UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

FACULTAD DE CIENCIAS

POSTGRADO EN MATEMÁTICA

CLASES DE PERTURBACIÓN EN TEORÍA DE FREDHOLM

Autor: MSc. Margot Salas Brown

Tutor: Dr. Manuel González

Tesis Doctoral

Presentada ante la ilustre

Universidad Central de Venezuela

Para optar al título de

Doctor en Ciencias

Mención Matemática

Caracas, 15 de Junio de 2011

A la gloria y alabanza de Dios

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios, por estar conmigo en cada paso que doy y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo este periodo de estudio.

Me gustaría agradecer sinceramente a mi tutor de Tesis, el Dr. Manuel González. Sus conocimientos, sus sabias orientaciones, su esfuerzo en cada viaje y sobre todo su infinita paciencia han sido fundamentales para mi formación.

Al ver un trabajo de este tipo se suele pensar que los únicos responsables son el autor bajo la conducción del tutor, sin embargo, no hay nada más lejos de la verdad, detrás hay una gran cantidad de personas e instituciones, que de una manera u otra han contribuido a la realización de un trabajo como este. Entre estas personas, merece un especial agradecimiento el Dr. Ennis Rosas, Coordinador del Postgrado de Matemática de la Universidad de Oriente y gestor del convenio UDO-UCV. Gracias Prof. Ennis, no sólo como Coordinador, sino como un padre que tuvo fe en mí aún cuando a veces ni yo misma la tenía.

Al Postgrado de Matemática de la Universidad Central de Venezuela y al Postgrado de Matemática de la Universidad de Oriente por haberme permitido realizar mis estudios. Al FONACIT, en el Marco de la Misión Ciencia, por el apoyo económico.

A mi amigo, confidente y esposo, Julio Ramos, por escucharme tantas veces, por ser mi apoyo y por darme el ánimo y la fuerza para seguir adelante. A mis padres, por enseñarme que la constancia y el esfuerzo son el camino para lograr objetivos, a mi hijo quien con su ingenuidad y su actitud, de quien siempre se las sabe todas supo decirme, cuando estaba en momentos de afán, que todo esto era para mí bien.

A todas y cada una de las personas que han vivido conmigo la realización de este trabajo, compañeros, amigos y profesores, en especial a José Sanabria, Yanett Bolívar, Carlos Carpintero, Carmen Salas, les agradezco el haberme brindado apoyo, colaboración, ánimo y sobre todo cariño y amistad.

Índice general

RESUMEN

Se obtienen condiciones sobre pares de espacios de Banach X e Y para que las componentes de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm superior de X en Y, coincida con la clase de operadores estrictamente singulares de X en Y. También se obtienen condiciones para que las componentes de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm inferior de X en Y, coincida con la clase de operadores estrictamente cosingulares de X en Y. Se muestran ejemplos concretos de espacios de Banach que satisfacen las condiciones antes mencionadas.

INTRODUCCIÓN

El problema de la clase de perturbación en Teoría de Fredholm se refiere a la estabilidad de los operadores semi-Fredholm bajo perturbaciones aditivas. Este problema ha sido estudiado durante varios años y por varios autores, se podría decir que tuvo su origen en los resultados clásicos dados por Kato en 1958, y por Vladimirskii en 1967. Estos resultados establecen, respectivamente, que si T y K son operadores acotados entre espacios de Banach X e Y, entonces $T + K$ es semi-Fredholm superior siempre que T sea semi-Fredholm superior y K sea estrictamente singular ([33, Teorema 5.2]), y que $T + K$ es semi-Fredholm inferior siempre que T sea semi-Fredholm inferior y K sea estrictamente cosingular ([56, Corolario 1]). De modo que, el problema de la clase de perturbación consiste en determinar si es cierto o no que los operadores estrictamente singulares y los operadores estrictamente cosingulares son los únicos operadores que satisfacen estas propiedades, respectivamente. Este problema fue planteado en 1960 por Gohberg, Markus y Feldman [20] para operadores semi-Fredholm superior. Luego fue propuesto por Caradus en 1974, [10], y por Pietsch en 1980, [48].

Con el fin de formular explícitamente el problema, proporcionaremos algunas notaciones y definiciones. Sean X y Y espacios de Banach, se denota por $\mathcal{L}(X, Y)$ el espacio de todos los operadores lineales y continuos de X en Y, en el caso que $X = Y$ se denotará simplemente por $\mathcal{L}(X)$. Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se llama *semi-Fredholm superior* si su rango es cerrado y su núcleo tiene dimensión finita; el operador T se dice *semi-Fredholm inferior* si su rango tiene codimensión finita, de aquí que éste es un conjunto cerrado; finalmente, un operador T se denomina *Fred-*

holm si es semi-Fredholm superior y semi-Fredholm inferior. Se denota por $\Phi_+(X,Y)$, $\Phi_-(X,Y)$ y $\Phi(X,Y)$ la clase de operadores semi-Fredholm superior, semi-Fredholm inferior y Fredholm de X en Y, respectivamente. En el caso que $X = Y$ simplemente se escribe $\Phi_+(X)$, $\Phi_-(X)$ y $\Phi(X)$.

Sea $\mathcal{A}(X,Y)$ una clase de operadores continuos entre espacios de Banach. La *Clase de perturbación* de $\mathcal{A}(X,Y)$, se denota por $P\mathcal{A}(X,Y)$, y se define en [35] como:

$$P\mathcal{A}(X,Y) := \{K \in \mathcal{L}(X,Y) : K + A \in \mathcal{A}(X,Y), \text{ para cada } A \in \mathcal{A}(X,Y)\},$$

donde X y Y son espacios de Banach tales que $\mathcal{A}(X,Y)$ es no vacío.

Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se denomina *estrictamente singular* si ninguna restricción TJ_M de T a un subespacio cerrado de dimensión infinita M de X es un isomorfismo. El operador T se dice *estrictamente cosingular* si no existe subespacio cerrado de codimensión infinita N de Y tal que $Q_N T$ es sobreyectiva, donde J_M es la aplicación inclusión de M en X y Q_N es la aplicación cociente sobre X/N. Se denota por $\mathcal{SS}(X,Y)$ y $\mathcal{SC}(X,Y)$ las clases de los operadores estrictamente singulares y estrictamente cosingulares respectivamente.

La clase de perturbación para operadores Fredholm Φ está totalmente determinada, de hecho coincide con la clase de operadores inesenciales (véase [35]). Sin embargo, la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm Φ_+ y Φ_- es, en general, desconocida, por los resultados antes mencionados de Kato y Vladimirskii se tiene que $\mathcal{SS}(X,Y) \subset P\Phi_+(X,Y)$ y $\mathcal{SC}(X,Y) \subset P\Phi_-(X,Y)$.

Durante años se estudió el problema de la clase de perturbación, obteniendo solución positiva para pares de espacios concretos. Es decir se encontró que las igualdades

$$P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y), \tag{1}$$

$$P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y), \tag{2}$$

son ciertas para ciertos pares de espacios de Banach. En 1969 Milmam [41], demostró que (1) es cierto si $X = Y = L_p(\mu)$, $2 < p < \infty$, y (2) es cierta cuando

$X = Y = L_p(\mu)$, $1 < p < 2$, luego en 1977 Weis, [57], logró extender este resultado para $1 \leq p \leq \infty$.

En 1971, Lebow y Schechter [35], mostraron que si Y es subproyectivo entonces la igualdad (1) se cumple y si X es superproyectivo entonces la igualdad (2) es cierta (Véase Definición 1.2.3 de la Tesis, para la definición y propiedades de espacios subproyectivos y superproyectivos). Por otra parte, en el 2002, Aiena y González [4], establecen que si X es hereditariamente indescomponible entonces (1) es cierta y si Y es cociente indescomponible entonces la igualdad (2) es cierta. En el 2003 Aiena, González y Martinón, [5], obtienen que (1) se cumple si X es separable y Y contiene una copia complementada de $C[0,1]$ y (2) se cumple si X contiene una copia complementada de ℓ_1 y Y es separable.

De manera que, como se ha mencionado antes, el problema de las clases de perturbaciones durante más de 40 años permaneció sin resolverse en su totalidad, no fue hasta el 2003 que González, [26], logró resolver el problema negativamente, utilizando producto de espacios de Banach exóticos de tipo hereditariamente indescomponible (H.I.) y de tipo cociente indescomponible (Q.I.).

Aún cuando este problema tiene solución negativa, es interesante encontrar pares de espacios X, Y tales que las igualdades $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ y $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ sean ciertas, ya que esto proporcionaría una caracterización intrínseca de los operadores en $P\Phi_+$ y $P\Phi_-$, puesto que la propiedad que caracteriza a los operadores $K \in \mathcal{SS}(X,Y)$ depende de la acción de K sobre subespacios cerrados de X, mientras que la propiedad que caracteriza a los operadores $K \in P\Phi_+(X,Y)$ depende de las propiedades de la suma de K con todos los operadores en $\Phi_+(X,Y)$.

En este trabajo se determinan pares de espacios X e Y para los cuales el problema de la clase de perturbación tiene solución positiva. Específicamente, en el 2010, González y Salas Brown [24] determinan que $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ cuando $X = L_p(0;1)$ con $1 < p < 2$ y Y satisface la propiedad de Orlicz, y cuando $X = L_1(0;1)$ y Y es secuencialmente débil completo. También obtienen que $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ cuando $Y = L_p(0;1)$ con $2 < p < \infty$ y X^* satisface la propiedad de Orlicz.

Luego en el 2011, González, Martínez-Abejón y Salas-Brown [23], determinan que $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ cuando X es fuertemente subproyectivo. Y que $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ cuando Y es fuertemente superproyectivo. Estos resultados nos proporcionan una gran cantidad de ejemplos donde el problema de la clase de perturbación tiene solución positiva; de hecho, las clases de espacios fuertemente subproyectivo y fuertemente superproyectivo contienen una gran cantidad de espacios clásicos conocidos. Son fuertemente subproyectivos los espacio de las sucesiones ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ y c_0, el espacio de James J, el espacio de Lorentz de sucesiones $\ell_{p,q}$ con $1 \leq p, q < \infty$, el espacio de Baernstein B_p para $1 < p < \infty$, el espacio de Tsirelson T, el espacio $L_p(0,1)$ para $2 \leq p < \infty$, el espacio de Lorentz $X = L_{p,q}(0,1)$ par $2 \leq p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$, entre otros.

Son fuertemente superproyectivos los espacio de las sucesiones p-sumables, ℓ_p con $1 < p < \infty$, c_0, el espacio J^*, el dual del espacio de James , el espacio de Lorentz de sucesiones $\ell_{p,q}$ con $1 < p, q < \infty$, el dual del espacio espacio de Baernstein B_p^* para $1 < p < \infty$, el dual del espacio de Tsirelson T, el espacio $L_p(0,1)$ para $1 < p \leq 2$, el espacio de Lorentz $X = L_{p,q}(0,1)$ par $1 < p \leq 2$ y $1 < q < \infty$, entre otros.

Estos resultados han sido distribuidos en este trabajo de la siguiente manera, en el Capítulo 1 se introducen nociones preliminares, básicas para la comprensión de los capítulos posteriores, relacionadas con bases de Schauder y sucesiones básicas. También se exponen propiedades de ciertas clases de operadores. Finalmente se expone de forma detallada el problema de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm, su evolución histórica y los resultados obtenidos antes de los trabajos [24] y [23].

En el Capítulo 2, se proporcionan los detalles de los resultados obtenidos por

González y Salas-Brown en el 2010 [24], se enuncian algunas propiedades geométricas de los espacios L_p, principalmente las relacionadas con los subespacios complementados de estos. Se introduce la propiedad de Orlicz y se ilustran espacios de Banach que satisfacen esta propiedad a través de ejemplos concretos. Finalmente se dan condiciones para que el problema de la clase de perturbación tenga solución positiva cuando se consideran estos espacios.

En el Capítulo 3, se proporcionan los detalles de los resultados obtenidos por González, Martínez-Abejón y Salas-Brown en el 2011 [23], se introducen dos nuevas clases de espacios, los espacios fuertemente subproyectivos y los espacios fuertemente superproyectivos, se estudian algunas propiedades de estos espacios y se muestran ejemplos concretos de espacios de Banach que pertenecen a estas clases. Finalmente se resuelve el problema de la clase de perturbación para estos espacios.

Capítulo 1

Preliminares

El objeto de este primer capítulo es presentar varios resultados de carácter general que se emplearán a la largo de este trabajo. Algunos de ellos forman parte de la teoría básica de espacios de Banach y teoría de operadores, por lo que en la mayoría de los casos nos limitamos a dar referencias precisas de los mismos.

1.1. Operadores lineales y acotados entre espacios de Banach

En esta sección se recopilan algunas propiedades de ciertas clases de operadores lineales acotados, como lo son los operadores semi-Fredholm superior, semi-Fredholm inferior, Fredholm, estrictamente singular, estrictamente cosingular e inesenciales.

Sean X y Y espacios de Banach, como ya se ha mencionado en la introducción, se denota por $\mathcal{L}(X,Y)$ el espacio de todos los operadores lineales y acotados de X en Y. Asociados aun operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se consideran los siguientes subespacios lineales:

$$N(T) = \{x \in X : T(x) = 0\} \subset X$$

que es el *núcleo* de T, y

$$R(T) = \{y \in Y : y = T(x) \text{ para algún } x \in X\} \subset Y$$

que es el rango de T. Es conocido (ver [40, Teorema 1.7.14]) que si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $R(T)$ es cerrado en Y entonces $X/N(T)$ es isomorfo a $R(T)$. Para un subespacio cerrado M de X, X/M denota el espacio cociente el cual se define por:

$$X/M = \{x + M : x \in X\}$$

donde $x + M = \{x + m : m \in M\}$. La dimensión del espacio cociente X/M se denomina *codimensión* de M y se denota por *codim*(M)

El espacio dual de X, se denota por X^*, y está formado por todos los funcionales lineales y acotados definidos sobre X. Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se denota por $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ el operador adjunto de T, el cual se define como $(T^*f)(x) = f(Tx)$ para cada $x \in X$ y cada $f \in Y^*$.

Sea M un subconjunto de un espacio de Banach, el *anulador* de M, el cual se denota por $M^\perp$, es un subespacio cerrado de X^* y se define como:

$$M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0 \,\text{para cada}\, x \in M\}.$$

El *preanulador* de un subconjunto W de X^*, el cual se denota por ${}^\perp W$, es un subespacio cerrado de X y se define como:

$${}^\perp W = \{x \in X : f(x) = 0 \,\text{para cada}\, f \in W\}.$$

Un operador $P \in \mathcal{L}(X,X)$ es una proyección si $P^2 = P$. Un subespacio M de X se denomina complementado si existe una proyección $P \in \mathcal{L}(X,X)$ tal que $R(P) = M$. Todo subespacio de X de dimensión finita es complementado, de igual manera, todo subespacio cerrado de X de codimensión finita es complementado. Subespacios complementados son siempre cerrados. Si M es un subespacio complementado de X, entonces existe un subespacio cerrado N de X tal que X es suma directa de M y N, esto se denota por $X = M \oplus N$ y significa que $M \cap N = \{0\}$ y $X = M + N$, además se cumple que X/M es isomorfo a N.

Los siguientes resultados son bien conocidos, se puede consultar [34] y [40] para una exposición más detallada:

1. Si M es un subespacio cerrado de X, entonces $X^*/M^\perp$ es isomorfo a M^*, y $M^\perp$ es isomorfo a $(X/M)^*$.

2. Si M es un subespacio cerrado de X entonces $\,^\perp(M^\perp) = M$.

3. Sea M un subespacio de X^*, M es cerrado en la topología débil* si y sólo si $(^\perp M)^\perp = M$.

4. Si M es un subespacio reflexivo de X^* entonces $(^\perp M)^\perp = M$.

5. Si M y N son subespacios cerrados de X tales que $X = M \oplus N$ entonces $X^* = M^\perp \oplus N^\perp$.

6. Si M y N son subespacios cerrados de X entonces $(M+N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

7. Si M y N son subespacios cerrados de X entonces $(M+N)$ es cerrado en X sí y sólo si $M^\perp + N^\perp$ es cerrado en X^*.

Si M es un subespacio cerrado de X entonces se denota por J_M la función inclusión de M en X y si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ entonces $T|_M$ denota la composición $T \circ J_M$, si N es un subespacio cerrado de Y entonces se denota por Q_N la aplicación cociente de Y en Y/N. Se denota por I_X al operador identidad sobre X. Se dice que un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es un isomorfismo si es inyectivo y tiene rango cerrado, esto es equivalente a decir que existe una constante $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in X$.

Lema 1.1.1. [3, Lema 2.2] *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$,*

1. *Si M es un subespacio cerrado de X tal que $T \circ J_M$ es un isomorfismo, $T(M)$ es complementado en Y con complemento cerrado N entonces M es complementado en X y $T^{-1}(N)$ es el complemento cerrado de M*

2. *Si N es un subespacio cerrado de Y tal que $Q_N \circ T$ es sobreyectiva, $T^{-1}(N)$ es complementado en X con complemento cerrado M entonces N es complementado en Y y $T(M)$ es el complemento cerrado de N*

1.1.1. Operadores semi-Fredholm

En esta sección se introducen los operadores semi-Fredholm superior, semi-Fredholm inferior y de Fredholm, y se dan algunas propiedades básicas de estos.

La clase de todos los operadores *semi-Fredholm superior* en $\mathcal{L}(X,Y)$, se denota por $\Phi_+(X,Y)$ y se define como:

$$\Phi_+(X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : \dim(T) < \infty \text{ y } R(T) \text{ es cerrado}\}.$$

La clase de todos los operadores *semi-Fredholm inferior* en $\mathcal{L}(X,Y)$, se denota por $\Phi_-(X,Y)$ y se define como:

$$\Phi_-(X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : \dim(Y/R(T)) < \infty\}.$$

La clase de todos los operadores de *Fredholm* en $\mathcal{L}(X,Y)$, se denota por $\Phi(X,Y)$ y se define como, $\Phi(X,Y) = \Phi_+(X,Y) \cap \Phi_-(X,Y)$.

