



Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Centralidad y flujo de información en el control de redes complejas

Br. Raquel Vieira

Caracas, 22 de mayo de 2015

Centralidad y flujo de información en el control de redes complejas

Br. Raquel Vieira

Trabajo Especial de Grado presentado
ante la ilustre Facultad de Ciencias de la
Universidad Central de Venezuela como
requisito parcial para optar al título de:
Licenciada en Física

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por la Br. Raquel Vieira titulado **Centralidad y flujo de información en el control de redes complejas** para optar al título de Licenciada en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

Dr. Pedro García, Tutor

Esteban Álvarez, Jurado

Levi García, Jurado

Caracas, 22 de mayo de 2015

Índice general

1. Sistemas dinámicos	6
1.1. Clasificación de los sistemas dinámicos	7
1.1.1. Sistemas totalmente continuos	7
1.1.2. Sistemas totalmente discretos	7
1.1.3. Sistemas parcialmente discretos	8
1.2. Algunos conceptos de teoría de grafos	9
1.3. Caos en sistemas dinámicos	12
1.4. Redes complejas	15
2. Problema de control	17
2.1. Control de sistemas localizados	17
2.2. Control de sistemas extendidos	18
2.2.1. Control de caos espacio-temporal en una RMA	18
2.2.2. Control localizado de caos espacio temporal	20
2.3. Centralidad en el problema de control	23
2.3.1. Control de redes complejas y centralidad	23
3. Información y transferencia de información	28
3.1. Información en el sentido de Shannon	28
3.2. Estimación de la información y dinámica simbólica	29
3.2.1. Representación simbólica de una órbita caótica	29
3.2.2. Representación Real de Secuencias Simbólicas	30
3.3. Transferencia de información (TI)	32
4. Transferencia de información y centralidad en el problema de control	36
4.1. Controlabilidad en redes de mapas acoplados	37
4.1.1. Detalles de la implementación	38
4.1.2. Resultados para la red homogénea	39
4.1.3. Resultados para las redes dirigidas	42
4.2. Conclusiones	45

Introducción

Muchos sistemas pueden modelarse como *redes*, cuyos elementos constituyentes se representan mediante *nodos* y sus interacciones como *conexiones*. Un conjunto aún mayor de sistemas puede ser modelado utilizando procesos dinámicos sobre estas redes, que son a su vez afectadas por la dinámica interna de los nodos. Así, las redes conforman la columna vertebral de muchos sistemas complejos, cuyo análisis teórico y computacional hace posible el diseño de numerosas aplicaciones. Las redes son un concepto que se aplica en múltiples disciplinas científicas y tecnológicas, como sociología, química, economía y finanzas, biología, etc.

Por su parte, las *redes complejas* pueden definirse como objetos dinámicos con topología y dinámica no triviales, cuya implementación permite entender mejor sistemas reales tales como: sistemas biológicos o químicos acoplados, redes neuronales, especies con interacción social y la Internet. Cuyos patrones de interconexión no son ni puramente regulares ni puramente aleatorios, y exhiben características como: alto coeficiente de clustering, estructura de comunidades o estructura jerárquica, no presentes en los modelos matemáticos similares que se han estudiado en el pasado.

La presencia de comportamientos indeseables en estos sistemas, motiva el estudio de *estrategias de control* sobre redes complejas. Actualmente, este es un problema abierto.

En muchos casos no es factible, ni necesario, controlar toda la red para eliminar dichos comportamientos indeseables. De modo que es importante explorar esquemas de control eficientes, que perturben solo un subconjunto de nodos adecuadamente seleccionados (*pinnings* o *sitios de pinning*). Siendo necesario cuantificar alguna característica que los diferencia del resto (construir un criterio de *centralidad*). Sin embargo, la selección de los *pinnings* y el cálculo de la perturbación necesaria para alcanzar el control, son problemas que han sido tratados separadamente en la bibliografía consultada.

En este trabajo, se propone un *esquema de control* basado en la *transmisión de información* entre las partes del sistema (una cantidad que depende de la estructura de la red y su dinámica local) como criterio de centralidad.

Con ese objetivo, se ha dividido el trabajo en cuatro capítulos:

- En 1, se definen los sistemas dinámicos, una clasificación general de los mismos y las distintas maneras de representarlos.
- En 2, se define el problema de control general y en el caso de interés. Además de discutirse el concepto de centralidad en el problema de control, las fortalezas y debilidades de algunos criterios que se utilizan en la actualidad y que sirven de motivación para este trabajo.
- En 3, se discuten los conceptos de información en el sentido de Shannon y como se transmite, consolidando las bases de la hipótesis.
- Finalmente, en 4, se propone un criterio de centralidad que enlaza los conceptos revisados con anterioridad, el método seguido para verificar la hipótesis y los resultados obtenidos.

Capítulo 1

Sistemas dinámicos

Entiéndase por *sistema dinámico*, a la formulación matemática de un proceso determinista. La teoría que los agrupa ofrece una manera unificada de representar y caracterizar la evolución de sistemas que aparecen en múltiples contextos.

Se pueden representar a través de la *notación vectorial* [22], que provee un eficiente marco de trabajo para el desarrollo computacional y teórico. Dicha representación viene dada en términos de la cuarteta:

$$\{\mathbf{X}, \mathbf{R}, \mathbf{T}, \hat{f}\} \quad (1.1)$$

Donde:

- I. \mathbf{X} es el ESPACIO DE FASE, se refiere al conjunto de estados alcanzables por el sistema. Un estado denotado por $\mathbf{x}(t)$ o equivalentemente \mathbf{x}^t , es un vector de k componentes (tantas como información se requiera para dar una descripción completa del sistema) perteneciente a \mathbf{X} .
- II. \mathbf{R} es el ESPACIO, que puede ser *continuo* $\mathbf{R} \subset \mathbb{R}^L$ o *discreto* $\mathbf{R} \subset \mathbb{Z}^L$. Asimismo, si el estado \mathbf{x}^t depende explícitamente de \mathbf{R} , al sistema se le llama *extendido*, en caso contrario, recibe el nombre de *localizado*.
- III. \mathbf{T} es el TIEMPO, que igualmente puede ser *continuo* $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}$ o *discreto* $\mathbf{T} \subset \mathbb{N}$ o \mathbb{Z} .
- IV. \hat{f} es la REGLA DE EVOLUCIÓN, una función (o conjunto de funciones) que mapea el espacio de estados en sí mismo:

$$\begin{aligned} \hat{f} : \quad \mathbf{X} &\rightarrow \mathbf{X} && \text{en el caso de los sistemas localizados} \\ \hat{f} : \quad \mathbf{X} \otimes \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{X} && \text{en el caso de los sistemas extendidos} \end{aligned}$$

Y cuya aplicación genera la secuencia de estados que recorre el sistema:

$$\mathbf{x}^{t+1} = \hat{f}\mathbf{x}^t \quad (1.2)$$

1.1. Clasificación de los sistemas dinámicos

De acuerdo al tipo de espacio que sean \mathbf{X} , \mathbf{R} y \mathbf{T} , es posible categorizar los sistemas dinámicos como sigue [31]:

1.1.1. Sistemas totalmente continuos

La formulación de modelos basados en ecuaciones diferenciales se inicia con la Mecánica Newtoniana y actualmente sigue siendo la manera más utilizada en física para representar sistemas. Por ejemplo:

Sistemas de ecuaciones en derivadas parciales (EDP)

Cuyo espacio de fases \mathbf{X} es continuo y de dimensión infinita (ya que es un espacio de funciones). \mathbf{R} y \mathbf{T} también son continuos.

Demuestran la relación entre una función \hat{f} desconocida, ciertas variables independientes y sus derivadas parciales asociadas. Generalmente, en conjunto con condiciones iniciales o de frontera. Su resolución provee herramientas para reconstruir sistemas reales con alto detalle, usualmente enlazando con otros EDP previamente derivados. De modo que no sólo permiten simular un fenómeno, también proporcionan explicaciones potenciales acerca de la física del problema original.

Casos resaltantes incluyen la ecuación de onda, la ecuación del calor (lineales), y las ecuaciones de Navier-Stokes (no lineales).

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Con \mathbf{X} (de dimensión finita) y \mathbf{T} continuos, y \mathbf{R} discreto.

Una EDO de orden k relaciona los valores de una función desconocida (de una variable) \hat{f} , y sus derivadas hasta el orden k . Representan sistemas localizados ya que el estado no depende de las variables espaciales.

Ejemplos incluyen la ecuación de Bessel (de segundo orden, $k = 2$) y la ecuación de Ricatti (de primer orden, $k = 1$).

1.1.2. Sistemas totalmente discretos

Un ejemplo resaltante es el caso de los **Autómatas celulares (AC)**, propuestos por von Neumann en la década de los 50. Poseen \mathbf{X} , \mathbf{R} y \mathbf{T} discretos (comúnmente pertenecientes a los naturales).

Son sistemas extendidos compuestos de un arreglo de L celdas dispuestas de forma regular. Cada una es actualizada de forma sincronizada por un conjunto de k reglas \hat{f}_k que

toman en cuenta tanto el estado de la propia celda como la configuración de su vecindad v , de la forma:

$$\hat{f}_k : \mathbf{X} \otimes \mathbf{R}^v \rightarrow \mathbf{X}$$

Algunos ejemplos de AC famosos son el juego de la vida de Conway y la hormiga de Langton.

1.1.3. Sistemas parcialmente discretos

Representan el punto intermedio de los casos anteriores, algunos modelos con \mathbf{R} y \mathbf{T} discretos, y \mathbf{X} continuo son:

Mapas

Son sistemas localizados cuya regla de evolución viene dada por una función determinista \hat{f} , siendo la trayectoria del sistema:

$$\mathbf{x}^{t+1} = \hat{f}(\mathbf{x}^t)$$

Entonces un \mathbf{x}^0 en un tiempo n será el resultado de la n -ésima composición de \hat{f} . Se utilizará a partir de ahora la siguiente notación:

$$\hat{f}^n(\mathbf{x}^0) \equiv \underbrace{\hat{f} \circ \hat{f} \circ \dots \circ \hat{f}}_n(\mathbf{x}^0) = \hat{f}(\hat{f}(\dots(\hat{f}(\mathbf{x}^0)))) = \mathbf{x}^n$$

El ejemplo más estudiado es el mapa logístico dado por:

$$\hat{f} \equiv f(x) = ax(1-x) \quad a \in [0, 4] \quad x \in [0, 1] \quad (1.3)$$

Que es el caso representativo de una gran cantidad de mapas unidimensionales (estructuralmente universal), capaz de generar dinámicas muy ricas y de ser analizado por múltiples herramientas matemáticas (aunque no es del todo entendido aún). Como dato curioso, el mapa logístico con parámetro $a = 4$ fue el primer mapa caótico estudiado por Ulam y von Neumann en 1947, más información en la sección §1.3.

Sistemas de funciones iteradas (SFI)

En este caso existe un conjunto de reglas de evolución \hat{f}_α indexadas por un parámetro α , a las que se les asigna una distribución de probabilidad. Nuevamente, la trayectoria viene dada por la composición de la función, sólo que ahora se escoge al azar del conjunto de reglas posibles. El resultado de su computación suele ser un fractal.

Algunos ejemplos populares son el helecho de Barnsley y el triángulo de Sierpinski.

Redes de mapas acoplados (RMA)

Introducidos por Kaneko [17] a finales de la década de los 80. Son sistemas extendidos compuestos de una secuencia de L **mapas** acoplados a sus vecinos inmediatos mediados por un parámetro ε . La trayectoria del sistema es dada por la iteración de una función vector valuada:

$$\mathbf{x}^{t+1} = \hat{F}(\mathbf{x}^t)$$

Los RMA son capaces de generar múltiples comportamientos dependiendo de los parámetros internos de la función \hat{F} , como turbulencia, intermitencia, ondas viajeras, segregación de fases, formación de patrones y otros comportamientos colectivos emergentes que no pueden ser explicados a partir del comportamiento de uno de los elementos del sistema.

1.2. Algunos conceptos de teoría de grafos

Una alternativa a la representación vectorial, que resulta útil para visualizar la estructura de los sistemas extendidos y facilita el planteamiento de problemas muy variados es la proveniente de la *teoría de grafos*. A continuación, un sumario de algunos conceptos de esta teoría que serán de utilidad para desarrollo de este trabajo.

Se denomina *grafo* (simbolizado por \mathcal{G}) a la dupla ($[3],[25]$):

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{C}\} \quad (1.4)$$

Donde:

- i. \mathcal{N} , es un conjunto no vacío, cuyos elementos llevan el nombre de **vértices** (o nodos, o puntos), estos representan las distintas partes del sistema dinámico que se está describiendo. Usualmente un nodo es referido por su orden i en el conjunto \mathcal{N} . El número de elementos en \mathcal{N} se denota por L .
- ii. \mathcal{C} , es un conjunto de **aristas** (o conexiones), que representan las relaciones entre las partes del sistema. Todo enlace es un par ordenado (n_i, n_j) de vértices n_i y $n_j \in \mathcal{N}$. Si un vértice conecta con un nodo n_i se dice que es incidente a este. Dos nodos unidos por un enlace son *adyacentes*. Es posible definir conexiones de un nodo a sí mismo (n_i, n_i) denominadas lazos (o loops en inglés).

Dependiendo de sus enlaces existen dos tipos de grafos, *dirigidos* y *no dirigidos*, en el primer caso el orden de los vértices que conforman cada par es importante, siendo n_i el nodo inicial y n_j el nodo final.

Una propiedad relevante de cada vértice es su *grado*, denotado por d_i , definido como el número de conexiones que posee el nodo i -ésimo con otros nodos pertenecientes a \mathcal{G} . Para un grafo dirigido, es igual a la suma de conexiones entrantes (in degree d_i^{in}) y salientes (out degree d_i^{out}) de él:

$$d_i = d_i^{\text{in}} + d_i^{\text{out}} \quad (1.5)$$

Un nodo con grado igual a cero se denomina aislado y no forma parte del sistema.

