UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Análisis del Producto Interno Bruto Venezolano mediante el uso de Series de Tiempo

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Manuel Solórzano** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr(a). Mairene Colina.

Caracas, Venezuela
Febrero 2016

ii

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado " **Análisis del Producto Interno Bruto Venezolano mediante el uso de series de tiempo.** ", presentado por el **Br. Manuel Solórzano**, titular de la Cédula de Identidad **19.224.554**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr(a). Mairene Colina
Tutor

Dr. José Benito Hernández
Jurado

Dr. Ricardo Ríos
Jurado

Dedicatoria

Quiero dedicar este proyecto a mi familia y amigos que de una manera desinteresada están siémpre dispuestos apoyarme en mis logros y triunfos, respetando mi trabajo y considerando sabiamente mis esfuerzos.

Ha sido para mi una gran alegría y un gran privilegio contar con personas como ellas.

Resumen

El Producto Interno Bruto muestra el comportamiento de la calidad de vida material, en ningún sentido es reflejo de bienestar o calidad de vida, es decir, aunque exista un PIB bueno no implica que los consumidores distribuyan sus gastos en servicios y productos para mejorar su calidad de vida, dicho en otras palabras, el PIB es el indicador del nivel de crecimiento de una economía, cuando aumenta podemos decir que la gente se encuentra en una buena situación (materialmente), por ello es asociado a una medida de bienestar económico.

El PIB en Venezuela se clasifica en tres actividades económicas fundamentales, las cuales son: Actividad Petrolera, Actividad NO Petrolera e Impuestos netos sobre los productos. En este proyecto se consideran estas tres actividades económicas y serán tratadas como series temporales con la finalidad de ajustar un modelo (SARIMA o ARIMA) que permita caracterizar el comportamiento de estas actividades económicas en el país. Entendiendo que este tipo de metodología es aplicable, pues una serie de tiempo es un conjunto de observaciones $\{x_t\}$, cada una registrada a un tiempo específico t.

Palabras Claves:

Series Temporales, Modelos Autoregresivos, Modelos ARIMA, Modelos SARIMA, Producto Interno Bruto, Producto Interno Bruto Venezolano, Predicción.

Agradecimiento

Siempre habrá en el hombre agradecido un motivo para agradecer y yo tengo mucho que agredecerle al Dios todo Poderoso, pues se lo debo todo a él, vida, salud, fuerza, capacidad, etc., también estoy muy agradecido con mi papá Alexis Solórzano, mi mamá Nancy, mi madrastra Rosalia Pacheco, mis hermanos los de sangre y los que lo son por todos los años que hemos conportido y convivido, gracias por su apoyo sincero en las altas y bajas.

Quiero manisfestar un muy profundo agradecimiento a mi tutora Mairene Colina por haberme enseñado tantas cosas en tan poco tiempo, gracias por su pasiencia y tiempo invertido en mi, Dios de alguna forma y en su debido momento le recompesará. Con respeto, afecto y cariño gracias.

A mi profesora de álgebra I Laura Galindo y mi gran amigo Paúl Martínez, quienes con sus consejos me motivaron a siguir en la carrera, cuando estaba a punto de abandonarla, la vida les devolverá todo sus buenos deseos, se les quiere y aprecia mucho.

No podía dejar pasar por alto a mi hermano Samuel Solórzano quién me apoyo en mi inscripción a la carrera, él sabe a lo que me refiero, por motivo de lo extenso de la histoia no la puedo citar, pero le estoy muy agradecido.

Índice general

Introducción

Es razonable pensar que para mejorar la economía es necesario que la producción sea considerablemente buena, esto es, el mercado satisface las necesidades de los consumidores. Cuando se comercializa un producto se toma en cuenta que dicho producto en algún momento debió ser producido y esta producción consecuentemente ha generado un gasto, llámese gasto de personal, gasto de inversión o cualquier otro gasto. Existe un indicador que engloba los gastos de la realización de un producto, este es el Producto Interno Bruto (PIB).

Año tras año los países del mundo buscan hacer crecer el Producto Interno Bruto ya que se asume que una mayor producción aumentará la cantidad de bienes y servicios a la disposición de las familias. En tal sentido, cabe destacar que el Producto Interno Bruto solo señala cambios en la producción, mostrando el comportamiento de la calidad de vida material, en ningún sentido es reflejo de bienestar o calidad de vida, es decir, aunque exista un PIB bueno no implica que los consumidores distribuyan sus gastos en servicios y productos para mejorar su calidad de vida, dicho en otras palabras, el PIB es el indicador del nivel de crecimiento de una economía, cuando aumenta podemos decir que la gente se encuentra en una buena situación (materialmente), por ello es asociado a una medida de bienestar económico.

El PIB en Venezuela se clasifica en tres actividades económicas fundamentales, las cuales son: Actividad Petrolera, Actividad NO Petrolera e Impuestos netos sobre los productos. En este proyecto se consideran estas tres actividades económicas y serán tratadas como series temporales con la finalidad de ajustar un modelo (SARIMA o ARIMA) que permita caracterizar el comportamiento de estas actividades económicas en el país. Entendiendo que este tipo de metodología es aplicable, pues una serie de tiempo es un conjunto de observaciones $\{x_t\}$, cada una registrada a un tiempo específico t. El tiempo t esta representado por los años 1997 al 2014, medido en trimestre, cuatro trimestre por año. Los datos para realizar el estudio fueron extraídos de la página oficial del Banco Central de Venezuela [**6**].

En este proyecto comenzaremos enunciando algunas definiciones correspondientes a series temporales, también se tomaran en cuenta ejemplos de ruido blanco, luego enunciaremos la definición del PIB para entender el propósito de este objeto y posteriormente veremos tres métodos para calcular el PIB.

Hemos dedicado un capitulo llamado **Modelo y Análisis de Resultados**, en el cual hacemos un análisis exploratorios para cada una de las series. Seguidamente analizamos cada serie usando series temporales, con el fin de hacer pronósticos sobre las misma.

Capítulo 1

Series Temporales

El análisis de series de tiempo desempeña un papel importante en el análisis requerido para el pronóstico de eventos futuros. Existen varias formas o métodos para calcular cual va a ser la tendencia del comportamiento del proceso en estudio.

Algunos ejemplos donde se puede utilizar series temporales son:

Economía y Marketing

- Proyecciones del empleo y desempleo.
- Evolución del índice de precios del oro.
- Beneficios netos mensuales de cierta entidad bancaria.
- Índices del precio del petróleo.

Demografía

- Número de habitantes por año.
- Tasa de mortalidad infantil por año.

Medioambiente

- Evolución horaria de niveles de óxido de azufre y de niveles de óxido de nitrógeno en una ciudad durante una serie de años.
- Lluvia recogida diariamente en una localidad.
- Temperatura media mensual.
- Medición diaria del contenido en residuos tóxicos en un río.

A continuación daremos la definición de series temporales, con el objetivo de analizar el comportamiento del Producto Interno Bruto (PIB) Venezolano. En el Capítulo 2 veremos la Definición del PIB y los métodos para calcularlo.

1. Definición Series Temporales

Una serie de tiempo es una secuencia de observaciones, medidas en determinados momentos del tiempo, ordenados cronológicamente y espaciados entre sí de manera uniforme, así los datos usualmente son dependientes entre sí. El principal objetivo de una serie de tiempo es su análisis para hacer pronóstico. Formalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 1.1. Una **serie de tiempo** es un conjunto de observaciones x_t, cada una registrada a un tiempo específico t, para t $\in$ T $\subseteq \mathbb{N}$ ó T $\subseteq \mathbb{R}$.

Definición 1.2. Un **modelo de series de tiempo** para los datos observados x_t es una especificación de una distribución conjunta (o posiblemente solo de medias y covarianzas) de una sucesión de variables aleatorias $\{X\}_{t\in T}$, de las cuales x_t es una realización, para t $\in$ T $\subseteq \mathbb{N}$ ó T $\subseteq \mathbb{R}$.

Componentes de una serie temporal

El análisis clásico de las series temporales se basa en la suposición de que los valores que toma la variable de observación es la consecuencia de tres componentes, cuya actuación conjunta da como resultado los valores medidos, estas componentes son:

1. **Componente Tendencia.** Se puede definir como un cambio a largo plazo que se produce en la ralación al nivel medio, o el cambio a largo plazo de la media. La tendencia se identifica con un movimiento suave de la serie a largo plazo.
2. **Componente Estacional.** Muchas series temporales presentan cierta periodicidad o dicho de otro modo, variación de cierto período (semestral, mensual, trimestral, anual, etc.).
3. **Componente Aleatoria.** Esta componente no responde a ningún patrón de comportamiento, sino que es el resultado de factores fortuitos o aleatorios que inciden de forma aislada en una serie de tiempo.

2. Modelos Estadísticos para Series Temporales

El objetivo primario en el análisis de Series de Tiempo es desarrollar modelos matemáticos que provean una descripción apropiada para los datos muestrales. Utilizaremos la Definición 1.3, para tener un soporte estadístico.

DEFINICIÓN 1.3. Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias indexadas $X(\omega, t)$ ó $X_t(\omega)$ donde t pertenece a un conjunto de índices T y ω pertenece a un espacio Ω.

Observación

- Si $t = t^*$ fijo, $X(\omega, t^*)$ es una variable aleatoria.
- Si $\omega = \omega^*$ fijo, $X(\omega^*, t)$ es una función de t, y se llama una realización del proceso.

Una **serie de tiempo** es la realización de un proceso estocástico.

Para entender el sentido de las series temporales veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.4. **Ruido Blanco.**

Una menera sencilla de generar series de tiempo puede ser considerado una sucesión de variables aleatorias no-correlacionadas, w_t con media 0 y varianza σ_w^2. Las series de tiempo generadas de esta manera son usadas como modelos para ruido en aplicaciones de ingeniería, donde ellas son llamadas ruido blanco, denotaremos este proceso como $w_t \sim WN(0, \sigma_w^2)$. La designación blanco se origina de la analogía con luz blanca e indica que todos los posibles períodos de oscilación están presentes con igual intensidad.

También se requerirá que el ruido sea una colección de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) con media 0 y varianza σ_w^2. Distinguiremos este caso diciendo que es ruido blanco independiente o escribiendo $w_t \sim iidN(0, \sigma_w^2)$. Un muy usado ruido blanco es el ruido blanco gaussiano, donde las w_t son variables aleatorias normales con media 0 y varianza σ_w^2 e identificadas como $w_t \sim iidN(0, \sigma_w^2)$.

EJEMPLO 1.5. **Promedio móvil.**

Consideremos la serie en el Ejemplo 1.4 y reemplacémosla como el promedio del valor actual y los vecinos inmediatos anterior y posterior. Esto es

$$v_t = \frac{1}{3}(w_{t-1} + w_t + w_{t+1}),$$

la cual nos da una serie suavizada, esta serie se conoce como el promedio móvil. En la parte superior, Figura 1.1, se observa un ruido blanco gaussiano de 500 variables generadas con $\sigma_w^2 = 1$ y en la parte inferior el promedio móvil de tres puntos para la misma serie.

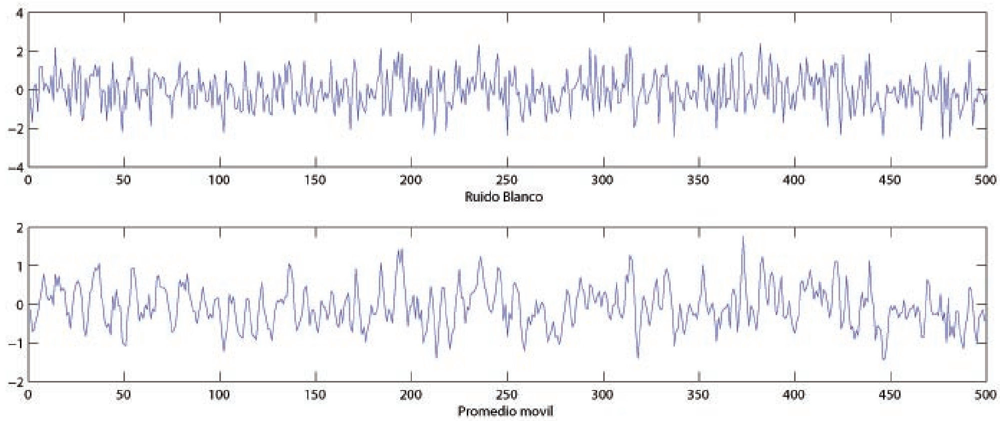

FIGURA 1.1. Ruido blanco gaussiano (parte superior) y promedio móvil de 3 puntos (parte inferior).

EJEMPLO 1.6. **Autoregresión.**

Suponga que la serie de ruido blanco w_t del Ejemplo 1.4 como entrada y calculamos la salida usando la ecuación de segundo orden

$$x_t = x_{t-1} - 0,90x_{t-2} + w_t, \tag{1.1}$$

sucesivamente para $t = 1, 2, 3, ..., 500$. La ecuación (1.1) representa una regresión o predicción del valor actual de x_t de una serie de tiempo como una función de dos valores anteriores de la serie, y por consiguiente se sugiere el término autoregresión para este modelo. La Figura 1.2 muestra el comportamiento gráfico de este proceso.

