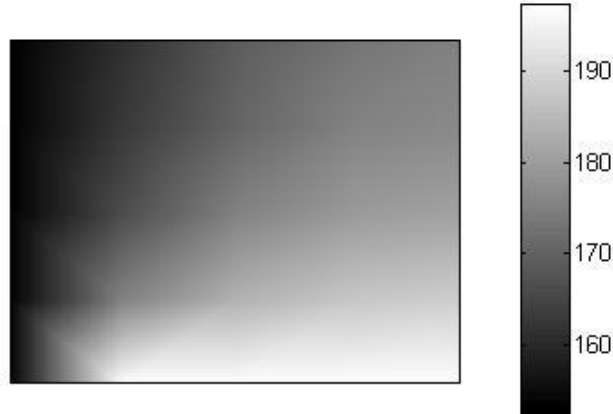


FIGURA 4.6. Distribución de temperatura del Ejemplo 1 obtenida por BEM

La Figura 4.6, muestra la distribución de calor sobre la placa sometida a las condiciones de contorno anteriormente descritas, para el instante final de la simulación con el BEM. Se puede observar como el calor aumenta hacia el lado inferior de la placa alcanzando los 200 °C, mientras que el calor disminuye hacia el lado izquierdo de la placa alcanzando los 150 °C, por otra parte, en el resto de la placa se muestra una temperatura que oscila entre los 170 °C y 190 °C.

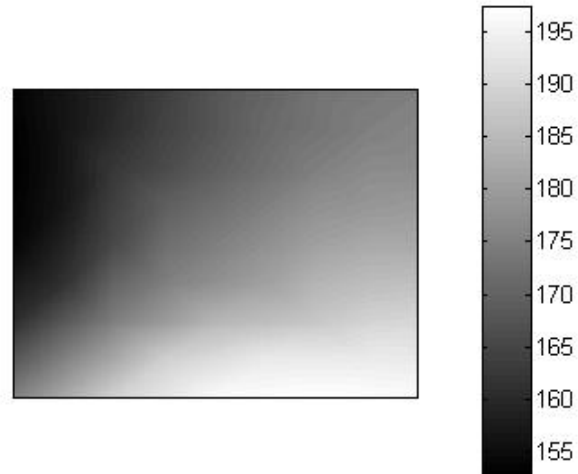


FIGURA 4.7. Distribución de temperatura del Ejemplo 1 obtenida por FEM

Por su parte, la Figura 4.7 muestra la misma distribución de temperaturas de la placa para el ejemplo 1. Donde se aprecia que la mayor temperatura se ubica hacia el lado inferior de la placa, mientras que la menor temperatura se ubica hacia el lado izquierdo de la placa. En el resto de la placa se observa una distribución de calor que oscila entre los 160 °C y 190 °C.

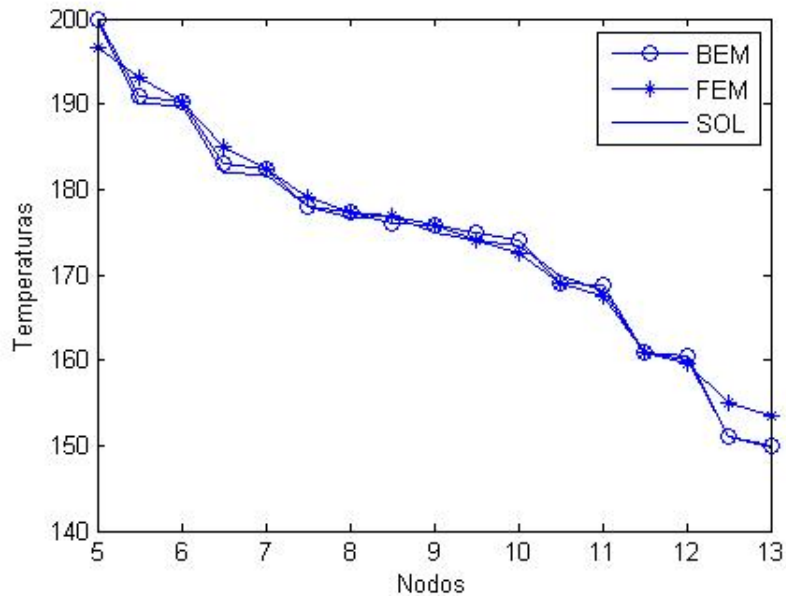


FIGURA 4.8. Resultados numéricos nodos frontera del Ejemplo 1

Por otra parte, las Figuras 4.8 y 4.9 muestran una comparación entre los valores numéricos considerados en las Tablas 1.1 y 1.3, respectivamente, tanto para los nodos sobre la frontera como para los nodos internos.

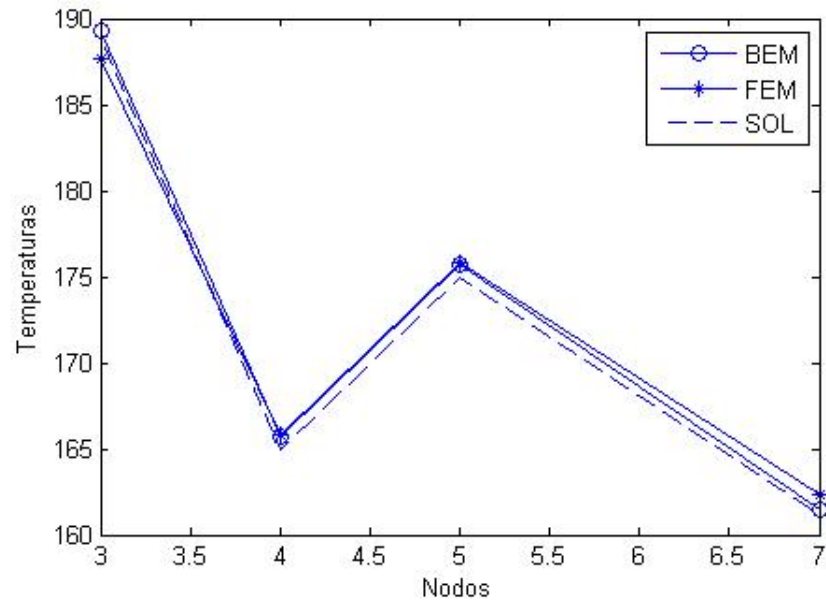


FIGURA 4.9. Resultados numéricos nodos internos del Ejemplo 1

2. Ejemplo 2

Para este ejemplo se consideró la misma cantidad de elementos y nodos interiores que en el primer ejemplo, con la única diferencia que en este caso se consideran condiciones de borde distintas, las cuales se muestran en la Figura 4.10.