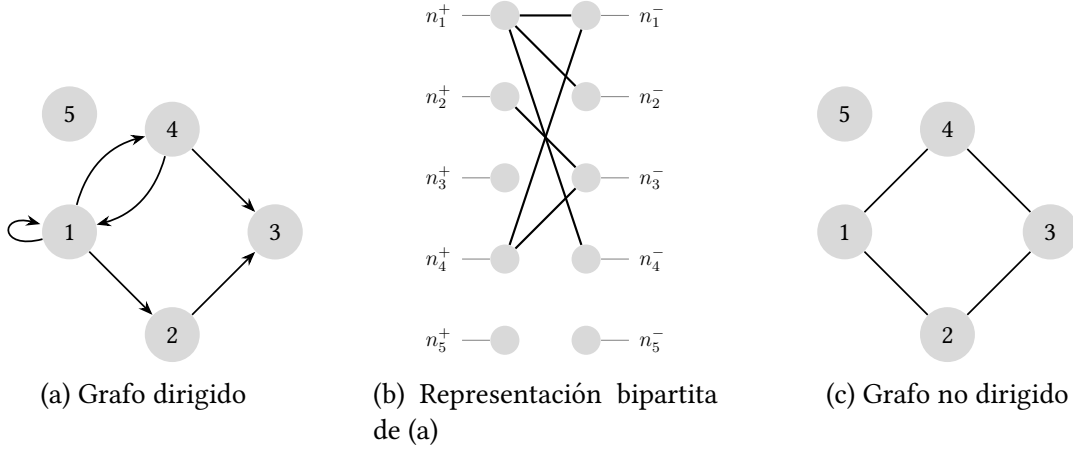


Figura 1.1: Ejemplos de grafos con $L = 5$

Una manera alternativa de visualizar los grafos dirigidos es con la *representación bipartita* [19]. En este caso, se crean dos columnas, designadas por $+$ (equivalente a las salidas de los nodos originales) y $-$ (equivalente a las entradas de los vértices de grafo original).

Una arista (n_i, n_j) del grafo original pasa a ser (n_i^+, n_j^-) en la representación bipartita.

En el grafo ilustrado en la fig. 1.1a se tiene que:

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \mathcal{C} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 3), (4, 1), (4, 3)\}$$

Este grafo posee cinco nodos y seis aristas. El nodo n_5 está aislado ya que no está conectado con ningún otro vértice de \mathcal{G} . Los grados de los nodos son respectivamente:

$$\begin{aligned} d_i^{\text{in}} &= \{2, 1, 2, 1, 0\} \\ d_i^{\text{out}} &= \{3, 1, 0, 2, 0\} \\ d_i &= \{5, 2, 2, 3, 0\} \end{aligned}$$

En cambio el grafo de fig. 1.1c al ser no dirigido, no admite lazos y sus conexiones carecen de dirección. De modo que el orden de los nodos en \mathcal{C} es indistinto:

$$(n_i, n_j) = (n_j, n_i)$$

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \mathcal{C} = \{(1, 4), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$$

Cuyos grados son: $d_i = \{2, 2, 2, 2, 0\}$

Sin embargo, para especificar las aristas es poco común proporcionar explícitamente el conjunto \mathcal{C} (es poco práctico computacionalmente), en cambio, nos servimos de distintas matrices que permiten dilucidar propiedades no evidentes del sistema. Algunas matrices resultantes son:

Matriz de adyacencia

Denotada por $\tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}$, dado un grafo \mathcal{G} será una matriz booleana de dimensiones $L \times L$, donde el elemento de matriz \tilde{a}_{ij} es:

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si los nodos } n_i \text{ y } n_j \text{ están conectados o } (n_i, n_j) \in \mathcal{C} \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Una asociación visual entre la matriz de adyacencia y la representación bipartita de \mathcal{G} es la siguiente:

$$\begin{array}{c} \textcircled{n_1^+} \\ \vdots \\ \textcircled{n_L^+} \end{array} \left(\begin{array}{ccc} \textcircled{n_1^-} & \cdots & \textcircled{n_L^-} \\ \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{L1} & \cdots & \tilde{a}_{LL} \end{array} \right)$$

La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido es simétrica y su traza es cero (no admite lazos).

De la matriz de adyacencia es fácil calcular los grados de cada nodo:

$$d_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^L \tilde{a}_{ij} \quad d_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^L \tilde{a}_{ji} \quad d_i = d_i^{\text{in}} + d_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^L \tilde{a}_{ij} + \tilde{a}_{ji}$$

Para los grafos ilustrados en la fig. 1.1 se tiene:

$$\tilde{A}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de \tilde{A} es fácil construir el conjunto \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} = \{ (n_i, n_j) \mid n_i, n_j \in \mathcal{N} \text{ y } \tilde{a}_{ij} \neq 0 \text{ con } i, j = 1, \dots, L \}$$

Matriz de grado

Denotada por \tilde{D} , es una matriz diagonal de dimensiones $L \times L$ definida como:

$$\tilde{D} \equiv \text{diag}(d_1, \dots, d_i, \dots, d_L)$$

Donde d_i es el grado del nodo i -ésimo (ver ec. 1.5).

La matriz de grado de los grafos definidos anteriormente es:

$$\tilde{D}(a) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{D}(b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz laplaciana

También llamada matriz de Kirchhoff, o matriz de admitancia, denotada por \tilde{L} , se define como:

$$\tilde{L} \equiv \tilde{D} - \tilde{A}$$

Es de interés su versión normalizada $\tilde{\mathcal{L}} = \{\tilde{\ell}_{ij}\}$ que se obtiene efectuando el producto matricial: $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{D}^{-1/2} \tilde{L} \tilde{D}^{-1/2}$ (revisar [5], §1.2 para más detalles):

$$\begin{aligned} \{\tilde{\ell}_{ij}\} &= (d_i \delta_{ir})^{-1/2} \tilde{L}_{rs} (d_s \delta_{sj})^{-1/2} = (d_i d_s)^{-1/2} \tilde{L}_{rs} \delta_{ir} \delta_{sj} = (d_i d_j)^{-1/2} \tilde{L}_{ij} \\ &= (d_i d_j)^{-1/2} (d_i \delta_{ij} - \tilde{a}_{ij}) \end{aligned}$$

De modo que los distintos valores que puede tener el elemento de matriz son:

$$\tilde{\ell}_{ij} = \begin{cases} 1 - \frac{\tilde{a}_{ii}}{d_i} & \text{si } i = j \text{ y } d_i \neq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{d_i d_j}} & \text{si } i \text{ y } j \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases} \quad (1.7)$$

La matriz laplaciana normalizada de los grafos definidos anteriormente es:

$$\tilde{\mathcal{L}}(a) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{15}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathcal{L}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3. Caos en sistemas dinámicos

A diferencia de los sistemas puramente deterministas o puramente estocásticos que residen mayormente en la teoría, los sistemas caóticos son muy comunes, por ejemplo:

- Sistemas localizados continuos con dos, o más grados de libertad o en sistemas localizados discretos de cualquier dimensión.

En una dimensión sólo pueden presentar comportamiento estacionario o explosivo. En dos dimensiones, el teorema de Poincaré-Bendixson predice comportamientos estacionarios o periódicos. En el caso discreto es suficiente una dimensión para encontrar sistemas que presenten caos.

- Sistemas no lineales.
De ser localizados únicamente pueden presentar un comportamiento oscilatorio o de relajación. Sin embargo, en un sistema extendido y discreto es posible encontrar comportamientos complejos; tal es el caso de los autómatas celulares de clase III.
- Sistemas conservativos o disipativos, el comportamiento caótico está asociado a un atractor extraño.

Surgen complicaciones al abordar sistemas reales (entiéndase por sistema real a un sistema en astronomía, economía, neurología, cardiología, ecología, etc.), debido a factores como presencia de ruido o desconocimiento de las reglas de evolución exactas.

Para ilustrar lo frecuente que puede ser la aparición de comportamientos complejos en sistemas reales y de lo útil que puede ser la teoría de sistemas dinámicos para caracterizarlos, a continuación se muestran algunos ejemplos [26]:

- **Astronomía y astrofísica**, en [6] el autor realiza una revisión de las aplicaciones de la teoría del caos en varias ramas de la astronomía.
- **Cardiología**, [15] aplican con éxito técnicas de control de caos en el control de arritmias inducidas en tejido cardíaco de conejo. Por su parte en el artículo de revisión [4] los autores discuten la aplicación de herramientas de la teoría de sistemas dinámicos en la caracterización de la presión arterial sistémica y los efectos que se producen, en el exponente de Lyapunov y en la dimensión fractal, cuando los mecanismos de control de corto alcance (barorreflejos) son suprimidos.
- **Ecología**, en [2] los autores afirman presentar la primera demostración experimental de caos en una red alimenticia aislada del Mar Báltico, constituida por bacterias, varias especies de fitoplancton, zooplancton y saprófagos. Al realizar un muestreo continuo hallaron fluctuaciones impredecibles en la disponibilidad de las especies pertenecientes a la red. La dinámica de la abundancia de las especies fue caracterizada por exponentes de Lyapunov positivos de magnitud similar para cada especie.
- **Neurología**, en [32] los autores calculan la dimensión de correlación y los exponentes de Lyapunov para caracterizar señales electroencefalográficas de individuos durante la realización de diversas tareas y concluyen entre otras cosas que la actividad del cerebro humano ocurre dentro de un atractor con dimensión no entera. En [27], los autores identifican en un red neuronal *in vitro* las variedades estable e inestable en la cercanías de un punto fijo inestable asociado a la actividad neuronal de la muestra y concluyen que la actividad neuronal en este caso tiene un comportamiento caótico.

Hasta los momentos no existe una definición globalmente aceptada de caos [13], sin embargo si se ha determinado que un sistema es caótico, suele haber consenso en la comunidad científica. Se puede visualizar como un comportamiento aparentemente aleatorio que presenta un sistema determinista [30]. Esto quiere decir, que existen trayectorias que no convergen a puntos estables u órbitas periódicas cuando $t \rightarrow \infty$, a pesar de que el sistema no es cuasi periódico, ni tiene parámetros internos aleatorios o ruido. De modo que la emergencia de órbitas complejas se debe a la no linealidad de su evolución.

Desde un punto de vista más formal [7], una función $\hat{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ será caótica si cumple con las siguientes condiciones:

1) Depende sensiblemente de las condiciones iniciales.

Una función \hat{f} posee esta propiedad si existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ y cualquier vecindad \mathbf{V} de \mathbf{x} , existe un $\mathbf{x}' \in \mathbf{V}$, de modo que para $n \geq 0$:

$$|(\hat{f}^n(\mathbf{x}) - \hat{f}^n(\mathbf{x}')| > \delta$$

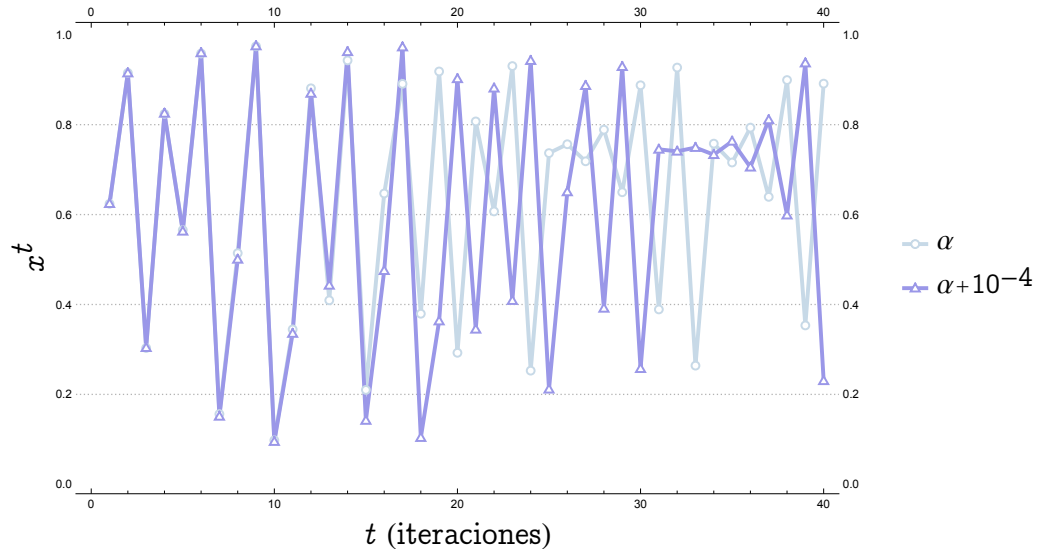


Figura 1.2: Sensibilidad a las condiciones iniciales para el mapa logístico con $a = 4$

Por ejemplo, si se evalúa \hat{f} en dos condiciones iniciales tan cercanas como se desee, trayectorias que inicialmente eran muy próximas se separarán en un número finito de iteraciones, como se observa en (fig. 1.2).

2) Es topológicamente transitiva o equivalentemente tiene un conjunto denso de órbitas periódicas inestables.

La definición formal de transitividad topológica indica que dados dos subconjuntos del espacio de fase denominados \mathbf{A} y \mathbf{B} (ambos distintos de vacío), existe un $\alpha \in \mathbf{A}$ tal que al aplicar la regla de evolución n veces (n finito), $(\hat{f}^n(\alpha) \in \mathbf{B})$.

De modo que el sistema es indivisible, no es posible aislar subconjuntos del espacio de fase. Esta propiedad se conoce también como *mixing* o mezclado.

Alternativamente, dado un ordenamiento de los estados del sistema y dos de esos estados arbitrarios, siempre hay otro estado entre ellos que es un elemento de una órbita periódica inestable. Por otra parte, si posee un conjunto denso de órbitas periódicas inestables, al hacer tender el tiempo a infinito se obtiene el intervalo completo. Garantizando que no hay estados inalcanzables en \mathbf{X} , esto es, partiendo de una condición inicial cualquiera \mathbf{x}^0 se puede llegar tan cerca como se desee de un \mathbf{x}' particular siempre y cuando esté contenido en el espacio de fase. Una ilustración de estas propiedades se encuentra en (fig. 1.4).