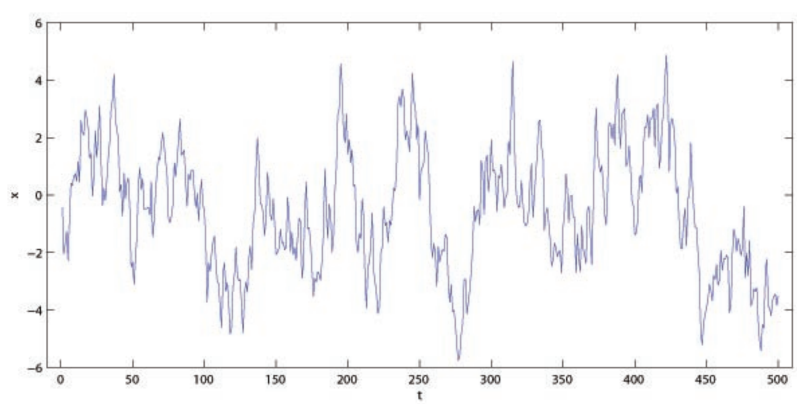

FIGURA 1.2. Serie autoregresiva generada del modelo 1.1

Estos ejemplos serán de utilidad para analizar el estudio de otras series, en nuestro caso las series de tiempo asociadas al Producto Interno Bruto Venezolano. Veamos ahora la definición de la función de media.

Definición 1.7. La **función de media** es definida como

$$\mu_{X_t} = \mathbb{E}[X_t] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx, \tag{1.2}$$

en caso de que la integral exista, donde $\mathbb{E}$ denota el operador usual de la esperanza.

Note que μ_{X_t} consiste en que es una media teórica para la serie de tiempo en un punto particular, donde la media se asume o calcula sobre todos los posibles eventos que podrían haber producido X_t.

Ejemplo 1.8. **Función de media de una serie de promedio móvil**.

Si w_t denota una serie de ruido blanco, entonces $\mu_{w_t} = \mathbb{E}(w_t) = 0$ para todo t. La serie en la parte superior de la Figura 1.1 del Ejemplo 1.4 refleja esto. Suavizando la serie como en el Ejemplo 1.5 no cambia la media porque podemos escribir

$$\mu_{w_t} = \mathbb{E}(v_t) = \frac{1}{3}[\mathbb{E}(w_{t-1}) + \mathbb{E}(w_t) + \mathbb{E}(w_{t+1})] = 0. \tag{1.3}$$

A continuación procedemos a definir la función de autocovarianza, a travéz de ella vamos a definir la función de autocorrelación.

Definición 1.9. La **función de autocovarianza** es definida como

$$\gamma_x(s,t) = \mathbb{E}[(x_s - \mu_s)(x_t - \mu_t)], \tag{1.4}$$

para todo t y s, que pertenecen al conjunto de subíndices T.

En ocasiones escribiremos

$$\gamma_x(s,t) = \gamma(s,t).$$

Ejemplo 1.10. **Autocovarianza de un ruido blanco.**

La serie de ruido blanco w_t, mostrada en la parte superior de la Figura 1.1 del Ejemplo 1.4, tiene $\mathbb{E}(w_t) = 0$ y

$$\gamma_w(s,t) = \mathbb{E}(w_s, w_t) = \begin{cases} \sigma_w^2, & s = t \\ 0, & s \neq t \end{cases}$$

donde, en este ejemplo, $\sigma_w^2 = 1$. Note que w_s y w_t son no-correlacionados para $s \neq t$, por lo que se tiene $\mathbb{E}(w_s w_t) = \mathbb{E}(w_s)\mathbb{E}(w_t) = 0$ porque los valores medios de las variables de ruido blanco son cero.

Definición 1.11. La **función de autocorrelación (ACF)** se define como

$$\rho(s,t) = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\gamma(s,s)\gamma(t,t)}}. \tag{1.5}$$

La ACF mide la predictibilidad lineal de una serie de tiempo en tiempo t, digamos x_t usando solo el valor x_s. Es fácil de demostrar que $-1 \leq \rho(s,t) \leq 1$ usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Si podemos predecir x_t exactamente de x_s a través de la relación lineal $x_t = \beta_0 + \beta_1 x_s$, entonces la correlación será 1 cuando $\beta_1 > 0$ y -1 cuando $\beta_1 < 0$.

3. Series de Tiempo Estacionarias

Determinar la estacionalidad de una serie es de vital importancia, ya que podriamos aplicar propiedades que nos permitan determinar los combios significativo en el comportamiento de la serie. Veamos ahora cuando una serie es o no estacionaria.

(1) **Estacionarias**. Una serie es estacionaria cuando es estable a lo largo del tiempo, es decir, cuando la media y varianza son constantes en el tiempo. Esto se refleja gráficamente en que los valores de la serie tienden a oscilar alrededor de una media constante y la variabilidad con respecto a esa media también permanece constante en el tiempo.
(2) **No estacionarias**. Son series en las cuales la tendencia y/o variabilidad cambian en el tiempo. Los cambios en la media determinan una tendencia a crecer o decrecer a largo plazo, por lo que la serie no oscila alrededor de un valor constante.

Definición 1.12. Una serie de tiempo **estrictamente estacionaria** es una serie para la cual el comportamiento probabilístico de cada sucesión de valores

$$\{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_k}\}$$

es idéntico a la serie trasladada en el tiempo

$$\{x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \dots, x_{t_k+h}\}.$$

Esto es,

$$P\{x_{t_1} \leq c_1, \ldots, x_{t_k} \leq c_k\} = P\{x_{t_1+h} \leq c_1, \ldots, x_{t_k+h} \leq c_k\} \tag{1.6}$$

para todo $k = 1, 2, \ldots$, todo puntos de tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_k$ y números $c_1, c_2, \ldots, c_k$ y todo salto $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Observaciones:

(1) Si una serie de tiempo es estrictamente estacionaria, entonces todos las funciones de distribución multivariadas para subconjuntos de variables deben coincidir con sus contrapartes en el conjunto trasladado, para todos los valores del parámetro h. Por ejemplo para $k = 1$ La ecuación (1.6) implica que

$$P\{x_s \leq c\} = P\{x_t \leq c\} \tag{1.7}$$

para cada puntos s y $t \in T$.

(2) Cuando $k = 2$, podemos escribir la ecuación (1.6) como

$$P\{x_s \leq c_1, x_t \leq c_2\} = P\{x_{s+h} \leq c_1, x_{t+h} \leq c_2\} \tag{1.8}$$

para cada par de puntos s y t y salto h. Entonces, si la función de varianza del proceso existe, (1.8) implica que la función de autocovarianza de la serie x_t satisface $\gamma(s, t) = \gamma(s+h, t+h)$ para todos s y t y salto h. Podemos interpretar este resultado diciendo que la función de autocovarianza del proceso depende solo de las diferencias de tiempo entre s y t, y no del tiempo actual.

Definición 1.13. Una serie de tiempo **débilmente estacionaria** x_t, es un proceso de varianza finita tal que

(1) la función de media μ_t, definida en (1.2) es constante y no depende del tiempo t, y
(2) la función de covarianza, $\gamma(s, t)$, definida en (1.4) depende solo de las diferencias de s y t, $|s - t|$.

Por consiguiente, usaremos el término **estacionaridad** para referirnos a estacionaridad débil; si un proceso es estacionario en el sentido estricto usaremos el término estrictamente estacionario.

Es claro de la Definición 1.12 de estrictamente estacionario que una una serie de tiempo estrictamente estacionaria con varianza finita, también es una serie estacionaria. El recíproco no es cierto a menos que impongamos condiciones adicionales. Un importante caso donde estacionaridad implica estricta estacionaridad es el caso de series de tiempo gaussianas.

Ya que la función de media $\mathbb{E}(x_t) = \mu_t$ de una serie de tiempo estacionaria es independiente del tiempo t, escribimos

$$\mu_t = \mu.$$

Debido a que la función de covarianza de una serie de tiempo estacionaria, $\gamma(s,t)$ en tiempos s y t depende sólo de la diferencia $|s-t|$, podemos simplificar la notación. Sea $s = t+h$, donde h representa el tiempo de traslación o salto, entonces

$$\begin{aligned}\gamma(s,t) &= \mathbb{E}[(x_{t+h}-\mu)(x_t-\mu)] \\ &= \mathbb{E}[(x_h-\mu)(x_0-\mu)] \\ &= \gamma(h,0)\end{aligned}$$

no depende del argumento de tiempo t; asumiendo que $\operatorname{var}(x_t) = \gamma(0,0) < \infty$. De ahora en adelante, por conveniencia, prescindiremos del segundo argumento de $\gamma(h,0)$, es decir, la función de covarianza se denotará $\gamma(h)$.

Definición 1.14. La **función de autocovarianza de una serie de tiempo estacionaria** se escribirá como

$$\gamma(h) = \mathbb{E}[(x_{t+h}-\mu)(x_t-\mu)].$$

Propiedades

(1) Para el valor en $h = 0$, la función de autocovarianza

$$\gamma(0) = \mathbb{E}[(x_t-\mu)^2]$$

es la varianza de la serie de tiempo; note que la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$.

(2) La autocovarianza de una serie estacionaria es simétrica respecto al origen, esto es

$$\gamma(h) = \gamma(-h) \tag{1.9}$$

para todo h.

Esta propiedad se debe a que trasladar la serie por h significa que

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \gamma(t+h-t) \\ &= \mathbb{E}[(x_{t+h}-\mu)(x_t-\mu)] \\ &= \mathbb{E}[(x_t-\mu)(x_{t+h}-\mu)] \\ &= \gamma(t-(t+h)) = \gamma(-h)\end{aligned}$$

lo cual muestra como usar la notación para demostrar el resultado.

Ejemplo 1.15. **Estacionaridad de un ruido blanco.** La función de autocovarianza de un ruido blanco de los Ejemplos 1.4 y 1.5 es fácil de evaluar como

$$\gamma_w(h) = \mathbb{E}(w_{t+h}w_t) = \begin{cases} \sigma_w^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

donde, en este ejemplo $\sigma_w^2 = 1$. Esto significa que la serie es débilmente estacionaria o estacionaria. Si las variables de ruido blanco también son normalmente distribuidas o gaussianas, la serie es también estrictamente estacionaria, como se puede ver evaluando (1.6).

Definición 1.16. La **función de autocorrelación (ACF) de una serie de tiempo estacionaria** será escrita, usando (1.5) como

$$\rho(h) = \frac{\gamma(t+h,t)}{\sqrt{\gamma(t+h,t+h)\gamma(t,t)}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz muestra nuevamente que $-1 \leq \rho(h) \leq 1$ para todo h.

Definición 1.17. Un **proceso lineal** x_t se define como una combinación lineal de variables aleatorias de ruido blanco w_t, y está dado por

$$x_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j w_{t-j}$$

donde los coeficientes satisfacen

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty.$$

DEFINICIÓN 1.18. Un proceso $\{x_t\}$, se dice que es un **proceso gaussiano** si el k-esimo vector dimensional $\hat{x} = (x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_k})'$, para cada conjunto de puntos $t_1, t_2, \ldots, t_k$ y cada entero positivo k tiene distribución normal multivariada.

4. Modelo Aditivo de Componentes de Series de Tiempo

Dada una serie $X_t, t = 1, ..., n$, el modelo aditivo de componentes consiste en asumir que X_t se puede descomponer en tres componentes:

$$X_t = T_t + E_t + \varepsilon_t \tag{1.10}$$

donde T_t es la tendencia, E_t es la componente estacional y ε_t es la componente aleatoria o de errores. Las componentes T_t y E_t son funciones de t determinísticas. Su evolución es perfectamente predecible.

La componente T_t en algunos casos también puede ser una componente estacional, pero de baja frecuencia, o, equivalentemente, una componente con período muy grande. Por ejemplo, en una serie diaria, E_t puede tener período 30 días, y T_t período 360 días.

4.1. Eliminación de la tendencia en ausencia de estacionalidad.

En ausencia de la componente estacional E_t el modelo (1.10) llega ser

$$X_t = T_t + \varepsilon_t, \; t = 1, ..., n \tag{1.11}$$

donde, sin perdida de generalidad, podemos asumir que $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$.

Método T1: Estimación de T_t por mínimos cuadrados. En este procedimiento intentaremos ajustar una familia paramétrica de funciones a los datos, eligiendo los parámetros que minimicen $\Sigma_t(X_t - T_t)^2$.

La idea principal depende de poder expresar una serie respuesta x_t como una combinación lineal de entradas $z_{t_1}, z_{t_2}, \ldots, z_{t_q}$. La estimación de los coeficientes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ de la combinación por mínimos cuadrados proporciona un método para modelar x_t en términos de las entradas.

Supongamos que tenemos x_t, para $t = 1, 2, \ldots, n$ influenciada por una colección de series independientes $z_{t_1}, z_{t_2}, \ldots, z_{t_q}$, donde consideraremos primero que las entradas son fijas y conocidas.

Podemos expresar esta relación como

$$x_t = \beta_1 z_{t_1} + \beta_2 z_{t_2} + \cdots + \beta_q z_{t_q} + w_t$$

donde $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ son los coeficientes de regresión fijos y desconocidos, $\{w_t\}$ es un error aleatorio o un proceso de ruido consistente de variables normales iid con media cero y varianza σ_w^2.

Método T2: Suavizado por medio de un promedio móvil. Sea q un entero no negetivo y consideremos un promedio móvil de la forma

$$W_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} X_{t+j}$$

de un proceso $\{X_t\}$ definido por (1.11). Entonces para $q+1 \leq t \leq n-q$,

$$\begin{aligned} W_t &= \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} T_{t+j} + \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} \varepsilon_{t+j} \\ &\simeq T_t \end{aligned}$$

suponiendo que T_t es aproximadamente lineal sobre el intervalo $[t-q, t+q]$ y que el promedio del término de error sobre este intervalo es cercano a cero.

El promedio móvil entonces nos provee con el estimador

$$\hat{T}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} X_{t+j}, q+1 \leq t \leq n-q. \tag{1.12}$$

Dado que X_t es no observado para $t \leq 0$ o $t \geq n$ no podemos usar (1.12) para $t \leq q$ o $t \geq n-q$. Una forma de resolver este problema es haciendo $X_t = X_1$ para $t < 1$ y $X_t = X_n$ para $t > n$.