Los operadores semi-Fredholm superior y semi-Fredholm inferior son duales uno del otro (ver [10]), esto es $T \in \Phi_+(X,Y)$ si y sólo si $T^* \in \Phi_-(Y^*,X^*)$, y $T \in \Phi_-(X,Y)$ si y sólo si $T^* \in \Phi_+(Y^*,X^*)$. Otras propiedades que satisfacen estos tipo de operadores son:

1. Si $T \in \Phi_+(X,Y)$ y $S \in \Phi_+(Y,Z)$ entonces $ST \in \Phi_+(X,Z)$.

2. Si $T \in \Phi_-(X,Y)$ y $S \in \Phi_-(Y,Z)$ entonces $ST \in \Phi_-(X,Z)$.

3. Sean $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, si $ST \in \Phi_+(X,Z)$ entonces $T \in \Phi_+(X,Y)$.

4. Sean $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, si $ST \in \Phi_-(X,Z)$ entonces $S \in \Phi_-(Y,Z)$.

5. Si $T \in \Phi_+(X,Y)$ y $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ es un operador de rango finito o compacto entonces $T + K \in \Phi_+(X,Y)$.

6. Si $T \in \Phi_-(X,Y)$ y $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ es un operador de rango finito o compacto entonces $T + K \in \Phi_-(X,Y)$.

7. Sea $T \in \Phi_+(X,Y)$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\|S\| < \epsilon$ entonces $T + S \in \Phi_+(X,Y)$, análogamente si $T \in \Phi_-(X,Y)$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\|S\| < \epsilon$ entonces $T + S \in \Phi_-(X,Y)$.

De esta última propiedad se deduce que $\Phi_+(X,Y)$ y $\Phi_-(X,Y)$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{L}(X,Y)$. En [10] se puede encontrar una exposición detallada sobre este tema, así como también las demostraciones de las propiedades antes mencionadas.

Un ejemplo importante de operadores semi-Fredholm superior son los operadores acotados inferiormente, un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es *acotado inferiormente* si es inyectivo y tiene rango cerrado. Un ejemplo importante de operador semi-Fredholm inferior son los operadores sobreyectivos.

1.1.2. Operadores estrictamente singulares, estrictamente cosingulares e inesenciales

Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se llama *estrictamente singular* si ninguna restricción, $T|_M$, de T a un subespacio cerrado de dimensión infinita M de X es un isomorfismo; y se dice *estrictamente cosingular* si no existe subespacio cerrado de codimensión infinita N de Y tal que $Q_N T$ es sobreyectiva. Se denota por $\mathcal{SS}(X,Y)$ y $\mathcal{SC}(X,Y)$ las clases de los operadores estrictamente singulares y estrictamente cosingulares respectivamente. Estas operadores también se llaman *operadores de Kato* y *operadores de Pelczynski*, respectivamente. Para un estudio detallado de las propiedades básicas de estas dos clases puede ver [48].

Estas clases de operadores están relacionados por dualidad de la siguiente manera, si el adjunto de un operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ es estrictamente singular entonces el operador T es estrictamente cosingular, esto es si $T^* \in \mathcal{SS}(Y^*, X^*)$ entonces $T \in \mathcal{SC}(X,Y)$, análogamente si $T^* \in \mathcal{SC}(Y^*, X^*)$ entonces $T \in \mathcal{SS}(X,Y)$, una demostración de este resultado puede ser encontrada en [1, Teorema 7.53], y en [2] se puede encontrar un ejemplo que muestra que los recíprocos de las relaciones anteriores en general no son ciertos.

En [48] se muestra que $\mathcal{SS}(X,Y)$ y $\mathcal{SC}(X,Y)$ son subespacios cerrados de $\mathcal{L}(X,Y)$, más aún si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{SS}(Y,Z)$ y $U \in \mathcal{L}(Z,W)$ entonces $UST \in \mathcal{SS}(X,W)$. De manera similar si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{SC}(Y,Z)$ y $U \in \mathcal{L}(Z,W)$ entonces $UST \in \mathcal{SC}(X,W)$.

Los operadores compactos constituyen un ejemplo de operadores que son estrictamente singular y estrictamente cosingular tal y como lo exhibe el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2. *Todo operador compacto es estrictamente singular y estrictamente cosingular*

Los detalles de la demostración del teorema anterior se pueden encontrar en [1, Teorema 7.36]. En [2] se puede encontrar un ejemplo que muestra que el recíproco del teorema anterior en general no es cierto.

Otro ejemplo importante de operadores que son estrictamente singular lo constituyen los operadores débil compactos cuyo dominio satisfaga la propiedad de Dunford-Pettis, se recuerda que un espacio de Banach X satisface la propiedad de *Dunford-Pettis* si todo operador débil compacto $T\colon X \longrightarrow Y$ es completamente continuo, es decir, siempre que (x_n) converja débilmente en X entonces (Tx_n) converge en norma en Y. Los espacios $L_\infty(0,1)$, $L_1(0,1)$ y el espacio de las funciones continuas sobre el conjunto compacto K, $C(K)$, son ejemplos de espacios que tienen la propiedad de Dunford-Pettis (ver [36, Teorema II. 4.30] y [6, Teorema 5.4.5]).

Proposición 1.1.3. *Sea X un espacio de Banach que satisface la propiedad de Dunford-Pettis, entonces todo operador débil compacto $T\colon X \longrightarrow Y$ es estrictamente singular.*

Demostración. Sea M un subespacio cerrado de X tal que la restricción $T|_M$ es un isomorfismo y sea (x_n) una sucesión acotada en M. Como T es débil compacto existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $T(x_{n_k})$ converge débilmente. Dado que $T|_M$ es un isomorfismo entonces (x_{n_k}) converge débilmente. Esto dice que M es reflexivo.

Como X satisface la propiedad de Dunford-Pettis, el operador T es completamente continuo. Entonces la sucesión (Tx_{n_k}) converge en norma, por lo que T es compacto. De aquí que M tiene dimensión finita y por tanto T es estrictamente singular. □

La siguiente proposición presenta una propiedad para operadores lineales definidos sobre L_∞, y es consecuencia de [6, Teorema 5.5.5].

Teorema 1.1.4. *Si $T \in \mathcal{L}(L_\infty, Y)$ entonces T es débil compacto o existe un subespacio cerrado M, de dimensión infinita, de L_∞ tal que M es isomorfo a ℓ_∞ y $T|_M$ es un isomorfismo.*

Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se denomina *inesencial* si $I_X - ST \in \Phi(X,X)$ para todo $S \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se denota por $\mathcal{I}n(X,Y)$ la clase de los operadores inesenciales de X en Y.

Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ en [48] se muestra que las clases de los operadores estrictamente singulares y estrictamente cosingulares están contenidas en la clase de los operadores inesenciales. También es conocido que $\mathcal{I}n(X)$ es un ideal de operadores [48].

1.2. La clase de perturbación para operadores semi-Fredholm

Sea $\mathcal{A}$ una clase de operadores continuos entre espacios de Banach. La *Clase de perturbación* $P\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ se define en [35] por sus componentes, es decir,

$$P\mathcal{A}(X,Y) := \{K \in \mathcal{L}(X,Y) : K + A \in \mathcal{A}(X,Y), \text{ para cada } A \in \mathcal{A}(X,Y)\},$$

donde X y Y son espacios de Banach tales que $\mathcal{A}(X,Y)$ es no vacío. En el caso que $X = Y$ escribiremos $\mathcal{A}(X)$ en vez de $\mathcal{A}(X,X)$.

Teorema 1.2.1. [35, Lema 2.1] *Dados dos espacios de Banach X, Y para los cuales $P\mathcal{A}(X,Y) \neq \emptyset$, se cumple que:*

1. *$P\mathcal{A}(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$*
2. *Si $T \in P\mathcal{A}(X,Y)$, entonces TS y UT están en $P\mathcal{A}(X,Y)$ para todo $S \in \mathcal{L}(X)$ y todo $U \in \mathcal{L}(Y)$*

Lema 1.2.2. [4, Lemma 3.3] *Sea $\mathcal{A}$ una de las clases Φ_+, Φ_- o Φ. Suponga que $\mathcal{A}(X,Y) \neq \emptyset$ y sea $K \in P\mathcal{A}(X,Y)$. Entonces:*

1. *Si A es un isomorfismo de W sobre X y B es un isomorfismo de Y sobre Z, entonces $BKA \in P\mathcal{A}(W,Z)$.*
2. *Si $A \in L(X)$ y $B \in L(Y)$, entonces $BKA \in P\mathcal{A}(X,Y)$.*

Se conoce que si X, Y son espacios de Banach tales $\Phi(X,Y)$ es no vacío entonces la clase $P\Phi(X,Y)$ coincide con $\mathcal{I}n(X,Y)$ [35], sin embargo, la clase de perturbación de Φ_+ y de Φ_- en general se desconoce.

Para cada par de espacios de Banach X, Y para los cuales la correspondiente clase de perturbación esté definida, se cumple que

1. $\mathcal{SS}(X,Y) \subset P\Phi_+(X,Y)$ ([33, Teorema 5.2]),
2. $\mathcal{SC}(X,Y) \subset P\Phi_-(X,Y)$ ([56, Corolario 1]),
3. $P\Phi_+(X,Y) \cup P\Phi_-(X,Y) \subset \mathcal{I}n(X,Y)$ ([10, Teorema 5.6.9]).

A continuación se presentan pares de espacios X, Y para los cuales las igualdades $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ y $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ son ciertas. Para esto se necesitan las siguientes definiciones.

Definición 1.2.3. Un espacio de Banach X se dice que es *subproyectivo* si todo subespacio cerrado M de X de dimensión infinita, contiene un subespacio N de dimensión infinita, complementado en X.

Se dice que X es *superproyectivo* si todo subespacio cerrado M de X de codimensión infinita está contenido en un subespacio N de codimensión infinita, complementado en X.

Los espacios subproyectivos y superproyectivos se preservan bajo isomorfismos, y obedecen una relación de dualidad siempre y cuando el espacio en cuestión sea reflexivo, específicamente si X es reflexivo entonces X es subproyectivo sí y sólo si X^* es superproyectivo, análogamente si X es reflexivo entonces X es superproyectivo sí y sólo si X^* es subproyectivo. Para más detalles acerca de las propiedades de los espacios subproyectivos y superproyectivos se puede consultar [59].

Ejemplo 1.2.4. A continuación se muestran algunos espacios subproyectivos y superproyectivos (ver [59])

1. Todo espacio de Hilbert es subproyectivo y superproyectivo.

2. El espacio de sucesiones ℓ_p para $1 < p < \infty$ es subproyectivo y superproyectivo.

3. El espacio de las sucesiones convergentes a 0, c_0 es subproyectivo.

4. El espacio de funciones $L_p(0,1)$ para $2 \leq p < \infty$ es subproyectivo y el espacio de funciones $L_p(0,1)$ para $1 < p \leq 2$ es superproyectivo.

Definición 1.2.5. Un espacio de Banach X se dice que es *indescomponible* si no se puede expresar como la suma directa de dos subespacios cerrados de dimensión infinita.

Se dice que X es *hereditariamente indescomponible* si todo subespacio cerrado de X es indescomponible. Se dice que X es *hereditariamente cociente indescomponible* si todo cociente de X es indescomponible.

Los espacios de Banach de dimensión finita son ejemplos triviales de espacios indescomponibles. El siguiente resultado, proporcionado por Weis en 1981 [58], caracteriza los espacios hereditariamente indescomponible y hereditariamente cociente indescomponible, y proporciona una solución positiva al problema de la clase de perturbación.

Teorema 1.2.6. *Sea Y un espacio de Banach,*

1. $\mathcal{L}(Y,Z) = \mathcal{SS}(Y,Z) \cup \Phi_+(Y,Z)$ *para todo espacio de Banach Z sí y sólo si Y es hereditariamente indescomponible.*

2. $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y) \cup \Phi_+(X,Y)$ *para todo espacio de Banach X sí y sólo si Y es hereditariamente cociente indescomponible.*

La existencia de espacios de Banach de dimensión infinita indescomponible era un problema abierto en el momento en que Weis [58], probó su resultado. No fue hasta 1993 que Gowers y Maurey [27] construyen ejemplos de espacios que satisfacen esta condición.

Ahora bien, se conoce que la igualdad entre estas clases de operadores, $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$, ocurre en los siguientes casos:

1. Y subproyectivo ([35], [4]);

2. $X = Y = L_p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ ([57]), (El caso $2 < p < \infty$ fue probado en [41]);

3. X hereditariamente indescomponible ([4, Teorema 3.14]);

4. X es separable y Y contiene una copia complementada de $C[0,1]$ ([5]).

También la relación $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ se cumple en los siguientes casos:

1. X superproyectivo ([35], [4]);

2. $X = Y = L_p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ ([57]); (El caso $1 < p < 2$ sigue del resultado dado en [41] por dualidad);

3. Y cociente indescomponible ([4, Teorema 3.14]);

4. X contiene una copia complementada de ℓ_1 y Y es separable ([5]).

Cabe destacar que utilizando producto de espacios de Banach exóticos (se les denomina espacios exóticos porque sus propiedades contrastan enormemente con las de los espacios clásicos conocidos hasta entonces), del tipo hereditariamente indescomponible (H.I) y cociente indescomponible (Q.I), González en el 2003 [26], logra mostrar que las inclusiones $\mathcal{SS}(X,Y) \subset P\Phi_+(X,Y)$ y $\mathcal{SC}(X,Y) \subset P\Phi_-(X,Y)$, son estrictas para este tipo de espacios, tal y como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 1.2.7. [26, Teorema 4] *Sea X un espacio de Banach reflexivo y hereditariamente indescomponible, sea Y un subespacio cerrado de X tal que* $\dim(Y) = \dim(X/Y) = \infty$. *Si $Z = X \times Y$ entonces*

$$P\Phi_+(Z) \neq \mathcal{SS}(Z)$$

y

$$P\Phi_-(Z^*) \neq \mathcal{SC}(Z^*)$$

Aún cuando la solución general del problema de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm es negativa, es interesante y se considera de importancia hallar pares de espacios X, Y que cumplan las relaciones $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ y $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$, pues esto proporcionaría caracterizaciones intrínsecas en estos casos.

1.3. Bases en espacios de Banach

En esta sección se introduce el concepto de base de Schauder de un espacio de Banach y la noción correspondiente de sucesión básica. Para más detalles de este tema se recomienda ver [6] y [37]

Definición 1.3.1. Sea X un espacio de Banach, una sucesión (x_n) de elementos de X se denomina *base* de X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares (a_n) tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

Ejemplo 1.3.2. *La sucesión de vectores unitarios* (e_n)*, es una base para los espacios* c_0 *y* l_p *para* $1 \leq p < \infty$*.*

Definición 1.3.3. Sea X un espacio de Banach, una sucesión (x_n) de elementos de X, suponga que existe una sucesión (x_n^*) en el espacio dual X^* tal que

1. $x_k^*(x_j) = 1$ si $j = k$ y $x_k^*(x_j) = 0$ si $j \neq k$,

2. para cada $x \in X$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n$.

Entonces la sucesión (x_n) es llamada *base de Schauder* para X y los funcionales (x_n^*) son llamados *funcionales biortogonales* asociados a (x_n).

Teorema 1.3.4. [6, Teorema 1.1.3] *Sea* X *un espacio de Banach (separable), una sucesión* (x_n) *en* X *es base de Schauder para* X *si y sólo si* (x_n) *es una base para* X*.*

Observe que si (x_n) es base, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, fijo, se tiene que

$$x_k^*(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) := a_k,$$

y la expresión

$$P_k(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) := \sum_{n=1}^{k} a_n x_n$$

define un operador acotado $P_k : X \to X$ tal que $\lim_{k\to\infty} P_k(x) = x$ para cada $x \in X$, que se denomina *proyección natural* asociada a la base (x_k).

Definición 1.3.5. Sea (x_n) una base para el espacio de Banach X y considere la sucesión (P_k) de las proyecciones naturales asociadas a la base, entonces la constante $K > 0$ tal que $K = \sup_n \|P_n\|$ se denomina *constante básica* de la sucesión (x_n). En el caso que $K = 1$ se dice que la base (x_n) es monótona.

Definición 1.3.6. Una sucesión (x_n) en un espacio de Banach X se dice *sucesión básica* si (x_n) es base de $[x_n]$, es decir, si es base del espacio cerrado generado por (x_n).

Teorema 1.3.7. [6, Proposición 1.1.9] *Una sucesión (x_n), no nula, en un espacio de Banach X es básica si y sólo si existe una constante positiva K tal que*

$$\|\sum_{j=1}^{m} a_j x_j\| \leq K \|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\|$$

para toda sucesión de escalares (a_n) y para cualquier par de enteros m, n tales que $m \leq n$.

Definición 1.3.8. Dos bases, o sucesiones básicas, (x_n) y (y_n) en los espacios de Banach X, Y, respectivamente, se denominan *equivalentes*, lo cual se denota por $(x_n) \sim (y_n)$, si siempre que se tome una sucesión de escalares (a_n), se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge.

Teorema 1.3.9. [6, Teorema 1.3.2] *Dos bases, o sucesiones básica, (x_n) y (y_n) son equivalentes si y sólo si existe un isomorfismo $T : [x_n] \to [y_n]$ tal que $T(x_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Corolario 1.3.10. [6, Corolario 1.3.4] *Sean (x_n) y (y_n) dos bases para los espacios de Banach X, Y, respectivamente, entonces $(x_n) \sim (y_n)$ si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión de escalares (a_n), distinta de cero para una cantidad finita de términos, se tiene que*

$$C^{-1}\|\sum_{n=1}^{\infty} a_i y_i\| \leq \|\sum_{n=1}^{\infty} a_i x_i\| \leq C\|\sum_{n=1}^{\infty} a_i y_i\|.$$

Definición 1.3.11. Una sucesión básica (x_n) en un espacio X se dice *complementada* si el espacio cerrado generado por (x_n), el cual denotaremos por $[x_n]$, es complementado como subespacio de X

Teorema 1.3.12. [6, Teorema 1.3.9] (Principio de las pequeñas perturbaciones) *Sea (x_n) una sucesión básica en un espacio de Banach X con constante básica K. Si (y_n) es una sucesión en X tal que*

$$2K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} = \theta < 1.$$

Entonces

1. (y_n) *es una sucesión básica con constante a lo más* $K(1+\theta)(1-\theta)^{-1}$.