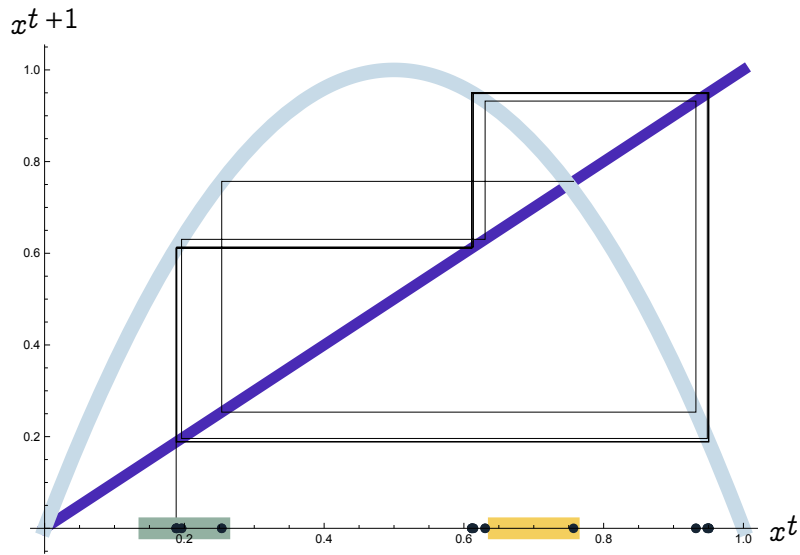


Figura 1.3: Mezclado en el mapa logístico: una condición inicial en A (intervalo azul) luego de pocas iteraciones termina en B (intervalo verde)

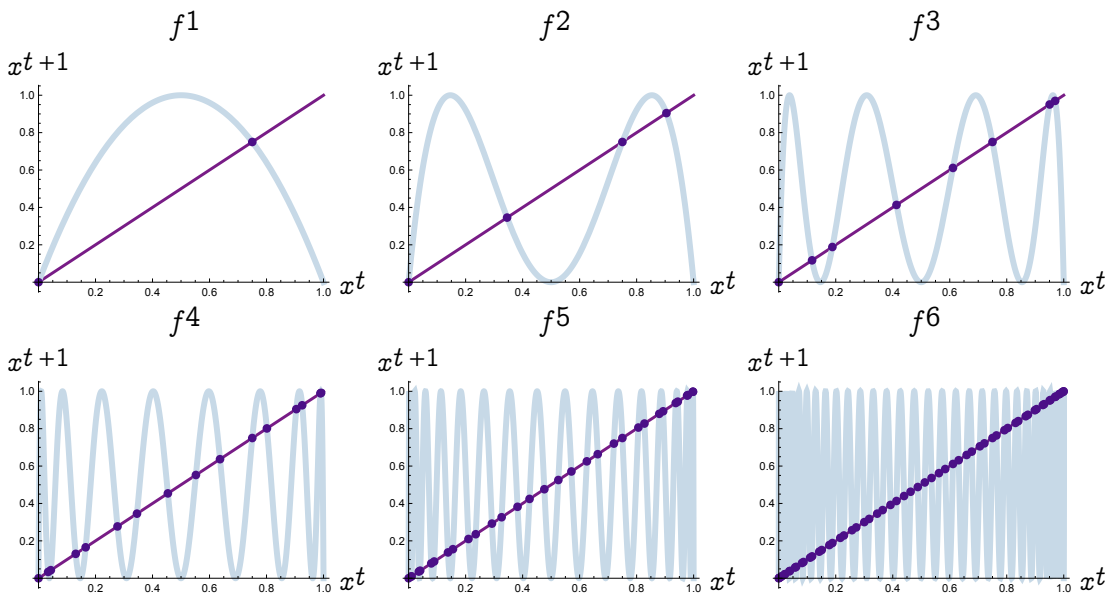


Figura 1.4: Las primeras seis composiciones del mapa logístico con $a = 4$

1.4. Redes complejas

Una gran variedad de sistemas dinámicos pueden ser representados por redes. Las redes se componen de L unidades similares entre sí, dichas unidades están interconectadas e interactúan a través de dichas conexiones. Asimismo, poseen una dinámica interna compleja. De modo que la evolución del sistema es una mezcla de la dinámica local y la interacción de cada elemento con otros nodos a los que esté conectado.

Son modelos muy utilizados para estudiar fenómenos complejos en física, ingeniería,

química, biología, epidemiología o ciencias sociales [30].

Particularmente, nos serviremos del modelo de red compleja planteado por Jalan y Amritkar [16] donde la dinámica del nodo i -ésimo viene dada por:

$$x_i^{t+1} = (1 - \varepsilon)f(x_i^t) + \frac{\varepsilon}{d_i^{\text{in}}} \sum_j^L \tilde{a}_{ij} f(x_j^t) \quad (1.8)$$

Donde d_i^{in} es el número de conexiones entrantes, el elemento de matriz \tilde{a}_{ij} esta definido en la ec. 1.6 y ε como parámetro de acople real.

Entenderemos por redes complejas, las redes de mapas caóticos acoplados con comportamientos aperiódicos complejos similares a los de evolución aleatoria. Adicionalmente, estas redes tienen la capacidad de presentar comportamientos colectivos emergentes que no pueden ser deducidos a partir del comportamiento de sus componentes, tales como: sincronización espontánea, formación de patrones, segregación de fases, etc.

Cuando los elementos de la red son mapas caóticos, la complejidad del sistema puede asociarse a la dinámica local, a la complejidad de los acoples o a una mezcla de ambas.

Capítulo 2

Problema de control

Control se refiere a la actividad continua a lo largo del tiempo de operación del sistema que consiste en afectar su comportamiento a partir de un conjunto de manipulaciones adecuadas del mismo para llevarlo de un estado arbitrario a un estado predeterminado.

Un problema de control, puede ser dividido en tres partes:

- i. Definición del objeto de control.
- ii. Definición del objetivo de control.
- iii. Determinación del esquema de control.

Una premisa del problema de control es que la perturbación debe ser lo más pequeña posible. En el caso de sistemas extendidos el problema de cálculo de la perturbación tiene dos componentes: la intensidad de la perturbación y donde esta es aplicada. En el caso de sistemas discretos espacialmente minimizar la perturbación está relacionado con minimizar el número de sitios donde esta es aplicada.

2.1. Control de sistemas localizados

Cuando el objeto de control es un sistema caótico, paradójicamente las mismas características que hacen a estos sistemas impredecibles a largo plazo, facilitan el diseño de estrategias de control. Por una parte densidad de orbitas periódicas inestables en el atractor del sistema ofrece infinitas posibilidades para escoger el objetivo de control y por otra, la sensibilidad a las condiciones iniciales permite inducir cambios grandes en el sistema, usando perturbaciones pequeñas.

En el caso particular de sistemas caóticos localizados, los esquemas de control pueden dividirse, de manera muy general en dos grandes grupos. Los que perturban los parámetros de sistema y los que perturban el estado del sistema. Los esquemas desarrollados por Ott, Gebogi y York[8] y Pyragas[24] son los ejemplos canónicos de cada clase. Desde su aparición, ambas estrategias han sido versionadas y adaptadas a situaciones diferentes, ver por ejemplo [29], sin embargo la extensión de esas metodologías a sistemas con muchos grados de libertad continua siendo un problema abierto.

2.2. Control de sistemas extendidos

A continuación los artículos seminales del problema de control localizado de sistemas extendidos discretos, donde se proponen estrategias de control lineales para redes de mapas caóticos con acople difusivo (regular). Se presentan los puntos de partida de los autores, el desarrollo general de cada esquema, sus resultados y limitaciones.

2.2.1. Control de caos espacio-temporal en una RMA

En [9], los autores consideran la red de mapas acoplados propuesta por [17] y plantean un esquema de control por retroalimentación al que denominaron *Feedback Pinning Control*, con el objetivo de llevar la red a una órbita de referencia inestable (ej. el punto fijo del mapa logístico para ciertos valores del parámetro interno) o en su defecto suprimir el comportamiento caótico del sistema.

Utilizando del modelo:

$$x_i^{t+1} = (1 - \varepsilon)f[x_i^t] + \frac{1}{2}\varepsilon\{f[x_{i-1}^t] + f[x_{i+1}^t]\} \quad (2.1)$$

Donde:

- $i = 1, \dots, L$ son los índices de la red, siendo L igual a la cantidad total de elementos.
- x_i^t representa la i -ésima celda de la red en un tiempo t
- Se consideran condiciones de frontera periódicas: $x_i^t = x_{i+L}^t$
- El estado futuro del elemento i -ésimo depende del estado presente del mismo y el de sus dos vecinos inmediatos, modulados por un parámetro de *intensidad de acople* ε .
- $f[\cdot]$ es la dinámica interna de cada nodo. Un caso particular el mapa logístico (ec. 1.3), cabe destacar que el método es independiente de esta escogencia.

El esquema de control consiste en seleccionar m nodos ($m < L$) dispuestos de manera periódica a una distancia I entre sí. A estos elementos se les denominará *pinings* y sobre estos se aplicará una retroalimentación en cada iteración del mapa. Esta perturbación debe ir disminuyendo a medida que se llega a la meta, y no debe desnaturalizar el comportamiento general del sistema.

La evolución de la red (2.1) pasa a convertirse en:

$$x_i^{t+1} = (1 - \varepsilon)f[x_i^t] + \frac{1}{2}\varepsilon\{f[x_{i-1}^t] + f[x_{i+1}^t]\} + \sum_{k=0}^{L/I} g_i^t \delta_{i-Ik-1,1} \quad (2.2)$$

La delta de Kronecker $\delta_{i-Ik-1,1}$ aplica la perturbación g_i^t solamente en los sitios de pinning seleccionados y es de la forma:

$$g_i^t = (1 - \varepsilon)p_i^t x_i^t \Delta_i^t + \frac{1}{2}\varepsilon\{p_{i-1}^t x_{i-1}^t \Delta_{i-1}^t + p_{i+1}^t x_{i+1}^t \Delta_{i+1}^t\} \quad (2.3)$$

Donde $\Delta_i^t = x_i^t - \bar{x}_i^t$ es la distancia entre el estado actual del elemento i -ésimo y la meta \bar{x}_i^t

El término p^t representa la *intensidad de la perturbación*, no hay un criterio particular para asignarle valores a p^t , que puede variar tanto espacial como temporalmente. Una mala escogencia puede ocasionar overflow, aumentar el número de iteraciones necesarias para alcanzar el objetivo o que este no se alcance en lo absoluto. Para mostrar la efectividad del esquema es posible reproducir los dos ejemplos mostrados en el artículo:

Estado final homogéneo

Se busca que todos los nodos lleguen al estado estacionario:

$$\bar{x}_i^t = x^* = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \quad (2.4)$$

Estado final periódico (espacialmente)

En este caso la meta es el estado estacionario inhomogéneo:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{2j-1}^t &= \frac{B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2a(a\varepsilon - 1)} \\ \bar{x}_{2j}^t &= \frac{B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2a(a\varepsilon - 1)} \quad j = 1, \dots, \frac{L}{2} \end{aligned}$$

Donde: $B = 1 - a + 2a\varepsilon$ y $C = \varepsilon - a\varepsilon - 2a\varepsilon^2$

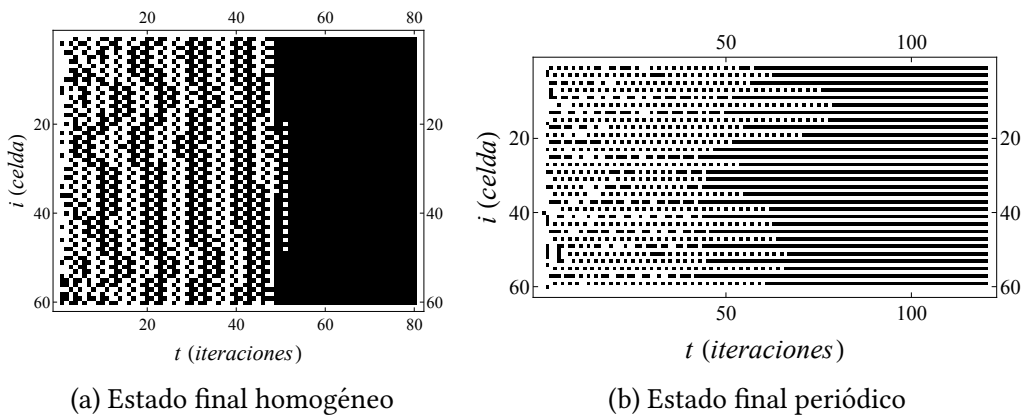


Figura 2.1: Resultados del esquema de control, $L = 60$, $a = 4$ y $\varepsilon = 0,8$

En la (fig. 2.1) se ilustran los resultados arrojados por el esquema de control para las condiciones impuestas. El control es efectivo y se alcanza rápidamente (menos de 100 iteraciones). La perturbación tiende asintóticamente a 0 cuando $\Delta^t \rightarrow 0$.

Sin embargo su efectividad depende de los parámetros internos del mapa, la intensidad de los acoples, la fuerza del control y la densidad de los sitios de pinning. En particular, si la densidad I/L cae bajo un nivel crítico el control no se alcanza asintóticamente.

Asimismo, mientras más lejos este la condición inicial de la meta ($\Delta^0 \gg 0$) más difícil será que converja.

2.2.2. Control localizado de caos espacio temporal

Partiendo del trabajo de [9], en [10] y [11] se busca una manera de optimizar el esquema de control atacando una de las debilidades del esquema original: el uso de demasiados sitios de pinning.

Un control más eficiente se logra perturbando en la menor cantidad de sitios posibles, sin embargo, al reducir la cantidad de pinnings disminuye la densidad de controladores por debajo del nivel crítico, por lo que es necesario replantear el valor de la retroalimentación.