Método T3: Diferenciación para generar datos estacionarios. En lugar de intentar remover el ruido por suavizado como en el Método T2, ahora intentaremos eliminar la tendencia por deferenciación, definamos primero el operador diferencia ∇ por

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1} = (1-B)x_t, \tag{1.13}$$

donde B es el operador de desplazamiento hacia atrás (*backward shift* operador en inglés),

$$Bx_t = x_{t-1}.$$

Las potencias de los operadores B y ∇ se define de manera obvia, esto es, $B^j(x_t) = x_{t-j}$ y $\nabla^j(x_t) = \nabla(\nabla^{j-1}(x_t))$, $j \geq 1$ con $\nabla^0(x_t) = x_t$. Los polinomios en B y ∇ se manipulan de la misma manera que las funciones polinómicas de variables reales. Por ejemplo

$$\begin{aligned}\nabla^2 x_t &= \nabla(\nabla x_t) = (1-B)(1-B)x_t = (1-2B+B^2)x_t \\ &= x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}.\end{aligned}$$

Si el operador ∇ se aplica a una función con tendencia lineal $T_t = at+b$, entonces obtenemos la función constante $\nabla T_t = a$. De la misma manera cada tendencia polinomial de grado k se puede reducir a una constante por aplicación del operador ∇^k.

Iniciando entonces con el modelo $X_t = T_t + \varepsilon_t$, donde $T_t = \sum_{j=0}^{k} a_j t^j$ y ε_t es estacionario con media cero, obtenemos

$$\nabla^k X_t = k! a_k + \nabla^k \varepsilon_t,$$

un proceso estacionario con media $k!a_k$. Esta consideración sugiere la posibilidad, dada una sucesión $\{X_t\}$ de datos, de aplicar el operador ∇ repetidamente hasta conseguir una sucesión $\{\nabla^k X_t\}$ la cual puede ser apropiadamente modelada como una realización de un proceso estacionario. Se encuentra a menudo en la práctica que el orden k de diferenciación es bastante pequeño, frecuentemente uno o dos.

4.2. Eliminación de la tendencia y la estacionalidad.

Los métodos descritos para remover la tendencia pueden ser adaptados de manera natural para eliminar tanto la tendencia como la estacionalidad en el modelo general

$$X_t = T_t + E_t + \varepsilon_t,$$

donde $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $E_{t+d} = E_t$ y $\sum_{j=1}^{d} E_t = 0$.

Método E1: Método de la tendencia pequeña. Si la tendencia es pequeña no es irrazonable suponer que el término de la tendencia es constante, digamos T_j para el año j. Dado que $\sum_{k=1}^{d} E_k = 0$, nos lleva al estimador insesgado natural

$$\hat{T}_j = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} X_{j,k},$$

mientras que para $E_k, 1, ..., d$ tenemos el estimador

$$\hat{E}_t = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{D}(X_{j,k} - \hat{T}_j),$$

el cual automáticamente satisface el requisito de que $\sum_{k=1}^{d} \hat{E}_k = 0$, El término de error estimado para el mes k del año j es por supuesto

$$\hat{\varepsilon}_{j,k} = X_{j,k} - \hat{T}_j - \hat{E}_k,\ j = 1, ..., D,\ k = 1, ..., d$$

Método E2: Estimación por promedio móvil. La siguiente técnica es preferible al Método E1 ya que no se basa en la suposición de que T_t es casi constante sobre cada ciclo estacional.

Suponga que tenemos las observaciones $\{x_1, ..., x_n\}$. Se estima primero la tendencia aplicando un filtro de promedio móvil especialmente elegido para eliminar la componente estacional y para amortiguar el ruido. Si el periodo d es par, digamos $d = 2q$, entonces usamos

$$\hat{T}_t = (0,5x_{t-q} + x_{t-q} + \cdots + x_{t+q-1} + 0,5x_{t+q})/d, q < t \leq n - q.$$

Si el periodo es impar, digamos $d = 2q + 1$, entonces usamos el promedio móvil simple.

El segundo paso, es estimar la componente estacional. Para cada $k = 1, \ldots, d$, calculamos el promedio w_k de las desviaciones $\{(X_{k+jd} - \hat{T}_{k+jd})\colon q < k + jd \leq n - q\}$. Dado que este promedio de desviaciones no necesariamente suma cero, estimamos la componente estacional E_k como

$$\hat{E}_k = w_k - \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} w_i,\ i = 1, \ldots, d,$$

y $\hat{E}_k = \hat{E}_{k-d}$, $k > d$.

Los datos sin la componente estacional se definen entonces como la serie original con la componente estacional removida, es decir,

$$d_t = X_t - \hat{E}_t,\ t = 1, \ldots, n.$$

Finalmente, reestimamos la tendencia de $\{d_t\}$ aplicando un filtro de promedio móvil como se describió para los datos no estacionales o fijando un polinomio a la serie $\{d_t\}$. El término del ruido estimado llega a ser entonces

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{T}_t - \hat{E}_t, t = 1, \ldots, n.$$

Método E3: Diferenciación a paso d. La técnica de diferenciación la cual aplicamos antes a datos no estacionarios se pueden adaptar para lidiar con el caso estacional de periodo d introduciendo el operador de diferencia de paso d ∇_d definido por

$$\nabla_d X_t = X_t - X_{t-d} = (1 - B^d)X_t.$$

Este operador no debe confundirse con el operador $\nabla^d = (1 - B)^d$ definido por (1.13).

Aplicando el operador ∇_d al modelo

$$X_t = T_t + E_t + \varepsilon_t,$$

donde $\{E_t\}$ tiene periodo d, obtenemos

$$\nabla_d X_t = T_t - T_{t-d} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-d},$$

lo cual nos da una descomposición de la diferencia $\nabla_d X_t$ en una componente de tendencia $(T_t - T_{t-d})$ y un término de ruido blanco $(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-d})$. La tendencia $(T_t - T_{t-d})$ se puede eliminar usando los métodos ya descritos, por ejemplo, aplicando alguna potencia del operador ∇.

DEFINICIÓN 1.19. Definimos el **operador de cambio** por

$$Bx_t = x_{t-1}$$

y extendemos a la potencia $B^2 x_t = B(Bx_t) = Bx_{t-1} = x_{t-2}$ y así sucesivamente. Entonces

$$B^k x_t = x_{t-k}$$

5. Modelos Autoregresivos

DEFINICIÓN 1.20. Un modelo autoregresivo de orden p, abreviado **AR(p)**, es de la forma

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + w_t \tag{1.14}$$

donde x_t es estacionario, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$ son constantes ($\phi_k \neq 0$, para $1 \leq k \leq p$). A menos que se declare lo contrario, se asume que w_t es un ruido blanco gaussiano de media cero y varianza σ_w^2. La media de x_t en (1.14) es cero. Si la media μ de x_t no es cero, reemplazamos x_t por $x_t - \mu$ en (1.14), es decir

$$x_t - \mu = \phi_1(x_{t-1} - \mu) + \phi_2(x_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p(x_{t-p} - \mu) + w_t,$$

o escribimos

$$x_t = \alpha + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + w_t \tag{1.15}$$

donde $\alpha = \mu(1 - \phi_1 + \cdots + \phi_p)$.

Note que (1.15) es similar al modelo de regresión dado en el Ejemplo 1.6 y por consiguiente el término autoregresión. Sin embargo, este tipo de procesos presenta algunas dificultades técnicas para la aplicación de ese modelo, porque los regresores $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-p}$ son aleatorios, mientras que z_t se asume fijo. Una forma más útil se deriva de usar el operador de cambios definido por (1.19) para escribir el modelo AR(p) como

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)x_t = w_t,$$

o más conciso como

$$\phi(B)x_t = w_t. \tag{1.16}$$

Las propiedades de $\phi(B)$ son importantes para resolver (1.16). Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.21. El **operador autoregresivo** se define como

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p, \ \textit{donde los } \phi_k \textit{ son constantes no nulas}, \ \textit{para } 1 \leq k \leq p.$$

6. Modelo de promedio móvil

Definición 1.22. El **modelo de promedio móvil de orden q** o modelo **MA(q)**, se define como

$$x_t = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q},$$

donde hay q pasos en el promedio móvil y $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i$ ($\theta_i \neq 0$, *para* $1 \leq i \leq q$) son parámetros. El ruido w_t se asume como un ruido blanco gaussiano.

Podemos también escribir el proceso MA(q) en la forma equivalente

$$x_t = \theta(B)w_t.$$

OBSERVACIÓN 1.23. Algunos libros y algunos paquetes estadísticos escriben el modelo MA con coeficientes negativos, esto es $x_t = w_t - \theta_1 w_{t-1} - \theta_2 w_{t-2} - \cdots - \theta_q w_{t-q}$.

DEFINICIÓN 1.24. El **operador de promedio móvil** es

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q, \ \textit{donde los } \theta_i \textit{ son constantes no nulas}, \ \textit{para } 1 \leq i \leq q.$$

7. Modelos Autoregresivos de Promedio Móvil

DEFINICIÓN 1.25. Una serie de tiempo $\{x_t; t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ es un **proceso autoregresivo de promedio móvil**, denotado **ARMA(p,q)**, si es estacionario y

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \tag{1.17}$$

con $\phi_k \neq 0$ $(para\ 1 \leq k \leq p)$, $\theta_i \neq 0$ $(para\ 1 \leq i \leq q)$ y $\sigma_w^2 > 0$. Los parámetros p y q son llamados ordenes autoregresivos y de promedio móvil respectivamente. Si x_t tiene media μ distinto de cero, hacemos $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)$ y escribimos el modelo como

$$x_t = \alpha + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}.$$

A menos que se declare lo contrario, $\{w_t; t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ es una sucesión de ruido blanco gaussiano.

OBSERVACIÓN 1.26. El modelo ARMA(p,q) en (1.17) se puede escribir en forma concisa como

$$\phi(B)x_t = \theta(B)w_t.$$

DEFINICIÓN 1.27. Los **Polinomios AR y MA** se definen como

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p,\ \phi_k \neq 0\ (para\ 1 \leq k \leq p)$$

y

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q,\ \theta_i \neq 0\ (para\ 1 \leq i \leq q)$$

respectivamente, donde z es un número complejo.

Definición 1.28. Un modelo ARMA(p,q), $\phi(B)x_t = \theta(B)w_t$, se dice que es **causal** si la serie de tiempo $\{x_t : t = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ se puede escribir como un proceso lineal de un lado

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j} = \psi(B) w_t \tag{1.18}$$

donde $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ y $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$; haciendo $\psi_0 = 1$.

Definición 1.29. Un modelo ARMA(p,q) $\phi(B)x_t = \theta(B)w_t$ se dice **invertible** si la serie de tiempo $\{x_t : t = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ se puede escribir como

$$\pi(B)x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j x_{t-j} = w_t \tag{1.19}$$

donde $\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j$ y $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$; hacemos $\pi_0 = 1$.

La función de autocorrelación parcial, al igual que la función de autocorrelación, transmite información vital con respecto a la estructura de dependencia de un proceso estacionario. Al igual que la función de autocorrelación, también depende sólo de las propiedades de segundo orden del proceso. La función de autocorrelación parcial ϕ_{hh} en el retardo h puede ser considerada como la correlación entre x_1 y x_{k+1}, ajustada por la observaciones que intervienen $x_2, \ldots, x_k$.

Definición 1.30. La **función de autocorrelación parcial (PACF) de un proceso estacionario x_t denotada ϕ_{hh}, para** $h = 1, 2, \ldots,$ viene dada por

$$\phi_{11} = corr(x_1, x_0) = \rho(1)$$

y

$$\phi_{hh} = corr(x_h - x_h^{h-1}, x_0 - x_0^{h-1}),\ para,\ h \geq 2.$$

Tanto $(x_h - x_h^{h-1})$ como $(x_0 - x_0^{h-1})$ son no-correlacionados con $\{x_1, x_2, \ldots, x_{h-1}\}$.

Por estacionaridad, la PACF ϕ_{hh} es la correlación entre x_t y x_{t-h} con la dependencia lineal $\{x_{t-1}, \ldots, x_{t-(h-1)}\}$ removida en cada uno.

Si el proceso x_t es gaussiano, entonces $\phi_{hh} = corr(x_t, x_{t-h} | x_{t-1}, \ldots, x_{t-(h-1)})$. Esto es, ϕ_{hh} es el coeficiente de correlación entre x_t y x_{t-h} en la distribución bivariada de (x_t, x_{t-h}) condicionada por $\{x_{t-1}, \ldots, x_{t-(h-1)}\}$.

8. Modelos ARIMA

Anteriormente hemos discutido la importancia de los modelos de tipo **ARMA** para series estacionarias. Una forma de generalizar este tipo de procesos, consiste en incorporar series no estacionarias y esto corresponde a un proceso **ARIMA** , es decir, proceso con diferencia finita de orden d.

DEFINICIÓN 1.31. Sea d un entero no negativo, decimos que $\{X_t\}$ es un proceso **ARIMA(p,d,q)** si

$$Y_t := (1-B)^d X_t$$

es un proceso ARMA causal.

Note que en la definición anterior se tiene que $\{X_t\}$ satisface la siguiente ecuación,

$$\phi^*(B)X_t \equiv \phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)w_t, \ \textit{con } \{w_t\} \textit{ un ruido blanco.}$$

Donde $\phi(z)$ y $\theta(z)$, son polinomios de grado p y q, respectivamente, y $\phi(z) \neq 0$ para $|z| \leq 1$. El polinomio $\phi^*(z)$ es nulo de orden d, para $z = 1$. El proceso $\{X_t\}$ es estacionario si y solo si $d = 0$, en este caso se reduce a un proceso $ARMA(p,q)$.