2. (y_n) *es base si* (x_n) *lo es, en tal caso la constante básica de* (y_n) *es a lo más* $K(1+\theta)(1-\theta)^{-1}$.

3. $[y_n]$ *es complementado si* $[x_n]$ *lo es.*

Teorema 1.3.13. [6, Proposición 1.5.4] (Principio de selección Bessaga-Pełczyński) *Si* (x_n) *es una sucesión débil nula en un espacio de Banach* X *tal que* $\text{ínf}_n \|x_n\| > 0$ *entonces* (x_n) *tiene una subsucesión básica.*

Teorema 1.3.14. [6, Teorema 1.5.6] *Sea* S *un subconjunto acotado de un espacio de Banach* X *tal que* $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$, *entonces las siguientes son equivalentes*

(i) S *no contiene sucesión básica*

(ii) $\overline{S}^{w}$ *es débil compacta y no contiene al* 0

Teorema 1.3.15. [6, Corolario 1.6.4] *Un espacio de Banach* X *es reflexivo si y sólo si toda sucesión acotada tiene una subsucesión que converge débilmente*

Teorema 1.3.16. [6, Teorema 10.2.1] (Teorema sobre ℓ_1 de Rosenthal) *Sea* (x_n) *una sucesión acotada en el espacio de Banach* X. *Entonces* (x_n) *tiene una subsucesión débil de Cauchy, o* (x_n) *tiene una subsucesión equivalente a la base unitaria de* ℓ_1.

Definición 1.3.17. Una base (x_n) de un espacio de Banach X se llama *incondicional* si para cada $x \in X$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n$ converge incondicionalmente.

Capítulo 2

El problema de la clase de perturbación sobre espacios L_p

Este capítulo tiene por finalidad mostrar los detalles de los resultados obtenidos por González y Salas-Brown [24], en el 2010, dichos resultados proporcionan una respuesta positiva al problema de la clase de perturbación, específicamente se muestra que $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ cuando $X = L_p$, $1 < p < 2$ y Y satisface cierta condición denominada propiedad de Orlicz, también se muestra que la igualdad es cierta para $p = 1$ y Y secuencialmente débil completo, y cuando $2 < p < \infty$ y Y es arbitrario.

Como consecuencia, y de manera dual, se obtiene que $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ cuando $Y = L_q$, $2 < q < \infty$ y el dual de el espacio X, X^*, satisface la propiedad de Orlicz. Además se obtiene que $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ cuando $1 \leq q < 2$ y X es arbitrario.

Estos resultados generalizan los trabajos de Milmam (1969) [41] y Weis (1977) [57]. Milman demostró que $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ si $X = Y = L_p(\mu)$ y $2 < p < \infty$, también mostró que $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ si $X = Y = L_p(\mu)$ y $1 < p < 2$, luego Weis logró extender estos resultados para $1 \leq p \leq \infty$.

En la primera sección de este capítulo se resumen algunas propiedades de los espacios de Banach L_p, necesarias para el desarrollo de los resultados antes mencionados, en la segunda sección se introduce la propiedad de Orlicz y se proporcionan ejemplos de espacios de Banach que satisfacen esta propiedad, finalmente en la tercera sección se exponen de manera detallada los resultados obtenidos en [24].

2.1. Espacios L_p para $1 \leq p \leq \infty$

El objetivo de esta sección es recopilar algunas propiedades geométricas de los espacios L_p, las definiciones y resultados sobre los espacios L_p que se presentan han sido tomados de los textos [6] y [12].

Si $1 \leq p < \infty$, el espacio $L_p(0,1)$ consiste (salvo en igualdad en casi todas partes) de las funciones medibles f definidas sobre $(0,1)$ tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} < \infty$$

donde μ denota la medida de Lebesgue sobre $(0,1)$.

El espacio $L_\infty(0,1)$ consiste (salvo en igualdad en casi todas partes) de las funciones medibles f definidas sobre $(0,1)$ tales que

$$\|f\|_\infty = \inf\{\lambda > 0 : |f(t)| \leq \lambda \text{ a.e}\}$$

Para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio $L_p(0,1)$ se denota, por comodidad, por L_p, su norma por $\|\cdot\|_p$ y la medida de Lebesgue sobre $(0,1)$ por μ. Se observa que, para $1 \leq p < q \leq \infty$ y para una función medible f sobre $(0,1)$, se cumple que $\|f\|_p \leq \|f\|_q$; de aquí que el espacio L_q está contenido en L_p.

El espacio L_p para $1 \leq p < \infty$ tiene una base monótona (ver [6, Proposición 6.1.3]), la cual se denomina *el sistema de Haar*. El sistema de Haar se define como la sucesión de funciones (h_n), sobre $[0,1]$ tales que $h_1 = 1$ y para $n = 2^k + s$ (donde $k = 0,1,2,...,$ y $s = 1,2,...,2^k$),

$$h_n(t) = \begin{cases} 1, & si \quad t \in [\frac{2s-2}{2^{k+1}}, \frac{2s-1}{2^{k+1}}), \\ -1, & si \quad t \in [\frac{2s-1}{2^{k+1}}, \frac{2s}{2^{k+1}}), \\ 0, & \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Más aún, el sistema de Haar es una base incondicional en L_p para $1 < p < \infty$, este resultado fue establecido en 1932 por Paley [44], los detalles de la demostración también se pueden encontrar en [6, Teorema 6.1.6]

Para $p = 1$, el espacio L_p no tiene base incondicional (ver [37, Proposición 1.d.1]), sin embargo, todo subespacio cerrado de dimensión infinita de L_1 contiene una sucesión básica incondicional, tal y como lo exhibe el siguiente resultado.

Proposición 2.1.1. *Para $1 \leq p < \infty$, todo subespacio cerrado infinito dimensional de L_p contiene una sucesión básica incondicional.*

Demostración. Para $1 < p < \infty$, la base de Haar (h_n) es una base incondicional de L_p, luego todo subespacio cerrado de dimensión infinita contiene un subespacio Z el cual tiene una base equivalente a un bloque de (h_n) (ver [37, Proposición 1.a.11]).

Para el espacio L_1, dado un subespacio cerrado M de dimensión infinita de L_1, se tiene que M contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1 o es isomorfo a un subespacio de L_q con $1 < q \leq 2$ [51, Teorema 8]. Dado que la base unitaria de ℓ_1 es incondicional el resultado también es cierto para $p = 1$. □

El siguiente resultado trata sobre subespacios cerrados de L_p. La demostración del mismo, en el caso que M sea isomorfo a ℓ_2 se puede encontrar en [46, Teorema 3.1], y en el caso que M sea isomorfo a ℓ_p, se puede ver [6, Teorema 7.2.6 y Teorema 6.4.8].

Teorema 2.1.2. *Sea $1 < p < \infty$ y M un subespacio cerrado de L_p isomorfo a ℓ_p o isomorfo a ℓ_2, entonces M contiene un subespacio isomorfo a M y complementado en L_p.*

El siguiente resultado fue mostrado en 1962 por Kadets y Pelczyński [32], también se puede encontrar una demostración en [6, Teorema 6.4.8].

Teorema 2.1.3. *Sea M un subespacio cerrado infinito dimensional de L_p, para $2 \leq p < \infty$. Entonces M contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p y complementado en L_p o M es isomorfo a ℓ_2 y complementado en L_p.*

En el caso que M sea un subespacio no reflexivo de L_1 se tiene una versión del teorema anterior.

Teorema 2.1.4. [6, Proposición 5.6.2] *Sea M un subespacio cerrado infinito dimensional no reflexivo de L_1, entonces M contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1 y complementado en L_1.*

Los detalles de la demostración del siguiente teorema se pueden encontrar en [6, Teorema 7.2.6].

Teorema 2.1.5. *Suponga que M es un subespacio cerrado de L_p $(1 \leq p < 2)$. Entonces M no contiene subespacios isomorfos a ℓ_p si y sólo si la bola cerrada unitaria de M es p-equi-integrable, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto medible $E \subset (0,1)$ con $\mu(E) < \delta$ se cumple que*

$$\sup_{f \in B_M} \int_E |f|^p d\mu < \varepsilon.$$

A continuación se presentan una serie de propiedades relacionadas con los espacios de sucesiones ℓ_p.

Proposición 2.1.6. *Todo subespacio cerrado Y de dimensión infinita de ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ contiene un subespacio cerrado Z tal que Z es isomorfo a ℓ_p y complementado en ℓ_p.*

La demostración de la proposición anterior se puede encontrar en [6, Proposición 2.2.1].

Proposición 2.1.7. [6, Proposición 2.5.2] *Si un espacio de Banach X contiene un subespacio M isomorfo a ℓ_∞ entonces M es complementado en X.*

Proposición 2.1.8. *Todo subespacio complementado M isomorfo a ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ de un espacio de Banach X contiene un subespacio M_1 isomorfo a M, complementado en X y con complemento isomorfo a X.*

Demostración. Sea M un subespacio cerrado y complementado de X tal que M es isomorfo a ℓ_p, entonces X se puede expresar como:

$$X = M \oplus N$$

con N un subespacio cerrado de X. Dado que M es isomorfo a ℓ_p, y ℓ_p es isomorfo a $\ell_p \oplus \ell_p$, se pueden tomar dos subespacios M_1 y M_2 de M isomorfos a M y tales que $M = M_1 \oplus M_2$. Se observa que $M_2 \oplus N$ es isomorfo a X, lo que concluye la demostración. $\square$

Un espacio de Banach X se denomina *primario* si siempre que M y N sean subespacios cerrados de X y $X = M \oplus N$, entonces se cumple que M o N es isomorfo a X. En [8, Teorema 7] se muestra que el espacio L_p es primario para $1 \leq p \leq \infty$, lo cual se enuncia formalmente en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.9. *El espacio L_p para $1 \leq p \leq \infty$, es primario.*

Del hecho que L_p sea un espacio primario, se obtiene que L_p es isomorfo a sus subespacios cerrados de codimensión finita. En efecto, si M es un subespacio cerrado de L_p de codimensión finita entonces existe un subespacio cerrado N de L_p de dimensión finita tal que $L_p = M \oplus N$, por ser L_p primario se cumple que M o N es isomorfo a L_p, pero N no puede ser isomorfo a L_p por ser de dimensión finita, de manera que M debe ser isomorfo a L_p.

Ahora se enuncian un grupo de proposiciones que serán de gran utilidad para establecer y desarrolar los resultados de la Sección 3.

Proposición 2.1.10. *Sean M y L dos subespacios cerrados de dimensión infinita de L_p, L isomorfo a L_p, tales que $M + L$ es cerrado y $M \cap L$ es de dimensión finita entonces L contiene un subespacio cerrado L', de codimensión finita tal que $M \cap L' = \{0\}$, $M + L'$ es cerrado y L' es isomorfo a L_p.*

Demostración. Dado que $M \cap L$ es de dimensión finita entonces $M \cap L$ es complementado en L_p, esto es, existe un subespacio cerrado W de L_p de dimensión infinita tal que $L_p = (M \cap L) \oplus W$. Si se toma $L' = L \cap W$ entonces L' es un subespacio cerrado de L_p y $M \cap L' = \{0\}$. Se observa que L' tiene codimensión finita en L puesto que $L = (M \cap L) \oplus L'$, y dado que L es isomorfo a L_p, se tiene que L es primario y por lo tanto isomorfo a L'. Finalmente $M + L'$ es cerrado puesto que $M + L$ es cerrado $\square$

Proposición 2.1.11. *Sea $K \in \mathcal{L}(L_p, Y)$ y H un subespacio cerrado de dimensión infinita de L_p tal que $K|_H$ es semi-Fredholm superior, entonces existe un subespacio cerrado H' de H, de codimensión finita tal $K|_{H'}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Dado que $K|_H$ es semi-Fredholm superior, entonces $N(K|_H)$ tiene dimensión finita y $R(K|_H)$ es cerrado, de manera que existe un subespacio H' de H, cerrado de dimensión infinita tal que $H = N(K|_H) \oplus H'$. Entonces H' tiene codimensión finita y $K|_{H'}$ es un isomorfismo. $\square$

Proposición 2.1.12. *Sea $f \in L_p$ tal que $\|f\|_p \leq 1$ entonces dado $M > 0$ se tiene que*

$$\mu\left(\{t \in (0,1) \colon |f(t)| > M\}\right) < 1/M^p.$$

Demostración. Sea $f \in L_p$ tal que $\|f\|_p \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned}
1 &\geq \int_0^1 |f(t)|^p d\mu(t) \\
&= \int_{\{t\in(0,1)\colon |f(t)|>M\}} |f(t)|^p d\mu(t) + \int_{\{t\in(0,1)\colon |f(t)|\leq M\}} |f(t)|^p d\mu(t) \\
&\geq \int_{\{t\in(0,1)\colon |f(t)|>M\}} |f(t)|^p d\mu(t) \\
&> \int_{\{t\in(0,1)\colon |f(t)|>M\}} M^p d\mu(t) = M^p \mu\left(\{t \in (0,1) \colon |f(t)| > M\}\right)
\end{aligned}$$

De aquí que

$$\mu\left(\{t \in (0,1) \colon |f(t)| > M\}\right) < 1/M^p$$

que era lo que se quería demostrar. $\square$

2.2. La propiedad de Orlicz

En esta sección se introduce la propiedad de Orlicz y se ilustran espacios de Banach que satisfacen esta propiedad a través de ejemplos concretos, esta propiedad será de gran ayuda para enunciar y demostrar el resultado principal de este capítulo, el cual se establece en la próxima sección.

En primer lugar, se recuerda que una sucesión (x_n) en un espacio de Banach X se denomina *semi-normalizada* si es acotada y satisface $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$, y se dice que (x_n) es *débil nula* si (x_n) converge débilmente a 0.

Definición 2.2.1. Se dice que un espacio X satisface la *propiedad de Orlicz* si cada sucesión semi-normalizada y débil nula (x_n) en X tiene una subsucesión (x_{n_k}) que satisface una 2-estimación inferior, es decir, si existe una constante $C > 0$ tal que, para cada sucesión de escalares (a_k),

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k} \Big\| \geq C\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \Big)^{1/2}.$$

En 1930, Orlicz [43], establece que el espacio L_p satisface la propiedad de Orlicz para $1 \leq p \leq 2$. Una demostración de este resultado también puede ser consultada en [8, Formula (1.10)], formalmente:

Teorema 2.2.2. *El espacio L_p satisface la propiedad de Orlicz para $1 \leq p \leq 2$.*

En 1991, Räbiger [50] también proporciona una demostración del Teorema 2.2.2, mostrando la existencia de una clase de retículos de Banach que satisfacen la propiedad de Orlicz.

Antes de enunciar dicho resultado recordemos que un espacio de Banach es de *cotipo* q, para algún $q \geq 2$, si existe una constante $0 < M < \infty$ tal que para toda colección finita $(x_j)_{j=1}^n$ de elementos de X se tiene que

$$\int_0^1 \| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \| \geq M^{-1} (\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q)^{1/q}$$

donde (r_n) es la sucesión formada por las *funciones de Radamacher* las cuales se definen por $r_n(t) = sgn(sen(2^n\pi t))$. Para más detalles acerca de las funciones de Radamacher se puede consultar [6] y [12].

Proposición 2.2.3. [50, Corolario en la pág 83] *Cada retículo de Banach de cotipo 2 satisface la propiedad de Orlicz.*

Teorema 2.2.4. *Un espacio de Banach que satisface la propiedad de Orlicz no contiene subespacios isomorfos a c_0.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach que satisface la propiedad de Orlicz y tal que que existe un subespacio M de X que es isomorfo a c_0, sea $T : c_0 \to M$ un isomorfismo sobreyectivo, entonces existe $L > 0$ tal que $\|Tx\| \geq L\|x\|_\infty$ para todo $x \in c_0$. Para $n \in \mathbb{N}$, sea e_n la sucesión que es igual a cero en todas sus componentes, excepto en la n-ésima posición donde vale 1. Se observa que cada $e_n \in c_0$ y que la sucesión (e_n) converge débilmente a 0. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se toma $x_n = Te_n$, entonces (x_n) converge débilmente a 0, además

$$\|x_n\| = \|Te_n\| \geq L\|e_n\|_\infty = L$$

y

$$\|x_n\| = \|Te_n\| \leq \|T\|\|e_n\|_\infty = \|T\|$$

lo que significa que (x_n) es una sucesión semi-normalizada y débil nula en X. Como X satisface la condición de Orlicz, existe una subsucesión (x_{n_k}) y una constante $C > 0$ tal que para la sucesión de escalares (a_k) con $a_k = 1/\sqrt{k}$ se tiene que

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k}\| \geq C\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\right)^{1/2} = C\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right)^{1/2} = \infty$$

Si se toma $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{n_k}$ entonces $x \in c_0$ y por tal motivo

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|_\infty < \infty;$$

pero

$$\|Tx\| = \|T\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{n_k}\right)\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} a_k T(e_{n_k})\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k}\| = \infty$$

lo cual conduce a una contradicción. □

En [7, Teorema 4.60] se muestra que si un retículo de Banach X no contiene subespacios isomorfos a c_0 entonces X es secuencialmente débil completo.

Luego todo retículo de Banach que satisface la propiedad de Orlicz es secuencialmente débil completo.

Un espacio de Banach Y es *secuencialmente débil completo* si toda sucesión débil de Cauchy en Y converge débilmente. El espacio de las funciones integrables, L_1 es un ejemplo de un espacio secuencialmente débil completo tal y como se exhibe en el siguiente resultado.

Teorema 2.2.5. [6, Teorema 5.2.10] *El espacio L_1 es secuencialmente débil completo.*

2.3. La clase de perturbación para operadores semi-Fredholm sobre espacios L_p

En esta sección se establece, de manera positiva, una solución al problema de la clase de perturbación. Se expone de manera detallada los resultados obtenidos por González y Salas-Brown en [24].