Para calcular la nueva perturbación, los autores empezaron linealizando la ecuación (2.2) respecto al estado $\mathbf{x}^t = \{x^*, \dots, x^*\}$, utilizando la misma dinámica interna (mapa logístico), resultando en:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^{t+1} &= F(\mathbf{x}^t) + G(\mathbf{u}^t) \\
 &= F(\mathbf{x}^*) + \nabla F(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^*) + G(0) + \nabla G(0)\mathbf{u}^t \\
 &= \mathbf{x}^* + A^t(\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^*) + B^t\mathbf{u}^t \\
 \mathbf{x}^{t+1} - \mathbf{x}^* &= A^t(\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^*) + B^t\mathbf{u}^t \\
 \Delta^{t+1} &= A^t\Delta^t + B^t\mathbf{u}^t
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Donde $G(\mathbf{u}^t)$ es la perturbación, que se desvanece cuando ningún control es aplicado ($\mathbf{u} = 0$) y siendo A^t la matriz jacobiana evaluada en el punto fijo $A_{ij} = \partial_j F_i(\mathbf{x}^*)$, en este caso tiene la forma:

$$A^t = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*} \begin{pmatrix} 1 - 2\varepsilon & \varepsilon & 0 & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - 2\varepsilon & \varepsilon & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 - 2\varepsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 1 - 2\varepsilon \end{pmatrix}_{L \times L}$$

$B_{ij}^t = \partial_j G_i(0)$ es la matriz de control, tiene por dimensiones $L \times M$ y se define de la siguiente manera:

$$B_{ij} = \sum_m \delta_{j,m} \delta_{i,i_m}$$

Los elementos B_{ij} serán 0 ó 1 dependiendo de si ese elemento de la red fue escogido como sitio de pinning o no. Para hallar el valor óptimo de M , puede demostrarse que

el número mínimo de parámetros requeridos para controlar el sistema con un Jacobiano degenerado es igual a la mayor multiplicidad de sus autovalores [12].

Considerando la intensidad de la perturbación como $\mathbf{u}^t = -K\Delta^t$, la evolución del sistema (2.5) se convierte en:

$$\Delta^{t+1} = (A - BK)\Delta^t$$

Falta determinar K , una manera es utilizando el método de la teoría de control lineal-cuadrática, resultando en:

$$K = (R + B^\dagger P B)^{-1} B^\dagger P A$$

Donde Q y R son matrices de peso que pueden ser escogidas arbitrariamente, sólo se impone que sean de dimensión $L \times L$ y $M \times M$ para que el producto de matrices sea. La matriz P es la solución de la ecuación de Riccati discreta, que existe y es única siempre que se cumpla la condición de controlabilidad:

$$\text{MatrixRank}(C) = L \quad \text{con} \quad C = (B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{L-1} B)$$

Estado final homogéneo

Reproduciendo el resultado del artículo controlando la red (ec. 2.1), con $L = 8$, parámetro de acople $\varepsilon = 0,33$ y dinámica interna igual al mapa logístico con $a = 4$. Se busca que el sistema converja al estado (ec. 2.4).

El grafo de la red tiene la siguiente forma:

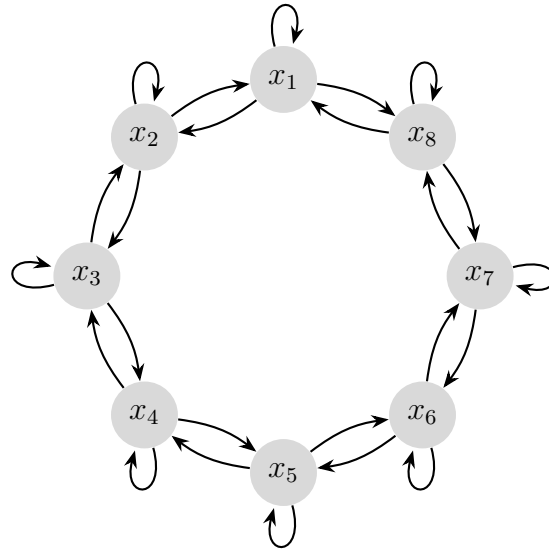


Figura 2.2: Red de acople difusivo utilizada por el autor.

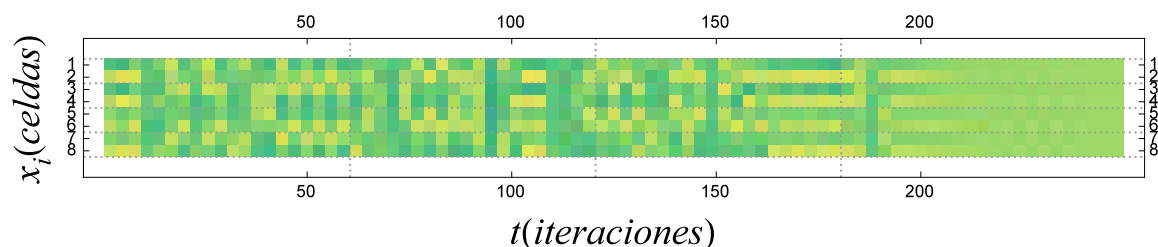
En primer lugar, se determina el número de sitios a perturbar, para ello se calculan los autovalores del Jacobiano A que son de la forma:

$$\left\{ \alpha, \alpha(1 - 4\varepsilon), \underbrace{\alpha(1 - 2\varepsilon), \alpha(-\sqrt{2\varepsilon} - 2\varepsilon + 1), \alpha(\sqrt{2\varepsilon} - 2\varepsilon + 1)}_{[2\text{-deg}]} \right\}$$

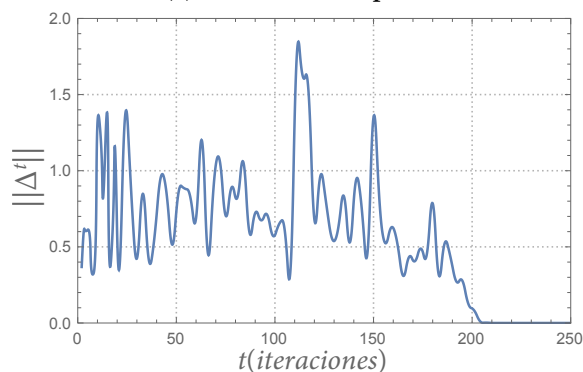
$$\text{Con } \alpha = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*}$$

De modo que se requieren dos sitios de pinning, aunque no se especifica cuales. Arbitrariamente, se seleccionarán los sitios $i = 1$ y $i = 3$ de la red.

Resolviendo la ecuación de Ricatti con matrices de peso igual a la matriz identidad y aplicando la perturbación desde un tiempo inicial hasta un tiempo final $\tau = 250$ se tiene que la evolución temporal del sistema es la ilustrada en la fig. 2.3a.



(a) Evolución temporal



(b) Evolución de Δ^t

Figura 2.3: Control de Grigoriev, perturbando en $i = 1$ y $i = 3$

Sin embargo, una elección desafortunada de los sitios a perturbar genera resultados radicalmente diferentes, como puede observarse en la figura 2.4, donde se intentó controlar para la misma condición inicial en otros sitios de pinning. En este caso el control no se alcanzó en el tiempo estipulado, a pesar de que se cumplía la condición de controlabilidad.

En 2.3b y 2.4b entiéndase por $\|\Delta^t\|$ a la norma del vector $\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^*$ donde \mathbf{x}^* es el estado al que se desea llegar.

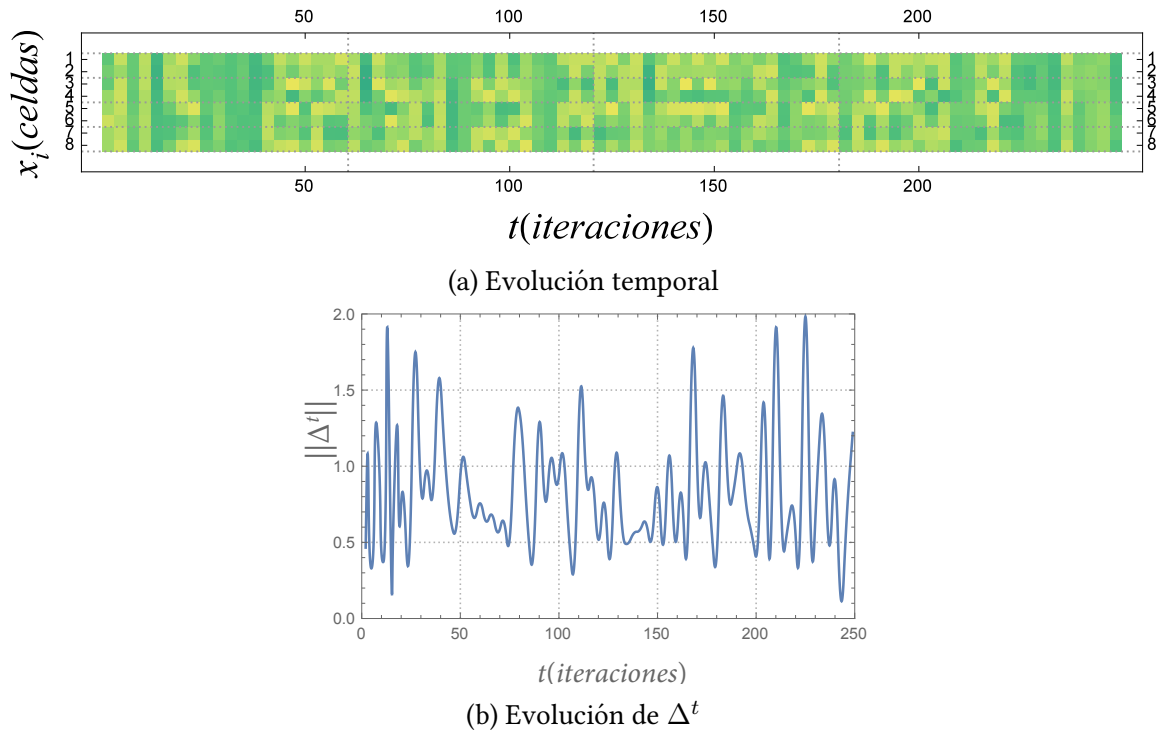


Figura 2.4: Control de Grigoriev, perturbando en $i = 4$ y $i = 5$

2.3. Centralidad en el problema de control

Son innumerables los casos de sistemas descritos por redes, donde resulta de interés establecer el número mínimo y la ubicación de los sitios o nodos centrales, que deben ser perturbados con el fin de guiar el sistema a un estado predeterminado. La propagación de epidemias es un ejemplo resaltante de este tipo de situación. Mas generalmente, el concepto de centralidad pretende establecer la importancia de una parte del sistema en el desempeño global del mismo. Las medidas usuales de centralidad tales como: centralidad de grado, centralidad de cercanía, centralidad de *betweenness*[1] o centralidad basada en emparejamiento máximo[21] consideran solo la topología del sistema que caracterizan. Sin embargo, el comportamiento global de las redes esta modulado tanto por la topología de la red como por la dinámica local de los elementos de la misma. Es por eso que el criterio de centralidad propuesto en este trabajo involucra tanto la dinámica local como la topología de la red.

2.3.1. Control de redes complejas y centralidad

En tiempos recientes, el interés en controlar redes con cada vez más elementos va en aumento. Problema que abordan los autores en [20] y [21]. En particular, utilizando como criterio de centralidad la distribución de grado de los nodos, pero sin tomar en cuenta si se cumple el criterio de controlabilidad de Kalman o no, ya que es muy costoso computacionalmente calcular este estimador para una red de miles de nodos.

En este caso, para identificar el número mínimo de pinnings no observan la máxima degeneración de los autovalores de la matriz A (que en muchos casos reales es desconocida), sino que utilizan la noción de emparejamiento máximo de la teoría de grafos.

A continuación se detalla un resultado reciente dado en [20] y [21] que expone el estado del arte en el tema.

Emparejamiento o maximal matching

El emparejamiento (o matching) es un conjunto \mathcal{M} de aristas independientes (es decir, enlaces que no comparten nodos iniciales o finales). Un nodo está emparejado si es incidente a un vértice en \mathcal{M} . El emparejamiento máximo es el número *máximo* de aristas independientes en la red.

La estrategia de control de los autores consiste en **controlar todos los nodos que no estén emparejados**. Cuando todos los nodos están emparejados se trata con un caso de *perfect matching* y se requiere sólo un sitio de pinning para alcanzar el control. Se pueden clasificar los enlaces de la siguiente manera:

1. **Crítico**, si desaparece es necesario aumentar el número de sitios de pinning, ya que se incrementa el número de nodos no emparejados.
2. **Redundante**, puede desaparecer sin afectar a los demás nodos en lo más mínimo, tanto el matching, como el emparejamiento máximo se conservan.
3. **Neutral**, ni lo uno ni lo otro, tienen un rol *no despreciable* en el control, pero la red puede seguir siendo controlada en el caso de su desaparición, no cambia el emparejamiento máximo, pero es posible que cambien las aristas que pertenecen a \mathcal{M} .

Algunos ejemplos del uso del emparejamiento máximo:

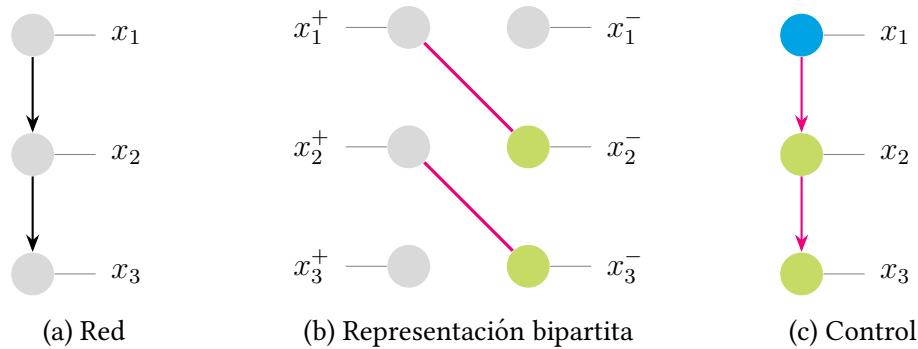


Figura 2.5: Red dirigida unidireccional

En el caso de una red como la ilustrada en fig. 2.5a el emparejamiento máximo es 2 ya que hay dos aristas independientes:

$$\mathcal{M} = \{x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_3\}$$

Los nodos 2 y 3 están emparejados porque sobre ellos inciden aristas que pertenecen a \mathcal{M} , de modo que el nodo 1 será el único sitio de pinning necesario según los autores.