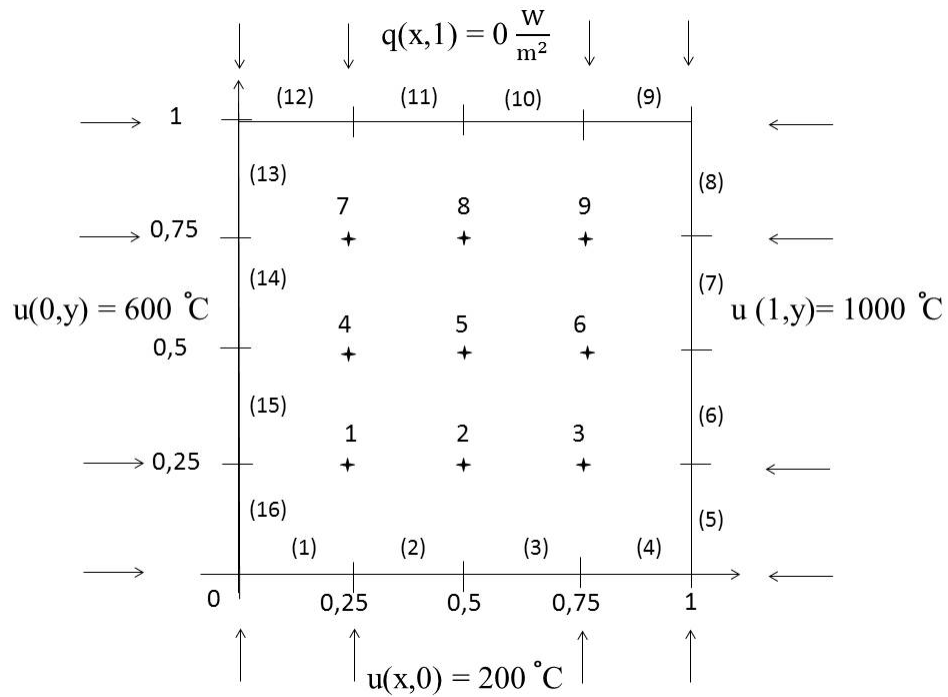


FIGURA 4.10. Condiciones de frontera del Ejemplo 2

Para hallar la solución analítica a este problema, se debe seguir un procedimiento análogo al realizado para el ejemplo 1, en donde se subdividió el problema inicial en tres subproblemas (Figura 4.11), puesto que estas condiciones son no-homogéneas. A diferencia del ejemplo anterior este ejemplo sólo tendrá una cara con flujo nulo. Por lo que en este caso, la solución es $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^1 \operatorname{sen}(n\pi x) \cosh(n\pi(1-y)) \\
 &+ B_n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \\
 &+ B_n^3 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{(2n-1)\pi(1-x)}{2}\right),
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 B_n^1 &= \frac{400}{\cosh(n\pi)} \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) dx, \\
 B_n^2 &= \frac{2000}{\operatorname{senh}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)} \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2}\right) dy, \\
 B_n^3 &= \frac{1200}{\operatorname{senh}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)} \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2}\right) dy,
 \end{aligned}$$

Al igual que para el ejemplo 1, se observó que los valores de la serie dada por la ecuación (4.11) para un $N = 35$ se mantenían constantes, por esta razón dichos resultados fueron los utilizados para la comparación respectiva. Para esto construyo un código mediante el uso del sistema de álgebra computacional.