9. Modelos SARIMA

Si la serie $\{X_t\}$ tiene una componente con periodo s es posible eliminarla diferenciando con rezago de orden s y así obtener una serie $\{Y_t\}$ con una estructura de un proceso ARMA.

DEFINICIÓN 1.32. Si d y D son enteros no negativos, entonces $\{X_t\}$ es un proceso **ARIMA(p,d,q)×(P,D,Q)$_s$ estacional multiplicativo con periodo** s, si la serie diferenciada $Y_t = (1-B)^d(1-B^s)^D X_t$ es un proceso ARMA causal definido por

$$\phi(B)\Phi(B^s)Y_t = \theta(B)\Theta(B^s)w_t, \ \{w_t\} \sim WN(0,\sigma^2) \tag{1.20}$$

donde

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p,$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z - \cdots - \Phi_P z^P,$$

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \phi_q z^q \ y$$

$$\Theta(z) = 1 + \Theta_1 z + \cdots \Theta_Q z^Q.$$

Observación 1.33. Note que el proceso $\{Y_t\}$ es causal, si y sólo si, $\phi(z) \neq 0$ y $\Phi(z) \neq 0$ para $|z| \leq 1$. En aplicaciones D es raramente más que uno y, P y Q son típicamente menos de tres.

Observación 1.34. La ecuación (1.20) para el proceso diferenciado $\{Y_t\}$ se puede escribir en forma equivalente por

$$\phi^*(B)Y_t = \theta^*(B)w_t, \tag{1.21}$$

donde $\phi^*(\cdot)$, $\theta^*(\cdot)$, son polinomios de grado $p+s\ P$ y $q+s\ Q$, respectivamente, cuyos coeficientes pueden ser expresados en términos de $\phi_1, \ldots, \phi_p$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_P$, $\theta_1, \ldots, \theta_q$, $\Theta_1, \ldots, \Theta_Q$. Para $p < s$ y $q < s$, las limitaciones de los coeficientes de $\phi^*(\cdot)$ y $\theta^*(\cdot)$ pueden expresarse como relaciones multiplicativas

$$\phi^*_{is+j} = \phi^*_{is}\phi^*_j,\ i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, \ldots, s-1$$

y

$$\theta^*_{is+j} = \theta^*_{is}\theta^*_j,\ i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, \ldots, s-1.$$

Capítulo 2

Producto Interno Bruto

En diciembre de 1975 el Gobierno de Portugal, un gobierno provisional durante la etapa de transición hacia la democracia, sospechaba que estaba frente a una crisis económica. Los empresarios, alarmados por el crecimiento de los partidos de izquierda, lanzaban advertencias sobre un declive de la producción. Los periódicos estimaban que la economía se había contraído un 10 % o incluso un 15 % desde que la revolución de 1975 derrocó la dictadura.

Algunos portugueses, apoyándose en esta supuesta catástrofe económica, declaraban que la propia democracia era un fracaso. Otros afirmaban que el culpable era el capitalismo y exigían al gobierno que nacionalizara la industria para obligarla a aumentar la producción. Pero, en realidad, ¿hasta qué punto era mala la situación?

Para responder a esta pregunta el ministro de economía portugués pidió a su viejo amigo Richard Eckaus, economista del MIT (Instituto Tecnológico de Massachussets) y a otros dos colegas de éste, que revisaran la contabilidad nacional, es decir, el conjunto de datos registrados sobre la actividad económica de un país. Los expertos tuvieron que realizar más de una suposición, ya que la recogida de datos económicas en Portugal era hasta la fecha algo incompleta y además se había visto afectada por los acontecimientos políticos. A título de ejemplo, las estadísticas nacionales sobre el sector de la construcción se basaban en los datos de ventas de acero (que se usa en la estructura del edificio) y cemento. Pero con el caos relativo que reinaba en 1975, ambas cifras (acero y cemento) se movían en direcciones opuestas: muchos constructores estaban utilizando menos acero que el que dictaban las normas. (Un consejo por si viaja a Portugal y se produce un terremoto: procure evitar los edificios construidos en estos años.)

A pesar de todo, se pusieron a trabajar con los datos disponibles y en el plazo de una semana realizaron una estimación aproximada: entre 1974 y 1975 la producción agregada había descendido en un 3 % únicamente. La economía había sufrido un serio revés pero era mucho menos grave que la catástrofe anunciada por la prensa. (Revisiones posteriores modificaron la estimación hasta un 4,5 % pero dicha cifra seguía estando lejos del temido

10 %). El gobierno portugués tenía, ciertamente, mucho trabajo por delante, pero no había ninguna necesidad de abandonar ni el ideal democrático ni la economía de mercado. De hecho, muy pronto la economía comenzó a recuperarse. Durante las tres últimas décadas, Portugal, aunque aún sigue teniendo algunos problemas, ha vivido una historia llena de logros. La que hace treinta años era una atrasada dictadura es hoy una democracia sólida y próspera y un país miembro de la Unión Europea.

¿Qué podemos aprender de la historia? Que las mediciones en economía son importantes. Si el gobierno portugués hubiera creído las funestas predicciones de la época, podría haber tomado decisiones económicas erróneas que habrían acarreado graves consecuencias. Las buenas políticas macroeconómicas se basan en las mediciones fiables de lo que ocurre en el conjunto de la economía.

Una forma de evitar falsos pronósticos es tener información precisa y responsable en los registros económicos, en breve daremos la definición del Producto Interno Bruto y los métodos necesarios para calcularlo.

1. La Contabilidad Nacional

La mayoría de los países calculan una serie de magnitudes que se recogen bajo el nombre de contabilidad nacional. De hecho, la precisión de dichas magnitudes es en sí mismo un criterio muy fiable del grado de desarrollo de dicha economía. En general, cuánto más correcta es la contabilidad, más desarrollado económicamente está el país. Cuando las instituciones económicas internacionales intervienen para ayudar a un país menos desarrollado, una de las primeras decisiones que toman es enviar a un grupo de expertos para que auditen y mejoren la contabilidad nacional del país, la cual se define como

Definición 2.1. La **contabilidad nacional** calcula los flujos monetarios existentes entre los distintos sectores económicos.

A continuación daremos algunas definiciones que serán de utilidad para introducir el objetivo de la contabilidad nacional.

Definición 2.2. Los **Bienes y Servicios Finales** son bienes y servicios que se venden al usuario final de dicho bien o servicio.

Definición 2.3. Los **Bienes y Servicios Intermedios**, que una empresa compra a otra, son utilizados para la producción de bienes y servicios finales.

Definición 2.4. El **Producto Interno Bruto** o **PIB**, es el valor total de todos los bienes y servicios finales producidos por una economía en un periodo en concreto, que suele ser el año.

La compra por parte de un consumidor de un nuevo automóvil en un concesionario es un ejemplo de una compra de un **bien y servicio final**, es decir, un bien o servicio vendido a su usuario final. Sin embargo, la compra de acero por parte de una empresa de automoción a una fundición o de un parabrisas a un fabricante de vidrio es un ejemplo de compra de un **bien o servicio intermedio**, es decir, bienes o servicios que son utilizados para la producción de los bienes y servicios finales. En el caso de los bienes y servicios intermedios, el comprador, es decir una empresa, *no es el usuario final.* En 2004 el PIB de los EE.UU. fue de 11.734 billones de dólares, o lo que es lo mismo 40.000 dólares por persona. Así, si se es un economista que está tratando de calcular la contabilidad nacional de un país, una de las formas de calcular el PIB es hacerlo de forma directa: hacer encuestas en las empresas y calcular el valor de su producción de bienes y servicios finales.

Definición 2.5. El **Gasto Agregado**, que es la suma del consumo privado, el gasto de inversión, el gasto público en bienes y servicios, y la diferencia entre las exportaciones e importaciones, es el gasto total en bienes y servicios finales producidos en el interior de la economía.

2. Calcular el PIB.

Existe tres métodos para calcular el PIB. La estadísticas nacionales utilizan los tres. Para explicar cómo funciona estos tres métodos, consideraremos una economía imaginaria, como la que se muestra en la Figura 2.1. Esta economía consta de tres empresas, American Motors, Inc. que produce un automóvil al año, American Steel Inc. que produce el acero que se usa en el automóvil y American Ore, Inc. que extrae el mineral de hierro que se utiliza para fabricar el acero. La economía produce un automóvil por valor de \$ 21.500. Así que el PIB es \$ 21.500. Veamos como los tres métodos de cálculo del PIB llegan al mismo resultado.

Gasto agregado en bienes y servicios finales producidos en el mercado interior = $ 21500

	American Ore, Inc. ($)	American Steel, Inc. ($)	American Motors, Inc. ($)	Total ingrasos factores ($)
Valor de las ventas	4200 (hierro)	9000 (acero)	21500 (coche)	
Bienes intermedios	0	4200 (hierro)	9000 (acero)	
Salarios	2000	3700	10000	15700
Intereses pagados	1000	600	1000	2600
Arrendamientos	200	300	500	1000
Dividendos	1000	200	1000	2200
Total gasto empresa	4200	4800	12500	
Valor añadido empresa = Valor de las ventas menos coste bienes intermedios.	4200	4800	12500	

Total pagos factores = $ 21500

Suma del valor añadido = $ 21500

Figura 2.1. Economía imaginaria (Calcular el PIB de las tres formas equivalentes)

i) Calcular el PIB Como el valor de la producción de bienes y servicios finales.

El primer método para calcular el PIB es sumar el valor de todos los bienes y servicios finales producidos en la economía, un cálculo que excluye el valor de los bienes y servicios intermedios. ¿Por qué se excluye el valor de los bienes y servicios intermedios?

¿No representan una parte importante y valiosa de la producción de una economía?

Para entender por qué sólo se incluye en el PIB los bienes y servicios finales observe la Figura 2.1 en el que se muestra el ejemplo de una economía simplificada. ¿Habría que medir el PIB de esta economía sumando las ventas totales del productor de mineral de hierro, el productor de acero y el productor del automóvil? Si lo hiciéramos así, estaríamos contando el valor del acero dos veces, una vez cuando el productor de acero lo vende al productor del automóvil y la segunda vez cuando la carrocería es vendida al consumidor como parte del producto final. Y estaríamos contando el valor del mineral de hierro tres veces, una cuando es vendido al productor de acero, una segunda vez cuando es transformado en acero y vendido al productor del automóvil y una tercera vez cuando el acero se incorpora a la carrocería del automóvil que es vendido al consumidor final. Así que si tuviéramos en cuenta el valor total de cada venta, esto conllevaría que los mismo productos se contaran varias veces y el cálculo del PIB quedaría desvirtuado, "inflado"de forma artificial. Por ejemplo, en la Figura 2.1 el valor total de las ventas, intermedias y finales alcanza los \$ 34.700, es decir, \$ 21.500 por el automóvil más \$ 9000 por la venta del acero más \$ 4200 por la venta del mineral de hierro. Ahora bien, sabemos que el PIB es \$ 21.500.

Hay una forma de evitar contar dos o más veces un mismo producto cuando se calcula el PIB, y es utilizar el **valor añadido** generado por cada productor, que es la diferencia entre el valor de sus ventas y el valor de lo que compra a otros productores. En este caso el valor añadido del automóvil es el valor de venta del automóvil producido *menos* el costo del acero que ha comprado, es decir \$ 12.500. El valor añadido del productor de acero es el valor de venta del acero que produce *menos* el costo del mineral, que suponemos que no compra ningún bien intermedio, el valor añadido es igual al valor de venta, es decir \$ 4200. La suma del valor añadido de estos tres productores es \$ 21.500, es decir, el PIB.

ii) Calcular el PIB como el gasto en bienes y servicios finales producidos en el mercado interior.

Otra forma de calcular el PIB es mediante la suma del gasto agregado en los bienes y servicios finales producidos en el mercado interior. Es decir, el PIB puede calcularse a través del flujo de fondos que entra en las empresas nacionales. Al igual que el método que calcula el PIB como valor de la producción, también este segundo método tiene que evitar contar el mismo bien dos o más veces. En términos de nuestra economía imaginaria, no queremos contar el gasto del consumidor al comprar el automóvil (que en el recuadro es el precio de venta del automóvil) y el gasto al comprar el automóvil (que en el recuadro es el valor del acero que utiliza en el automóvil). Si contáramos los dos, estaríamos contando dos veces el acero del automóvil. Este problema se resuelve contando únicamente el valor de las ventas a los consumidores finales, es decir, a los hogares, a las empresas cuando compran bienes de inversión, al Estado y a los compradores extranjeros. En otras palabras: en el método de cálculo del PIB a través del gasto agregado, para evitar contar dos veces el mismo gasto, se omiten las ventas de materias y suministros destinados a la producción que unas empresas realizan a otras.

Sin embargo, como ya se ha mencionado, la contabilidad nacional incluye el gasto de inversión de las empresas como parte del gasto final. Es decir, la compra de acero por parte de un fabricante de automóviles para fabricar su producto no se considera parte del gasto final, pero si la empresa compra maquinaria nueva sí se considera parte de dicho gasto. ¿Cuál es la diferencia? El acero es parte de las materias primas necesarias para la producción. La maquinaria, aunque evidentemente se usa también en la producción, va a ser utilizada durante varios años. Puesto que la compra de bienes de capital (como la maquinaria), que van a ser utilizados durante varios años, no está directamente relacionada con la producción de un único periodo, la contabilidad nacional considera dichas compras como ventas finales.

Como ya hemos visto el PIB es el valor final de todos los bienes y servicios finales producidos por una economía en un año en concreto, presentemos ahora cuatro componentes de las ventas que seran de utilidad para el calculo del PIB: ventas de las empresas de consumo privado, que llamaremos **C**, ventas de bienes de inversión a otras empresas, que la llamaremos **I**, gasto público en bienes y servicios, que llamaremos **G**, y ventas al extranjero, es decir exportaciones, que llamaremos **X**.