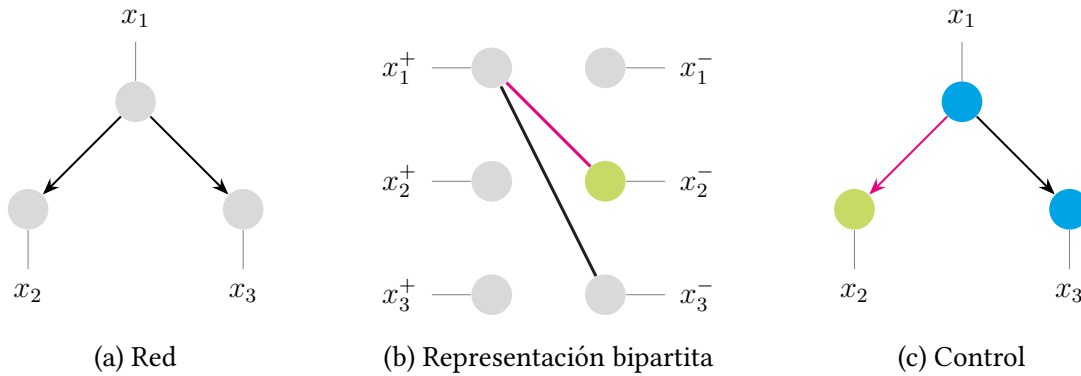


Figura 2.6: Red dirigida unidireccional 2

Al tratar con una red como la ilustrada en la fig. 2.6a se esperaría que al controlar el nodo 1 se controle toda la red ya que hay una estructura en cascada parecida al caso de la fig. 2.5a, sin embargo:

$$\mathcal{M} = \{x_1 \rightarrow x_2\} \quad \text{o alternativamente } \mathcal{M} = \{x_1 \rightarrow x_3\}$$

De modo que el emparejamiento máximo es igual a 1.

En la fig. 2.6b se representa la primera escogencia, resultando emparejado el nodo 2, pero el caso contrario es aceptable también, ya que es posible que para una red existan distintas combinaciones de aristas independientes \mathcal{M} , pero el emparejamiento máximo no cambia, e invariablemente se deberán controlar dos nodos para obtener el control, sea el nodo 1 y el nodo 2 o el nodo 1 y el nodo 3.

Al modificar la red 2.6a un poco añadiendo conexiones entre los nodos 2 y 3 es posible cambiar el emparejamiento como muestran las figuras 2.7a y 2.8a:

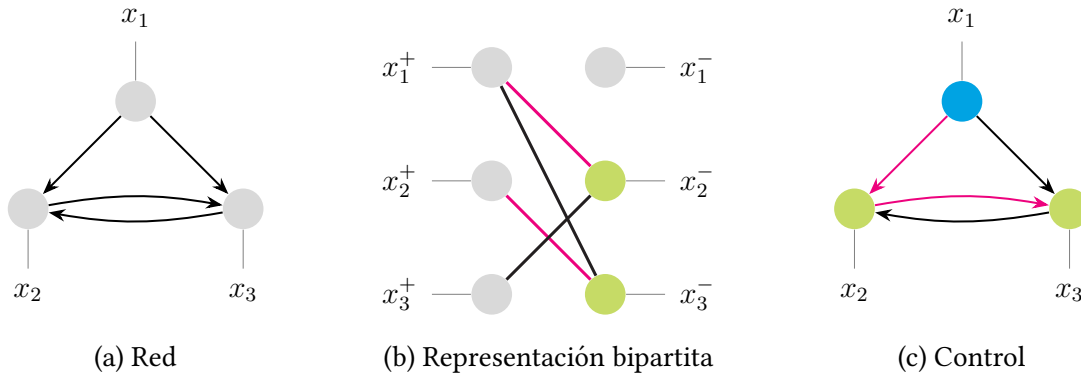


Figura 2.7: Red dirigida unidireccional con doble conexión

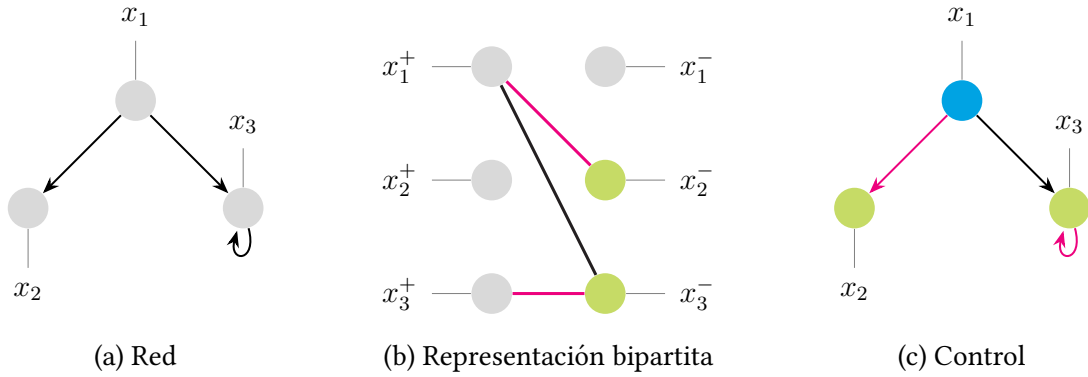


Figura 2.8: Red dirigida unidireccional con retroalimentación

Al añadir conexiones independientes adicionales aumenta el emparejamiento máximo y por lo tanto es necesario perturbar menos sitios de pinning para alcanzar el control. Es fácil ver que al remover la retroalimentación en el nodo 3 en la red 2.8a se obtiene la red 2.6a y se deben controlar no 1 sino 2 sitios, de modo que es un *enlace crítico*.

En cambio, al eliminar la conexión que va de 2 a 3 en la red 2.7a manteniendo la conexión de 3 a 2, si bien cambia la escogencia que realizamos de \mathcal{M} el emparejamiento máximo sigue siendo 2 ya que $x_1 \rightarrow x_2$ es independiente de $x_3 \rightarrow x_2$ (sus nodos iniciales y finales no coinciden), así que es posible seguir controlando sin problemas. Para la escogencia de \mathcal{M} reflejada en la fig. 2.7b, la conexión $x_2 \rightarrow x_3$ es neutral mientras que la conexión $x_3 \rightarrow x_2$ es redundante.

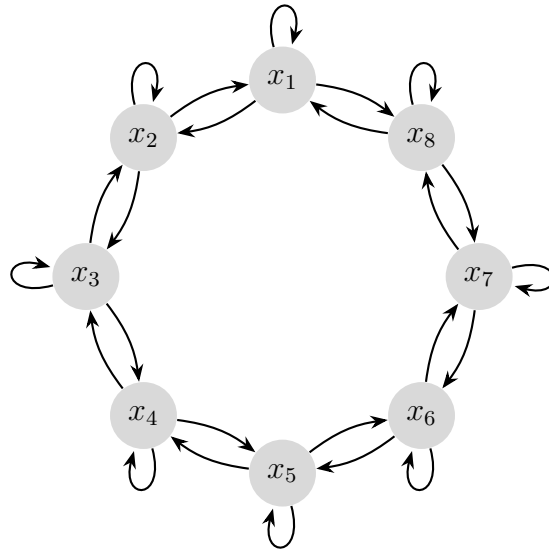


Figura 2.9: Red de acople difusivo utilizada por Grigoriev

¿Qué pasa si se desea aplicar este esquema a la red utilizada por Grigoriev (fig. 2.9)? al ser un ciclo cerrado todos los nodos están emparejados como muestra la representación bipartita (fig. 2.10), estamos en presencia de un caso de emparejamiento perfecto, de modo que bajo este esquema debería ser posible controlar con un sólo sitio de pinning, sin embargo esto contradice el criterio de Kalman ya que realmente se necesita perturbar en dos sitios. Los autores han considerado este problema en el apéndice de [20], de modo que el método no es aplicable en este caso a pesar de dar resultados óptimos en redes con topologías más complicadas.

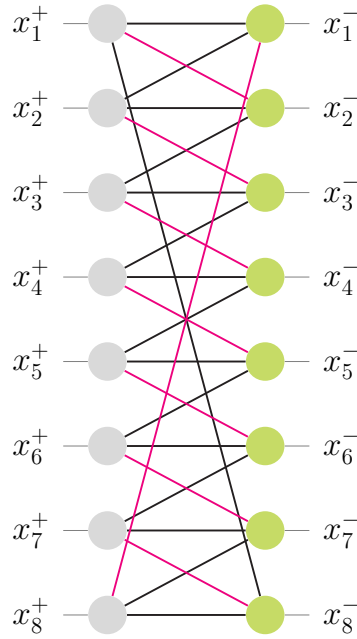


Figura 2.10: Representación bipartita de fig. 2.9

Capítulo 3

Información y transferencia de información

En lo que sigue se hace una breve revisión de los conceptos de entropía e información en el sentido de Shannon, así como una introducción del concepto de transferencia de información (TI) introducido posteriormente por Schreiber [28]. Adicionalmente se muestra una manera de realizar una descripción *de grano grueso* de la evolución del sistema dinámico, basado en su dinámica simbólica, que permite el cálculo de la transferencia de información.

3.1. Información en el sentido de Shannon

En el marco de la teoría de la información, la entropía, también llamada entropía de la información o entropía de Shannon[14], es una medida de la incertidumbre de una fuente de información.

Esta puede ser considerada como una medida de la información necesaria para, en cualquier proceso, poder acotar, reducir o eliminar la incertidumbre. Los conceptos de información y entropía están básicamente relacionados entre sí, aunque se necesitaron años de desarrollo de la mecánica estadística y de la teoría de la información antes de que esto fuera percibido.

Shannon ofrece una definición de entropía que satisface las siguientes afirmaciones:

- Un cambio pequeño en una de las probabilidades de aparición de uno de los elementos de la señal debe cambiar poco la entropía.
- Si todos los elementos de la señal son equiprobables a la hora de aparecer, entonces la entropía será máxima.

Supongamos ahora que un evento (variable aleatoria) tiene un grado de indeterminación inicial igual a k (por ejemplo, existen k estados posibles) y supongamos todos los estados equiprobables. Entonces la probabilidad de que se dé una de esas combinaciones

será $p_i = 1/k$. Luego podemos representar la Información I_i como:

$$I_i = \log_2(k) = \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) = -\log_2(p_i) \quad (3.1)$$

Ahora, si cada uno de los k estados tiene una probabilidad p_i , la entropía vendrá dada por la suma ponderada de la cantidad de información:

$$\begin{aligned} H &= -p_1 \log_2(p_1) - p_2 \log_2(p_2) - \dots - p_k \log_2(p_k) \\ &= -\sum_{i=1}^k p_i \log_2(p_i) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la entropía de una señal s , denotada por $H(s)$, es el valor medio ponderado de la cantidad de información de los diversos elementos del señal:

$$H(s) = -\sum_i p(s_i) \log_2 p(s_i) \quad (3.2)$$

Que representa una medida de la incertidumbre media acerca de una variable aleatoria y por tanto de la cantidad de información.

3.2. Estimación de la información y dinámica simbólica

Entre la enorme cantidad de niveles de resolución con las que se puede describir un sistema dinámico, resaltan los extremos. Por una parte, se puede llevar a cabo una descripción fina de la evolución del sistema, archivando las coordenadas de los puntos del espacio de fases a cada intervalo de tiempo:

$$x^1, x^2, x^3, \dots, x^n \quad (3.3)$$

O alternativamente, se puede hacer una representación gruesa (*coarse graining*) a través de su dinámica simbólica [13], computando la órbita sobre un conjunto finito de estados. Esta última es de interés, ya que en la práctica permite realizar medidas de cálculo de la cantidad de información.

3.2.1. Representación simbólica de una órbita caótica

La dinámica simbólica representa una forma rigurosa de estudiar los sistemas dinámicos usando precisión finita en la representación de los estados y ha sido un área ampliamente estudiada dentro del marco de la teoría matemática de sistemas dinámicos. Esta

formulación abstracta la mantuvo alejada por un tiempo de las aplicaciones prácticas tanto en la Física como en otras áreas. Recientes aplicaciones sugieren esta representación de los sistemas dinámicos como una herramienta poderosa en la resolución de problemas que van desde los más generales, como la caracterización de señales provenientes de sistemas complejos, hasta aplicaciones particulares, como el diseño de sistemas criptográficos.

Dado un sistema dinámico (ec. 1.1), evolucionando bajo régimen caótico. Su representación simbólica puede ser obtenida mediante el particionado del espacio de estados \mathbf{X} en q conjuntos: $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_q\}$, con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^q \mathbf{X}_i &= \mathbf{X} \\ \mathbf{X}_i \cap \mathbf{X}_j &= \emptyset \end{aligned}$$

Cada partición es etiquetada con un símbolo $s_i \in S$:

$$S \equiv \{s_1, s_2, \dots, s_q\} \quad (3.4)$$

Una vez dada la partición y escogidos los símbolos, el registro temporal del sistema pasa de ser de la forma (ec. 3.3), a la secuencia:

$$\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^n \quad \sigma^i \in S \quad (3.5)$$

De los símbolos que etiquetan los elementos de la partición visitados por la órbita. Aquí, los símbolos son asignados de acuerdo con:

$$x^i \rightarrow s_i \quad \text{si } x^i \in \mathbf{X}_i$$

Esta representación trae consigo una gran pérdida de detalles de la evolución del sistema dinámico, sin embargo, si la partición es escogida de manera adecuada, las secuencias que resultan de la representación simbólica reflejan algunas de las propiedades de la órbita original. Una de ellas es su naturaleza caótica.

3.2.2. Representación Real de Secuencias Simbólicas

Con el ánimo de mostrar el carácter biunívoco de la representación anterior, se puede mostrar que, dada una secuencia simbólica es posible hacerle corresponder la condición inicial a partir de la cual la secuencia fue generada.