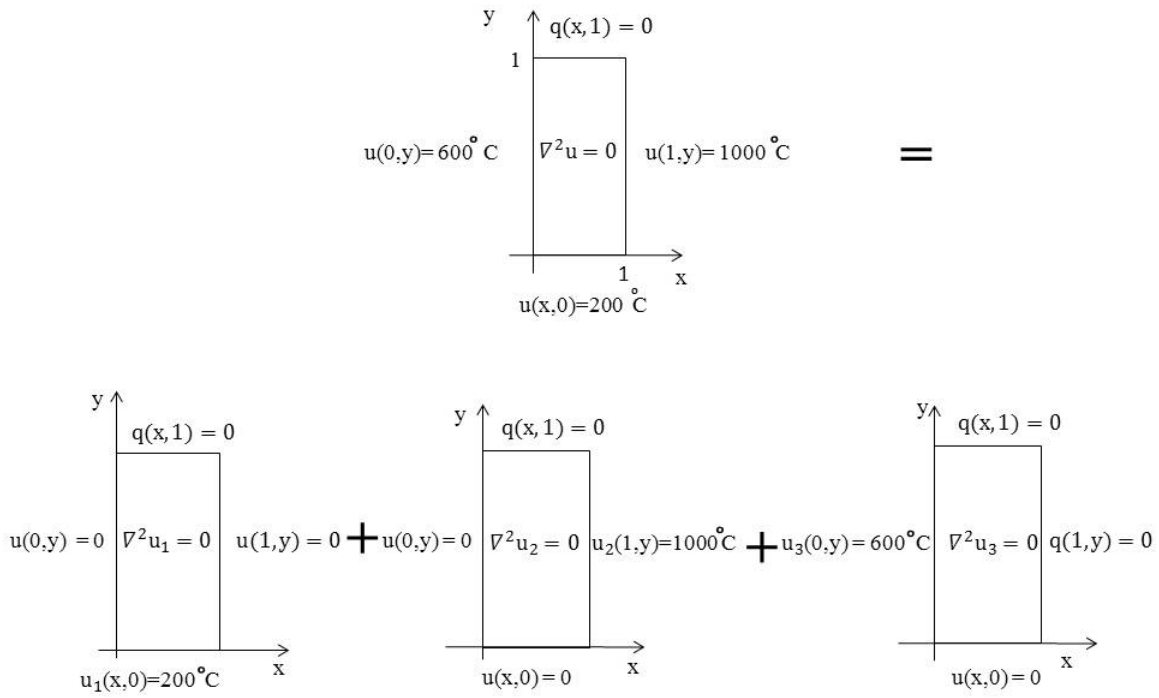


FIGURA 4.11. Subdivisión del problema del Ejemplo 2

Los resultados para el segundo ejemplo se muestran en la Figura 4.12,

```
HEAT FLOW EXAMPLE (16 LINEAR ELEMENTS)
DATA
NUMBER OF BOUNDARY ELEMENTS = 16
NUMBER OF INTERNAL POINTS WHERE THE FUNCTION IS CALCULATED = 9

COORDINATES OF THE EXTREME POINTS OF THE BOUNDARY ELEMENTS

POINT          X          Y
  1          0.00000E+00      0.00000E+00
  2          0.25000E+00      0.00000E+00
  3          0.50000E+00      0.00000E+00
  4          0.75000E+00      0.00000E+00
  5          0.10000E+01      0.00000E+00
  6          0.10000E+01      0.25000E+00
  7          0.10000E+01      0.50000E+00
  8          0.10000E+01      0.75000E+00
  9          0.10000E+01      0.10000E+01
 10          0.75000E+00      0.10000E+01
 11          0.50000E+00      0.10000E+01
 12          0.25000E+00      0.10000E+01
 13          0.00000E+00      0.10000E+01
 14          0.00000E+00      0.75000E+00
 15          0.00000E+00      0.50000E+00
 16          0.00000E+00      0.25000E+00

BOUNDARY CONDITIONS
-----FIRST NODE-----
PRESCRIBED
ELEMENT      VALUE      CODE
  1          0.2000000E+03      0
  2          0.2000000E+03      0
  3          0.2000000E+03      0
  4          0.2000000E+03      0
  5          0.1000000E+04      0
  6          0.1000000E+04      0
  7          0.1000000E+04      0
  8          0.1000000E+04      0
  9          0.0000000E+00      1
 10          0.0000000E+00      1
 11          0.0000000E+00      1
 12          0.0000000E+00      1
 13          0.6000000E+03      0
 14          0.6000000E+03      0
 15          0.6000000E+03      0
 16          0.6000000E+03      0

-----SECOND NODE-----
PRESCRIBED
ELEMENT      VALUE      CODE
  1          0.2000000E+03      0
  2          0.2000000E+03      0
  3          0.2000000E+03      0
  4          0.2000000E+03      0
  5          0.1000000E+04      0
  6          0.1000000E+04      0
  7          0.1000000E+04      0
  8          0.1000000E+04      0
  9          0.0000000E+00      1
 10          0.0000000E+00      1
 11          0.0000000E+00      1
 12          0.0000000E+00      1
 13          0.6000000E+03      0
 14          0.6000000E+03      0
 15          0.6000000E+03      0
 16          0.6000000E+03      0
```

RESULTS

BOUNDARY NODES

X	Y	POTENTIAL	POTENTIAL DERIVATIVE	
			BEFORE NODE	AFTER NODE
0.00000E+00	0.00000E+00	0.20000E+03	-0.91202E+03	-0.91202E+03
0.25000E+00	0.00000E+00	0.20000E+03	-0.11518E+04	-0.11518E+04
0.50000E+00	0.00000E+00	0.20000E+03	-0.10122E+04	-0.10122E+04
0.75000E+00	0.00000E+00	0.20000E+03	-0.18397E+04	-0.18397E+04
0.10000E+01	0.00000E+00	0.20000E+03	-0.18318E+04	-0.18318E+04
0.10000E+01	0.25000E+00	0.10000E+04	0.36770E+04	0.36770E+04
0.10000E+01	0.50000E+00	0.10000E+04	0.72501E+03	0.72501E+03
0.10000E+01	0.75000E+00	0.10000E+04	0.72391E+03	0.72391E+03
0.10000E+01	0.10000E+01	0.10000E+04	0.62450E+03	0.00000E+00
0.75000E+00	0.10000E+01	0.84792E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.50000E+00	0.10000E+01	0.72751E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.25000E+00	0.10000E+01	0.64911E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.10000E+01	0.60000E+03	0.00000E+00	-0.17087E+03
0.00000E+00	0.75000E+00	0.60000E+03	-0.10836E+03	-0.10836E+03
0.00000E+00	0.50000E+00	0.60000E+03	-0.14490E+02	-0.14490E+02
0.00000E+00	0.25000E+00	0.60000E+03	0.16236E+04	0.16236E+04

INTERNAL POINTS

X	Y	POTENTIAL
0.25000E+00	0.25000E+00	0.44277E+03
0.50000E+00	0.25000E+00	0.45506E+03
0.75000E+00	0.25000E+00	0.57469E+03
0.25000E+00	0.50000E+00	0.57857E+03
0.50000E+00	0.50000E+00	0.62513E+03
0.75000E+00	0.50000E+00	0.76424E+03
0.25000E+00	0.75000E+00	0.63477E+03
0.50000E+00	0.75000E+00	0.70627E+03
0.75000E+00	0.75000E+00	0.83162E+03

FIGURA 4.12. Temperatura y flujo de calor para los nodos internos y sobre la frontera del Ejemplo 2

En la Tabla 1.4 se muestra una comparación entre los valores de las soluciones obtenidas para el BEM, el FEM y la solución analítica, para los nodos ubicados en la frontera de la placa. En esta tabla sólo se muestra una comparación para los nodos ubicados entre el nodo 9 y el nodo 13, los cuales están ubicados en la tercera cara de la placa, donde para cada método mencionado se calcula el error porcentual correspondiente, respecto a la solución analítica.

En este caso, se tienen nuevas condiciones de contorno diferentes a las condiciones del primer ejemplo, estas nos indican temperatura prescrita de 200 °C, 1000 °C y 600 °C, en tres caras de la placa, específicamente en la primera, segunda y cuarta cara, respectivamente, mientras que en la cara restante, es decir, la tercera, el flujo está prescrito y es igual a cero. Se determinará el valor del potencial en la tercera cara de la placa, donde se involucran los nodos del 9 al 13. La comparación para dichos nodos se presentan en la siguiente tabla,

Coord. Nodos Frontera			Temperatura (°C)			Errores porcentuales	
Nodo	X	Y	BEM	FEM	Sol. Analítica	Error BEM	Error FEM
9	1	1	1000	985,56	998,59	0,14 %	1,30 %
10	0,75	1	847,92	858,55	852,89	0,58 %	0,66 %
11	0,50	1	727,51	741,67	734,13	0,90 %	1,02 %
12	0,25	1	649,11	658,95	653,84	0,72 %	0,78 %
13	0	1	600	609,49	599,15	0,14 %	1,72 %

Tabla 1.4 : Temperaturas en los nodos sin valor prescrito del Ejemplo 2.

En esta tabla se puede apreciar al igual que antes que el error porcentual del BEM es menor al error porcentual del FEM. Para el caso del BEM este error no llega a ser mayor al 0,90 %. Por su parte, para el FEM, el error porcentual toma valores hasta el 1,72 %, por ende, podemos decir que el BEM en este caso se aproxima mejor a la solución analítica que el FEM, lo que resalta las bondades de este método numérico.