En primer lugar, se observa que para $1 \leq p \leq \infty$, el conjunto $\Phi_+(L_p, Y)$ es no vacío si y sólo si el espacio Y contiene un subespacio isomorfo a L_p. En efecto, si $T \in \Phi_+(L_p, Y)$ entonces $N(T)$ tiene dimensión finita y $R(T)$ es cerrado, de modo que existe un subespacio cerrado M de L_p, de dimensión infinita tal que $L_p = N(T) \oplus M$, dado que el espacio de Banach L_p es isomorfo a sus subespacios cerrados de codimensión finita, se sigue que L_p y M son isomorfos y por tanto $T(M)$ es un subespacio de Y isomorfo a L_p. Recíprocamente, si N es un subespacio de Y

isomorfo a L_p considere el isomorfismo sobreyectivo $S : L_p \to N$ y el operador T obtenido al extender el rango de S a todo el espacio Y, entonces $T \in \Phi_+(L_p, Y)$.

El siguiente resultado establece condiciones sobre un espacio de Banach Y para que $P\Phi_+(L_p, Y) = \mathcal{SS}(L_p, Y)$ para $1 < p < 2$.

Teorema 2.3.1. *Sean $1 < p < 2$, Y un espacio de Banach que contiene un subespacio isomorfo a L_p y que satisface la propiedad de Orlicz. Entonces*

$$P\Phi_+(L_p, Y) = \mathcal{SS}(L_p, Y).$$

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(L_p, Y)$ tal que $K \notin \mathcal{SS}(X, Y)$, entonces existe un subespacio cerrado H de dimensión infinita de L_p tal que la restricción $K|_H$ es un isomorfismo. Se mostrará que $K \notin P\Phi_+(L_p, Y)$.

Primeramente, se considera el caso en que H contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p. Por el Teorema 2.1.2, pasando a subespacio si es necesario, se puede asumir que H es un subespacio complementado isomorfo a ℓ_p. Sea M el subespacio cerrado de L_p tal que $L_p = H \oplus M$. Dado que L_p es primario (Teorema 2.1.9), se sigue que M es isomorfo a L_p.

Por hipótesis, Y contiene un subespacio L el cual es isomorfo a L_p. Se consideran los siguientes posibles casos:

(1) $K(H) + L$ es cerrado y $K(H) \cap L$ tiene dimensión finita,

(2) $K(H) \cap L$ tiene dimensión infinita,

(3) $K(H) + L$ es no cerrado y $K(H) \cap L$ tiene dimensión finita.

(1) En virtud de la Proposición 2.1.10, se puede sustituir L por un subespacio de codimensión finita, y se puede asumir que $K(H) \cap L = \{0\}$. Sea $U \in \mathcal{L}(M, L)$ un isomorfismo sobreyectivo. Se considera el operador

$$T\colon L_p = H \oplus M \longrightarrow K(H) \oplus L \subset Y$$

definido por $T(x,y) := -K(x) + U(y)$, entonces T es un isomorfismo, por lo que $T \in \Phi_+(L_p, Y)$. Se observa que $N(T+K)$ tiene dimensión infinita pues contiene al subespacio H. Por lo tanto, $T + K \notin \Phi_+(L_p, Y)$, de aquí que $K \notin P\Phi_+(L_p, Y)$.

(2) Dado que $K(H)$ es isomorfo a ℓ_p, y $K(H) \cap L$ es un subespacio cerrado de dimensión infinita de $K(H)$ entonces por la Proposición 2.1.6, $K(H) \cap L$ contiene un subespacio N_1 isomorfo a ℓ_p.

Como N_1 es un subespacio de L y L es isomorfo a L_p, se tiene por el Teorema 2.1.2, que N_1 contiene un subespacio N_2 isomorfo a ℓ_p y complementado en L. De modo que L se puede expresar como: $L = N_2 \oplus W$, donde W es un subespacio cerrado de dimensión infinita de L.

Como L_p es primario, el complemento de N_2 en L es isomorfo a L_p, es decir, W es isomorfo a L_p. Así, reemplazando L por este complemento y reemplazando H por $(K|_H)^{-1}(N_2)$, el cual es un subespacio complementado en L_p y es isomorfo a ℓ_p, se puede asumir que la suma $K(H) + L$ es directa y cerrada; y por lo tanto se obtienen las condiciones del caso (1).

(3) En este caso, se definirá un operador compacto $K_1 \in \mathcal{L}(L_p, Y)$ tal que $(K + K_1)(H) \cap L$ tenga dimensión infinita.

De ser posible esto, entonces $(K + K_1)|_H$ sería un operador semi-Fredholm superior, puesto que al ser $K|_H$ un isomorfismo $K|_H \in \Phi_+(H, Y)$ y la clase de operadores semi-Fredholm es estable bajo la suma de operadores compactos.

En virtud de la Proposición 2.1.11, pasando a un subespacio de codimensión finita, se puede asumir que $(K+K_1)|_H$ es un isomorfismo. Luego, usando el argumento del caso (2) se obtendría un operador $T \in \Phi_+(L_p, Y)$ tal que $T+K+K_1 \notin \Phi_+(L_p, Y)$. Entonces $T + K \notin \Phi_+(L_p, Y)$, de aquí que $K \notin P\Phi_+(L_p, Y)$.

Ahora bien, se procede a definir tal operador compacto. Como en el caso (1), se puede asumir que $K(H) \cap L = \{0\}$. Del hecho que $K(H)+L$ es no cerrado, se sigue que existe una sucesión normalizada (y_n) en $K(H)$ tal que $\operatorname{dist}(y_n, L) < 2^{-n}$. Se observa que (y_n) no tiene subsucesiones convergentes, pues en caso contrario, de existir una subsucesión convergente a un punto y se tendría que $\|y\| = 1$ y $y \in K(H) \cap L$, lo cual no es posible. Análogamente, el límite de cada subsucesión que converja débilmente debe ser 0. Dado que ℓ_p es reflexivo, se puede concluir que (y_n) converge débilmente a 0. Luego, por la Proposición 1.3.13, pasando a subespacio, se puede suponer que (y_n) es una sucesión básica.

Sea (h_n) una sucesión en H tal que $K(h_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que K es un isomorfismo sobre H, (h_n) es una sucesión básica, por lo tanto existe una sucesión acotada (h_n^*) en el espacio dual ${L_p}^*$ tal que $\langle h_i^*, h_j \rangle = \delta_{ij}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$.

Se selecciona ahora, una sucesión (z_n) en L tal que$\|y_n - z_n\| < 2^{-n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} \|h_i^*\| \|z_i - y_i\| < \infty$, la expresión

$$K_1(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h_i^*, f \rangle (z_i - y_i),$$

define un operador compacto $K_1 \in \mathcal{L}(L_p, Y)$ tal que $(K + K_1)(h_n) = z_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí que $(K + K_1)(H) \cap L$ tenga dimensión infinita, tal y como se quería probar.

Ahora se considera el caso que H no contenga subespacios isomorfos a ℓ_p. Por el Teorema 2.1.5, la bola unitaria, en L_p, B_H es p-equi-integrable. Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu(A) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \|f \chi_A\|_p < \varepsilon, \quad \text{para todo } f \in B_H. \tag{2.1}$$

Se denota por $M_\varepsilon := \delta_\varepsilon^{-1/p}$; de aquí que $1/M_\varepsilon^p = \delta_\varepsilon$.

Por Proposición 2.1.12, se tiene que

$$\mu\big(\{t \in (0,1) \colon |f(t)| > M_\varepsilon\}\big) < 1/M_\varepsilon^p = \delta_\varepsilon. \tag{2.2}$$

para toda $f \in B_H$

Se fija $0 < \varepsilon < 1/2$. Por Proposición 2.1.1, se puede tomar una sucesión básica incondicional, normalizada (f_n) en H. Dado que $K|_H$ es un isomorfismo, existe una constante $C > 0$ tal que $\|Kf\| \geq C\|f\|_p$ para cada $f \in H$.

Se define $g_n \in L_p$ por

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t), & \text{si } |f_n(t)| \leq M_\varepsilon, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

De las expresiones (2.1) y (2.2) se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|g_n - f_n\|_p^p &= \int_0^1 |g_n - f_n|^p d\mu(t) \\ &= \int_{\{t \in (0,1):\, |f(t)| > M_\varepsilon\}} |f_n|^p d\mu(t) < \varepsilon^p \end{aligned}$$

Por lo que $\|g_n\|_p \geq \|g_n\|_p - \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Dado que L_p es reflexivo, y $(g_n - f_n)$ es una sucesión acotada en L_p, pasando a subsucesión, se puede asumir que $(g_n - f_n)$ converge débilmente a $g \in L_p$ con $\|g\|_p \leq \varepsilon$.

La sucesión (f_n) converge débilmente a 0, pues es una sucesión básica en un espacio reflexivo. Entonces (g_n) converge débilmente a g, de aquí que $|g(t)| \leq M_\varepsilon$ a.e.

La sucesión (h_n) definida por $h_n(t) := g_n(t) - g(t)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ satisface:

- $\|h_n\|_p = \|g_n - g\|_p \leq \|g_n\|_p + \|g\|_p \leq 1 + \varepsilon < \frac{3}{2}$.
- $\|h_n\|_p \geq \|g_n\|_p - \|g\|_p \geq 1 - 2\varepsilon$.
- $\|h_n\|_\infty = \|g_n - g\|_\infty \geq \|g_n\|_\infty + \|g\|_\infty \leq 2M_\varepsilon$.
- (h_n) converge débilmente a cero en L_p.

Además, (Kh_n) converge débilmente a cero en Y, luego seleccionando ε lo suficientemente pequeño, se puede asumir que (Kh_n) es semi normalizada. En efecto,

$$\|Kh_n\| \geq \|Kf_n\| - \|K(f_n - g_n)\| - \|Kg\| > C - 2\varepsilon\|K\|.$$

Dado que $\|h_n\|_\infty \leq 2M_\varepsilon$ para cada n, la sucesión (h_n) es semi-normalizada y débil nula en L_2, luego por el Teorema 1.3.13, (h_n) contiene una subsucesión básica. Pasando a subsucesión, se puede asumir que (h_n) es equivalente a la base unitaria de ℓ_2 en L_2 y que (Kh_n) satisface una 2-estimación inferior en Y, como este espacio satisface la propiedad de Orlicz, existen constantes $0 < C_1 < C_2 < \infty$ tales que, para cada sucesión de escalares (a_n),

$$\begin{aligned} C_1\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\Big)^{1/2} &\leq \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n K h_n\Big\| \leq \|K\|\cdot\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n\Big\|_p \\ &\leq \|K\|\cdot\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n\Big\|_2 \leq C_2\|K\|\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Sea $J\colon L_2 \longrightarrow L_p$ el operador inclusión, entonces se ha probado que KJ es un isomorfismo sobre un subespacio de L_2 isomorfo a ℓ_2. De aquí que K es un isomorfismo sobre un subespacio M de L_p isomorfo a ℓ_2. Por el Teorema 2.1.2, se puede asumir que M es complementado en L_p.

Siguiendo un argumento similar al seguido en el caso que K es un isomorfismo sobre un subespacio complementado isomorfo a ℓ_p se concluye la prueba. □

Se analiza ahora, que condiciones se deben imponer sobre el espacio Y de manera que se pueda extender el Teorema 2.3.1 a los valores de p no considerados allí.

El siguiente resultado es una versión del Teorema 2.3.1 para $p = 1$, la condición impuesta al espacio Y es que sea secuencialmente débil completo. Observe que todo retículo de Banach que satisface la propiedad de Orlicz es secuencialmente débil completo

Teorema 2.3.2. *Sea Y un espacio de Banach secuencialmente débil completo que contiene un subespacio isomorfo a L_1. Entonces $P\Phi_+(L_1, Y) = \mathcal{SS}(L_1, Y)$.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(L_1, Y)$ tal que $K \notin \mathcal{SS}(X, Y)$, entonces por la Proposición 1.1.3, K no es débil compacto. Dado que Y es secuencialmente débil completo, existe una sucesión acotada (x_n) en L_1 tal que (Kx_n) no tiene subsucesiones débilmente Cauchy. Por el Teorema 1.3.16, se puede asumir que tanto (x_n) como (Kx_n) son equivalentes a la base de ℓ_1. Si se denota por H el subespacio cerrado generado por (x_n), se tiene que H es isomorfo a ℓ_1 y $K|_H$ es un isomorfismo.

El resto de la prueba es similar al caso cuando H contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p en la prueba del Teorema 2.3.1.

A continuación se presentan los detalles. Por el Teorema 2.1.4, pasando a un subespacio más pequeño, de ser necesario, se puede asumir que H es complementado en L_1. Sea L el subespacio de Y isomorfo a L_1, se consideran las tres siguiente posibilidades relativas a los subespacios $K(H)$ y L:

(1) $K(H) + L$ es cerrado y $K(H) \cap L$ es de dimensión finita,

(2) $K(H) \cap L$ es de dimensión infinita,

(3) $K(H) + L$ no es cerrado y $K(H) \cap L$ es de dimensión finita.

En el caso (1), usando un argumento similar al argumento usado en la prueba del Teorema 2.3.1, se supone que $K(H) \cap L = \{0\}$ y se construye un operador $T\colon L_1 = H \oplus M \longrightarrow K(H) \oplus L \subset Y$ tal que $T \in \Phi_+(L_1, Y)$ y $T + K \notin \Phi_+(L_1, Y)$, de modo que $K \notin P\Phi_+(L_1, Y)$

El caso (2), sigue como la demostración del Teorema 2.3.1, pero aquí se aplica el Teorema 2.1.4 en lugar del Teorema 2.1.2. En efecto, dado que $K(H)$ es isomorfo a ℓ_1, y $K(H) \cap L$ es un subespacio cerrado de dimensión infinita de $K(H)$ entonces por Proposición 2.1.6, $K(H) \cap L$ contiene un subespacio N_1 isomorfo a ℓ_1.

Como N_1 es un subespacio de L y L es isomorfo a L_1, se tiene por Teorema 2.1.4, que N_1 contiene un subespacio N_2 isomorfo a ℓ_1 y complementado en L. Se puede decir que $L = N_2 \oplus W$, donde W es un subespacio cerrado de dimensión infinita de L.

Como L_1 es primario, el complemento de N_2 en L es isomorfo a L_1, es decir, W es isomorfo a L_1. Así, reemplazando L por este complemento y reemplazando H por $(K|_H)^{-1}(N_2)$, el cual es un subespacio complementado en L_1 y es isomorfo a ℓ_1, se puede asumir que la suma $K(H) + L$ es directa y cerrada; y por lo tanto se obtienen las condiciones del caso (1).

En el caso (3), al igual que en el Teorema 2.3.1 caso (3), se obtiene una sucesión normalizada (y_n) en $K(H)$ tal que $\text{dist}(y_n, L) < 2^{-n}$. Por el Teorema sobre ℓ_1 de Rosenthal (Teorema 1.3.16), (y_n) tiene una subsucesión débil de cauchy o una subsucesión equivalente a la base de ℓ_1. Dado que L_1 es secuencialmente débil completo, entonces (y_n) tiene una subsucesión débil nula o una subsucesión equivalente a la base de ℓ_1. En cualquiera de los dos casos se puede asumir que (y_n) es una sucesión básica, y concluir como se hizo en la prueba del Teorema 2.3.1. □

A continuación se proporciona un ejemplo concreto que es consecuencia directa de los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2.

En primer lugar se conoce que para $1 \leq p, q \leq 2$, $\Phi_+(L_p, L_q)$ es no vacío sí y sólo si $q \leq p$ (ver [8, Teorema 26]), además, L_q tiene la propiedad de Orlicz.

Corolario 2.3.3. *Sea* $1 \leq q \leq p < 2$*, entonces* $P\Phi_+(L_p, L_q) = \mathcal{SS}(L_p, L_q)$.

Se observa que cuando $1 \leq p = q < 2$ en el corolario anterior, se obtiene el resultado dado por Weis en 1977 [57]. De modo que los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 extienden en cierto sentido el resultado de Weis.

A continuación se presentan algunas diferencias entre los casos $q < p$ y $q = p$ en los resultados previos.

Sea $1 \leq q < p < 2$, entonces $\mathcal{SS}(L_p, L_q) \neq \mathcal{I}n(L_p, L_q)$.

En efecto, dado que L_q contiene subespacios isomorfos a ℓ_p (ver [6, Proposición 6.4.3]), si se expresa $L_p = M \oplus N$ con M isomorfo ℓ_p, entonces existe un operador $K \in \mathcal{L}(L_p, L_q)$ el cual es un isomorfismo sobre M y vale 0 en N, de aquí que $K \notin \mathcal{SS}(L_p, L_q)$. Sin embargo, $K \in \mathcal{I}n(L_p, L_q)$ ya que L_q no contiene subespacios complementados isomorfos a ℓ_p [25, Corolario 2].

Para $1 \leq p < 2$, $\mathcal{SS}(L_p) = \mathcal{I}n(L_p)$, ver [57], y dado que cada subespacio cerrado de L_2 es complementado se tiene que, $\mathcal{SS}(L_p, L_2) \neq \mathcal{I}n(L_p, L_2)$ y $\mathcal{SS}(L_2) = \mathcal{I}n(L_2)$.

A continuación se considera el caso $p \geq 2$, en este caso, sólo basta que $\Phi_+(L_p, Y)$ sea no vacío, o equivalentemente que Y contenga un subespacio isomorfo a L_p.

Teorema 2.3.4. *Sea $2 \leq p < \infty$ y Y un espacio de Banach que contiene un subespacio isomorfo a L_p, entonces $P\Phi_+(L_p, Y) = \mathcal{SS}(L_p, Y)$.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(L_p, Y)$ tal que $K \notin \mathcal{SS}(X, Y)$, entonces existe un subespacio cerrado H de L_p, de dimensión infinita, tal que la restricción $K|_H$ es un isomorfismo.