No todo el gasto final se dedica a bienes y servicios finales producidos en el mercado interior. Los gastos en importaciones, que llamaremos **IM**, sacan flujo monetario fuera de las fronteras nacionales. Podemos poner todos estos elementos juntos en una ecuación que divide el PIB en cuatro partidas principales de gasto agregado.

$$PIB = C + I + G + X - IM. \tag{2.1}$$

iii) Calcular el PIB como las rentas de los factores pagadas por las empresas de la economía.

La tercera y última forma de calcular el PIB es sumar todos los ingresos pagados por las empresas de la economía a los factores de producción, es decir, los salarios pagados por el trabajo recibido, los intereses pagados a aquellos que prestaron sus ahorros a las empresas y al Estado, los arrendamientos pagados a aquellos que alquilaron sus terrenos o sus inmuebles a las empresas y los dividendos pagados a los accionistas, que son los propietarios del capital físico de la empresa. Este cálculo es válido porque el dinero que las empresas reciben por la venta de sus bienes y servicios tiene que ir a algún sitio. Y todo lo que no se gasta en salirios, intereses o arrendamientos es beneficio, es decir dividendos aunque, normalmente, sólo una parte del beneficio total se distribuye a los accionistas en forma de dividendos.

La Figura 2.1 muestra este cálculo en nuestra economía simplificada. La columna sombreada (en rojo) de la derecha muestra la suma total de los salarios, intereses y arrendamientos pagados por las tres empresas y también su beneficio total. Sumando todos estos elementos volvemos a alcanzar un ingreso total de factores de $ 21.500, es decri, el PIB.

3. Lo que nos dice el PIB

Ya hemos visto los distintos métodos de cálculo del producto interior bruto. Sin embargo, ¿qué mide realmente el PIB?

El PIB se usa sobre todo para medir el tamaño de una economía y proporciona una escala con la que comparar el comportamiento de una economía año tras año o con la cual se puede comparar el rendimiento de un país con el de otro país. Por ejemplo, supongamos que se desea comparar las economías de varios países. Una forma de hacerlo es comparando su PIB. Tome en cuenta el comentario siguiente, el PIB estadounidense era de 11.734 billones de dólares en 2004. El PIB japonés era de 4665 billones de dólares, y la suma del PIB de los 25 países de la UE era de 12.758 billones de dólares. Esta comparación nos dice que la economía de Japón, aunque es la segunda economía nacional más grande del mundo, tiene un peso económico bastante menor que el de la economía estadounidense. Pero si hablamos en términos globales, la economía europea es tan grande como la estadounidense.

Ahora bien, cuando se usan las cifras del PIB hay que tener cuidado, sobre todo si se utilizan para hacer comparaciones temporales, pues, con el paso de los años, parte del incremento del valor del PIB proviene de los incrementos en los precios de los bienes y servicios y no de los incrementos de la producción. por ejemplo, el PIB estadounidense en 1990 fue de 5803 billones de dólares en el 2004 fue más o menos del doble (11.734 billones de dólares). Sin embargo, en la realidad en 2004 la economía estadounidense no era el doble de grande que en 1990. Para medir los cambios reales en la producción agregada se utiliza una versión modificada del PIB ajustada a las variaciones de precios, que se denomina PIB real.

4. PIB real

Aunque el PIB es una magnitud interesante y útil desde el punto de vista estadístico, no sirve para medir los cambios en el tiempo de la producción agregada, ya que el PIB puede crecer por dos motivos: porque la economía está produciendo más o sencillamente porque los precios de los bienes y servicios que se producen han aumentado. Y a la inversa, el PIB puede descender por las mismas dos razones: porque la economía está produciendo menos o porque los precios han caído. A fin de distinguir entre ambos casos, hay que calcular, para un periodo determinado, cuál ha sido la variación de la economía en términos *reales*. Es decir, hay que calcular qué parte de la variación del PIB se debe a un cambio en la producción agregada aislándolo de la influencia de las variaciones de precios. La magnitud que se utiliza para este propósito se denomina *PIB real*. Veamos primero cómo se calcula el PIB real y en segundo lugar cuál es su significado.

5. Calcular el PIB real

Para calcular el verdadero incremento de la producción agregada, hay que hacerse la siguiente pregunta: ¿Cuál habría sido el incremento en el PIB si los precios no hubieran variado? Para responder a esta pregunta tenemos que calcular el valor de la producción del segundo año expresado en los precios del primer año.

El **PIB real** es el valor total de los bienes y servicios finales producidos en la economía durante un año, calculado como si los precios no hubieran cambiado con respecto a un año dado que se denomina base. La cifra del PIB real siempre viene referida al año que se toma como base. La cifra del PIB, que no ha sido ajustada para eliminar la influencia de las variaciones de los precios, se calcula utilizando los precios del año en el que se ha generado la producción. Los economistas denominan esta magnitud **PIB nominal**, o PIB a precios corrientes.

Definición 2.6. El **PIB real** es el valor total de los bienes y servicios finales producidos en la economía durante un año, calculado como si los precios no hubieran cambiado con respecto a un año dado que se denomina base.

Definición 2.7. El **PIB nominal** es el valor total de los bienes y servicios finales producidos en la economía durante un año, calculado utilizando los precios del año en el que se genera la producción.

6. Qué no mide el PIB real

El PIB es una magnitud que mide la producción agregada de un país. Si todas las otras variables son iguales, un país con más población tendrá un PIB mayor simplemente porque en esa economía hay más gente que trabaja y consume. Así pues, si queremos comparar el PIB de varios países, pero queremos eliminar el efecto provocado por el tamaño de la población, usaremos la magnitud **PIB per cápita**, es decir, el PIB dividido por el número de habitantes, que equivale al PIB promedio por persona. De la misma manera, el PIB per cápita real es el PIB real promedio por persona.

Definición 2.8. El **PIB per cápita** es el PIB dividido por el número de habitantes del país y equivale al PIB promedio por persona.

Aunque el PIB per cápita real puede ser una medida útil en ciertas circunstancias, tiene claras limitaciones como indicador del nivel de vida de un país. Con cierta frecuencia se acusa a los economistas de creer que lo único que importa es el crecimiento en el PIB per cápita real, es decir, de creer que el incremento del PIB per cápita real es un objetivo en sí mismo. En realidad, los economistas no suelen cometer ese error. La idea de que lo único que les importa es el PIB per cápita real es una especie de una leyenda urbana. Detengámonos un momento y aclaremos por qué el PIB per cápita real del país no es un criterio adecuado para medir el bienestar de la población de dicho país y por qué el crecimiento del PIB per cápita real no es, por sí solo, un objetivo adecuado de una política económica.

Una forma de reflexionar sobre este asunto sería decir que un incremento en el PIB real significa la expansión de la frontera de posibilidades de producción de una economía. Como la economía ha incrementado su capacidad productiva, hay más cosas que la sociedad puede lograr. Sin embargo, el que dicha sociedad haga un buen uso del mayor potencial en sus manos para incrementar el nivel de vida de la población es una cuestión muy distinta. También podría expresarse en estos términos: los ingresos de una persona pueden ser más elevados este año que el año anterior, pero el que dicha persona utilice sus ingresos para mejorar su nivel de vida es facultativo: es una elección suya.

Naciones Unidas publica un informe anual, el *“Informe de desarrollo humano”*, que intenta ordenar a los países utilizando otros criterios que no sean el PIB per cápita real. Entre otros, se incluyen datos de mortalidad infantil, esperanza de vida u analfabetismo que se agrupan para desarrollar el Índice de desarrollo humano, que intenta determinar la buena actuación de las sociedades, dejando aparte lo mucho o poco que produzcan. La existencia de este índice sugiere que el PIB per cápita real es uno de los muchos aspectos que contribuyen al bienestar humano, pero no es, de manera alguna, el único. La mayoría de los países que tienen un PIB per cápita real alto, como los EE.UU., la mayor parte de los países europeos y Japón, también tienen buenas puntuaciones en los otros indicadores de bienestar humano. Sin embargo, existen países relativamente pobres, como Costa Rica, que tienen tasas de analfebetismo y de mortalidad infantil bajísimas y una esperanza de vida muy alta. Y hay países relativamente ricos, sobre todo aquellos que cuentan con recursos naturales, que, al contrario, tienen puntuaciones muy malas en esos indicadores.

Repitámoslo una vez más: el PIB per cápita real es una medida del promedio por persona de la producción agregada de una economía, es decir, de lo que es posible hacer. No es en sí mismo un objetivo suficiente, porque no tiene en cuenta cómo un país utiliza dicha producción para modificar el nivel de vida. Un país con un PIB alto puede pagar una buena sanidad, una buena educación y en general, un buen nivel de vida. Pero un PIB alto no conlleva automática ni necesariamente un nivel de vida alto.

7. PIB Venezolano

En este trabajo consideraremos el PIB Venezolano comprendido entre los años 1997 y 2014. Este conjunto de datos fue extraído de la base de datos que publica el Banco Central de Venezuela en su página oficial [**6**]. En dicha base de datos la información es registrada de forma cuatrimestral y actualmente está publicado hasta el tercer cuatrimestre del año 2014.

El Banco Central de Venezuela ha clasificado el PIB, en tres actividades económicas las cuales son las siguientes:

- Actividad Petrolera.
- Actividad NO Petrolera.
- Impuestos Netos Sobre los Productos.

A continuación presentamos la subdivisión por actividad económica.

Actividades Petroleras.

- Explotación.
- Refinación.

Actividad NO Petroleras.

Productoras de Bienes.

- Agricultura.
- Minería.
- Manufactura.
- Electricidad y Agua.
- Construcción.

Productoras de Servicios.

- Comercio.
- Restaurantes y Hoteles.
- Transporte, Almacenamiento y Comunicaciones.
- Instituciones Financieras y Seguros.
- Bienes Inmuebles.
- Servicios Prestados a las Empresas.
- Servicios Comunitarios, Sociales y Personales y Productos de Servicios Privados No Lucrativos.
- Productores de Servicios del Gobierno General.
- Resto (Incluye: Agricultura privada, Restaurantes y hoteles privado y Actividades diversas públicas).
- Menos: Sifmi (Servicios de intermediación financiera medidos indirectamente).

A continuación presentamos en la Figura 2.2 el PIB real del año 2014 (año base 1997), suministrado por el Banco Central de Venezuela en su página oficial [**6**]

Producto interno bruto
Por clase de actividad económica
A precios constantes de 1997
(Miles de Bolívares)

Actividades	2014 (*)				
	Ene./Sept.	III Trim	Ier.sem.	II Trim	I Trim
Consolidado	**43.551.889**	**15.452.112**	**28.099.777**	**14.660.273**	**13.439.504**
Actividad petrolera	5.073.566	1.667.168	3.406.398	1.750.408	1.655.990
Actividad no petrolera	33.917.907	12.112.125	21.805.782	11.441.445	10.364.337
Minería	139.646	50.466	89.180	45.731	43.449
Manufactura	5.838.033	2.139.209	3.698.824	1.961.047	1.737.777
Electricidad y agua	1.064.646	359.493	705.153	364.495	340.658
Construcción	3.046.409	1.146.920	1.899.489	1.093.979	805.510
Comercio y servicios de reparación	4.028.947	1.476.538	2.552.409	1.289.383	1.263.026
Transporte y almacenamiento	1.414.570	516.787	897.783	484.340	413.443
Comunicaciones	3.448.182	1.101.185	2.346.997	1.184.364	1.162.633
Instituciones financieras y seguros	3.429.588	1.186.411	2.243.177	1.143.616	1.099.561
Servicios inmobiliarios, empresariales y de alquiler	4.441.838	1.527.952	2.913.886	1.490.157	1.423.729
Serv. comunitarios, soc. y personales y produc. de serv. priv. no lucrativos	2.761.757	1.053.397	1.708.360	857.666	850.694
Produc. servicios del Gobierno General	5.494.829	1.968.232	3.526.597	1.848.981	1.677.616
Resto 1/	2.443.337	787.802	1.655.535	878.375	777.160
Menos: Sifmi 2/	3.633.875	1.202.267	2.431.608	1.200.689	1.230.919
Impuestos netos sobre los productos	4.560.416	1.672.819	2.887.597	1.468.420	1.419.177

1/ Incluye: Agricultura privada, Restaurantes y hoteles privado y Actividades diversas públicas.
2/ Servicios de intermediación financiera medidos indirectamente.

FIGURA 2.2. PIB real del año 2014 (año base 1997), suministrado por el Banco Central de Venezuela

Para explicar el significado de estas cantidades consideraremos la Figura 2.3. Debemos suponer que el Banco Central de Venezuela, o mejor dicho un economista del Banco Central de Venezuela realiza algunas encuestas para recopilar la información necesaria, información que luego será utilizada para el cálculo del PIB, en cuyo método de cálculo se debería utilizar algunos de los métodos detallamos en la sección 2.

El total en suma de las cantidades de la columna en color rojo, es decir, el recuadro amarillo, es restado con la cantidad del recuadro verde, para obtener así el PIB correspondiente a la Actividad No Petrolera. Posteriormente se suma las cantidades de los recuadros azules, para así obtener el Consolidado del trimestre, semestre o año. Lo cual representa el PIB según sea el periodo de tiempo. Véase Figura 2.3.