Por otra parte, es importante mencionar que los resultados del BEM en los nodos donde la temperatura está prescrita, se observa una muy buena aproximación de los resultados. Esto se debe a la ubicación de dichos nodos sobre la placa, ver Tabla 1.5.

Coordenadas			Temperatura (°C)		
Nodo	X	Y	BEM	FEM	Sol. Analítica
1	0	0	200	305,19	200
2	0,25	0	200	299,47	199,99
3	0,50	0	200	266,94	200,56
4	0,75	0	200	271,53	199,99
5	1	0	200	300,90	200,86
6	1	0,25	1000	933,42	999,99
7	1	0,50	1000	945,04	1002,00
8	1	0,75	1000	961,97	1000
14	0	0,75	600	607,10	600,00
15	0	0,50	600	593,41	601,19
16	0	0,25	600	589,52	599,98

Tabla 1.5 : Temperaturas en los nodos sobre la frontera del Ejemplo 2.

A continuación, se muestran los errores porcentuales para los nodos internos,

Coord. Nodos internos			Temperatura (°C)			Errores porcentuales	
Nodo	X	Y	BEM	FEM	Sol. Analítica	Error BEM	Error FEM
6	0,75	0,50	764,24	761,84	775,98	1,51 %	1,82 %
7	0,25	0,75	634,77	629,59	639,31	0,71 %	1,52 %
8	0,50	0,75	706,27	721,67	712,92	0,93 %	1,22 %
9	0,75	0,75	831,62	819,53	836,92	0,63 %	2,07 %

Tabla 1.6 : Errores porcentuales nodos internos del Ejemplo 2.

En la Tabla 1.6, se observa los errores porcentuales del BEM y del FEM obtenidos para los nodos internos 6, 7, 8 y 9 de la placa, con respecto a la solución analítica. Se aprecia una mayor aproximación del BEM, puesto que en todo momento sus errores porcentuales son menores a los errores obtenidos por medio del FEM.

Por último, las Figuras 4.13 y 4.14 muestran la distribución de temperaturas para tres lados con temperatura conocida y un lado aislado, para el BEM y el FEM, respectivamente.

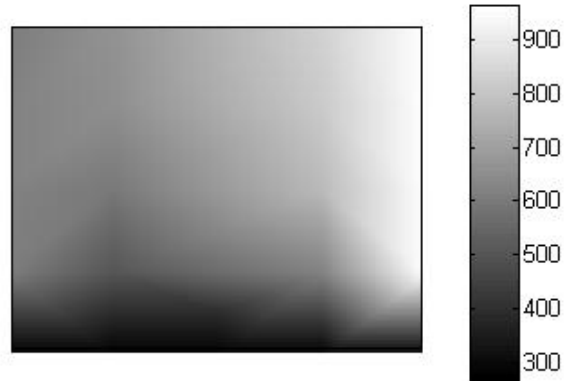


FIGURA 4.13. Distribución de temperatura del Ejemplo 2 obtenida por BEM

La Figura 4.13 muestra la distribución de temperaturas para el segundo ejemplo, en donde se aprecia que la mayor temperatura se ubica hacia el lado derecho de la placa alcanzando los 1000 °C, mientras que la menor temperatura se ubica hacia el lado inferior de la misma. En el resto de la placa se observa una temperatura que oscila entre los 400 °C y 800 °C.

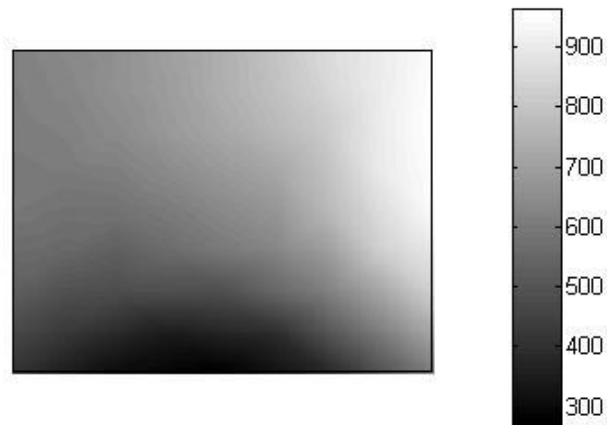


FIGURA 4.14. Distribución de temperatura del Ejemplo 2 obtenida por FEM

Por otra parte, la Figura 4.14 muestra la misma distribución de temperatura a lo largo de la placa, donde al igual que antes la mayor temperatura se ubica hacia el lado derecho de la placa, mientras que la menor temperatura esta en la parte inferior de la misma.

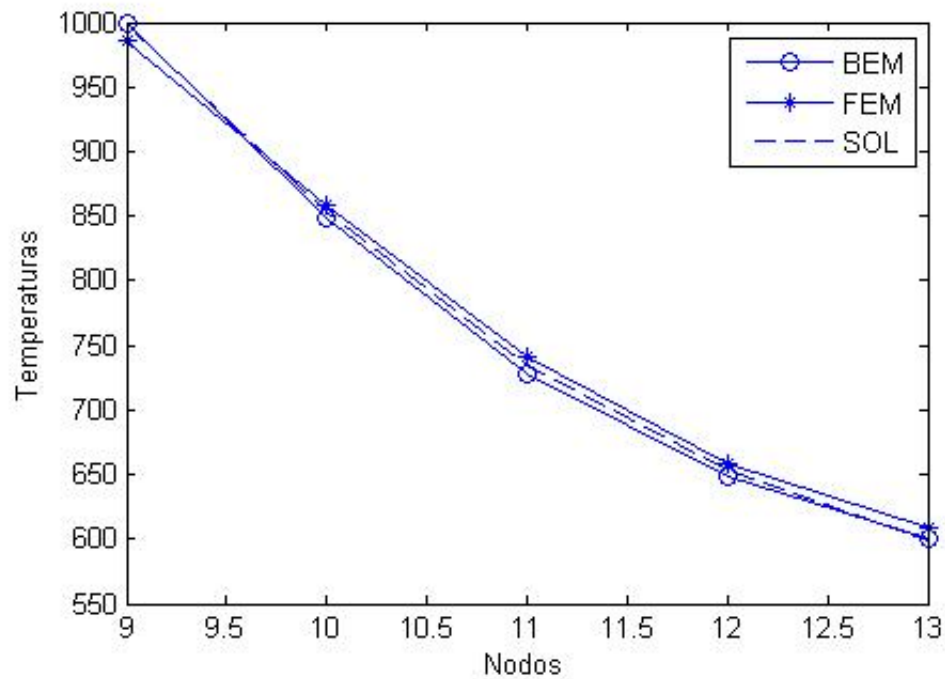


FIGURA 4.15. Resultados numéricos nodos frontera del Ejemplo 2

Luego, las Figuras 4.15 y 4.16 muestran una comparación entre los valores numéricos considerados en las Tablas 1.4 y 1.6, respectivamente, para los nodos sobre la frontera y sobre la región interna de las placas.