Por el Teorema 2.1.3, se puede asumir que H es isomorfo a ℓ_p o isomorfo a ℓ_2 y complementado en L_p. Por otro lado, Y contiene un subespacio L isomorfo a L_p. Luego, se consideran las tres siguiente posibilidades relativas a los subespacios $K(H)$ y L,

(1) $K(H) + L$ es cerrado y $K(H) \cap L$ es de dimensión finita,

(2) $K(H) \cap L$ es de dimensión infinita,

(3) $K(H) + L$ no es cerrado y $K(H) \cap L$ es de dimensión finita.

y se repiten los argumentos dados en la primera parte de la prueba del Teorema 2.3.1, para obtener que $K \notin P\Phi_+(L_p, Y)$. □

Teorema 2.3.5. *Sea Y un espacio de Banach que contiene un subespacio isomorfo a L_∞, entonces $P\Phi_+(L_\infty, Y) = \mathcal{SS}(L_\infty, Y)$.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(L_\infty, Y)$ tal que $K \notin \mathcal{SS}(L_\infty, Y)$, dado que L_∞ tiene la propiedad de Dunford Pettis se tiene por la Proposición 1.1.3 que K no es débil compacto. Luego por el Teorema 1.1.4 existe un subespacio cerrado H, de dimensión infinita, de L_∞ tal que H es isomorfo a ℓ_∞ y $K|_H$ es un isomorfismo.

Por el Teorema 2.1.7 se puede suponer que H es complementado en L_∞ y $K(H)$ es complementado en Y.

Así se puede asumir que $L_\infty = H \oplus M$ y $Y = K(H) \oplus Y_0$, con M isomorfo a L_∞ y Y_0 isomorfo a Y. De manera que Y_0 contiene un subespacio isomorfo a L_∞.

Sea $S \in \mathcal{L}(M, Y_0)$ un isomorfismo, se define el operador

$$T : L_\infty = H \oplus M \to Y = K(H) \oplus Y_0$$

como $T(h, m) = K(h) + S(m)$, entonces T es un isomorfismo, por lo que $T \in \Phi_+(L_\infty, Y)$, pero $T + K \notin \Phi_+(L_\infty, Y)$ puesto que $H \subset N(T + K)$. □

Como consecuencia de los Teoremas 2.3.1 y 2.3.4, se derivan algunos resultados sobre $P\Phi_-$.

Proposición 2.3.6. *Sea X un espacio de Banach que contiene un cociente isomorfo a L_q. Si se satisface:*

(a) $2 < q < \infty$ *y X^* satisface la propiedad de Orlicz, o*

(b) $1 \leq q \leq 2$.

Entonces $P\Phi_-(X, L_q) = \mathcal{SC}(X, L_q)$.

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(X, L_q)$ tal que $K \notin \mathcal{SC}(X, L_q)$. En primer lugar se considera $1 < q < \infty$, y sea p tal que $p := q/(q-1)$, entonces $K^* \in \mathcal{L}(L_p, X^*)$ y $K^* \notin \mathcal{SS}(L_p, X^*)$. Luego, por los Teoremas 2.3.1 y 2.3.4, existe un operador $T \in \Phi_+(L_p, X^*)$ tal que $T + K^* \notin \Phi_+(L_p, X^*)$.

Dado que L_q es reflexivo, existe un operador $S \in \mathcal{L}(X, L_q)$ tal que $S^* = T$ [21, Teorema II.2.16]. De modo que $S \in \Phi_-(X, L_q)$ y $S + K \notin \Phi_-(X, L_q)$; de aquí que $K \notin P\Phi_-(X, L_q)$.

El caso $q = 1$, es consecuencia de un resultado de Pełczyński [45, Teorema 1]: si $K \in \mathcal{L}(X, L_1)$ no es un operador estrictamente cosingular entonces existe un subespacio complementado M de X isomorfo a ℓ_1 tal que $K|_M$ es un isomorfismo y $K(M)$ es complementado en L_1. De manera que X se puede expresar como

$$X = M \oplus X_0$$

y

$$L_1 = K(M) \oplus L,$$

con X_0 isomorfo a X y L isomorfo a L_1. De esta manera se obtiene un operador $T \in \Phi_-(X, L_1)$ tal que $T + K \notin \Phi_-(X, L_1)$. $\square$

Se sigue por dualidad [8, Teorema 26] que $\Phi_-(L_p, L_q)$ es no vacío si y sólo si $2 \leq q \leq p \leq \infty$. Por lo que el siguiente resultado es una consecuencia de la Proposición 2.3.6.

Corolario 2.3.7. *Sea* $2 \leq q \leq p \leq \infty$, *entonces* $P\Phi_-(L_p, L_q) = \mathcal{SC}(L_p, L_q)$.

Capítulo 3

El problema de la clase de perturbación sobre espacios fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos

En este capítulo se definen y estudian las clases de espacios de Banach fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos introducidos por González, Martínez-Abejón y Salas-Brown en [23], y se resuelve, de manera positiva, el problema de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm sobre estos espacios. Con el fin de establecer y entender los resultados obtenidos en [23], se ha distribuido este capítulo en tres secciones. En la primera y segunda sección de este capítulo, se introduce el concepto de espacio fuertemente subproyectivo y fuertemente superproyectivos respectivamente, se estudian algunas propiedades de estos espacios y se presentan ejemplos de espacios de Banach clásicos que satisfacen esta propiedad. En la tercera sección se resuelve el problema de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm utilizando espacios fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos. Finalmente, se proporcionan ejemplos concretos de espacios de Banach para los cuales las igualdades $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ y $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ son ciertas.

Como se ha mencionado previamente, un espacio de Banach X se dice *subproyectivo* si todo subespacio cerrado M de X de dimensión infinita, contiene un subespacio N de dimensión infinita, complementado en X. Se dice que X es *superproyectivo* si todo subespacio cerrado M de X de codimensión infinita está contenido en un subespacio N de codimensión infinita, complementado en X.

En [35] y [4] se muestra, respectivamente, que $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ si Y es subproyectivo y $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$, y que $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ si X es superproyectivo y $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$. Dado que muchos espacios subproyectivos conocidos satisfacen la condición que el complemento del subespacio N es isomorfo al espacio X en cuestión, se ha introducido una nueva definición *más fuerte* que la antes mencionada. Algo parecido sucede para los espacios superproyectivos

3.1. Espacios fuertemente subproyectivos

En esta sección se introduce el concepto de espacio fuertemente subproyectivo dado por González, Martínez-Abejón y Salas-Brown en [23], se estudian algunas propiedades de estos espacios, se dan condiciones necesarias y suficientes para que la clase $\Phi_+(X,Y)$ sea no vacía cuando X es fuertemente subproyectivo y se presentan ejemplos de espacios de Banach clásicos que satisfacen esta propiedad.

Definición 3.1.1. Se dice que un espacio X es *fuertemente subproyectivo* si para todo subespacio cerrado M de X de dimensión infinita existe un subespacio N de X de dimensión infinita, complementado, contenido en M y tal que su complemento es isomorfo a X.

En primer lugar, se muestra que la propiedad de ser fuertemente subproyectivo se conserva a través de isomorfismos.

Teorema 3.1.2. *Un espacio isomorfo a un espacio fuertemente subproyectivo es* *fuertemente subproyectivo.*

Demostración. Sean X un espacio fuertemente subproyectivo, Y un espacio isomorfo a X y $T : X \to Y$ un isomorfismo sobreyectivo. Sea M un subespacio cerrado de dimensión infinita de Y entonces $T^{-1}(M)$ es un subespacio cerrado de dimensión infinita de X, por lo que existe un subespacio cerrado N, de dimensión infinita, contenido en $T^{-1}(M)$, complementado y con complemento isomorfo a X, de manera que X se puede expresar como: $X = N \oplus H$ con $H \simeq X$, entonces $T(N)$ es un subespacio cerrado de Y, de dimensión infinita, contenido en M, complementado y con complemento isomorfo a Y. $\square$

A continuación se presenta un resultado que permitirá caracterizar cuando la clase $\Phi_+(X,Y)$ es no vacía si el espacio X es fuertemente subproyectivo.

Teorema 3.1.3. *Sea X un espacio de Banach fuertemente subproyectivo, entonces todo subespacio cerrado de codimensión finita de X, contiene un subespacio isomorfo a X.*

Demostración. Sean X un espacio de Banach fuertemente subproyectivo y Z un subespacio de X de codimensión finita, se puede suponer que $\dim X/Z = n$, entonces existe un subespacio M de X tal que $X = Z \oplus M$, se observa que $\dim M = n$, por tanto Z tiene dimensión infinita.

Luego, por hipótesis, existe un subespacio cerrado H de Z, de dimensión infinita, complementado en X y con complemento isomorfo a X, de manera que X se puede expresar como: $X = H \oplus X_0$ con X_0 isomorfo a X, es de notar que X_0 tiene codimensión infinita. Además $Z = H \oplus (Z \cap X_0)$ por lo que $X = H \oplus (Z \cap X_0) \oplus M$.

Sea W un subespacio de H tal que $\dim W = n$, entonces $H = W \oplus Y$, donde Y es un subespacio cerrado de H, si se denota por Z_0 a $Y \oplus (Z \cap X_0) \oplus M$, entonces $X = W \oplus Z_0$. Se observa que Z_0 y Z son isomorfos y que $(Z \cap X_0) \oplus M$ es un subespacio de Z_0 isomorfo a X_0 y por tanto a X, de donde se concluye el resultado. $\square$

Como consecuencia inmediata del teorema anterior se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.1.4. *Sea X un espacio de Banach fuertemente subproyectivo, entonces $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$ si y sólo si Y contiene un subespacio isomorfo a X*

Demostración. Sea X un espacio fuertemente subproyectivo y $T \in \Phi_+(X,Y)$, entonces $R(T)$ es cerrado y existe un subespacio M de codimensión finita de X tal que $X = N(T) \oplus M$, por el Teorema 3.1.3, M contiene un subespacio M_0 isomorfo a X. Así $T(M_0)$ es un subespacio de Y isomorfo a X.

Recíprocamente, si Y_0 es un subespacio de Y isomorfo a X se considera el isomorfismo sobreyectivo $S : X \to Y_0$ y el operador T obtenido al extender el rango de S a todo el espacio Y, entonces $T \in \Phi_+(X,Y)$. $\square$

A continuación, se presenta un lema que servirá para mostrar que muchos de los ejemplos de espacios subproyectivos conocidos, son fuertemente subproyectivos.

Lema 3.1.5. *Sea X un espacio subproyectivo, si el subespacio N de la definición de espacios subproyectivos, es isomorfo a $N \times N$ entonces X es fuertemente subproyectivo.*

Demostración. Sea X un espacio subproyectivo y M un subespacio cerrado de X, de dimensión infinita, entonces existe un subespacio cerrado N de X, de dimensión infinita, tal que $N \subset M$ y N es complementado en X, de manera que X se puede expresar como: $X = N \oplus H$, con H subespacio cerrado de X. Por hipótesis, se puede suponer que existen dos subespacios cerrados N_1 y N_2 de N, isomorfos a N tales que $N = N_1 \oplus N_2$. De modo que N_1 es un subespacio de M, $N_2 \oplus H$ es isomorfo a X y $X = N_1 \oplus (N_2 \oplus H)$, lo cual demuestra que X es un espacio fuertemente subproyectivo. $\square$

El espacio de las sucesiones p-sumables, ℓ_p para $1 \leq p < \infty$ es isomorfo a $\ell_p \times \ell_p$, el espacio de las sucesiones convergentes a 0, c_0, es isomorfo a $c_0 \times c_0$. De manera que si el subespacio N de la definición de espacio subproyectivo, es isomorfo a ℓ_p o a c_0, entonces en virtud del Lema 3.1.5, se obtiene que el espacio en cuestión es fuertemente subproyectivo.

Se finaliza esta sección con una lista de ejemplos de espacios de Banach fuertemente subproyectivos.

Ejemplo 3.1.6. *Los espacios l_p para $1 \leq p < \infty$ y c_0 son fuertemente subproyectivos.* En efecto, sea M un subespacio cerrado de l_p (resp. c_0) de dimensión infinita, entonces por la Proposición 2.1.6, M contiene un subespacio cerrado N, tal que N es isomorfo a l_p y complementado en l_p (resp. c_0).

Ejemplo 3.1.7. *Los espacios L_p para $2 \leq p < \infty$ son fuertemente subproyectivos.* En efecto, por Teorema 2.1.3, se tiene que todo subespacio de dimensión infinita de L_p es siempre isomorfo a ℓ_2 y complementado, o contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p y complementado en L_p. Luego aplicando el Lema 3.1.5 se concluye el resultado deseado.

Ejemplo 3.1.8. Sea $1 \leq p < \infty$ y sea $w = (w_n)$ una sucesión decreciente de números positivos tales que $w_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$. El *espacio de sucesiones de Lorentz*, el cual se denota por $d(w,p)$, es el espacio de Banach de todos los escalares $x = (a_1, a_2, ...)$ para el cual

$$\|x\| = \sup_{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|^p w_n \right)^{1/p} < \infty$$

donde π varía sobre todas las permutaciones de enteros positivos.

Si (a_n^*) es un reordenamiento decreciente de la sucesión $(|a_n|)$ entonces la norma anterior también puede ser expresada de la forma

$$\|x\| = \sup_{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^*)^p w_n \right)^{1/p} < \infty$$

para $x = (a_1, a_2, ...) \in d(w,p)$. Si $w_n = n^{p/q} - (n-1)^{p/q}$, con $1 \leq q < \infty$, entonces el espacio $d(w,p)$ se denota por $\ell_{q,p}$. En [37], se muestra que $d(w,p)$ es reflexivo si $1 < p < \infty$ y $\ell_{q,p}$ es reflexivo para $1 < p, q < \infty$.

En [37, Proposición 4.e.3], se muestra que todo subespacio cerrado de dimensión infinita de $d(w,p)$ contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p y complementado en

$d(w,p)$. Del hecho que $\ell_p \times \ell_p$ es isomorfo a ℓ_p y del Lema 3.1.5 se obtiene que el espacio $d(w,p)$ es fuertemente subproyectivo.

Ejemplo 3.1.9. Sea $1 \leq p < \infty$ y W una función positiva, continua y decreciente sobre $(0,\infty)$ tal que

- $\lim_{t\to 0} W(t) = \infty$,
- $\int_0^1 W(t)dt = 1$ y
- $\int_0^\infty W(t)dt = \infty$.

el *espacio de funciones de Lorentz* el cual se denota por $L_{W,p}(I)$, donde $I = (0,a)$ con $0 < a \leq \infty$, es el conjunto de todas las funciones medibles sobre I tal que

$$\|f\| = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty f^*(t)^p W(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

donde $f^*(t) = \inf\{y \geq 0 : \mu(\{x \in I : |f(x)| > y\}) \leq t\}$.

Para $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, el espacio $L_{p,q}(I)$, es el conjunto de todas las funciones medibles sobre I tal que

$$\|f\|_{p,q} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty f^*(t)^q t^{\frac{q}{p}-1} d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{3.1}$$

donde $I = (0,a)$ con $0 < a \leq \infty$, provisto de la medida de Lebesgue, la cual se denota por μ. Si $1 \leq q < p$ el espacio $L_{p,q}(I)$ coincide con el espacio de funciones de Lorentz $L_{W,q}(I)$, cuando $W(t) = \frac{q}{p}t^{\frac{q}{p}-1}$, $0 < t < \infty$.

Se conoce (ver [15]), identificando por supuesto, funciones iguales en casi todas partes, que para $1 \leq q < p$, el espacio $L_{p,q}(I)$ es de Banach con la norma $\|\cdot\|_{p,q}$; sin embargo, para $1 < p < q < \infty$, la relación $\|\cdot\|_{p,q}$ es una cuasi-norma, la cual es equivalente a la norma

$$\|f\|_{(p,q)} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty f^{**}(t)^q t^{\frac{q}{p}-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.2}$$

donde $f^{**}(t) = \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right)$. El espacio $L_{p,q}(I)$ es un espacio de Banach con la norma (3.2),ver [28]. Debido a que las expresiones (3.1) y (3.2) son equivalentes, se trabajará con la expresión (3.1).

Se sabe que $\|f\|_p^p = \int_0^{\infty}[f^*(t)]^p dt$ (ver [28]), de donde se obtiene que los espacios $L_{p,p}(I)$ y $L_p(I)$ coinciden.

Para $1 < p, q < \infty$, los espacios $L_{p,q}(I)$ y $L_{W,p}(0,1)$ son reflexivos (ver [28, Proposición (2.7)] y [19]).

Un subespacio X de $L_{p,q}(0,1)$ se denomina *fuertemente embebido* si la norma de $L_1(0,1)$ y la norma de $L_{p,q}(0,1)$ son equivalentes sobre X. A continuación se presentan algunas propiedades sobre los subespacios de $L_{p,q}(I)$

1. Si $2 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ y X es un subespacio de $L_{p,q}(0,\infty)$ entonces X es isomorfo a ℓ_2 y complementado, o X contiene una copia complementada de ℓ_q, [11, Teorema 2.5].

2. Si $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ y X es un subespacio de $L_{p,q}(0,1)$, entonces X está fuertemente embebido en $L_p(0,1)$ o contiene una copia complementada de ℓ_q, [11, Corolario 2.9].

3. Sea $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, todo subespacio cerrado de $L_{p,q}(0,1)$ está fuertemente embebido en $L_{p,q}(0,1)$ o contiene una copia complementada de ℓ_q.

4. Sean $1 < r < p$ y $1 \leq s, q \leq \infty$, si $I = (0,1)$ entonces $L_{p,q}(0,1) \subset L_{r,s}(0,1)$.

El espacio $L_{p,q}(0,\infty)$ *es fuertemente subproyectivo para* $2 < p < \infty$ *y* $1 \leq q < \infty$.

En efecto, sea M un subespacio cerrado de dimensión infinita de $L_{p,q}(0,\infty)$, entonces por [11, Teorema 2.5] M es isomorfo a ℓ_2 y complementado o contiene un subespacio isomorfo a ℓ_q y complementado. Luego, por Lema 3.1.5 se obtiene que $L_{p,q}(0,\infty)$ es fuertemente subproyectivo para $2 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$.

Con un argumento similar al anterior se muestra que el espacio $L_{W,p}(0,1)$ *es fuertemente subproyectivo para* $2 < p < \infty$ (ver [19, Observación 5.7])

El espacio $L_{p,q}(0,1)$ *es fuertemente subproyectivo para* $2 \leq p < \infty$ *y* $1 \leq q < \infty$.