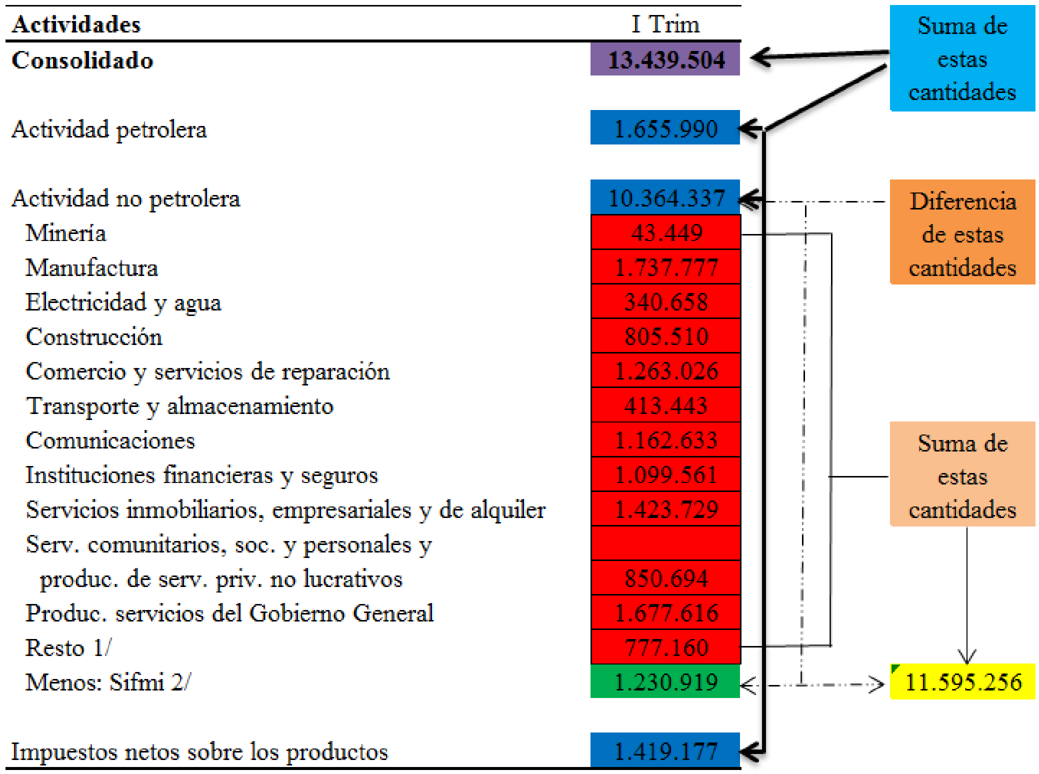

FIGURA 2.3. Ejemplo de cálculo del PIB (I^{mer} trimestre del año 2014)

8. PIB Nominal y PIB per Cápita en Venezuela

A modo de apreciación, en esta sección mostraremos el PIB Nominal y el PIB per Cápita, desde el año 2000 al año 2012.

La Figura 2.4 muestra el PIB nominal Venezolano entre los años 2000 y 2012, cuyos datos como hemos mencionado con anterioridad han sido extraídos de la página oficial del Banco Central de Venezuela [**6**].

Observe que el PIB nominal tiende al crecimiento desde el año 2000 al 2007 oscilando de Bs. 79.655.692 a 494.591.535. Por otro lado para el año 2008 el PIB nominal alcanzó un monto de Bs. 677.593.637 y para el año 2009 el monto fue de Bs. 707.262.549, con una deferencia de sólo Bs. 29.668.912 entre el 2008 y 2009, a pesar de esto se puede notar el crecimiento del PIB nominal desde el año 2009 al 2012, oscilando de Bs. 1.016.834.748 a 1.635.451.060, con una diferencia considerable de Bs. 618.616.312.

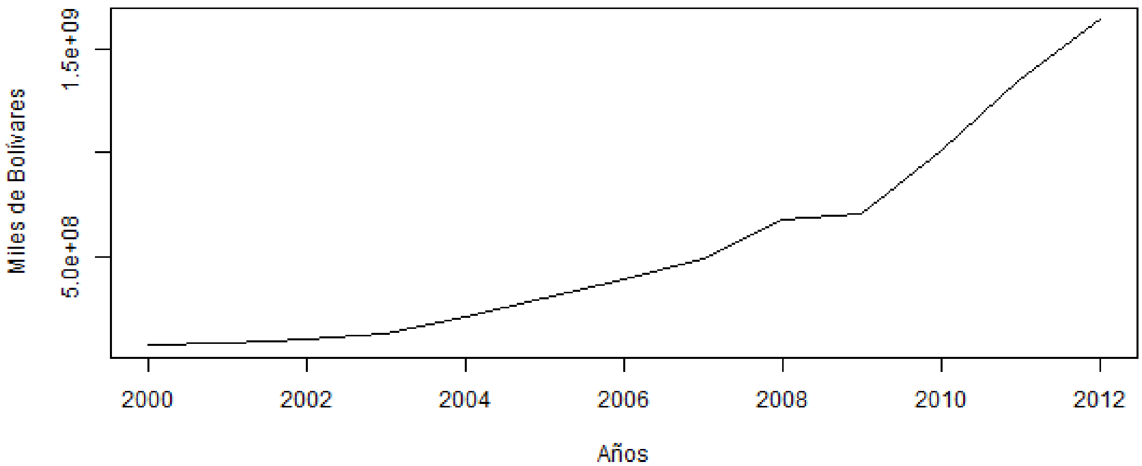

FIGURA 2.4. PIB nominal Venezolano (años 2000-2012)

En la Figura 2.5 introduciremos los datos numéricos del PIB nominal (PIB a precios corrientes), PIB real (PIB a precios constantes), PIB per cápita y la población Venezolana entre el año 2000 al 2012. Los datos de población se han extraídos de la página (http://www.ine.gov.ve) del Instituto Nacional de Estadística (INE).

Año	PIB nominal	PIB real	Población	PIB per cápita real
2000	79.655.692	41.013.293	24394145	1,6812761
2001	88.945.596	42.405.381	24802885	1,70969551
2002	107.840.166	38.650.110	25212127	1,5329968
2003	134.227.833	35.652.678	25622082	1,39148247
2004	212.683.082	42.172.343	26032946	1,61996045
2005	304.086.815	46.523.649	26444921	1,75926595
2006	393.926.240	51.116.533	26858165	1,90320273
2007	494.591.535	55.591.059	27272712	2,03833997
2008	677.593.637	58.525.074	27688638	2,11368555
2009	707.262.549	56.650.924	28105913	2,01562298
2010	1.016.834.748	55.807.510	28524411	1,95648247
2011	1.357.487.061	58.138.269	28944070	2,0086418
2012	1.635.451.060	61.409.103	29365451	2,09120245

FIGURA 2.5. PIB nominal, PIB real y PIB per cápita del año 2000 al año 2012

Como ya hemos dicho el PIB per cápita es el PIB real divido entre la población total. En la Figura 2.5 se puede mirar el cálculo del PIB per cápita tomando en cuenta la población total y el PIB total desde el año 2000 al 2012.

En la Figura 2.6 se puede apreciar la gráfica del PIB per cápita Venezolano.

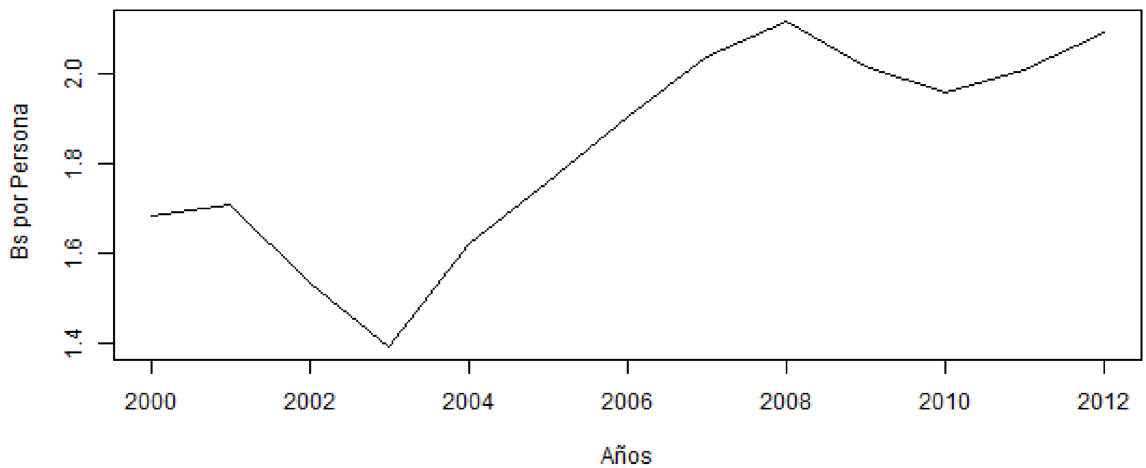

Figura 2.6. PIB per cápita del año 2000 al año 2012

Note que el PIB per cápita para el año 2003 alcanzó un monto de Bs. 1,3 siendo este el minímo valor entre los años 2000 y 2012. Por otro lado el máximo valor fue alcanzado en el año 2008 por un monto de Bs. 2,1. Para los anõs 2000 a 2012 hemos observado un promedio de Bs. 1,8 por persona.

Capítulo 3

Modelo y Análisis de Resultados

A continuación se hará un análisis exploratorio y un ajuste a las series de tiempo asociadas al Producto Interno Bruto (PIB) Venezolano comprendido entre los anõs 1997 y 2014.

Para realizar el análisis consideraremos las series PIB Petrolero, PIB NO Petrolero, PIB Impuestos Netos sobre los productos y la serie PIB Total que contiene la suma por trimestre de los PIB antes mencionados. En primer lugar se harán observaciones que permitan entender el comportamiento general de los PIB, destacando los máximos y mínimos así como los patrones mas relevantes.

La Figura 3.1, contiene el PIB Consolidado para cada año desde el año 1997 al 2014 y, para cada una de las siguientes series: serie PIB Total, PIB Petrolero, PIB NO Petrolero y PIB Impuestos Netos sobre los productos. La Figura 3.2 contiene las diferencias año a año comenzando desde el año 1997 al 2013, así como el promedio de las diferencias, el valor porcentual del promedio de estas diferencias respecto al PIB de la serie asociada, usando como valor de referencia el año base 1997, y respecto al valor base del PIB Total.

Año	**PIB Total**	PIB Petrolero	PIB NO Petrolero	PIB Impuestos netos sobre los productos
1997	**41.943.151**	7.863.271	30.386.126	3.693.754
1998	**42.066.487**	7.883.521	30.352.791	3.830.175
1999	**39.554.925**	7.586.306	28.253.776	3.714.843
2000	**41.013.293**	7.757.605	29.439.642	3.816.046
2001	**42.405.381**	7.688.643	30.615.219	4.101.519
2002	**38.650.110**	6.595.672	28.789.449	3.264.989
2003	**35.652.678**	6.472.229	26.649.846	2.530.603
2004	**42.172.343**	7.360.757	30.934.134	3.877.452
2005	**46.523.649**	7.251.743	34.704.747	4.567.159
2006	**51.116.533**	7.108.703	38.474.292	5.533.538
2007	**55.591.059**	6.870.686	42.213.445	6.506.928
2008	**58.525.074**	7.072.114	44.602.372	6.850.588
2009	**56.650.924**	6.550.844	43.829.085	6.270.995
2010	**55.807.510**	6.554.311	43.126.953	6.126.246
2011	**58.138.269**	6.593.126	45.055.572	6.489.571
2012	**61.409.103**	6.682.723	47.648.365	7.078.015
2013	**62.233.885**	6.741.453	48.515.207	6.977.225
2014	**43.551.889**	5.073.566	33.917.907	4.560.416

Figura 3.1. PIB Consolidado anual

Año	**PIB Total**	PIB Petrolero	PIB NO Petrolero	PIB Impuestos netos sobre los productos
1998-1997	123.336	20.250	-33.335	136.421
1999-1998	-2.511.562	-297.215	-2.099.015	-115.332
2000-1999	1.458.368	171.299	1.185.866	101.203
2001-2000	1.392.088	-68.962	1.175.577	285.473
2002-2001	-3.755.271	-1.092.971	-1.825.770	-836.530
2003-2002	-2.997.432	-123.443	-2.139.603	-734.386
2004-2003	6.519.665	888.528	4.284.288	1.346.849
2005-2004	4.351.306	-109.014	3.770.613	689.707
2006-2005	4.592.884	-143.040	3.769.545	966.379
2007-2006	4.474.526	-238.017	3.739.153	973.390
2008-2007	2.934.015	201.428	2.388.927	343.660
2009-2008	-1.874.150	-521.270	-773.287	-579.593
2010-2009	-843.414	3.467	-702.132	-144.749
2011-2010	2.330.759	38.815	1.928.619	363.325
2012-2011	3.270.834	89.597	2.592.793	588.444
2013-2012	824.782	58.730	866.842	-100.790
Promedio de las diferencias	1.268.171	-70.114	1.133.068	205.217
Porcentaje de las diferencias referente al año base	3,02354698	-0,8916598	3,7288977	5,555782478
Porcentaje de las diferencias referente al PIB Total		-0,1671635	2,7014364	0,489274012

Figura 3.2. Diferencias del PIB consolidado anual

Estos cuadros serán analizados en detalle posteriormente. Servirán para hacer análisis comparativos de un trimestre respecto a otro, con el fin de observar los cambios en el crecimiento de los PIB.

1. Estudio de la Serie PIB Total

En la Figura 3.3 se puede apreciar el comportamiento de la serie PIB Total, de la que ya hemos hecho referencia anteriormente, en cuya figura, están resaltados con etiquetas numéricas los máximos y mínimos que serán de utilidad para analizar el comportamiento de la serie PIB Total.