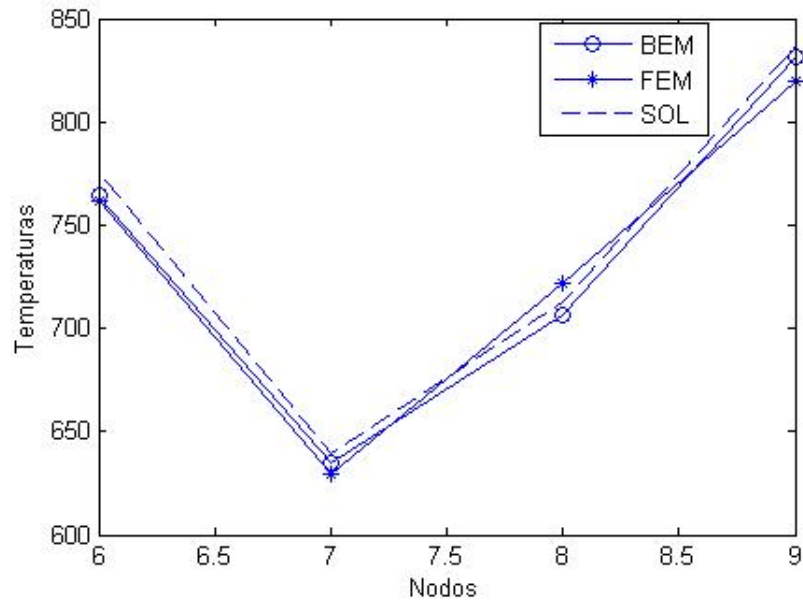


FIGURA 4.16. Resultados numéricos nodos internos del Ejemplo 2

3. Ejemplo 3

Para este caso, se considera como condiciones de borde, dos lados con temperatura conocida y dos lados aislados, los cuales se muestran en la Figura 4.17.

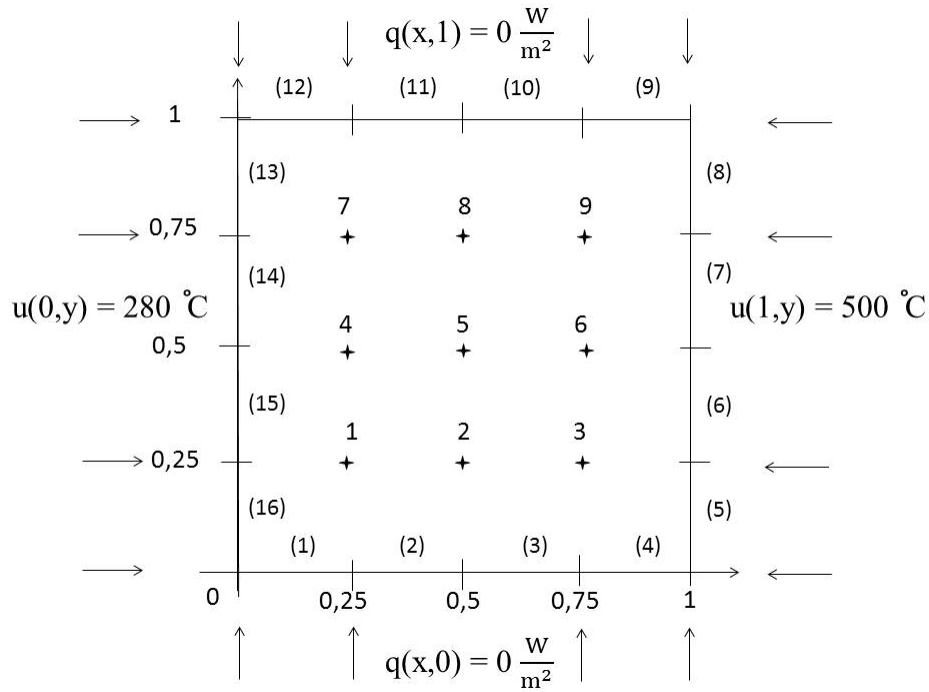


FIGURA 4.17. Condiciones de frontera del Ejemplo 3

Para obtener la solución analítica de este problema, se debe notar que no se tiene flujo de calor en las caras 1 y 3 correspondiente a los nodos en $y = 0$ e $y = H$, respectivamente. Debido a esto, este problema se transforma en un problema unidimensional que sólo dependerá de x , así podemos expresar el problema como sigue,

$$(4.12) \quad \begin{cases} \nabla^2 u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{con } 0 < x < L, \\ u(0) = 280 \text{ } ^\circ\text{C} & \text{y } u(L) = 500 \text{ } ^\circ\text{C}, \end{cases}$$

La solución a este problema viene dado por,

$$u(x) = C_1 x + C_2 \quad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Usando las condiciones de borde, se tiene que,

$$u(0) = C_1(0) + C_2 = 280,$$

así $C_2 = 280$. Luego,

$$u(x) = C_1x + 280.$$

Por otra parte, usando la condición de contorno en $x = L$, se obtiene que,

$$u(L) = C_1(L) + 280 = 500.$$

De esta manera $C_1 = \frac{500 - 280}{L} = \frac{220}{L}$. Por lo tanto,

$$(4.13) \quad u(x) = \frac{220}{L}x + 280,$$

la cual representa la solución analítica para el ejemplo 3.

Los resultados generados por el programa POLINBE, para el tercer ejemplo se muestran en la Figura 4.18.