En efecto, si $p > 2$ entonces por ser $L_{p,q}(0,1)$ un subespacio cerrado de $L_{p,q}(0,\infty)$, lo afirmado sigue por el comentario dado al final de esta sección.

Si $p = 2$ y M un subespacio cerrado de dimensión infinita de $L_{p,q}(0,1)$, entonces por [11, Corolario 2.9], M es isomorfo a un subespacio fuertemente embebido de $L_2(0,1)$ o contiene una copia complementada de ℓ_q.

Si M es isomorfo a un subespacio fuertemente embebido de $L_2(0,1)$, entonces M es isomorfo a ℓ_2 (De aquí que M esta fuertemente embebido en $L_{2,q}(0,1)$). Así, según el valor de q se tienen los dos siguientes casos:

- Si $q = 2$ entonces $L_{2,q}(0,1) = L_2(0,1)$ por lo que M es complementado en $L_{2,q}(0,1)$.

- Si $q \neq 2$ entonces para $1 < r < 2$ se tiene que $L_{2,q}(0,1) \subset L_r(0,1)$, por lo que M es un subespacio de $L_r(0,1)$ isomorfo a ℓ_2, luego por Teorema 2.1.2, pasando a subespacio, se puede suponer que M es complementado en $L_r(0,1)$. De aquí que M es complementado en $L_{2,q}(0,1)$.

De modo que si M es un subespacio cerrado de dimensión infinita de $L_{p,q}(0,1)$ para $2 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$, entonces M es isomorfo a ℓ_2 y complementado o contiene un subespacio isomorfo a ℓ_q y complementado. Luego por Lema 3.1.5 se obtiene el resultado deseado.

Ejemplo 3.1.10. Dada una sucesión de escalares $a = (a_k)_k$ se define

$$\|a\|_J = \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{k_i} - a_{k_{i-1}})^2 \right)^{1/2} \right\}$$

donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones de enteros $(k_i)_{i=0}^{n}$ tales que $1 \leq k_0 < k_1 < ... < k_n$.

El espacio de *James*, el cual se denota por J, se define como

$$J = \left\{ a : \|a\|_J < \infty \text{ y } \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \right\}$$

El espacio de James fue construido en 1950 por R. C. James [30], y constituye un ejemplo clásico de un espacio de Banach con base pero sin base incondicional, el cual es no reflexivo, pero es isométricamente isomorfo a su dual, esto es $J \simeq J^{**}$ pero $\dim J^{**}/J = 1$.

En [17, Corolario 2.d.4] se muestra que todo subespacio cerrado de dimensión infinita de J contiene un subespacio isomorfo a ℓ_2 y complementado en J. Luego, en virtud del Lema 3.1.5 se concluye que el espacio J es fuertemente subproyectivo.

Ejemplo 3.1.11. Sea c_{00}, el subespacio de c_0 formada por las sucesiones cuyos términos son no nulos para una cantidad finita de puntos, para $1 < p < \infty$ considere la norma

$$\|x\|_{B_p} = \sup\{\left(\sum_{k=1}^{n} \|E_k(x)\|_{\ell_1}^p\right)^{1/p} : (E_k)_{k=1}^n \in \mathcal{A}\}$$

donde $\mathcal{A}$ es el conjunto de sucesiones de bloque $(E_k)_{k=1}^n$ de intervalos $E_k \subset \mathbb{N}$ tales que $n \leq \text{mín}\, E_1$ y donde $E_k(x)$ denota la proyección natural de x sobre el intervalo E_k. El espacio de Baernstein B_p es la completación de c_{00} con la norma $\|\cdot\|_{B_p}$.

Este espacio reflexivo fue construido en 1972 por Baernstein [9], y en [13, Teorema 0.15] se muestra que todo subespacio cerrado de dimensión infinita de B_p contiene un subespacio cerrado isomorfo a ℓ_p y complementado. Por lo que el espacio B_p es fuertemente subproyectivo.

Ejemplo 3.1.12. En 1974, Tsirelson [54] proporciona el primer ejemplo de un espacio de Banach que no contiene copias de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, o c_0. En 1974 Figiel y Johnson [18] construyen el dual del espacio encontrado por Tsirelson. Este dual es el espacio que hoy en día se conoce como el espacio de Tsirelson, el cual se denota por T. Este espacio T es un espacio de Banach reflexivo con base incondicional, que no contiene copias de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, o c_0. En [6, Teorema 10.3.2] se puede encontrar los detalles de la construcción de este espacio.

Sea (t_n) la base unitaria del espacio T, por [13, Proposición II.7] todo subespacio cerrado de T contiene un subespacio N complementado en T e isomorfo a un subespacio cerrado generado por una subsucesión de la base (t_n). Por otra parte, de

[13, Proposición I.12] se tiene que N es isomorfo a $N \times N$. Luego, por el Lema 3.1.5 se concluye que el espacio T es fuertemente subproyectivo.

Ejemplo 3.1.13. Un espacio compacto K es llamado *disperso* si todo conjunto no vacío de K tiene un punto aislado. Si Γ es un conjunto dotado con la topología discreta entonces la compactificación por un punto de Γ es un ejemplo de un conjunto disperso.

El espacio de las funciones continuas $C(K)$, con K disperso y compacto es fuertemente subproyectivo. En efecto, todo subespacio cerrado de dimensión infinita de $C(K)$ contiene un subespacio isomorfo a c_0 y complementado en $C(K)$ (ver [39, Teorema 11]). De modo que, por el hecho que c_0 es isomorfo a $c_0 \times c_0$ y en virtud del Lema 3.1.5 se concluye que el espacio $C(K)$ es fuertemente subproyectivo.

El siguiente resultado muestra que la condición de ser subproyectivo también se hereda a subespacios cerrados.

Teorema 3.1.14. *Un subespacio cerrado de dimensión infinita de un espacio subproyectivo es subproyectivo.*

Demostración. Sean X un espacio subproyectivo, Y un subespacio cerrado de dimensión infinita de X y M un subespacio cerrado de dimensión infinita de Y, entonces por ser X subproyectivo, M contiene un subespacio cerrado N, de dimensión infinita, complementado en X, de manera que X se puede expresar como: $X = N \oplus W$, donde W es un subespacio cerrado de X. Entonces $Y = N \oplus (W \cap Y)$, de modo que N es complementado en Y. $\square$

En virtud del teorema anterior se obtiene que un subespacio cerrado de los espacios dados en los Ejemplos 3.1.6 al 3.1.13 es fuertemente subproyectivo.

3.2. Espacios fuertemente superproyectivos

En esta sección se introduce el concepto de espacio fuertemente superproyectivo, se estudian algunas propiedades de estos espacios, se obtienen condiciones necesarias y suficientes para que la clase $\Phi_-(X,Y)$ sea no vacía cuando Y es fuertemente superproyectivo, se presenta una relación de dualidad para espacios reflexivos entre los espacios fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos, se presentan ejemplos de espacios de Banach clásicos que satisfacen esta propiedad, y se proporcionan herramientas que serán de gran utilidad a la hora de desarrollar los resultados de la siguiente sección.

Definición 3.2.1. Se dice que un espacio X es *fuertemente superproyectivo* si para todo subespacio cerrado M de X de codimensión infinita existe un subespacio N de X de codimensión infinita, complementado, que contiene a M e isomorfo a X.

En primer lugar, se muestra que la propiedad de ser fuertemente superproyectivo se conserva a través de isomorfismos.

Teorema 3.2.2. *Un espacio isomorfo a un espacio fuertemente superproyectivo es fuertemente superproyectivo.*

Demostración. Sean X un espacio fuertemente superproyectivo, Y un espacio isomorfo a X, $T : X \to Y$ un isomorfismo sobreyectivo y M un subespacio cerrado de codimensión infinita de Y, entonces $T^{-1}(M)$ es un subespacio cerrado de codimensión infinita de X, como X es fuertemente superproyectivo entonces existe un subespacio cerrado N, de codimensión infinita, que contiene a $T^{-1}(M)$, complementado e isomorfo a X, de manera que X se puede expresar como: $X = N \oplus H$ con $N \simeq X$, entonces $T(N)$ es un subespacio cerrado de Y, de codimensión infinita, que contiene a M, complementado e isomorfo a Y. Lo cual muestra que Y es fuertemente superproyectivo. $\square$

En similitud con el Teorema 3.1.3, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2.3. *Sea Y un espacio de Banach fuertemente superproyectivo, entonces todo cociente de Y, por un subespacio de dimensión finita tiene un cociente isomorfo a Y.*

Demostración. Sea Z un subespacio de dimensión finita de Y, entonces $Y = Z \oplus W$, con W un subespacio cerrado de dimensión infinita. Como Z tiene codimensión infinita y Y es fuertemente superproyectivo, existe un subespacio H de Y, cerrado de codimensión infinita, que contiene a Z, es complementado en Y y es isomorfo a Y. Entonces se puede escribir $Y = H \oplus Y_0$, con H isomorfo a Y, se observa que Y_0 es un subespacio cerrado de Y de codimensión infinita tal que $Y/Y_0 \simeq Y$.

Sea F un subespacio de Y_0 tal que $\dim F = \dim Z$, entonces $\frac{Y/F}{Y_0/F} \simeq Y/Y_0 \simeq Y$, de modo que $\frac{Y/F}{Y_0/F}$ es un cociente de Y/F isomorfo a Y. Dado que Y/F y Y/Z son isomorfos se obtiene el resultado deseado. $\square$

Como consecuencia inmediata del teorema anterior se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.2.4. *Sea Y un espacio de Banach fuertemente superproyectivo, entonces $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$ si y sólo si X tiene un cociente isomorfo a Y*

Demostración. Sea Y un espacio de Banach fuertemente superproyectivo tal que $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$, sea $T \in \Phi_-(X,Y)$, entonces $R(T)$ tiene codimensión finita, de manera que existe un subespacio W de Y, de dimensión finita tal que $Y = W \oplus R(T)$. De aquí que

$$\frac{Y}{W} \simeq R(T) \simeq \frac{X}{N(T)}$$

luego, por Teorema 3.2.3, Y/W tiene un cociente isomorfo a Y, digamos $\frac{Y/W}{W_0/W}$ con $\frac{Y/W}{W_0/W} \simeq Y/W_0 \simeq Y$. De donde se obtiene el resultado requerido.

Recíprocamente, sea M un subespacio cerrado de X tal que X/M es isomorfo a Y, se considera un isomorfismo sobreyectivo $T : X/M \to Y$ y la aplicación cociente $Q_M : X \to X/M$, entonces $T \circ Q_M : X \to Y$ es un isomorfismo y por lo tanto $T \circ Q_M \in \Phi_-(X,Y)$. $\square$

A continuación, se presenta un lema que servirá para mostrar que muchos de los ejemplos de espacios superproyectivos conocidos, son fuertemente superproyectivos.

Lema 3.2.5. *Sea X un espacio superproyectivo, si el complemento de el subespacio N de la definición espacio superproyectivo es isomorfo a $N \times N$ entonces X es fuertemente superproyectivo.*

Demostración. Sea M un subespacio cerrado de codimensión infinita de X. Entonces existe un subespacio de codimensión infinita N de X, que contiene a M y complementado en X. Luego, se puede escribir $X = N \oplus H$, por hipótesis, se puede suponer que existen dos subespacios cerrados H_1 y H_2 de H, isomorfos a H tales que $H = H_1 \oplus H_2$. De modo que $N \oplus H_1$ contiene a M y $X = (N \oplus H_1) \oplus H_2$, por lo que $N \oplus H_1$ es isomorfo a X, lo cual demuestra que X es un subespacio fuertemente superproyectivo. $\square$

Algunos ejemplos de espacios fuertemente superproyectivos pueden ser obtenidos por dualidad. El siguiente teorema muestra la relación existente entre espacios fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos para espacios de Banach reflexivos.

Teorema 3.2.6. *Sea X un espacio de Banach reflexivo, entonces X es fuertemente subproyectivo si y sólo si su dual X^* es fuertemente superproyectivo.*

Demostración. Sea X un espacio reflexivo tal que X es fuertemente subproyectivo, sea M un subespacio cerrado, de codimensión infinita de X^*, de modo que $M^\perp$ es un subespacio cerrado de dimensión infinita de X, luego existe un subespacio cerrado, de dimensión infinita N de X, tal que $N \subset M^\perp$, N es complementado en X y el complemento de N es isomorfo a X, de aquí que X/N es isomorfo a X. Así $N^\perp$ es un subespacio de X^*, complementado, de codimensión infinita, isomorfo a X^* que contiene a M. De aquí que X^* es fuertemente superproyectivo.

Recíprocamente, sea X un espacio reflexivo tal que X^* es fuertemente superproyectivo, y sea M un subespacio cerrado, de dimensión infinita de X, como M^* es isomorfo a $X^*/M^\perp$, entonces $M^\perp$ es un subespacio de codimensión infinita de X^*, luego, por hipótesis, existe un subespacio cerrado N de X^*, de codimensión infinita, que contiene a $M^{\perp}$, complementado e isomorfo a X^*. De manera que $N^{\perp}$ es un subespacio cerrado de $X^{**} = X$ de dimensión infinita, está contenido en M, es complementado en X y con complemento isomorfo a X. $\square$

A continuación se presentan ejemplos de espacios de Banach fuertemente superproyectivos.

Ejemplo 3.2.7. Los siguientes espacios son fuertemente superproyectivos

1. l_p para $1 < p < \infty$.
2. L_p para $1 < p \leq 2$.
3. $d(w, p)$ para $1 < p < \infty$.
4. $L_{p,q}(0, 1)$ para $1 < p \leq 2$ y $1 < q < \infty$.
5. $L_{W,p}(0, 1)$ y $L_{p,q}(0, \infty)$ para $1 < p < 2$ y $1 < q < \infty$.
6. El espacio de Tsirelson T.
7. El espacio de Baernstein B_p para $1 < p < \infty$.

En efecto, dado que los espacios antes mencionados son reflexivos, entonces en virtud del Teorema 3.2.6 y de los Ejemplos 3.1.6, 3.1.7, 3.1.8, 3.1.9, 3.1.12 y 3.1.11 se obtiene el resultado deseado.

Ejemplo 3.2.8. El dual del espacio de James, J^*, es fuertemente superproyectivo. En efecto, sea M un subespacio cerrado de J^* de codimensión infinita, entonces $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de J^{**} de dimensión infinita. Por el Ejemplo 3.1.10, J es fuertemente subproyectivo y dado que $J^{**} \simeq J$, entonces J^{**} es fuertemente subproyectivo, luego existe un subespacio cerrado N de J^{**} de dimensión infinita, contenido en $M^{\perp}$, complementado y con complemento isomorfo a J^{**}, de manera que J^{**} se puede expresar como: $J^{**} = N \oplus W$, con $W \simeq J^{**}$.

Se observa que, $N^{\perp}$ contiene a M, tiene codimensión infinita y

$$J^* \simeq J^{***} = N^{\perp} \oplus W^{\perp},$$

como $J^{**} \simeq J$ entonces $N^{\perp} \simeq J^*$. De donde se concluye que J^*, es fuertemente superproyectivo.

Ejemplo 3.2.9. El espacio de las funciones continuas $C(K)$, con K disperso y compacto es fuertemente superproyectivo. En efecto, sea M un subespacio cerrado de codimensión infinita de $C(K)$, por [42, Teorema 4.2], $C(K)/M$ tiene un cociente isomorfo a c_0 o a ℓ_2, esto es, existe un subespacio cerrado A de $C(K)$, tal que $M \subset A$ y $C(K)/A \simeq c_0$ o $C(K)/A \simeq \ell_2$.

Como K es disperso entonces $C(K)^* \equiv \ell_1(K)$, por lo que $C(K)^*$ no tiene copias de ℓ_2, por lo tanto $C(K)/A$ no puede ser isomorfo a ℓ_2 pues en caso contrario $A^{\perp}$ sería un subespacio de $C(K)^*$ isomorfo a ℓ_2. De modo que $C(K)/A \simeq c_0$.

Se considera la aplicación cociente $Q_A : C(K) \to C(K)/A$, como $C(K)$ tiene la propiedad de Pelczynski entonces existe un subespacio F de $C(K)$, isomorfo a c_0 y tal que $Q_A \circ J_F$ es un isomorfismo. Dado que $C(K)/A \simeq c_0$, por [6, Corolario 2.5.9], se tiene que que $Q_A(F)$ es complementado en $C(K)/A$, de manera que $C(K)/A = Q_A(F) \oplus N$ para algún subespacio cerrado N de $C(K)/A$. Por lo tanto $C(K) = F \oplus Q_A^{-1}(N)$, y M está contenido en un subespacio complementado de codimensión infinita, se obtiene que $C(K)$ es superproyectivo. Finalmente, dado que F es isomorfo a c_0 se concluye, en virtud del Lema 3.2.5, que $C(K)$ es fuertemente superproyectivo.

Una propiedad importante que poseen los espacios subproyectivos es que se hereda a cocientes, tal y como se exhibe en el siguiente resultado.

Teorema 3.2.10. *Un cociente de un espacio superproyectivo es superproyectivo.*

Demostración. Sean X un espacio superproyectivo, M un subespacio cerrado de X. Se mostrará que X/M es fuertemente superproyectivo. Para esto sea A un subespacio cerrado de X/M de codimensión infinita, A se puede expresar como $A = N/M$ donde

N es un subespacio cerrado de X que contiene a M, se considera la aplicación cociente $Q_M : X \to X/M$, entonces $N = Q_M^{-1}(A)$, por lo que N tiene codimensión infinita. Como X es fuertemente superproyectivo, existe un subespacio cerrado B de X, de codimensión infinita, que contiene a N, complementado e isomorfo a X. De modo que $Q_M(B)$ es un subespacio cerrado de codimensión infinita de X/M, que contiene a A y complementado en X/M. □

El teorema anterior sirve para mostrar que un cociente de los espacios dados en los Ejemplos 3.2.7 al 3.2.10 es fuertemente subproyectivo.

Los lemas y proposiciones que continuación se presentan servirán de herramientas en las demostraciones de los teoremas de la próxima sección.