A continuación un ejemplo basado en el mapa triangular. Este viene dado por:

$$x^{n+1} = f(x^n) = \begin{cases} 2x^n & \text{si } x^n < 1/2 \\ 2(1 - x^n) & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (3.6)$$

Y la representación simbólica:

$$\sigma^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x^n < 1/2, x^n \in \mathbf{X}_1 \\ 1 & \text{de otro modo, } x^n \in \mathbf{X}_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

Entonces, utilizando (3.7), la ecuación (3.6) puede ser escrita como:

$$x^{n+1} = 2\sigma^n - 2H_n x^n$$

Donde H_n es una función escalón, dada por:

$$H_n = \begin{cases} 1 & \text{si } x^n < 1/2 \\ -1 & \text{si } x^n > 1/2 \end{cases}$$

Y cuya inversa está dada por:

$$x^n = \frac{\sigma^n}{H_n} + \frac{x^{n+1}}{2H_n} \quad (3.8)$$

De manera que iteraciones sucesivas de (3.8) conducen a:

$$x^n = \frac{\sigma^n}{H_n} - \frac{\sigma^{n+1}}{2H_n H_{n+1}} + \frac{\sigma^{n+2}}{2^2 H_n H_{n+1} H_{n+2}} - \frac{\sigma^{n+3}}{2^3 H_n H_{n+1} H_{n+3}} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\sigma^{n+i}}{2^i P(i)}$$

Donde:

$$P(i) \equiv \prod_{m=0}^i H_{n+m}$$

De manera que la condición inicial que genera la órbita simbólica puede ser calculada utilizando:

$$x^0 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\sigma^i}{2^i P(i)} \quad (3.9)$$

Obteniendo una representación real de una cadena de símbolos.

Una generalización de la representación simbólica en el caso de las redes de mapas acoplados se presenta en [23]. En este caso, la inversa de la regla dinámica:

$$\hat{f}(\mathbf{x}_n) = \tilde{R}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad \text{con } \tilde{R} = \left(I - \frac{\epsilon}{d_i^n} \tilde{A} \right)$$

Se puede escribir como $\mathbf{x}^n = \mathbf{f}^{-1} \circ \tilde{R}^{-1} \mathbf{x}^{n+1} = H(\mathbf{x}^{n+1})$.

Esto es, $\mathbf{x}^n = H(\mathbf{x}^{n+1})$, con $H : \mathfrak{R}^L \times \mathcal{B}^L \rightarrow \mathfrak{R}^L$.

Aquí H se evalúa componente a componente, en la forma:

$$H^{-1}(\mathbf{x}^{n+1}) = \begin{cases} \hat{f}_0^{-1}(A^{-1}\mathbf{x}^{n+1}) & \text{donde } \sigma_i^{n+1} = 0 \\ \hat{f}_1^{-1}(A^{-1}\mathbf{x}^{n+1}) & \text{donde } \sigma_i^{n+1} = 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Donde $\hat{f}_j^{-1}, j = 0, 1$, son las dos ramas de la inversa de \hat{f} y $\sigma^n = (s_i^n)_L^{n=1}$ la sucesión de vectores binarios generados utilizando (3.7), componente a componente, sobre el registro temporal original.

3.3. Transferencia de información (TI)

Para un sistema de k componentes, puede ser obtenida información importante sobre su estructura, estimando en qué medida estas contribuyen a la producción de información y como se intercambia en el sistema.

Muchos autores han utilizado la *información mutua* para cuantificar la superposición de la información contenida en dos subsistemas. Lamentablemente esta es simétrica y constante, de modo que no da un sentido de dirección o evolución temporal de la información en el sistema.

En [28] se propone una medida de transferencia de información, que comparte algunas de las propiedades deseadas de información mutua, pero toma en cuenta la dinámica del sistema. Esta medida, con supuestos mínimos sobre la dinámica del sistema y de la naturaleza de su acoplamiento, es capaz de cuantificar el intercambio de información entre dos sistemas.

Para introducir el concepto, supongamos que dos sistemas que generan eventos, definamos una tasa de entropía que es la cantidad de la información adicional que se requiere para representar el valor de la siguiente observación de uno de los sistemas:

$$h_1 = - \sum_{x^{n+1}} p(x^{n+1}, x^n, y^n) \log_2 p(s_i x^{n+1} | x^n, y^n) \quad (3.11)$$

Supongamos que el valor de la observación x^{n+1} no fue dependiente de la observación actual de y^n :

$$h_2 = - \sum_{x^{n+1}} p(x^{n+1}, x^n, y^n) \log_2 p(s_i x^{n+1} | x^n) \quad (3.12)$$

Ahora, la cantidad h_1 representa la tasa de entropía para los dos sistemas, y h_2 representa la tasa de entropía suponiendo que x^{n+1} es independiente de y^n . Así, obtenemos la entropía de transferencia:

$$h_2 - h_1 = - \sum_{x^{n+1}, x^n, y^n} p(x^{n+1}, x^n, y^n) \log_2 \left(\frac{p(x^{n+1} | x^n, y^n)}{p(x^{n+1} | x^n)} \right)$$

Debido a la asimetría inherente en la transmisión, resultan dos ecuaciones para la transferencia entropía:

$$H_{Y \rightarrow X} = \sum_{x^{n+1}, x^n, y^n} p(x^{n+1}, x^n, y^n) \log_2 \left(\frac{p(x^{n+1} | x^n, y^n)}{p(x^{n+1} | x^n)} \right) \quad (3.13)$$

$$H_{X \rightarrow Y} = \sum_{y^{n+1}, x^n, y^n} p(y^{n+1}, y^n, x^n) \log_2 \left(\frac{p(y^{n+1} | y^n, x^n)}{p(y^{n+1} | y^n)} \right) \quad (3.14)$$

A continuación, con el fin de ilustrar el concepto, se da un ejemplo del cálculo de la transferencia de información en el caso de dos sistemas que generan cadenas binarias de símbolos:

Utilizaremos el mapa logístico (ec. 1.3) con parámetro $a = 4$ para generar dos registros temporales \mathbf{z}_1 y \mathbf{z}_2 . Se generan dos condiciones iniciales al azar contenidas en el espacio de fases (el conjunto $[0, 1]$) y se itera el mapa τ veces para cada condición inicial. Para el cálculo utilizaremos como condiciones iniciales:

$$z_1^0 = 0,0102466 \quad z_2^0 = 0,797952$$

Para $\tau = 35$ y utilizando el mismo particionado de (ec. 3.7), se generan los registros temporales ilustrados en la fig. 3.1

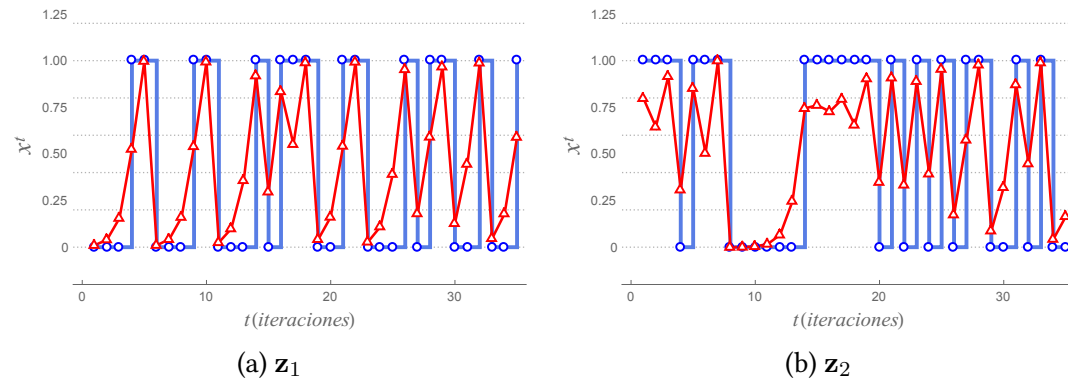


Figura 3.1: Registros temporales: en rojo la secuencia \mathbf{z}_i original, en azul su respectiva dinámica simbólica

Para evaluar (ec. 3.13) o (ec. 3.14), efectuamos las siguientes sustituciones:

$$p(x^{n+1} | x^n, y^n) = \frac{p(x^{n+1}, x^n, y^n)}{p(x^n, y^n)}$$

$$p(x^{n+1} | x^n) = \frac{p(x^{n+1}, x^n)}{p(x^n)}$$

Que son más fáciles de computar que las probabilidades condicionales, resultando en las siguientes expresiones:

$$T_{Y \rightarrow X} = \sum_{x^{n+1}, x^n, y^n} p(x^{n+1}, x^n, y^n) \log_2 \left(\frac{p(x^{n+1}, x^n, y^n) p(x^n)}{p(x^n, y^n) p(x^{n+1}, x^n)} \right) \quad (3.15)$$

$$T_{X \rightarrow Y} = \sum_{y^{n+1}, x^n, y^n} p(y^{n+1}, y^n, x^n) \log_2 \left(\frac{p(y^{n+1}, x^n, y^n) p(y^n)}{p(x^n, y^n) p(y^{n+1}, y^n)} \right) \quad (3.16)$$

Para calcular $T_{z_2 \rightarrow z_1}$ (ec. 3.15), para cada cadena, se tabulan todas las probabilidades necesarias. Las cadenas binarias explícitas son:

$$s_1 = \{0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1\}$$

$$s_2 = \{1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0\}$$

- Para obtener las probabilidades simples $p(s_1^n)$ se cuenta el número de veces que se obtiene cada símbolo (0 ó 1) en la representación simbólica s_1 resultando en:

$$p(0) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \quad p(1) = 1 - p(0) = \frac{3}{7}$$

- Las probabilidades dobles $p(s_1^n, s_2^n)$ y $p(s_1^{n+1}, s_1^n)$ se obtienen comparando las cadenas respectivas para cada caso posible (00,01,10,11), resultando en:

$$\begin{aligned} p(s_1^n, s_2^n) : \quad & p(0, 0) = \frac{8}{35} \quad p(0, 1) = \frac{12}{35} \quad p(1, 0) = \frac{8}{35} \quad p(1, 1) = \frac{7}{35} \\ p(s_1^n, s_1^{n+1}) : \quad & p(0, 0) = \frac{11}{34} \quad p(0, 1) = \frac{9}{34} \quad p(1, 0) = \frac{8}{34} \quad p(1, 1) = \frac{4}{34} \end{aligned}$$

- Equivalentemente para la probabilidad triple $p(s_1^{n+1}, s_1^n, s_2^n)$, se efectúan los 8 casos:

$$\begin{aligned} p(0, 0, 0) &= \frac{6}{34} & p(0, 0, 1) &= \frac{5}{34} & p(0, 1, 0) &= \frac{5}{34} & p(0, 1, 1) &= \frac{4}{34} \\ p(1, 0, 0) &= \frac{2}{34} & p(1, 0, 1) &= \frac{6}{34} & p(1, 1, 0) &= \frac{3}{34} & p(1, 1, 1) &= \frac{3}{34} \end{aligned}$$

Finalmente se realiza la sumatoria sustituyendo las probabilidades tabuladas según corresponda, el primer término será de la forma:

$$\begin{aligned} T_{z_2 \rightarrow z_1} &= \sum_{n=0}^{\tau-1} p(s_1^{n+1}, s_1^n, s_2^n) \log_2 \left(\frac{p(s_1^{n+1}, s_1^n, s_2^n) p(s_1^n)}{p(s_1^n, s_2^n) p(s_1^{n+1}, s_1^n)} \right) \\ &= p(s_1^1, s_1^0, s_2^0) \log_2 \left(\frac{p(s_1^1, s_1^0, s_2^0) p(s_1^0)}{p(s_1^0, s_2^0) p(s_1^1, s_1^0)} \right) + \dots \\ &= p(0, 0, 1) \log_2 \left(\frac{p(0, 0, 1) p(0)}{p(0, 1) p(0, 0)} \right) + \dots \\ &= \frac{5}{34} \log_2 \left(\frac{\frac{5}{34} \times \frac{4}{7}}{\frac{12}{35} \times \frac{11}{34}} \right) + \dots \end{aligned}$$

Al evaluar la suma de todos los valores de n se obtiene el valor de la transferencia de información de la cadena 2 a la cadena 1 que resulta en:

$$T_{z_2 \rightarrow z_1} = 0,00969906$$

Intercambiando las cadenas y re calculando las probabilidades para hallar la transferencia en sentido contrario resulta en:

$$T_{z_1 \rightarrow z_2} = 0,0602051$$

De modo que la cadena 1 envía más información a 2 de la que recibe.

Otro resultado importante es el siguiente:

$$T_{z \rightarrow z} = 0$$

La transferencia de información de una cadena a sí misma es cero ya que la definición que hemos utilizado hasta ahora no incluye retardos temporales entre las cadenas sino una comparación 1 a 1. Igualmente:

$$T_{z \rightarrow !z} = 0$$

Donde $!z$ es la cadena binaria original pero invertida (se aplica una operación NOT).

Capítulo 4

Transferencia de información y centralidad en el problema de control

Partiendo del esquema de control optimizado planteado por [11] se tiene un método para calcular la perturbación a aplicar a un número mínimo de sitios de pinning, dados por la degeneración máxima de los autovalores del Jacobiano. Sin embargo el método no indica un algoritmo para localizar los mejores sitios a perturbar.

En fig. 2.3b y fig.2.4b vimos que la escogencia de los sitios de pinning es lo que hace que el método funcione o no. A pesar de que la red utilizada por Grigoriev era sumamente homogénea y que a simple vista no se podía determinar cual nodo era un sitio adecuado para perturbar o no surge la necesidad de cuantificar la importancia del nodo en la red, así que es necesaria una noción de **centralidad**.

Una medida clásica de la importancia de un nodo en la red es su grado [18] (degree centrality), que toma en cuenta la distribución de las conexiones y da más relevancia a los nodos a los que incidan más aristas. Otras medidas estudian el espectro de la red contemplando los autovalores de sus matrices representativas (ver Capítulo 1) teniendo en cuenta que los nodos con relaciones más fuertes con sus vecinos tienen más peso en el comportamiento de la red (eigenvector centrality). También se pueden calcular las distancias más cortas entre los nodos (betweenness centrality), o el emparejamiento máximo de [21]. Estas medidas tienen en común que son completamente basadas en la topología.

Pero como vimos anteriormente, los comportamientos observados en la red no vienen sólo dados por su estructura. La manera en que cambian los estados de los nodos tiene un papel importante en determinar que sitios podrían tener más peso en el control de la red.

En síntesis, con la noción de transferencia de información dada en el capítulo anterior, se busca crear una medida de centralidad basada en la evolución temporal de la red, de modo que se maneja la siguiente hipótesis:

Los nodos que propagan mejor la información son buenos sitios de pinning

Así que según nuestra hipótesis, seleccionar los nodos en base a su transferencia de información es más efectivo que seleccionar los sitios de pinning al azar.