HEAT FLOW EXAMPLE (16 LINEAR ELEMENTS)

DATA

NUMBER OF BOUNDARY ELEMENTS = 16

NUMBER OF INTERNAL POINTS WHERE THE FUNCTION IS CALCULATED = 9

COORDINATES OF THE EXTREME POINTS OF THE BOUNDARY ELEMENTS

POINT	X	Y
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.25000E+00	0.00000E+00
3	0.50000E+00	0.00000E+00
4	0.75000E+00	0.00000E+00
5	0.10000E+01	0.00000E+00
6	0.10000E+01	0.25000E+00
7	0.10000E+01	0.50000E+00
8	0.10000E+01	0.75000E+00
9	0.10000E+01	0.10000E+01
10	0.75000E+00	0.10000E+01
11	0.50000E+00	0.10000E+01
12	0.25000E+00	0.10000E+01
13	0.00000E+00	0.10000E+01
14	0.00000E+00	0.75000E+00
15	0.00000E+00	0.50000E+00
16	0.00000E+00	0.25000E+00

BOUNDARY CONDITIONS

ELEMENT	-----FIRST NODE-----		-----SECOND NODE-----	
	PRESCRIBED VALUE	CODE	PRESCRIBED VALUE	CODE
1	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
2	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
3	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
4	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
5	0.5000000E+03	0	0.5000000E+03	0
6	0.5000000E+03	0	0.5000000E+03	0
7	0.5000000E+03	0	0.5000000E+03	0
8	0.5000000E+03	0	0.5000000E+03	0
9	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
10	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
11	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
12	0.0000000E+00	1	0.0000000E+00	1
13	0.2800000E+03	0	0.2800000E+03	0
14	0.2800000E+03	0	0.2800000E+03	0
15	0.2800000E+03	0	0.2800000E+03	0
16	0.2800000E+03	0	0.2800000E+03	0

RESULTS

BOUNDARY NODES

X	Y	POTENTIAL	POTENTIAL DERIVATIVE	
			BEFORE NODE	AFTER NODE
0.00000E+00	0.00000E+00	0.28000E+03	-0.22000E+03	0.00000E+00
0.25000E+00	0.00000E+00	0.33500E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.50000E+00	0.00000E+00	0.39000E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.75000E+00	0.00000E+00	0.44500E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.10000E+01	0.00000E+00	0.50000E+03	0.00000E+00	0.22000E+03
0.10000E+01	0.25000E+00	0.50000E+03	0.22000E+03	0.22000E+03
0.10000E+01	0.50000E+00	0.50000E+03	0.22000E+03	0.22000E+03
0.10000E+01	0.75000E+00	0.50000E+03	0.22000E+03	0.22000E+03
0.10000E+01	0.10000E+01	0.50000E+03	0.22000E+03	0.00000E+00
0.75000E+00	0.10000E+01	0.44500E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.50000E+00	0.10000E+01	0.39000E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.25000E+00	0.10000E+01	0.33500E+03	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.10000E+01	0.28000E+03	0.00000E+00	-0.22000E+03
0.00000E+00	0.75000E+00	0.28000E+03	-0.22000E+03	-0.22000E+03
0.00000E+00	0.50000E+00	0.28000E+03	-0.22000E+03	-0.22000E+03
0.00000E+00	0.25000E+00	0.28000E+03	-0.22000E+03	-0.22000E+03

INTERNAL POINTS

X	Y	POTENTIAL
0.25000E+00	0.25000E+00	0.33500E+03
0.50000E+00	0.25000E+00	0.39000E+03
0.75000E+00	0.25000E+00	0.44500E+03
0.25000E+00	0.50000E+00	0.33500E+03
0.50000E+00	0.50000E+00	0.39000E+03
0.75000E+00	0.50000E+00	0.44500E+03
0.25000E+00	0.75000E+00	0.33500E+03
0.50000E+00	0.75000E+00	0.39000E+03
0.75000E+00	0.75000E+00	0.44500E+03

FIGURA 4.18. Temperatura y flujo de calor para los nodos internos y sobre la frontera del Ejemplo 3

En la Tabla 1.7 se muestra una comparación entre los resultados obtenidos mediante el BEM, el FEM y la solución analítica. En esta tabla sólo se encuentra la comparación para los nodos ubicados entre el nodo 1 y el nodo 4 en la primera cara y los ubicados entre el 9 y el 13 en la tercera cara, donde para cada método se calcula el error porcentual correspondiente.

Coord. Nodos Frontera			Temperatura (°C)			Errores porcentuales	
Nodo	X	Y	BEM	FEM	Sol. Analítica	Error BEM	Error FEM
1	0	0	280	298,33	280	0 %	6,54 %
2	0,25	0	335	335	335	0 %	0 %
3	0,50	0	390	390	390	0 %	0 %
4	0,75	0	455	445	445	0 %	0 %
5	1	0	500	481,66	500	0 %	3,66 %
9	1	1	500	481,66	500	0 %	3,66 %
10	0,75	1	445	445	445	0 %	0 %
11	0,50	1	390	390	390	0 %	0 %
12	0,25	1	335	335	335	0 %	0 %
13	0	1	280	298,33	280	0 %	6,54 %

Tabla 1.7 : Temperaturas en los nodos sin valor prescrito del Ejemplo 3.

En la Tabla 1.7 se observa los errores porcentuales de cada método respecto a la solución analítica, siendo el BEM el que mejor aproxima, puesto que sus valores en todo momento coinciden con los obtenidos analíticamente, mientras que el FEM muestra errores porcentuales hasta un 6,54 %.

La comparación respectiva de los errores porcentuales para los nodos internos se presentan en la Tabla 1.8,

Coord. Puntos internos			Temperatura (°C)			Errores porcentuales	
Nodo	X	Y	BEM	FEM	Sol. Analítica	Error BEM	Error FEM
1	0,25	0,25	335	341,11	335	0 %	1,8 %
2	0,50	0,25	390	390	390	0 %	0 %
3	0,75	0,25	445	438,88	445	0 %	1,37 %
4	0,25	0,50	335	335	335	0 %	0 %
5	0,50	0,50	390	390	390	0 %	0 %
6	0,75	0,50	445	445	445	0 %	0 %
7	0,25	0,75	335	341,11	335	0 %	1,8 %
8	0,50	0,75	390	390	390	0 %	0 %
9	0,75	0,75	445	438,88	445	0 %	1,37 %

Tabla 1.8 : Errores porcentuales nodos internos del Ejemplo 3.

En la Tabla 1.8, se aprecia la comparación entre los errores porcentuales obtenidos por el BEM y el FEM respecto a la solución analítica, para los nodos internos de la placa. Se observa un error del 0 % para el BEM, lo que nos indica que sus valores son exactos, mientras que para el FEM, se tienen errores de hasta 1,8 % lo que implica una mayor precisión por parte del BEM.

Las Figuras 4.19 y 4.20 indican la distribución de temperaturas para el tercer ejemplo, para el BEM y el FEM, respectivamente.