Lema 3.2.11. *Sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$, Y_0 subespacio cerrado de Y tal que $Q_{Y_0}K$ es sobreyectiva. Si E es un subespacio cerrado de X tal que $E \supset K^{-1}(Y_0)$ entonces existe un subespacio cerrado F de Y tal que $F \supset Y_0$ y $E = K^{-1}(F)$. Además si E tiene codimensión infinita entonces F tiene codimensión infinita.*

Demostración. Se supone que $Q_{Y_0}K$ es una función sobreyectiva. Se considera el isomorfismo

$$U : \frac{X}{N(Q_{Y_0}K)} \longrightarrow R(Q_{Y_0}K)$$

inducido por $Q_{Y_0}K$, el cual está dado explícitamente por: $U\left(x + K^{-1}(Y_0)\right) = Q_{Y_0}Kx$, se considera también la aplicaciones cociente:

$$P : X \to X\big/\left(K^{-1}(Y_0)\right).$$

Sea E un subespacio cerrado de X tal que $E \supset K^{-1}(Y_0)$, se define $F = Q_{Y_0}^{-1}\left(U(PE)\right)$, entonces

- F es cerrado en Y,

- $F \supset Y_0$ y
- $E = K^{-1}(F)$.

Además, si E tiene codimensión infinita en X, entonces $Q_{Y_0}^{-1}(U(PE))$ tiene codimensión infinita en Y de donde se concluye que F tiene codimensión infinita. $\square$

Proposición 3.2.12. *Sean X un espacio de Banach, M y L dos subespacios cerrados de dimensión infinita de X, L isomorfo a X y fuertemente subproyectivo, tales que $M + L$ es cerrado y $M \cap L$ es de dimensión finita entonces L contiene un subespacio cerrado L', de codimensión finita tal que $M \cap L' = \{0\}$, $M + L'$ es cerrado y L' es isomorfo a L.*

Demostración. Dado que $M \cap L$ es de dimensión finita entonces $M \cap L$ es complementado en L, esto es existe un subespacio cerrado W de L de dimensión infinita tal que $L = (M \cap L) \oplus W$. Luego por el Teorema 3.1.3, W contiene un subespacio L' de codimensión finita e isomorfo a L. Además $M \cap L' = \{0\}$ y $M + L'$ es cerrado tal y como se requería. $\square$

Lema 3.2.13. [22, Lema 3.1.19] *Sea (g_n) una sucesión acotada en el espacio dual Y^*, tal que $\inf_n \|g_n\| > 0$ y 0 es un punto de la clausura w^* de $\{g_n : n \in N\}$, entonces (g_n) tiene una subsucesión (g_{n_k}) para la cuál existe una sucesión acotada (y_k) en Y tal que $g_{n_i}(y_j) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in N$*

3.3. La clase de perturbación para operadores semi-Fredholm sobre espacios fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos

En esta sección se resuelve el problema de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm utilizando espacios fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos. También se proporcionan ejemplos concretos de espacios de Banach para los cuales las igualdades $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ y $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ son ciertas.

Teorema 3.3.1. *Sean X, Y espacios de Banach tales que X es fuertemente subproyectivo y $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$ entonces $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $K \notin \mathcal{SS}(X,Y)$ entonces existe un subespacio cerrado H de X de dimensión infinita, tal que la restricción $K|_H$ es un isomorfismo. Se mostrará que $K \notin P\Phi_+(X,Y)$.

Como X es fuertemente subproyectivo, pasando a subespacio, se puede suponer que H es complementado en X, entonces X se puede expresar como:

$$X = H \oplus M$$

con M isomorfo a X. Como $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$ entonces por el Corolario 3.1.4, existe un subespacio L de Y isomorfo a X; así que uno de los siguientes casos puede ocurrir:

(1) $K(H) + L$ es cerrado y $K(H) \cap L$ tiene dimensión finita,

(2) $K(H) \cap L$ tiene dimensión infinita,

(3) $K(H) + L$ es no cerrado y $K(H) \cap L$ tiene dimensión finita.

(1) Como L es fuertemente subproyectivo, pues es isomorfo a X, entonces por la Proposición 3.2.12, se puede reemplazar L por un subespacio de codimensión finita, de manera que $K(H) \cap L = \{0\}$.

Sea $U \in \mathcal{L}(M,L)$ un isomorfismo sobreyectivo, se considera el operador

$$T \colon X = H \oplus M \longrightarrow K(H) \oplus L \subset Y$$

dado por $T(x,y) := -K(x) + U(y)$.

Se observa que T es un isomorfismo, por lo que $T \in \Phi_+(X,Y)$. Además, $H \subset N(T+K)$ por lo que $N(T+K)$ tiene dimensión infinita. Por lo tanto, $T+K \notin \Phi_+(X,Y)$, y de aquí que $K \notin P\Phi_+(X,Y)$.

(2) Como L es fuertemente subproyectivo y $K(H) \cap L$ es un subespacio cerrado de dimensión infinita de L, entonces existe un subespacio L_1 de L, cerrado de dimensión infinita, complementado, contenido en $K(H) \cap L$ y cuyo complemento es isomorfo a L, de manera que L se puede expresar como:

$$L = L_1 \oplus L_3$$

con L_3 isomorfo a L.

Dado que L_1 es un subespacio cerrado de dimensión infinita de $K(H) \cap L$ y como $K|_H$ es un isomorfismo, entonces $H_2 = (K|_H)^{-1}(L_1)$ es un subespacio cerrado de X de dimensión infinita. Por ser X fuertemente subproyectivo, existe un subespacio cerrado H_3 de H_2, cerrado de dimensión infinita, complementado en X y con complemento isomorfo a X, entonces se tiene que:

$$X = H_3 \oplus X_2$$

con X_2 isomorfo a X.

Así reemplazando L por el complemento de L_1, es decir, reemplazando L por L_3 y H por N_3, el cual es un subespacio de H complementado, se puede asumir que $K(N_3) + L_3$ es cerrado y $K(N_3) \cap L_3 = \{0\}$ y por tanto se está bajo las condiciones del caso (1).

(3) En este caso se definirá un operador compacto $K_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $(K + K_1)(H) \cap L$ tenga dimensión infinita.

Se observa que, de ser posible esto, $(K+K_1)|_H \in P\Phi_+(X, Y)$, así que, pasando a un subespacio de codimensión finita, se puede suponer que $(K + K_1)|H$ es un isomorfismo. Por lo tanto, el argumento del caso (2) garantiza la existencia de un operador $T \in \Phi_+(X, Y)$ tal que $T + K + K_1 \notin \Phi_+(X, Y)$, como K_1 es compacto debe ocurrir que $T + K \notin \Phi_+(X, Y)$ y por lo tanto $K \notin P\Phi_+(X, Y)$.

Como en el caso (1), se puede asumir que $K(H) \cap L = \{0\}$. Del hecho que $K(H) + L$ no sea cerrado, se deduce que existe una sucesión normalizada (y_n) en $K(H)$ tal que $\text{dist}(y_n, L) < 2^{-n}$.

Se observa que (y_n) no tiene subsucesiones débilmente convergentes, pues en caso contrario, si $y \in K(H)$ es el limite de alguna subsucesión, se tendría que $\|y\| = 1$ y se puede escoger una sucesión (u_n) en L tal que $\|u_n - y_n\| \to_{n\to\infty} 0$, de aquí que (u_n) converge débilmente a y, por lo que $y \in L$. Luego, $y \in K(H) \cap L = \{0\}$, lo cual no es posible pues $\|y\| = 1$. Por tanto (y_n) tampoco tiene subsucesiones convergentes.

Se denota por $S = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, del hecho que (y_n) no tenga subsucesiones convergentes, se deduce que $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$ y del hecho que (y_n) no tenga subsucesiones débilmente convergentes, se deduce que $0 \notin \overline{S}^{w}$ y que $\overline{S}^{w}$ no débil compacta. Luego, en virtud del Teorema 1.3.14, $S = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene una sucesión básica. Pasando a subsucesión, se puede asumir (y_n) es una sucesión básica.

Sea (h_n) una sucesión en H tal que $K(h_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que K es un isomorfismo sobre H, (h_n) es una sucesión básica y semi-normalizada.

Por lo tanto, existe una sucesión acotada (h_n^*) en el espacio dual X^* tal que $\langle h_i^*, h_j\rangle = \delta_{ij}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$.

Como $\operatorname{dist}(y_n, L) < 2^{-n}$, se puede seleccionar (z_n) en L tal que $\|y_n - z_n\| < 2^{-n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La expresión

$$K_1(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h_i^*, f\rangle (z_i - y_i),$$

define un operador compacto $K_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(K + K_1)(h_n) = z_n$, por lo que $[z_n] \subset L \cap (K + K_1)(H)$. Observe que (z_n) no tiene subsucesiones convergentes por lo que $[z_n]$ tiene dimensión infinita. De aquí que $(K + K_1)(H) \cap L$ tenga dimensión infinita, tal y como se deseaba. $\square$

Cabe destacar que el Teorema 3.3.1 no es consecuencia del resultado dado en [35], el cual establece que si Y es subproyectivo y $\Phi_+(X, Y) \neq \emptyset$ entonces $P\Phi_+(X, Y) = \mathcal{SS}(X, Y)$. En efecto, en primer lugar se debe observar que la condición dada en el resultado antes mencionado es sobre el espacio codominio Y; mientras que en el Teorema 3.3.1 la condición se impone sobre el espacio dominio X.

Más aún, dado que los ejemplos conocidos de espacios subproyectivo son también fuertemente subproyectivo, el hecho que $\Phi_+(X, Y) \neq \emptyset$ y Y sea subproyectivo implica que X es subproyectivo. Por lo tanto, en muchos casos el resultado dado en [35] es consecuencia del Teorema 3.3.1, aquí establecido.

El siguiente resultado aunque es una versión dual del Teorema 3.3.1 tiene un interés independiente ya que la demostración del mismo no sigue por dualidad; de hecho, la demostración del siguiente resultado es técnicamente más complicado que la demostración del Teorema 3.3.1, debido a que se consideran cocientes en lugar de subespacios.

Teorema 3.3.2. *Sean X, Y espacios de Banach tales que Y es fuertemente superproyectivo y $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$ entonces $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $K \notin \mathcal{SC}(X,Y)$, entonces existe un subespacio cerrado Y_0 de Y de codimensión infinita tal que la $Q_{Y_0}K$ es sobreyectiva, es decir $Y = R(K) + Y_0$. Se mostrará que $K \notin P\Phi_-(X,Y)$.

Por ser Y fuertemente superproyectivo, pasando a subespacio, se puede suponer que Y_0 es complementado e isomorfo a Y, de manera que Y se puede expresar como $Y = Y_0 \oplus N$.

Sea $P : Y \to Y$ la proyección de Y sobre N, entonces $N(P) = Y_0$ y $R(P) = N$, de modo que

$$R(PK) = P(R(K) + Y_0) = N$$

y

$$N(PK) = K^{-1}(Y_0).$$

Como $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$ entonces, por el Corolario 3.2.4, existe un subespacio M de X tal que X/M es isomorfo a Y.

De manera que, X/M es isomorfo a Y_0, se considera la función $S_1 \in \mathcal{L}(X, Y_0)$ definida por $S_1(x) = (S \circ Q_M)(x)$, donde Q_M es la aplicación cociente de X sobre X/M y S es un isomorfismo entre X/M y Y_0, entonces S_1 es una función sobreyectiva tal que $N(S_1) = M$ y $R(S_1) = Y_0$.

Como antes, y de manera dual, uno de los siguientes tres casos puede ocurrir:

(1) $K^{-1}(Y_0) + M$ es cerrado y $K^{-1}(Y_0) + M$ tiene codimensión finita,

(2) $\overline{K^{-1}(Y_0) + M}$ tiene codimensión infinita,

(3) $K^{-1}(Y_0) + M$ es no cerrado y $\overline{K^{-1}(Y_0) + M}$ tiene codimensión finita.

(1) Como $K^{-1}(Y_0)+M$ tiene codimensión finita entonces existe un subespacio cerrado W de X de dimensión finita tal que $X = (K^{-1}(Y_0) + M) \oplus W$.

Se denota por $M_1 = M + W$, entonces M_1/M tiene dimensión finita y $K^{-1}(Y_0) + M_1 = X$. Como X/M es fuertemente superproyectivo entonces, por el Teorema 3.2.3, existe un subespacio cerrado M_2 que contiene a M_1 tal que X/M_2 es isomorfo a Y. De aquí que, se puede asumir que $K^{-1}(Y_0) + M = X$

Se considera el operador $T\colon X \longrightarrow Y$ definido por

$$T(x) := S_1(x) - PK(x).$$

Se cumple que $R(T) = Y$, en efecto, sea $y \in Y$ entonces $y = y_0 + y_1$ con $y_0 \in Y_0$ y $y_1 \in N$. Se mostrará que

$$y_0 = S_1(x_0)\,\text{para algún}\,x_0 \in K^{-1}(Y_0) \tag{3.3}$$

y

$$y_1 = PK(x_1)\,\text{para algún}\,x_1 \in M \tag{3.4}$$

Para mostrar (3.3), dado que $R(S_1) = Y_0$, se toma $x \in X$ tal que $S_1(x) = y_0$, como $K^{-1}(Y_0) + M = X$, entonces x se puede expresar como $x = x_0 + x_0'$ con $x_0 \in K^{-1}(Y_0)$ y $x_0' \in M$. Así $x_0' \in N(S_1)$, de aquí se obtiene que $y_0 = S_1(x) = S_1(x_0)$.

Para mostrar (3.4), dado que $N = R(PK)$, entonces existe $x \in X$ tal que $y_1 = PK(x)$, como $K^{-1}(Y_0)+M = X$ entonces x se puede expresar como $x = x_1+x_1'$ con $x_1' \in K^{-1}(Y_0)$ y $x_1 \in M$. Dado que $K(x_1') \in Y_0 = N(P)$ entonces se tiene que $y_1 = PK(x) = PK(X_1)$.

Finalmente para x_0 y x_1 obtenidos de las expresiones (3.3) y (3.4), se observa que $x = x_0 - x_1 \in X$ y así

$$\begin{aligned} T(x_0 - x_1) &= (S_1 - PK)(x_0 - x_1) \\ &= S_1(x_0 - x_1) - PK(x_0 - x_1) \\ &= S_1(x_0) + PK(x_1) \\ &= y_0 + y_1 = y \end{aligned}$$

Se obtiene así que el operador T es sobreyectivo y por lo tanto $T \in \Phi_-(X, Y)$. Sin embargo, $R(T + K) = R(S_1 + (I_X - P)K) \subset Y_0$, por lo que $R(T + K)$ tiene codimensión infinita. De manera que, $T + K \notin \Phi_-(X, Y)$ y en consecuencia $K \notin P\Phi_-(X, Y)$.

(2) Ahora se considera el caso que $\overline{K^{-1}(Y_0) + M}$ tiene codimensión infinita, entonces dado que

$$\frac{X}{\overline{K^{-1}(Y_0) + M}} = \frac{X/M}{(\overline{K^{-1}(Y_0) + M})/M}$$

se tiene que $\left(\overline{K^{-1}(Y_0) + M}\right)/M$ tiene codimensión infinita en X/M. Como X/M es fuertemente superproyectivo, por ser isomorfo a Y, existe un subespacio de codimensión infinita X_1/M de X/M, complementado, que contiene a $\left(\overline{K^{-1}(Y_0) + M}\right)/M$ y que es isomorfo a X/M. De manera que X/M se puede expresar como:

$$\frac{X}{M} = \frac{X_1}{M} \oplus \frac{N}{M},$$

con $N \supset M$ y X_1/M isomorfo a X/M. De aquí se obtiene que:

- $\overline{K^{-1}(Y_0) + M} \subset X_1$,
- X_1 tiene codimensión infinita en X,
- X_1/M es isomorfo a Y,
- X/N es isomorfo a Y.

Luego, por la Proposición 3.2.11, existe Y_1 subespacio cerrado de Y de codimensión infinita tal que $Y_1 \supset Y_0$, $X_1 = K^{-1}(Y_1)$, de modo que $K^{-1}(Y_1) + N = X$.

Como Y_1 tiene codimensión infinita en Y, existe un subespacio Y_2 de Y de codimensión infinita que contiene a Y_1, complementado e isomorfo a Y

Así $Q_{Y_2}K$ es sobreyectiva, Y_2 es complementado e isomorfo a Y, $K^{-1}(Y_2)+N = X$, con X/N isomorfo a Y y por tanto, se está bajo las condiciones del caso (1)

(3) Si $K^{-1}(Y_0) + M$ es no cerrado y $\overline{K^{-1}(Y_0) + M}$ tiene codimensión finita entonces $K^{-1}(Y_0)^{\perp} + M^{\perp}$ es no cerrado y $K^{-1}(Y_0)^{\perp} \cap M^{\perp}$ tiene dimensión finita, reemplazando $M^{\perp}$ por un subespacio de codimensión finita, se puede asumir que

$$K^{-1}(Y_0)^{\perp} \cap M^{\perp} = \{0\}.$$

Se definirá un operador compacto $K_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que

$$\overline{(K + K_1)^{-1}(Y_0) + M}$$

tenga codimensión infinita.

Del hecho que $K^{-1}(Y_0)^{\perp} + M^{\perp}$ no sea cerrado, se deduce que existe una sucesión normalizada (f_n) en $K^{-1}(Y_0)^{\perp}$ tal que $\operatorname{dist}(f_n, M^{\perp}) < 2^{-n}$. Se observa que (f_n) no tiene subsucesiones convergentes, pues en caso contrario si f es el limite de alguna subsucesión, se tendría que $\|f\| = 1$ y $f \in K^{-1}(Y_0)^{\perp} \cap M^{\perp}$, lo cuál no es posible.

Si se toma $f \in \overline{\{f_n : n \in N\}}^{w^*}$, entonces $f \in \overline{K^{-1}(Y_0)^{\perp}}^{w^*} \cap \overline{M^{\perp}}^{w^*}$ como $K^{-1}(Y_0)^{\perp}$ y $M^{\perp}$ son débil* cerrados entonces $f \in K^{-1}(Y_0)^{\perp} \cap M^{\perp}$ y por tanto $f = 0 \in \overline{\{f_n : n \in N\}}^{w^*}$. Sea (g_n) una sucesión en $Y_0^{\perp}$ tal que $K^*(g_n) = f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, esto es posible pues $K^{-1}(Y_0)^{\perp} = K^*(Y_0^{\perp})$.