4.1. Controlabilidad en redes de mapas acoplados

Para verificar la hipótesis se dividen las pruebas en dos partes:

- La primera parte consiste en controlar una red homogénea de acople difusivo para distintos valores de ε con el esquema estudiado en §2.2.2. Al ser homogénea la topología debería haber una fuerte respuesta de la evolución del sistema en el peso de cada nodo.
- La segunda parte consiste en controlar un conjunto de redes prototipo basadas en el modelo planteado en (ec. 1.8), estas redes tendrán conexiones generadas al azar (sin nodos aislados), su jacobiano será doblemente degenerado para requerir sólo un par de sitios de pinning y su dimensión será $L < 8$ para facilitar la comparación entre los resultados de ambas partes.

Cada parte a su vez sigue el siguiente algoritmo:

- 1) Se generan N condiciones iniciales pertenecientes al espacio de fase (para ello se generan un conjunto de valores al azar y se iteran 10^4 veces para eliminar los transientes).
- 2) Para cada condición inicial, probar todos los pares de sitios de pinning posibles y de este modo tener una **imagen global de la controlabilidad de la red** y dependiendo de si se alcanzó el control o no, categorizar la eficiencia del mismo con alguna de las siguientes categorías:
 - **Clase 1:** el control se alcanza en un tiempo menor o igual a $\tau/4$
 - **Clase 2:** el control se alcanza en un tiempo t : $\tau/4 < t \leq \tau/2$
 - **Clase 3:** el control se alcanza en un tiempo t : $\tau/2 < t \leq \tau$
 - **Clase 4:** el control no se alcanza.
- 3) **Esquema A:** para un conjunto de condiciones iniciales:
 - a) Aplicar el esquema de control §2.2.2 con sitios de pinning seleccionados *al azar* durante un tiempo τ .
 - b) Evaluar la eficiencia del control entre las 4 clases y estimar el porcentaje de las veces que se alcanza el control y la velocidad promedio en la que ocurre.
- 4) **Esquema B:** para el mismo conjunto de condiciones iniciales:
 - I. Dejar evolucionar el sistema *sin perturbarlo* durante una ventana de tiempo $v < \tau$ para obtener un registro temporal de la red.
 - II. Pasar los registros a la representación simbólica $\mathbf{x}^t \rightarrow \mathbf{s}^t$
 - III. Medir la transferencia de información entre cada par (ec. 3.15) de la red para obtener la matriz de transferencia de información \tilde{V} , donde cada elemento de matriz es:

$$\tilde{V} = \{\tilde{v}_{ij}\} = T_{\mathbf{s}_j \rightarrow \mathbf{s}_i}$$
 - IV. Con la matriz de TI calcular el balance de información de la red β_k , calculando la resta entre la información saliente β_k^{out} menos la información entrante β_k^{in}

de cada nodo k :

$$\beta_k^{\text{out}} = \sum_{i=1}^L \tilde{v}_{ij} \quad \beta_k^{\text{in}} = \sum_{j=1}^L \tilde{v}_{ij} \quad \beta_k = \beta_k^{\text{out}} - \beta_k^{\text{in}}$$

Se utilizará una ventana de tamaño:

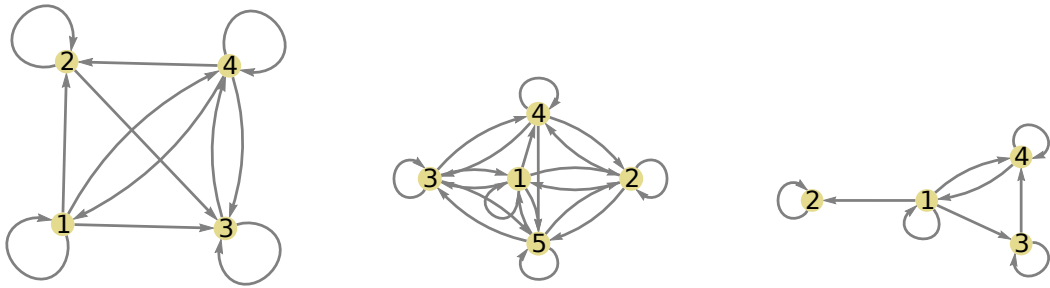
$$v = 0,25\tau$$

- v. Hacer un ranking de los nodos en base a su balance β_k (de mayor a menor) y crear parejas de sitios de pinning con los primeros elementos de la lista.
- vi. Aplicar el esquema de control §2.2.2 en los sitios de pinning seleccionados durante un tiempo τ .
- vii. Evaluar la eficiencia del control entre las 4 clases y estimar el porcentaje de las veces que se alcanza el control y la velocidad promedio en la que ocurre.

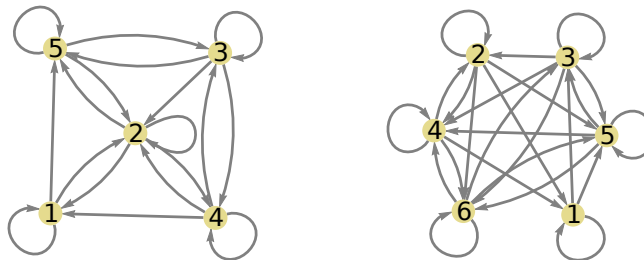
4.1.1. Detalles de la implementación

Para la primera parte, se utilizó la red ilustrada en (fig. 2.2). Para la segunda parte, se utilizaron las redes ilustradas en (fig. 4.1).

Los códigos utilizados para validar la hipótesis fueron escritos en su totalidad en Wolfram Mathematica 10.



(a) Red #1, $L = 4$, $\tau = 400$, $\varepsilon = 0,35$ (b) Red #2, $L = 5$, $\tau = 2000$, $\varepsilon = 0,35$ (c) Red #3, $L = 4$, $\tau = 500$, $\varepsilon = 0,33$



(d) Red #4, $L = 5$, $\tau = 2000$, $\varepsilon = 0,37$ (e) Red #5, $L = 6$, $\tau = 2000$, $\varepsilon = 0,39$

Figura 4.1: Redes dirigidas

4.1.2. Resultados para la red homogénea

Para 1000 condiciones iniciales generadas aleatoriamente, $\tau = 2000$, dinámica interna del nodo $f = ax(1 - x)$ con $a = 4$:

A pesar de la homogeneidad de la red hay una clara preferencia por ciertas parejas a medida que se varía el acople (tabla 4.1). Para valores extremos de ε el control está polarizado, por un lado hay parejas que controlan una cantidad abrumadora de veces en contraste con el resto de los pares que difícilmente controlan la decena de veces. Para ciertos valores de ε los nodos muy cercanos se “estorban” y resulta difícil controlar con estos, por ejemplo para $\varepsilon = 0,33$ lo mejor es utilizar parejas con un nodo de por medio como $\{1, 7\}$ o $\{3, 5\}$ que parejas de nodos contiguos.

Par	ε						
	0.28	0.30	0.33	0.35	0.37	0.39	0.41
{1,2}	12	8	23	35	49	78	82
{1,3}	67	78	95	71	3	3	5
{1,4}	8	19	64	58	5	13	7
{1,5}	1	4	27	22	27	17	29
{1,6}	13	20	71	46	3	8	10
{1,7}	75	86	93	65	10	4	4
{1,8}	7	10	20	37	45	72	81
{2,3}	10	12	20	40	41	82	80
{2,4}	75	78	89	74	2	2	4
{2,5}	8	18	60	51	4	14	6
{2,6}	2	5	34	33	32	30	21
{2,7}	6	21	72	55	3	15	10
{2,8}	68	78	97	61	3	6	4
{3,4}	11	9	14	43	46	85	80
{3,5}	68	88	90	74	6	5	2
{3,6}	8	22	68	59	5	12	10
{3,7}	2	9	31	28	20	27	27
{3,8}	6	17	63	58	3	12	9
{4,5}	9	10	16	39	50	86	80
{4,6}	59	74	96	68	4	2	5
{4,7}	10	23	58	54	8	17	10
{4,8}	3	8	18	27	21	26	23
{5,6}	13	14	20	35	28	86	85
{5,7}	70	85	94	71	0	0	5
{5,8}	4	23	64	51	3	11	8
{6,7}	11	12	16	35	38	93	88
{6,8}	68	75	93	69	3	4	3
{7,8}	13	18	14	42	45	83	85

Tabla 4.1: Porcentaje de las veces que se logra controlar la red para cada par utilizando distintos valores del parámetro de acople

Utilizando el **esquema B** aumentan las probabilidades de controlar con eficiencia clase 1 mientras el parámetro de acople no tenga valores extremos superando al **esquema A** como se observa en fig. 4.2

Es interesante la caída colectiva en torno a $\varepsilon = 0,37$.

En el caso del **esquema B** con $\varepsilon = 0,35$ para una condición inicial aleatoria la matriz de transferencia de información es la mostrada en la figura 4.3a. Al efectuar el cálculo del balance se obtiene que los mejores nodos son $\{1, 5\}$, al perturbar los mismos se obtiene un comportamiento de clase 1 como se observa en 4.3b.

Clasificación					
ε	1	2	3	4	Total
0,28	15	10	11	64	36
0,30	21	12	11	56	44
0,33	40	14	13	32	68
0,35	33	17	20	29	71
0,37	13	6	5	77	23
0,39	25	7	4	64	36
0,41	26	5	4	65	35

Tabla 4.2: Porcentaje de las veces que se logra controlar la red seleccionando los sitios de pinning al azar

Clasificación					
ε	1	2	3	4	Total
0,28	0	0	1	98	1
0,3	10	10	16	63	36
0,33	38	17	0	44	55
0,35	49	14	15	22	78
0,37	10	9	8	72	27
0,39	33	7	4	56	44
0,41	0	0	0	100	0

Tabla 4.3: Porcentaje de las veces que se logra controlar la red seleccionando los sitios de pinning mediante la transferencia de información.

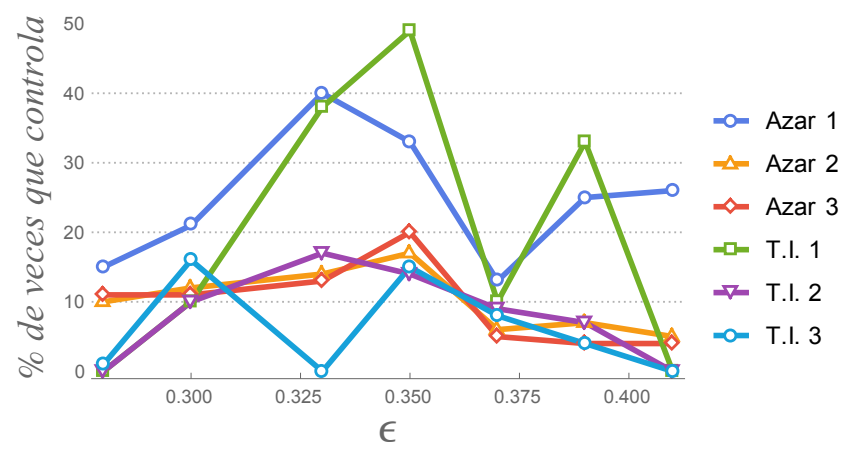
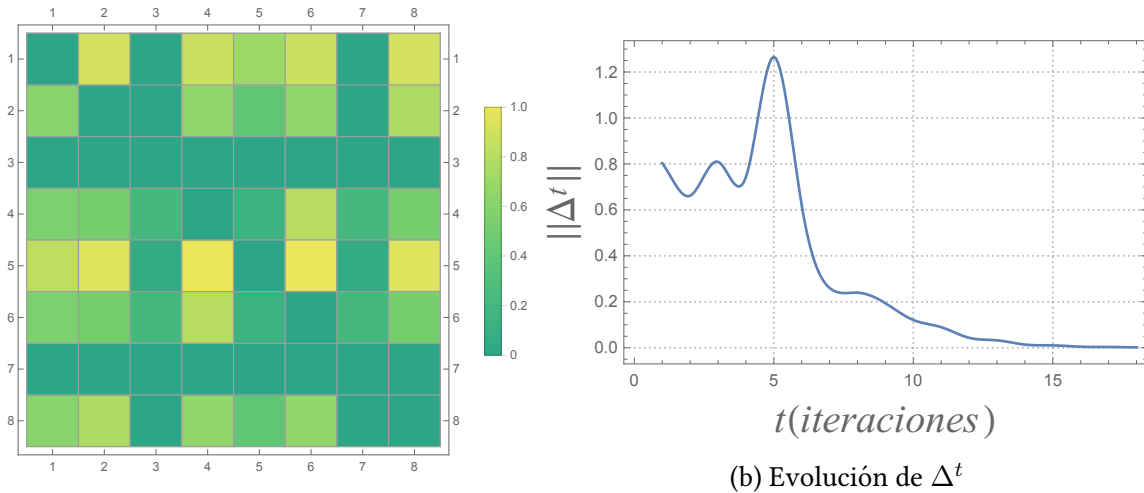


Figura 4.2: Eficiencia del control en función del parámetro de acople



(a) Matriz de transferencia de información \tilde{V}

(b) Evolución de Δ^t

Figura 4.3: Perturbando en $i = 1$ y $i = 5$, sitios de pinning seleccionados a través de la T.I. Eficiencia: 1

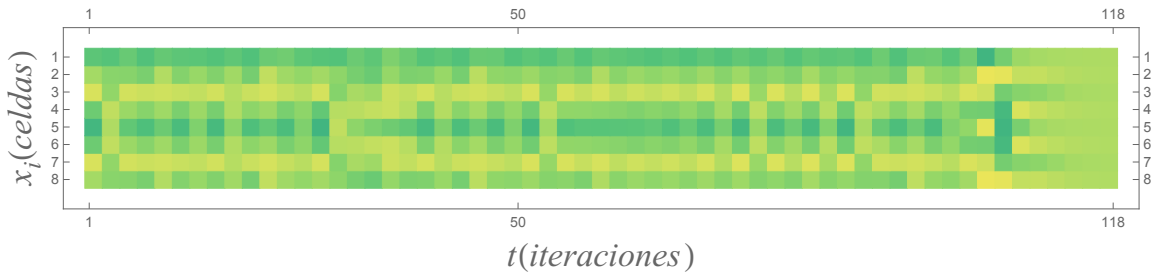


Figura 4.4: Evolución temporal

4.1.3. Resultados para las redes dirigidas

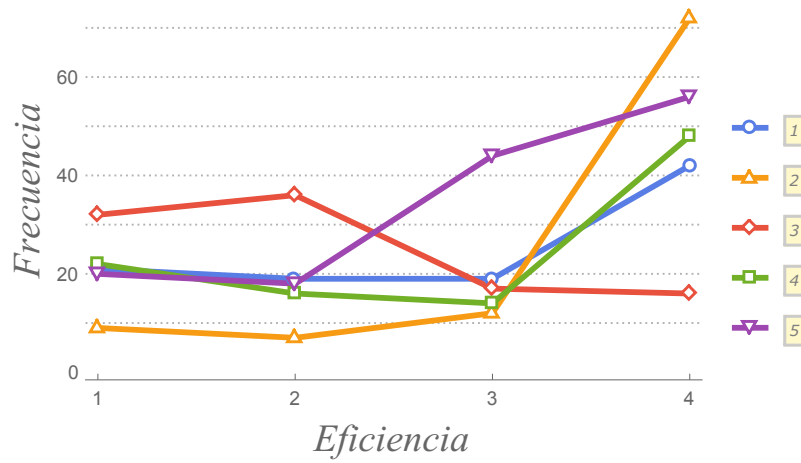
Red	Azar					T. I.				
	1	2	3	4	T	1	2	3	4	T
1	21	19	19	42	58	26	12	19	43	57
2	9	7	12	72	28	13	9	11	67	33
3	32	36	17	16	84	42	17	20	21	79
4	22	16	14	48	52	30	14	12	44	56
5	20	18	18	44	56	29	17	16	38	62

Tabla 4.4: Porcentaje de las veces que se logra controlar la red utilizando los dos métodos para seleccionar los sitios de pinning.