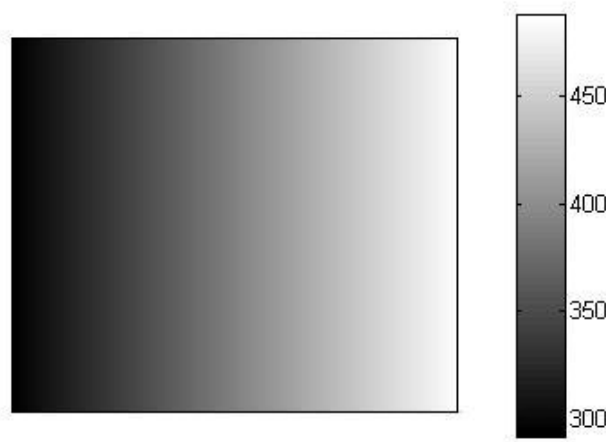


FIGURA 4.19. Distribución de temperatura del Ejemplo 3 obtenida por BEM

La Figura 4.19, muestra la distribución de temperaturas para el ejemplo 3, donde se observa que la misma tiene una variación sobre el eje x , puesto que este problema solo depende de esa variable. Donde la mayor temperatura se ubica hacia el lado derecho con unos $500\text{ }^{\circ}\text{C}$, mientras que la menor temperatura esta sobre el lado izquierdo de la placa alcanzando los $280\text{ }^{\circ}\text{C}$. En el resto de la placa se observa una temperatura que varía entre los $290\text{ }^{\circ}\text{C}$ y los 480°C

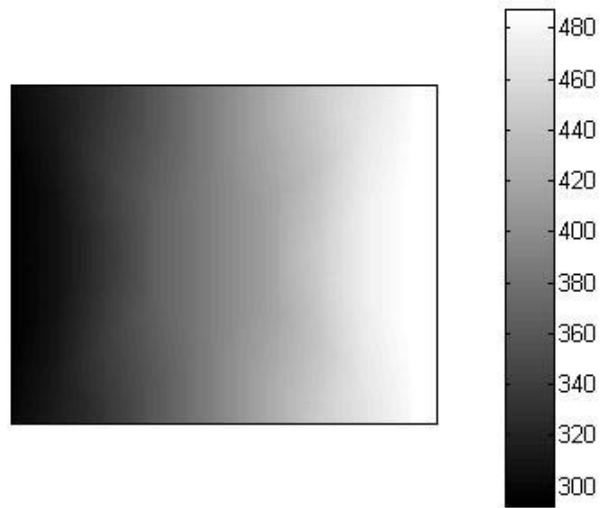


FIGURA 4.20. Distribución de temperatura del Ejemplo 3 obtenida por FEM

Por su parte, la Figura 4.20 muestra la distribución de temperaturas para el caso del FEM. Al igual que en la gráfica anterior se tiene que la mayor temperatura (500 °C) se ubica sobre el lado derecho de la placa, mientras que sobre el lado izquierdo se ubica la menor temperatura (280 °C).

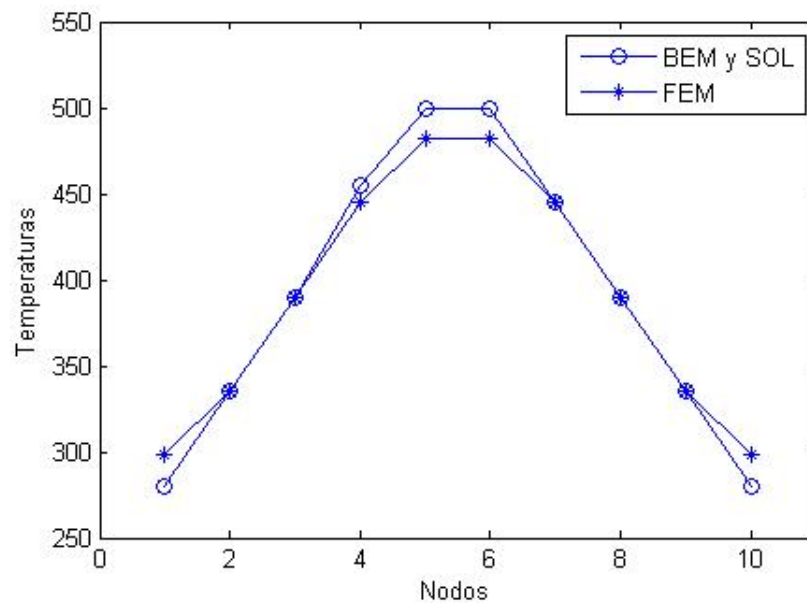


FIGURA 4.21. Resultados numéricos nodos frontera del Ejemplo 3

Finalmente, las Figuras 4.21 y 4.22 muestran una comparación entre los valores numéricos considerados en las Tablas 1.7 y 1.8, respectivamente, tanto para los nodos sobre la frontera como para los nodos internos.

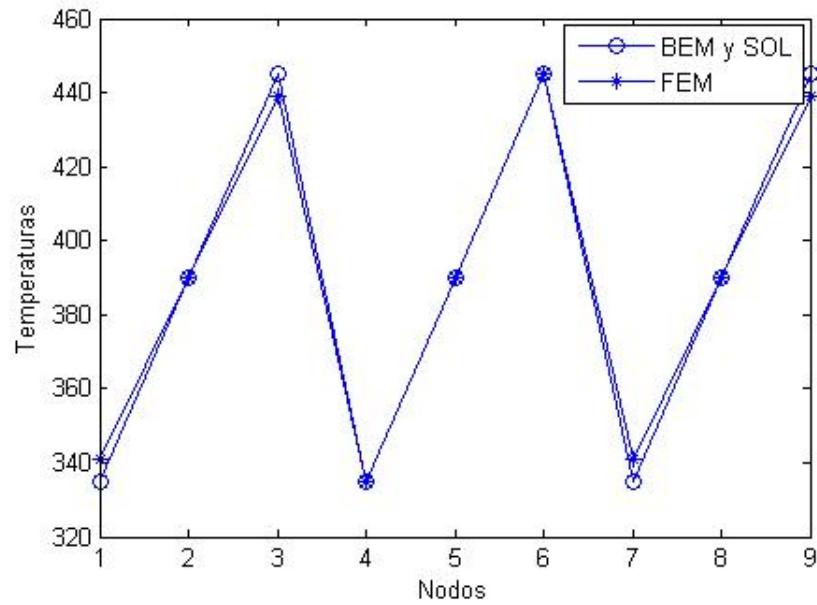


FIGURA 4.22. Resultados numéricos nodos internos del Ejemplo 3

Conclusiones y Recomendaciones

El método de Elemento Frontera (BEM) es un método numérico computacional que surgió como alternativa a otros métodos numéricos, el cual se ha venido desarrollando con cierta rapidez en las últimas dos décadas debido a las grandes bondades que ofrece. Este método nos permite resolver problemas de potencial sólo haciendo una discretización en la frontera de la región a estudiar, lo cual reduce la dimensionalidad del problema, siendo esto último, uno de los principales atractivos de este método, obteniendo así una gran ventaja sobre otros métodos numéricos usados para resolver este tipo de problemas. Otra ventaja del BEM, es que se puede calcular los valores de los flujos de potencial en la frontera del problema estudiado.