Como $K^*|_{Y_0^{\perp}}$ es un isomorfismo entonces $0 \in \overline{\{g_n : n \in N\}}^{w^*}$. Luego, por la Proposición 3.2.13, pasando a subsucesión existe una sucesión acotada (y_n) en Y tal que $g_i(y_j) = \delta_{ij}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$.

Ahora se selecciona (h_n) en $M^{\perp}$ tal que $\|f_n - h_n\| < 2^{-n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $K_1 \in \mathcal{L}(X,Y)$ definido por

$$K_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(h_i - f_i)(x)y_i,$$

es un operador compacto, y el adjunto de dicho operador está dado por

$$K_1^*(g) = \sum_{i=1}^{\infty} g(y_i)(h_i - f_i).$$

Se observa que $(K^* + K_1^*)(g_m) = h_n$ para cada $m \in \mathbb{N}$, de aquí que $(K+K_1)^*(Y_0^{\perp}) \cap M^{\perp}$ tenga dimensión infinita.

Pero $(K+K_1)^{-1}(Y_0)^{\perp} = (K+K_1)^*(Y_0^{\perp})$, por lo que $\overline{(K+K_1)^{-1}(Y_0) + M}$ tiene codimensión infinita tal y como se deseaba.

Ahora bien, se tiene que existe $K_1 \in \mathcal{L}(X,Y)$ compacto, tal que el subespacio $\overline{(K+K_1)^{-1}(Y_0) + M}$ tiene codimensión infinita.

Se observa que $Q_{Y_0}(K+K_1) \in \Phi_-(X,Y)$, pues $Q_{Y_0}K \in \Phi_-(X, Y/Y_0)$ por ser $Q_{Y_0}K$ sobreyectiva y por ser $Q_{Y_0}K_1$ compacto. Por lo que pasando a un subespacio de codimensión infinita, se puede suponer que $Q_{Y_0}(K+K_1)$ es sobreyectiva.

Así $Q_{Y_0}(K+K_1)$ es sobreyectiva, Y_0 es un subespacio complementado, de codimensión infinita en Y y $\overline{(K+K_1)^{-1}(Y_0) + M}$ tiene codimensión infinita, por lo que se tienen las condiciones del caso (2), así existe un operador $T \in \Phi_-(X,Y)$ tal que $T + K + K_1 \notin \Phi_-(X,Y)$, por tanto $T + K \notin \Phi_-(X,Y)$ de donde se concluye que $K \notin P\Phi_-(X,Y)$. $\square$

Es necesario comentar que el Teorema 3.3.2 no es consecuencia del resultado dado en [35] que establece: si X superproyectivo $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$ entonces $P\Phi_(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$. En efecto, la condición dada en el resultado antes mencionado es sobre el espacio dominio X; mientras que en el Teorema 3.3.2 la condición se impone sobre el espacio codominio Y.

Más aún, dado que los ejemplos conocidos de espacios superproyectivo son también fuertemente superproyectivo, el hecho que $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$ y X sea superproyectivo implica que Y es superproyectivo. Por lo tanto, en muchos casos el resultado dado en [35] es consecuencia del Teorema 3.3.2 que se ha establecido.

Se finaliza esta sección con una lista de soluciones positivas al problema de la clase de perturbación.

Como consecuencia directa del Teorema 3.3.1 y de los Ejemplos 3.1.6, 3.1.7, 3.1.8, 3.1.9, 3.1.10, 3.1.12, 3.1.13 y 3.1.11 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.3.3. *Sean X, Y espacios de Banach, si Y contiene un subespacio isomorfo a X y el espacio X es*

1. $X = \ell_p$ *para* $1 \leq p < \infty$.
2. $X = c_0$, *el espacio de las sucesiones convergentes a* 0.
3. $X = L_p$ *con* $2 \leq p < \infty$.
4. $X = d(w,p)$ *con* $1 \leq p < \infty$ *y* $w = (w_n)$ *una sucesión decreciente de números positivos tales que* $w_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$.
5. $X = \ell_{p,q}$, *el espacio de sucesiones de Lorentz con* $1 \leq p, q < \infty$.
6. $X = L_{W,q}(0,\infty)$ *o* $X = L_{p,q}(0,\infty)$, *el espacio de funciones de Lorentz para* $2 < p < \infty$.
7. $X = L_{p,q}(0,1)$, *el espacio de funciones de Lorentz para* $2 \leq p < \infty$ *y* $1 \leq q < \infty$.
8. $X = J$, *el espacio de James.*
9. $X = B_p$, *el espacio de Baernstein para* $1 < p < \infty$.
10. $X = T$, *el espacio de Tsirelson.*

11. *$X = C(K)$ el espacio de las funciones continuas sobre un conjunto compacto y disperso K.*

12. *X es un subespacio cerrado de los espacios anteriores.*

Entonces $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$.

También, como consecuencia directa del Teorema 3.3.2 y de los Ejemplos 3.2.7, 3.2.9 y 3.2.8 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.3.4. *Sean X, Y espacios de Banach, si X tiene un cociente isomorfo a Y y el espacio Y es*

1. *$Y = \ell_p$ para $1 < p < \infty$.*

2. *$Y = c_0$, el espacio de las sucesiones convergentes a 0.*

3. *$Y = L_p$ para $1 < p \leq 2$.*

4. *$Y = d(w,p)^*$ el dual del espacio $d(w,p)$, para $1 < p < \infty$ y $w = (w_n)$ una sucesión decreciente de números positivos tales que $w_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$.*

5. *$Y = \ell_{p,q}^*$, el dual del espacio $\ell_{p,q}$ para $1 < p, q < \infty$.*

6. *$Y = L_{W,q}(0,\infty)^*$ o $Y = L_{p,q}(0,\infty)^*$, para $2 < p < \infty$.*

7. *$Y = L_{p,q}(0,1)$, el espacio de funciones de Lorentz para $2 \leq p < \infty$ y $1 < q < \infty$.*

8. *$Y = J^*$, el dual del espacio de James.*

9. *$Y = B_p^*$, el dual del espacio de Baernstein para $1 < p < \infty$.*

10. *$Y = T^*$, el dual de el espacio de Tsirelson.*

11. *$Y = C(K)$ el espacio de las funciones continuas sobre un conjunto compacto y disperso K.*

12. Y es un cociente de los espacios anteriores.

Entonces $P\Phi_{-}(X,Y)=\mathcal{SC}(X,Y)$.

CONCLUSIONES

En este trabajo se encontraron soluciones positivas al problema de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm, específicamente se demostró que si $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$ entonces $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ cuando $X = L_p$, $1 < p < 2$ y Y satisface la propiedad de Orlicz, también se demostró que la igualdad es cierta para $p = 1$ y Y secuencialmente débil completo. Como consecuencia, y de manera dual, se obtiene que $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ cuando $Y = L_q$, $2 < q < \infty$ y el dual de el espacio X, X^*, satisface la propiedad de Orlicz.

También se mostró que el problema de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm tiene solución positiva sobre una clase de espacios que hemos denominado fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos, específicamente $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ si X es fuertemente subproyectivo y $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$, y $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ si Y es fuertemente superproyectivo y $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$.

Como consecuencia de los resultados antes mencionados, se obtiene una buena cantidad de espacios de Banach concretos que satisfacen el problema de la clase de perturbación, tal y como se presenta a continuación.

Sean X, Y espacios de Banach, tales que $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$. Entonces $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ cuando:

1. $X = L_1$ y Y es secuencialmente débil completo.

2. $X = L_p$ y $Y = L_q$ para $1 \leq q \leq p < 2$.

3. $X = \ell_p$ para $1 \leq p < \infty$.

4. $X = L_p$ con $2 \leq p \leq \infty$.

5. $X = c_0$, el espacio de las sucesiones convergentes a 0.

6. $X = d(w,p)$ con $1 \leq p < \infty$ y $w = (w_n)$ una sucesión decreciente de números positivos tales que $w_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$.

7. $X = \ell_{p,q}$, el espacio de sucesiones de Lorentz con $1 \leq p, q < \infty$.

8. $X = L_{W,q}(0,\infty)$ o $X = L_{p,q}(0,\infty)$, el espacio de funciones de Lorentz para $2 < p < \infty$.

9. $X = L_{p,q}(0,1)$, el espacio de funciones de Lorentz para $2 \leq p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$.

10. $X = J$, el espacio de James.

11. $X = B_p$, el espacio de Baernstein para $1 < p < \infty$.

12. $X = T$, el espacio de Tsirelson.

13. $X = C(K)$ el espacio de las funciones continuas sobre un conjunto compacto y disperso K.

14. X es subespacio cerrado de los espacios dados anteriormente desde 3. al 13.

Sean X, Y espacios de Banach, tales que $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$. Entonces $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ cuando:

1. $Y = L_q$ y $X = L_p$ para $2 \leq q \leq p \leq \infty$.

2. $Y = \ell_p$ para $1 < p < \infty$.

3. $Y = c_0$, el espacio de las sucesiones convergentes a 0.

4. $Y = L_p$ para $1 \leq p \leq 2$.

5. $Y = d(w,p)^*$ el dual del espacio $d(w,p)$, para $1 < p < \infty$ y $w = (w_n)$ una sucesión decreciente de números positivos tales que $w_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$.

6. $Y = \ell_{p,q}^*$, el dual del espacio $\ell_{p,q}$ para $1 < p, q < \infty$.

7. $Y = L_{W,q}(0,\infty)^*$ o $Y = L_{p,q}(0,\infty)^*$, para $2 < p < \infty$.

8. $Y = L_{p,q}(0,1)$, el espacio de funciones de Lorentz para $2 \leq p < \infty$ y $1 < q < \infty$.

9. $Y = J^*$, el dual del espacio de James.

10. $Y = B_p^*$, el dual del espacio de Baernstein para $1 < p < \infty$.

11. $Y = T^*$, el dual de el espacio de Tsirelson.

12. $Y = C(K)$ el espacio de las funciones continuas sobre un conjunto compacto y disperso K.

13. Y es un cociente de los espacios dados anteriormente desde 2. al 12.

Bibliografía

[1] P. Aiena. *Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers.* Kluwer, Dordrecht, 2004.

[2] P. Aiena and M. González, *On the perturbation classes of semi-Fredholm operators and Fredholm operators,* Rendiconti Circ. Mat. Palermo Ser II Suppl. **40** (1996), 37–46.

[3] P. Aiena and M. González, *On inessential and improjective operators,* Studia Math. **131** (1998), 271–287.

[4] P. Aiena and M. González, *Inessential operators between Banach spaces,* Rendiconti Circ. Mat. Palermo Ser II Suppl. **68** (2002), 3–26.

[5] P. Aiena, M. González and A. Martinón, *On the perturbation classes of continuous semi-Fredholm operators,* Glasgow Math. J. **45** (2003), 91–95.

[6] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory,* Springer, New York, 2006.

[7] C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive operators,* Academic Press, Orlando, 1985.

[8] D. Alspach and E. Odell, *L_p spaces.* Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, 123–159, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[9] A. Baernstein, *On reflexivity and summability,* Studia Math. **42** (1972), 91–94.

[10] S. Caradus, W. Pfaffenberger and B. Yood, *Calkin algebras and algebras of operators in Banach spaces,* M. Dekker Lecture Notes in Pure & Appl. Math. 9, New York 1974.

[11] N. L. Carothers and S. J. Dilworth, *Subspaces of $L_{p,q}$,* Proceedings of the American Math. Soc. **104** (1988), 537-545.

[12] N. L. Carothers, *A short course on Banach space theory* Cambridge, New York, 2005.

[13] P. Casazza and T.J. Shura. *Tsirelson's space,* Springer. Lecture Notes in Math. **1363**, (1989).

[14] J. Creekmore, *Type and cotype in Lorentz L_{pq} spaces,* Indagationes Mathematicae. Proceedings A **84** (2),June 20, (1981).

J. Creekmore Type and Cotype in Lorentz Lpq Spaces Indagationes Mathematicae. Proceedings A 84 (2), June 20, (1981).

[15] S. J. Dilworth, *Special Banach lattices and their applications,* Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol I, North-Holland, (2001), 497-532.

[16] P. Enflo and H.P. Rosenthal, *Some results concerning $L^p(\mu)$-spaces,* J. Funct. Anal. **14** (1973), 325–348.

[17] H. Fetter and B. Gamboa de Buen, *The James forest*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 236, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[18] T. Figiel and W. B. Johnson, *A uniformly convex Banch space which contains no ℓ_p,* Compositio Math. **29** (1974), 179–190.

[19] T. Figiel , W. B. Johnson, and L. Tzafriri, *On Banach lattices and spaces having local unconditional structure, with application to Lorentz function spaces.* J. Approx. Theory. **13**, (1975), 395–412.

[20] I.C. Gohberg, A.S. Markus and I.A. Feldman, *Normally solvable operators and ideals associated with them,* (Russian), Bul. Akad. Štiince RSS Moldoven 1960 no. **10** (76), 51–70. (Translation: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 61 (1967), 63–84.

[21] S. Goldberg, *"Unbounded linear operators,"* McGraw-Hill, New York 1966.

[22] M. González and A. Martínez-Abejón, *Tauberian Operators,* Operator Theory: Advances and applications, Vol 194. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[23] M. González, A. Martínez-Abejón and M. Salas-Brown, *Perturbation classes for semi-Fredholm operators on subprojective and superprojective spaces,* Ann. Acad. Sc. Fenn. Math. 2011**to appear**

[24] M. González and M. Salas-Brown, *Perturbation classes for semi-Fredholm operators on $L_p(\mu)$-spaces,* J.Math. Anal. Appl. **370** (2010) 11-17.

[25] M. González, *On essentially incomparable Banach spaces,* Math. Z. **215** (1994), 621–629.

[26] M. González, *The perturbation classes problem in Fredholm theory,* J. Funct. Anal. **200** (2003), 65–70.

[27] W.T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem,* J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 851–874.

[28] R.A. Hunt, *On $L(p,q)$ spaces,* Enseign. Math. **12** (1966), 249–274.

[29] R.B. Israel, *Perturbations of Fredholm operators,* Studia Math. **52** (1974), 1–8.

[30] R. C. James *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. Math. (2) **52** (1950), 518–527.

[31] W. B. Johnson, H. P. Rosenthal, *On w^*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces,* Studia Math. **43** (1972),77–92.

[32] M. I. Kadetč and A. Pelczyński,*Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p,* Studia Math. **21** (1962), 161-176.

[33] T. Kato, *Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators,* J. d'Analyse Math. **6** (1958), 261–322.

[34] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators,* Springer; Berlin, 1980.

[35] A. Lebow and M. Schechter, *Semigroups of operators and measures of noncompactness,* J. Funct. Anal. **7** (1971), 1–26.

[36] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces.* Lecture Notes in Math. 338. Springer; Berlin, 1973.

[37] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces I. Sequence spaces.* Springer; Berlin, 1977.

[38] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces II. Function spaces.* Springer; Berlin, 1979.

[39] H. P. Lotz, N. T. Peck and H. Porta. *Semi-embeddings of Banach spaces.* Proc. Edimburgh Math. Soc. **22** (1979), 233–155.

[40] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory.* Springer; New York, 1998.

[41] V.D. Mil'man, *Certain properties of strictly singular operators,* (Russian), Funkcional. Anal. i Priložen. **3** (1969), 93–94. (Translation: Funct. Anal. Appl. **3** (1969), 77–78.

[42] J. Mújica, *Separable quotiens of Banach spaces.* Rev. Mat. Univ. Compl. Madrid. **10** (1997),299–330.

[43] W. Orlicz, *Über unbedingte Konvergenz in Funktionräumen,* Studia Math. **1** (1930), 83–85.

[44] R.E.A.C Paley, *A remarkable series of orthogonal functions,* Proc. London Math.. Soc., **34** (1932), 241-264

[45] A. Pełczyński, *On strictly singular and strictly cosingular operators II. Strictly singular and strictly cosingular operators in $L(\nu)$-spaces,* Bull. Acad. Polon. Sci. **13** (1965), 37-41.

[46] A. Pełczyński and H.P. Rosenthal, *Localization techniques in L^p spaces,* Studia Math. **52** (1975), 265–289.

[47] A. Pietsch, *Inessential operators in Banach spaces.* Integral Equations and Operator Theory **1**, (1978), 589–591.

[48] A. Pietsch, *Operator ideals,* North-Holland; Amsterdam, New York, Oxford, 1980.

[49] G. Plebanek, *A construction of a Banach space $C(K)$ with few operators.* Topology Appl. **143** (2004), 217–239.

[50] F. Räbiger, *Lower 2-estimates for sequences in Banach lattices,* Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 81–83.

[51] H.P. Rosenthal, *On subspaces of L^p,* Ann. Math. **97** (1973), 344–373.

[52] E. Tarafdar, *Improjective operators and ideals in a category of Banach spaces,* J. Austral. Math. Soc. **14** (1972), 274–292.

[53] A.E. Taylor and D.C. Lay, *Introduction to functional analysis,* Wiley, New York, 1980.

[54] B. S. Tsirelson, *It is impossible to imbed ℓ_p of c_0 into an arbitrary Banach space,*Funkcional. Anal. Prilozen. **8** (1974), 57–60.

[55] H.-O. Tylli, *Lifting non-topological divisors of zero modulo the compact operators,* J. Funct. Anal. **125** (1994), 389–415.

[56] J.I. Vladimirskii, *Strictly cosingular operators,* Soviet Math. Doklady **8** (1967), 739–740.

[57] L. Weis, *On perturbation of Fredholm operators in $L_p(\mu)$-spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **67** (1977), 287–292.

[58] L. Weis, *Perturbation classes of semi-Fredholm operators,* Math. Z. **178** (1981), 429–442.

[59] R.J. Whitley, *Strictly singular operators and their conjugates,* Trans. Amer. Math. Soc. **113** (1964), 252–261.