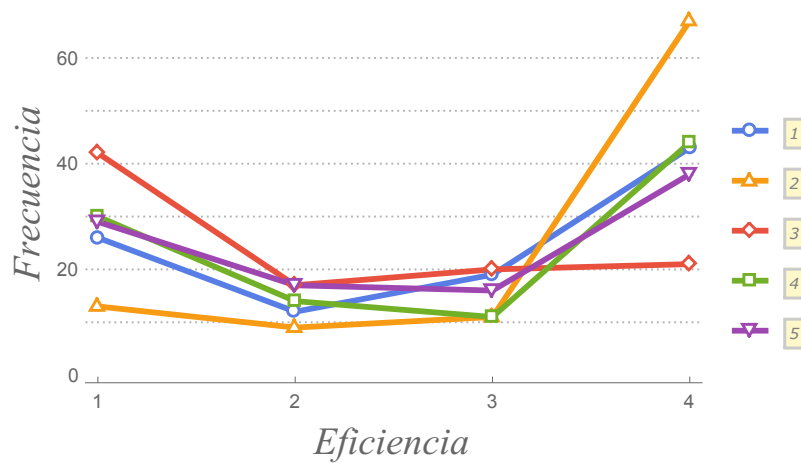
Excluyendo la red # 2 que es difícil de controlar en ambos esquemas, hay una disminución razonable en la frecuencia en que el control no se logra en el tiempo estipulado (clase 4). La red #3 fue la que experimentó la mayor mejoría, al ser la que tiene la topología más restrictiva (el nodo 2 es suborninado del resto de la red ya que sólo recibe información, la

que envía la recibe él mismo por la retroalimentación). A diferencia de las otras redes que están muy conectadas y son relativamente simétricas el resultado se parece más al de la red homogénea.

Las matrices de transferencia de información para condiciones iniciales generadas al azar para cada red son (fig. 4.6)

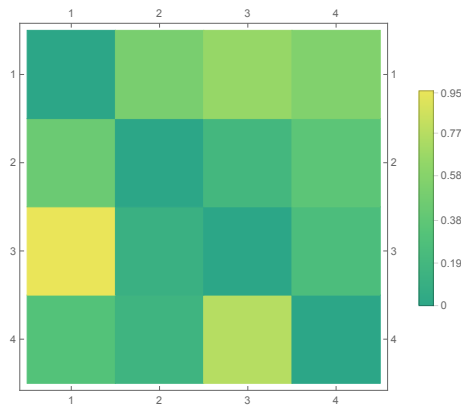


(a) Curva de eficiencia seleccionando nodos al azar

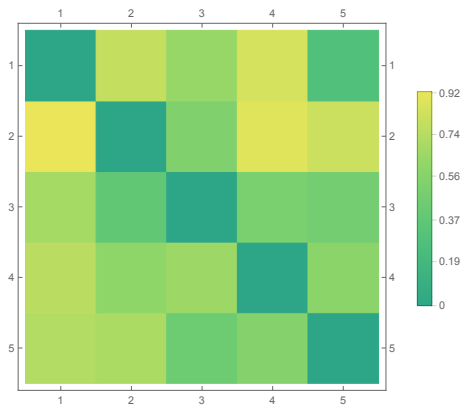


(b) Curva de eficiencia seleccionando nodos por el balance de información

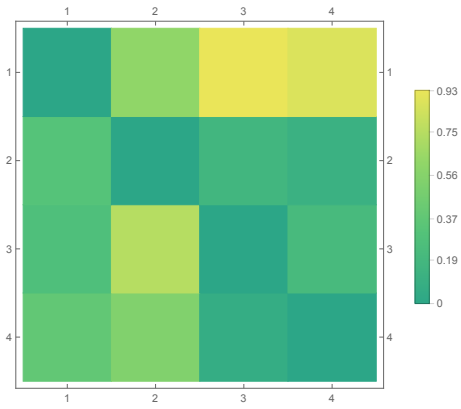
Figura 4.5: Eficiencia del control en las redes dirigidas



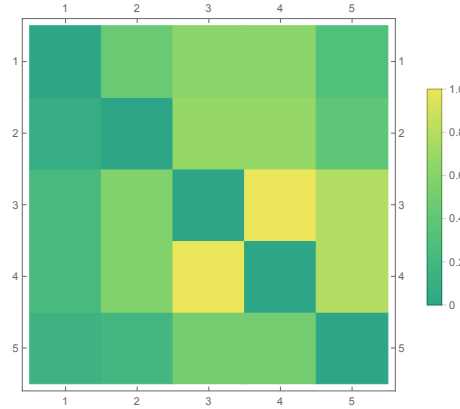
(a) Red 1



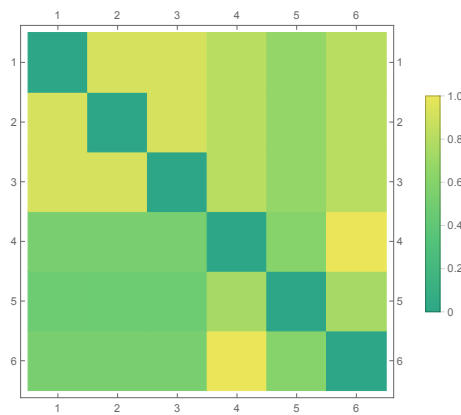
(b) Red 2



(c) Red 3



(d) Red 4



(e) Red 5

Figura 4.6: Matrices \tilde{V}

4.2. Conclusiones

El esquema propuesto, es especialmente efectivo a la hora de controlar redes de topología asimétrica ya que la Transferencia de Información es capaz de detectar nodos que estén subordinados a sus vecinos debido a que contribuyen poco con la creación de información en el sistema y por lo tanto su balance β_k es menor que el de otros vértices. En el caso de las redes homogéneas la efectividad del método depende mucho del valor del parámetro de acople y de la cantidad de tiempo τ que se le da al sistema para que converja al estado deseado. Valores extremos del parámetro de acople generan matrices de transferencia de información \tilde{V} homogéneas de modo que es muy difícil discriminar cuales nodos están generando información.

Una desventaja notable del método es su alto costo computacional, 3 veces mayor que el asociado a la selección los nodos al azar, para una red con L pequeño, ya que a medida que el tamaño de la red aumenta, el tiempo de procesamiento se incrementa polinómicamente. También puede ser problemática la definición de un tamaño de ventana temporal adecuado, ya que la T. I. fluctúa mucho al aumentar o reducir el registro temporal que se suministra, de modo que requiere múltiples intentos llegar a un v adecuado que nos proporcione la información relevante del sistema.

Dado que la T. I. depende de la topología y la dinámica local, la selección de los nodos centrales, en la metodología propuesta, depende de ambas características. Sin embargo, el método da pesos desconocidos a cada una de ellas. Esto sugiere, que una posible solución al problema del costo computacional, es utilizar una medida de centralidad basada en la topología (como la degree centrality) hacer un muestreo de los nodos con muchas conexiones y medir la transferencia de información solo entre esos nodos. De este modo se tomaría en cuenta explícitamente tanto la topología como la dinámica y se reduciría notablemente el costo computacional al disminuir el número de elementos de matriz que calcular, sin embargo esto se sale del alcance de esta tesis, quedando para trabajos futuros.

Otro comportamiento resaltante del método es su eficiencia, reflejada en su preferencia por la selección de los sitios de pinning de clase 1.

Finalmente, el uso de un esquema que mezcla la topología de la red y la dinámica de los nodos de la misma, pone en contexto una idea novedosa que ofrece alternativas a la definición del concepto de centralidad, no solo en el problema de control.

Bibliografía

- [1] ALIREZA ABBASI, L. H. *Hybrid Centrality Measures for Binary and Weighted Networks en Complex Networks*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [2] BENINCÀ, E., HUISMAN, J., HEERKLOSS, R., JÖHNK, K. D., BRANCO, P., VAN NES, E. H., SCHEFFER, M., AND ELLNER, S. P. Chaos in a long-term experiment with a plankton community. *Nature* 451, 7180 (2008), 822–825.
- [3] BOCCALETTI, S., LATORA, V., MORENO, Y., CHAVEZ, M., AND HWANG, D.-U. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports* 424, 4 (2006), 175–308.
- [4] C. D. WAGNER, B. N., AND PERSSON, P. B. Chaos in blood pressure control. *Cardiovascular Research* 370 (1996), 380–387.
- [5] CHUNG, F. *Spectral Graph Theory*. No. 92 in CBMS Regional Conference Series. Conference Board of the Mathematical Sciences, 1994.
- [6] CONTOPOULOS, G. Order and chaos in astronomy. *Lecture Notes in Physics* 626 (2003), 3–29.
- [7] DEVANEY, R. *An Introduction To Chaotic Dynamical Systems*. Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [8] E. OTT, C. G., AND YORKE, J. A. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett* 64 (1990), 1196–.
- [9] GANG, H., AND ZHILIN, Q. Controlling spatiotemporal chaos in coupled map lattice systems. *Physical Review Letters* 72, 1 (1994), 68.
- [10] GRIGORIEV, R. Optimal control of spatiotemporal chaos in coupled map lattices. In *IUTAM Symposium on New Applications of Nonlinear and Chaotic Dynamics in Mechanics* (1999), Springer, pp. 543–550.
- [11] GRIGORIEV, R., CROSS, M., AND SCHUSTER, H. Pinning control of spatiotemporal chaos. *Physical Review Letters* 79, 15 (1997), 2795.
- [12] GRIGORIEV, R. O. Symmetry and control: spatially extended chaotic systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 140, 3 (2000), 171–192.
- [13] HAO, B. *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems*. World Scientific, 1989.
- [14] HOLGER KANTZ, T. S. *Non Linear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, 1999.
- [15] J. WEISS, A. GARFINKEL, M. S., AND DITTO, W. Chaos and chaos control in biology.

- J. Clin. Invest* 93 (1994), 1355–1360.
- [16] JALAN, S., AND AMRITKAR, R. Self-organized and driven phase synchronization in coupled maps. *Physical review letters* 90, 1 (2003).
- [17] KANEKO, K. Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice towards a prelude of a “field theory of chaos”. *Progress of Theoretical Physics* 72, 3 (1984), 480–486.
- [18] KLEMM, K., SERRANO, M. Á., EGUÍLUZ, V. M., AND SAN MIGUEL, M. A measure of individual role in collective dynamics. *Scientific reports* 2 (2012).
- [19] LIU, B., AND LAI, H. *Matrices in Combinatorics and Graph Theory*. Network Theory and Applications. Springer, 2000.
- [20] LIU, Y.-Y., SLOTINE, J.-J., AND BARABÁSI, A.-L. Controllability of complex networks. *Nature* 473, 7346 (2011), 167–173.
- [21] LIU, Y.-Y., SLOTINE, J.-J., AND BARABÁSI, A.-L. Control centrality and hierarchical structure in complex networks. *Plos one* 7, 9 (2012), e44459.
- [22] LUENBERGER, D. G. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*. Wiley, 1979.
- [23] PETHEL, S. D., CORRON, N. J., AND BOLLT, E. Symbolic dynamics of coupled map lattices. *Physical review letters* 96, 3 (2006), 034105.
- [24] PYRAGAS, K. Delayed feedback control of chaos. *Phil. Trans. R. Soc. A* 364 (1992), 2309–2334.
- [25] RIBNIKOV, K., AND MEDKOV, K. *Análisis combinatorio*. Mir, 1988.
- [26] RUELLE, D. Where can one hope to profitably apply the ideas of chaos? *Physics Today* 47, 7 (1994), 24–30.
- [27] SCHIFF, S. J., JERGER, K., DUONG, D. H., CHANG, T., SPANO, M. L., DITTO, W. L., ET AL. Controlling chaos in the brain. *Nature* 370, 6491 (1994), 615–620.
- [28] SCHREIBER, T. Measuring information transfer. *Physical Review Letters* 85, 2 (2000), 461.
- [29] SCHÖLL, E., AND SCHUSTER, H. G. *Handbook of Chaos Control*. WILEY-VCH, 2008.
- [30] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Perseus Books, 1994.
- [31] WANG, S., WEI, H.-L., COCA, D., AND BILLINGS, S. A. Model term selection for spatio-temporal system identification using mutual information. *International Journal of Systems Science* 44, 2 (2013), 223–231.
- [32] X. WANG, J. MENG, G. T., AND ZOU, L. Research on the relation of eeg signal chaos characteristics with high-level intelligence activity of human brain. *Non linear Bio-medical Physics* 4, 2 (2010).