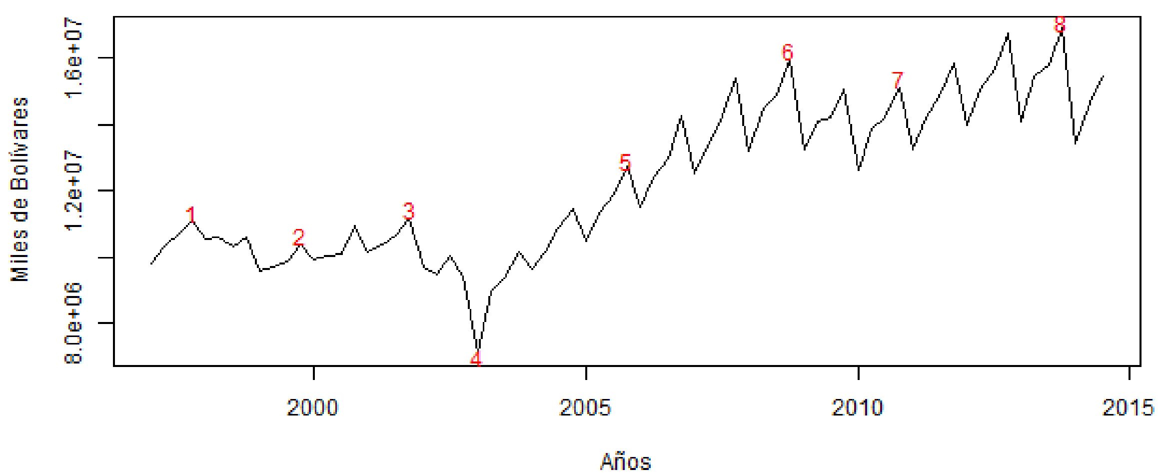

Figura 3.3. PIB Total a precios constantes (Año base 1997)

Note que el PIB Total entre los años 1997 a 2001 oscila de Bs. 9.618.763 a 11.175.913. Por otro lado entre los años 2004 y 2014 oscila de Bs. 9.679.226 a 16.883.058, en la Figura 3.3 también se puede apreciar que el mayor PIB se obtuvo en el cuarto trimestre del año 2013 por un monto de Bs. 16.883.058, por otra parte el menor PIB registrado fue de Bs. 7.113.908 alcanzado en el primer trimestre del año 2003, este descenso en el PIB podría estar asociado al paro del sector productivo en el país incluyendo **PDVSA** registrado en el cuarto trimestre del año 2002.

Es importante resaltar que para el cuarto trimestre del año 2001 se observó un aumento de 0,56 % con respecto al cuarto trimestre del año 1997, en el primer trimestre del año 2003 se obtuvo un descenso en el PIB total de 35,98 % con respecto al cuarto trimestre del año 1997. Por el contrario para el cuarto trimestre del año 2013 se observó un aumento de 51,91 % con respecto al cuarto trimestre del año 1997, recuperándose en 137,32 % después de la caída del primer trimestre del año 2003. Véase Cuadro 1.

Etiqueta N°	Año/Trimestre	PIB	%
1	1997/IV	11113278	100
2	1998/IV	10378456	-6,612108507
3	2001/IV	11175913	0,563605086
4	2003/I	7113908	-35,98731175
5	2005/IV	12749288	14,72121907
6	2008/IV	15970135	43,70319
7	2010/IV	15110803	35,97070999
8	2013/IV	16883058	51,91789497

CUADRO 1. PIB Total Observado según año y trimestre

Vale la pena destacar la variación a lo largo del período en estudio del PIB, con miras a entender el comportamiento se hicieron las diferencias del PIB del segundo año menos el primero, el tercer año menos el segundo y así sucesivamente, comenzando desde el año 1997 hasta el 2013, mostraremos una fórmula para mayor apreciación

$$PIB_{diferencias} = X_{i+1} - X_i, \ para \ i = 1997, 1998, \ldots, 2012. \tag{3.1}$$

el objetivo de estas diferencias es estudiar el crecimiento o descenso en el PIB de un año en comparación al siguiente. Véase Figura 3.2.

Al realizar los cálculos se obtuvo como resultado que entre los años 1997 y 2013 el promedio de la variación del PIB fue de 1.268.171 Bolívares, lo cual indica un crecimiento, esto representa un incremento del 3,02 % del PIB al considerar como referencia el año base 1997. Véase las Figuras 3.1 y 3.2.

2. Estudio de la Serie PIB Petrolero

Al igual que la serie anterior hemos caracterizado el estudio de la serie PIB Petrolero. En la Figura 3.4 se identifican los máximos y mínimos con etiquetas numéricas, con la finalidad de realizar análisis que permitan enfatizar el comportamiento de la serie.

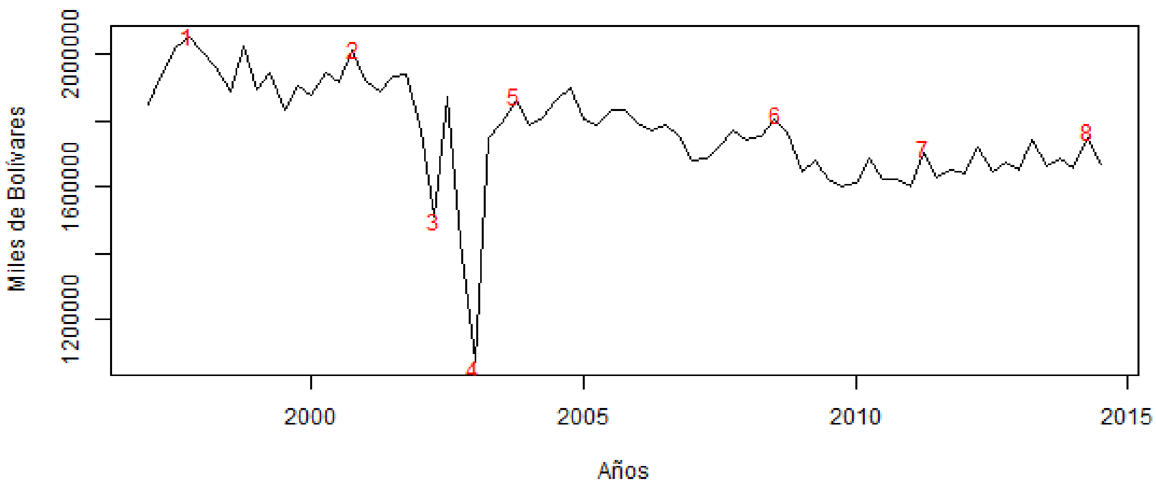

Figura 3.4. PIB Petrolero a precios constantes (año base 1997)

Observe que el PIB Petrolero entre los años 1997 al 2001 oscila de Bs. 1.835.780 a 2.050.168, por otra parte del 2004 al 2014 oscila entre Bs. 1.599.823 y 1.900.250, en la Figura 3.4 se puede apreciar que el mayor PIB obtenido en el cuarto trimestre del año 1997 alcanza un monto de Bs 2.050.168, siendo este el mayor PIB registrado entre los años 1997 y 2014, por otro lado el menor PIB Petrolero registrado fue de Bs. 1.071.733 que corresponde al primer trimestre del año 2003, este descenso en el PIB podría estar asociado al paro del sector productivo ya antes mencionado en el cuarto trimestre del año 2002.

Es considerable enfatizar que para el cuarto trimestre del año 2000 se observó un aumento de 1,67 % con respecto al cuarto trimestre del año 1997, en los años 2002 (cuarto trimestre) y 2003 (primer trimestre) se obtuvo un descenso en el PIB Petrolero de 26,19 y 47,72 % respectivamente con respecto al cuarto trimestre del año 1997. Posteriormente en el cuarto trimestre del año 2003 se recupera el PIB Petrolero en un 73,68 % después del descenso de los años 2002 y 2003, sin embargo respecto al cuarto trimestre del año base 1997 se observa un descenso del 9,20 % , más aun para el tercer trimestre del año 2014 alcanza un descenso de 14,62 % con respecto al cuarto trimestre del año 1997. Véase Cuadro 2.

Etiqueta N°	Año/Trimestre	PIB	%
1	1997/IV	2050168	100
2	2000/IV	2015812	-1,675765108
3	2002/IV	1513142	-26,19424359
4	2003/I	1071733	-47,72462549
5	2003/IV	1861470	-9,204026207
6	2008/III	1806927	-11,86444233
7	2011/II	1702217	-16,97182865
8	2014/III	1750408	-14,6212408

Cuadro 2. PIB Petrolero observado según año y trimestre

Valiendonos de la Ecuación (3.1) se realizaron cálculos en los que se obtuvo como resultado que entre los años 1997 y 2013 el promedio de la variación del PIB Petrolero fue de 70.114 Bolívares, lo cual indica un decrecimiento, esto representa un descenso del 0,8 % respecto al PIB Petrolero al considerar como referencia el año base 1997, y un descenso del 0,16 % respecto al PIB Total al considerar como referencia el año base 1997. Véase las Figuras 3.1 y 3.2

A diferencia de la serie anterior, esta serie tiende a descender año tras año.

3. Estudio de la Serie PIB NO Petrolero

Como hemos mencionado nuestro objetivo es visualizar la trayectoria de cada una de las series, en este caso observando la serie PIB NO Petrolero, le hemos dado etiquetas numéricas al PIB mas bajo, al PIB mas alto, así como también otros PIB alcanzados de forma tal que podamos caracterizar el comportamiento de la serie, véase Figura 3.5.

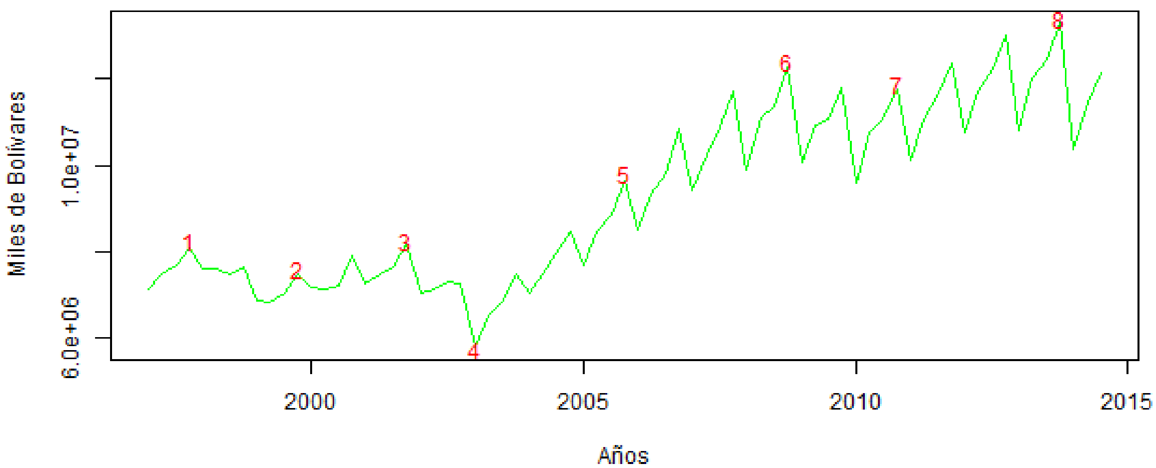

FIGURA 3.5. PIB NO Petrolero a precios constantes (Año base 1997)

Puntualizando la observación hemos notado que entre los años 1997 a 2002 el PIB NO Petrolero oscila entre Bs. 6.822.367 y 8.156.377, por otro lado para los años 2004 a 2014 oscila entre Bs. 7.064.337 y 13.274.337, en la Figura 3.5 se puede apreciar que el mayor PIB NO Petrolero se obtuvo en el cuarto trimestre del año 2003 por un monto de Bs. 13.274.337, por otra parte el menor PIB NO Petrolero registrado fue de Bs. 5.799.766 que corresponde al primer trimestre del año 2003, este descenso podría estar asociado al paro del sector productivo ya antes mencionado.

Es significativo indicar que para los años 2001 (cuarto trimestre) y 2003 (primer trimestre) se observó un incremento de 1,10 % y un descenso de 28,10 % respectivamente con respecto al cuarto trimestre del año 1997. Posteriormente para los años 2010 (Cuarto trimestre) y 2013 (Cuarto trimestre) se registró un incremento de 45,48 y 64,55 % respectivamente con respecto al cuarto trimestre del año 1997, véase Cuadro 3, tome en cuenta que si comparamos el cuarto trimestre del año 2003 con el cuarto trimestre del 2013 este último se recupera en un 128,87 %.

Etiqueta N°	Año/Trimestre	PIB	%
1	1997/IV	8067033	100
2	1999/IV	7492592	-7,120846041
3	2001/IV	8156377	1,107519952
4	2003/I	5799766	-28,10533935
5	2005/IV	9644148	19,55012456
6	2008/IV	12245800	51,80054426
7	2010/IV	11736426	45,4862773
8	2013/IV	13274337	64,55042393

CUADRO 3. PIB NO Petrolero observado según año y trimestre

Haciendo uso de la Ecuación (3.1) se realizaron los cálculos necesarios con el fin de observar la variación de la serie, en cuyo cálculo hemos obtenido que entre los años 1997 y 2013 el promedio de la variación del PIB NO Petrolero fue de 1.133.068 Bolívares, lo cual indica un crecimiento, esto representa un incremento del 3,72 % respecto al PIB NO Petrolero al considerar como referencia el año base 1997, y un incremento del 2,70 % respecto al PIB Total al considerar como referencia el año base 1997. Véase las Figuras 3.1 y 3.2

4. Estudio de la Serie PIB Impuestos Netos sobre los productos

Observando la trayectoria de la serie PIB Impuestos Netos sobre los productos, se puede notar que es muy similar a la serie anterior PIB NO Petrolero, sin embargo es necesario resaltar con etiquetas numéricas el máximo y el mínimo, con el objetivo de estudiar el comportamiento de dicha serie. La Figura 3.6 muestra el gráfico del PIB Impuestos Netos sobre los productos.