En este trabajo se utilizó la ecuación de Laplace para determinar el potencial y el flujo de temperatura sobre una placa cuadrada. Esta ecuación tiene mucha importancia en las simulaciones de muchos problemas. A partir de determinar el operador autoadjunto a la ecuación de Laplace, se obtiene la solución fundamental, que representa una función de Green y se encuentra presente en la ecuación integral asociada a la ecuación diferencial que modela el problema y que nos permite encontrar la solución del mismo al implementar sobre ella el BEM.

El BEM, utilizando elementos lineales, aproxima mejor los resultados para problemas de placas cuadradas variando las condiciones de contorno que el Método de Elemento Finito (FEM). Esto se evidencia en los ejemplos desarrollados en el capítulo 4. En estos ejemplos los errores porcentuales, obtenidos de la comparación del BEM y el FEM con la solución analítica (valor exacto), demuestran una mejor aproximación de los resultados obtenidos por el BEM en comparación con los obtenidos por el FEM. Esto se debe a que para aplicar este método sólo es necesario discretizar la frontera de la región a diferencia del FEM en donde es necesario discretizar todo el dominio. Cabe destacar, también se pueden esperar resultados prometedores al considerar elementos de mayor orden como es el caso de elementos cuadráticos.

La geometría del dominio juega un papel muy importante a la hora de escoger el tipo de elemento a usar para implementar este método, en nuestro caso los tipos de elementos que más se asemejan a nuestra región son los elementos lineales, puesto que con su uso se puede cubrir fácilmente la región considerada. Además, que después de los elementos cuadráticos estos son los elementos que más se adaptan a cualquier geometría de cualquier región a estudiar.

Los métodos numéricos (en particular el BEM), son de gran importancia para la resolución de problemas reales. Dichos métodos, poseen una amplia gama de problemas en donde se pueden utilizar, los podemos implementar cuando el dominio del problema estudiado es irregular, cuando tenemos dominios muy extensos o solo conocemos las condiciones de contorno. Otra gran ventaja del BEM, es que sólo con discretizar la frontera del problema el método nos proporciona soluciones para cualquier punto del dominio, mostrando siempre buenos resultados.

En concordancia a los resultados obtenidos anteriormente, se recomienda el uso de elementos lineales, sobre placas cuadradas, debido a la fácil adaptación de estos elementos sobre la geometría de las mismas.

Por otra parte, también se recomienda el estudio a partir de la implementación del BEM, sobre placas cuadradas mediante el uso de elementos lineales, para obtener los valores del flujo de calor sobre la frontera y puntos internos.

Bibliografía

- [1] Atalay, M. A., Dilara Aydin y E., Aydin, M., *Multi-region heat conduction problems by boundary element method*, Internatinal Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 47, pp. 1549-1553, 2004.
- [2] Brebbia C. y Dominguez J., *Boundary Elements An Introductory Course*, Segunda edición. (Computational Mechanics Publications), 1989.
- [3] Cerrolaza, M. y Gómez L., Sagrario y Alarcón Álvarez, E., *Un nuevo enfoque en elastostática: elementos de contorno p-autoadaptables*. Jornadas en Español y Portugués sobre Estructuras y Materiales, 23/05/1988-27/05/1988, Madrid.
- [4] Dirgantara T., Alibadi M. H., *Application of the boundary element method to the analysis of arbitrary loadings in plate structures*, John Wiley and Sons, Ltd., 2001.
- [5] Dominguez J., *Cálculo de tensiones en las inmediaciones de anclajes. Aplicación del método de los elementos de contorno*, ETSII, 1977, Sevilla, España.
- [6] Enokizono, M., Kagawa, R. y Nakamura T., *Non Linear Analysis of magnetic Field by Boundary Element Method taking into Account External Power Sources*, BEM VII (C. A. Brebbia et al.,Eds.), CM Publications, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 1, 265-321, 1979.
- [7] Fang Y., Huang Y. y Zhang G., *Study on dynamic behaviors of thin assempled plates structure by BEM*, Xián University of Technology, 1972, China.
- [8] Haberman R., *Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno*,(Prentice Hall), 1998.
- [9] Jaswon, M. A., *Integral Equation Methods in Potencial Theory*, I., Proc. R. Soc. Ser. A, 275, 23-32, 1963.
- [10] Mera, N. S., Elliot, L., Ingham, D. B. y Lesnic, D., *Use of the boundary element method to determine the thermal conductivity tensor of an anisotropic medium*, Internatinal Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 44, pp. 4157-4167, 2004.
- [11] Shiah, Y. C., Hwang, Po-Wen, Yang y Ruey-Bin, *Heat Conduction in Multiply Adjoined Anisotropic Media with Embedded Point Heat Sources*, Journal of Heat Transfer, Vol. 128, February, pp. 207-214, 2006.
- [12] Symm, G. T., *Integral Equation Methods in Potencial Theory*, II., Proc. R. Soc. Ser. A, 275, 33-46, 1963.
- [13] Terres H., J.A. Ortega, M. Gordon, J.R. Morales, A. Lizardi y A. Lara., *Método del Elemento Frontera en el estudio de placas sometidas a temperatura*, Memorias del XV Congreso Internacional anual de la Somim, 2009, Cd. Obregón, Sonora, México D.F..

- [14] Rizzo, F.J., *An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 25, 83-95, 1967.
- [15] Rizzo, F.J. y Shippy, D.J., *An Advanced Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Thermoelasticity*, for Numerical Methods in Engineering 11, 1753-1768, 1977.
- [16] Rui D., Zhengyou Z. y Changjun C., *Boundary element method for solving dynamical response of viscoelastic thin plate*, publicado por SU, 1996, Shanghai, China.
- [17] Zhou, J., Yu, A. y Zhang, Y., *A Boundary Element Method for evaluation of the Effective Thermal Conductivity of Packed Beds*, Journal of Heat Transfer, Vol. 129, March, pp. 363-371, 2007.