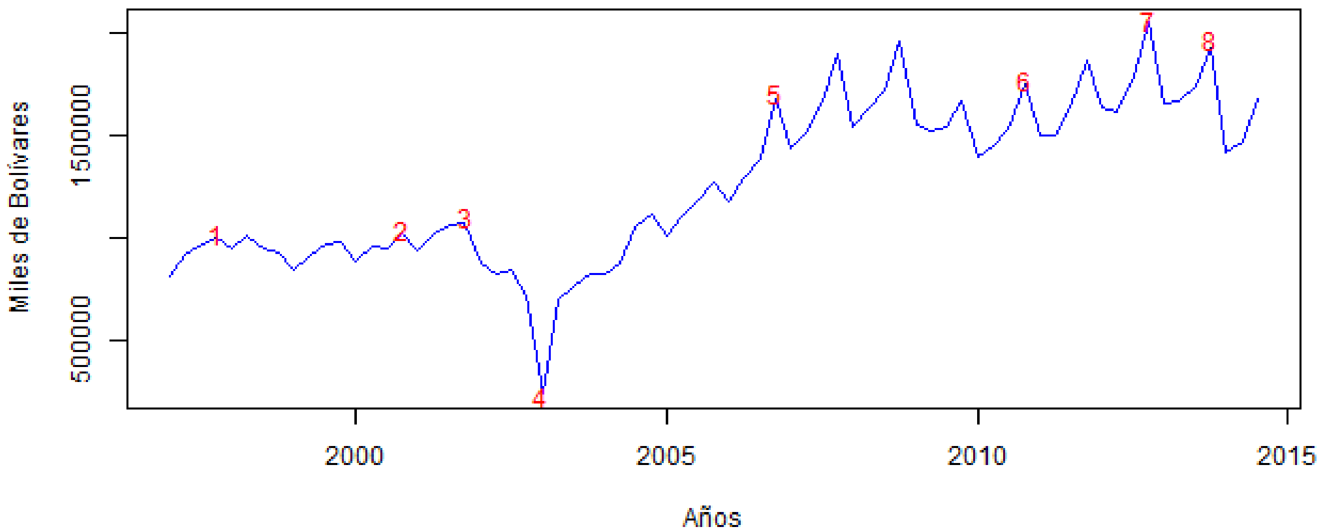

FIGURA 3.6. PIB Impuestos Netos sobre los productos a precios constantes (Año base 1997)

La serie Impuestos Netos sobre los productos entre los años 1997 a 2002 oscila entre Bs. 815.324 y 1.077.376, por otra parte entre los años 2004 a 2014 oscila entre Bs. 825.446 y 2.044.034, en la Figura 3.6 se puede mirar que el mayor PIB Impuestos Netos sobre los productos observado fue de Bs. 2.044.034 que corresponde al primer trimestre del año 2003, por otra lado el menor PIB Impuestos Netos sobre los productos se obtuvo en el cuarto trimestre del año 2002 por un monto de Bs. 242.409, este descenso podría estar asociado al paro del sector productivo en el país.

Es vital señalar que para los años 2001 (cuarto trimestre) y 2003 (primer trimestre) se observó un incremento de 8,16 % y un descenso de 75,66 % respectivamente con respecto al cuarto trimestre del año 1997. Posteriormente para los años 2012 (Cuarto trimestre) y 2013 (Cuarto trimestre) se registró un incremento de 105,20 y 93,24 % respectivamente, con respecto al cuarto trimestre del año 1997, véase Cuadro 4, al comparar la caída del primer trimestre del año 2003 con el cuarto trimestre del 2013 notamos que este último se recupera en 694,05 % .

Etiqueta N°	Año/Trimestre	PIB	%
1	1997/IV	996077	100
2	2000/IV	1024682	2,871765938
3	2001/IV	1077376	8,161919209
4	2003/I	242409	-75,66362841
5	2006/IV	1678355	68,49651182
6	2010/IV	1747921	75,48051004
7	2012/IV	2044034	105,2084327
8	2013/IV	1924868	93,24489974

Cuadro 4. PIB Impuestos Netos Sobre los Productos observado según año y trimestre

Mediante la Ecuación (3.1) hemos obtenido como resultado que entre los años 1997 y 2013 el promedio de la variación del PIB Impuestos Netos Sobre los Productos fue de 205.217 Bolívares, lo cual indica un crecimiento, esto representa un incremento del 5,5 % respecto al PIB Impuestos Netos Sobre los Productos al considerar como referencia el año base 1997, y un incremento del 0,48 % respecto al PIB Total al considerar como referencia el año base 1997. Véase las Figuras 3.1 y 3.2

5. Regresión lineal para las series originales

Ya hemos observado que las series PIB Total, PIB NO Petrolero, PIB Impuestos Netos sobre los productos, tienden al crecimiento en el PIB, por otra parte la serie PIB Petrolero tiende a decrecer. Con el objetivo de apreciar el comportamiento creciente o descendente de las series, se hizo un ajuste de regresión lineal simple para cada una de las series.

Mostraremos a continuación un resumen del ajuste de regresión lineal simple para cada una de las series estudiadas:

- **Serie PIB Total**, se obtuvo los coeficientes: $\hat{\beta}_1 = -763648270$; $\hat{\beta}_2 = 386859,8.$, con un error estándar de 1213000 y $R^2 = 0{,}7$, la estimación de regresión lineal simple de la serie es

$$\hat{X}_t = -763648270 + 386859,8t. \tag{3.2}$$

  Note que la ecuación (3.2) indica una recta con pendiente positiva, siendo este resultado lo esperado debido a las oscilaciones de la serie.

- **Serie PIB Petrolero**. Los coeficientes obtenidos fueron, $\hat{\beta}_1 = 37920635,86$; $\hat{\beta}_2 = -18023,24.$, con un error estándar de 125400 y $R^2 = 0{,}3$, la estimación de regresión lineal simple de la serie es

$$\hat{X}_t = 37920635,86 - 18023,24t. \tag{3.3}$$

  A diferencia de la ecuación de la recta asociada a la serie PIB Total, la Ecuación (3.3) indica una recta con pendiente negativa, la cual nos permite determinar el descenso de la serie.

- **Serie PIB NO Petrolero**. Los coeficientes obtenidos fueron, $\hat{\beta}_1 = -679136638,1$; $\hat{\beta}_2 = 343211,9.$, con un error estándar de 947100 y $R^2 = 0{,}7$, la estimación de regresión lineal simple de la serie es

$$\hat{X}_t = -679136638,1 + 343211,9t. \tag{3.4}$$

  De la Ecuación (3.4) se puede notar que la serie PIB NO Petrolero crece a medida que transcurre el tiempo.

- **Serie PIB Impuestos Netos sobre los productos**. Los coeficientes obtenidos fueron $\hat{\beta}_1 = -122432267,82$; $\hat{\beta}_2 = 61671,15$., con un error estándar de 222700 y $R^2 = 0{,}6$, la estimación de regresión lineal simple de la serie es

$$\hat{X}_t = -122432267,82 + 61671,15t. \tag{3.5}$$

Al igual que la serie anterior la ecuación (3.5) indica una recta con pendiente positiva, por lo que podemos verificar el crecimiento de la serie.

En la Figura 3.7 se pueden observar las series de tiempo con su respectiva recta de tendencia ajustada. Vale la pena mencionar que si bien las rectas de regresión nos permiten visualizar el comportamiento global de los PIB en cuanto a su tendencia, al observar los R^2 asociados y los gráficos de los ajustes notamos que este no es el mejor método para determinar la tendencia, puesto que el mejor modelo explica solo el 70 % del comportamiento, es por ello que más adelante usaremos otras técnicas para eliminar la tendencia subyacente en las series de manera adecuada.

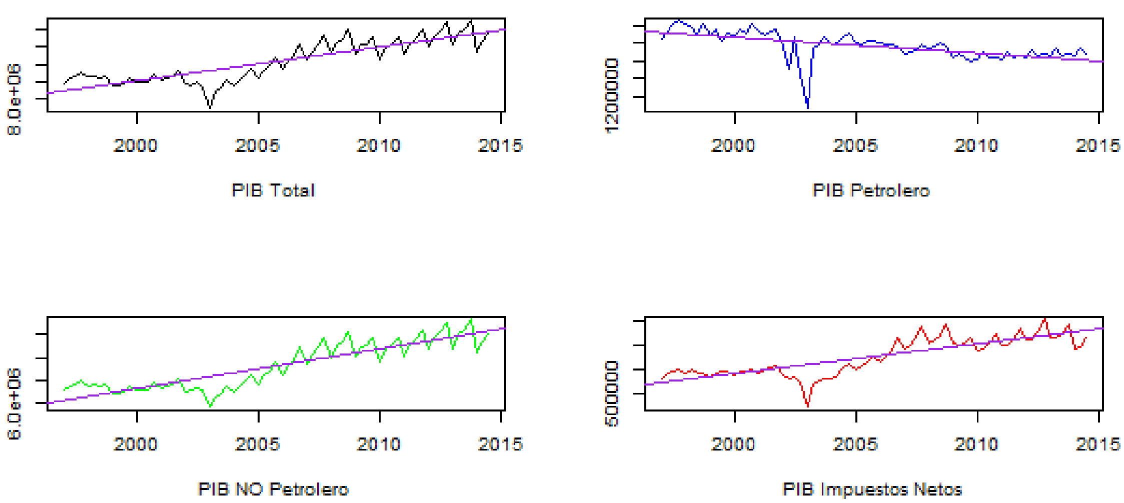

FIGURA 3.7. Regresión lineal simple para las series PIB Total, PIB Petrolero, PIB NO Petrolero y PIB Impuestos Netos sobre los productos. En color negro, azul, verde y rojo respectivamente.

6. Anánlisis usando series temporales

Con la finalidad de determinar los rasgos que caracterizan estas series tales como, componente estacional, tendencia y componente aleatoria, realizaremos los siguientes pasos:

(1) Analizar la Función de Autocorrelación y la Función Autocorrelación Parcial, para ver el comportamiento de la serie.

(2) Aplicar una descomposición a las series X_t en forma aditiva dada como sigue

$X_t = \hat{T}_t + \hat{E}_t + \hat{Y}_t,$

donde:

$\hat{T}_t$: Es la tendencia obtenida por filtrados móviles.

$\hat{E}_t$: Es la componente estacional.

$\hat{Y}_t$: Es una serie de tiempo. A la cual se le aplicará según sea el caso un modelo $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ ó un modelo $ARIMA(p, d, q)$.

Definimos $\hat{Y}_t$ como sigue,

$$\hat{Y}_t = \widetilde{T}_t + \widetilde{E}_t + \widetilde{\varepsilon}_t \tag{3.6}$$

(3) Analizar la Función de Autocorrelación y la Función Autocorrelación Parcial para la serie de tiempo $\hat{Y}_t$, para hacer ajustes necesarios que permitan hacer un estudio a dicha serie.

(4) Comparar las series originales con los modelos estimados.

4.1. Análisis para la serie PIB Total

Se observó mediante la función de autocorrelación de la serie PIB Total (Figura 3.8) una repetición cada cuatro retardos, esta repetición la llamaremos período de la serie. Note que este período está asociado con el hecho de que los registros de la serie son cuatrimestrales.

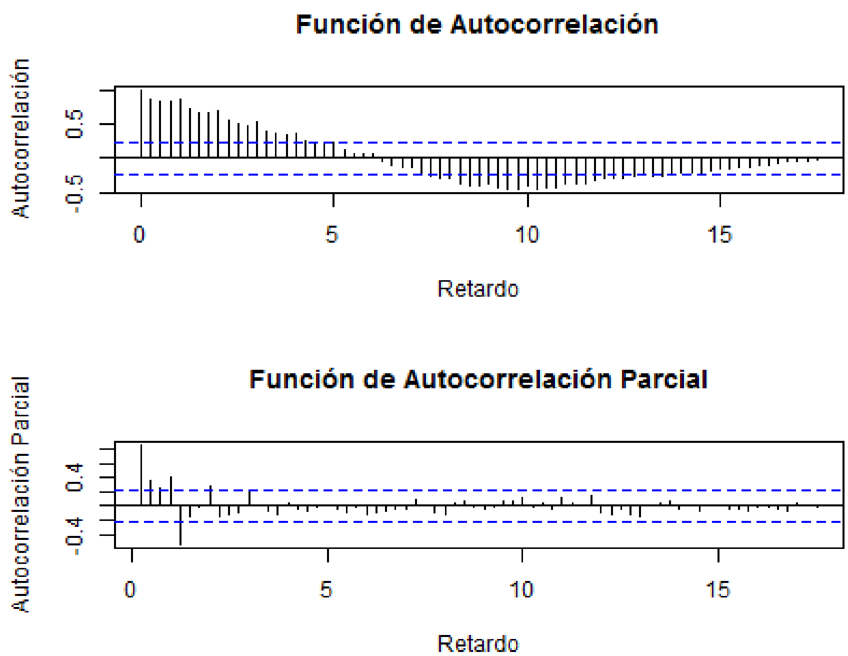

Figura 3.8. Función ACF (parte superior) y PACF (parte inferior) de la serie PIB Total.

Como siguiente paso se aplicó una descomposición a la serie. Al gráficar los resultados de la descomposición, se obtuvo en primera instancia los datos observados (serie PIB Total), luego la componente estacional (véase "Método E2: Estimación por promedio móvil"), posteriormente la tendencia (obtenida por filtrados de promedios móviles, para más detalles véase "Método T2: Suavizado por medio de un promedio móvil") y finalmente un serie de tiempo $\hat{Y}_t$ que es el resultado de extraer la componente estacional y la tendencia a los datos observados (serie PIB Total), véase Figura 3.9.

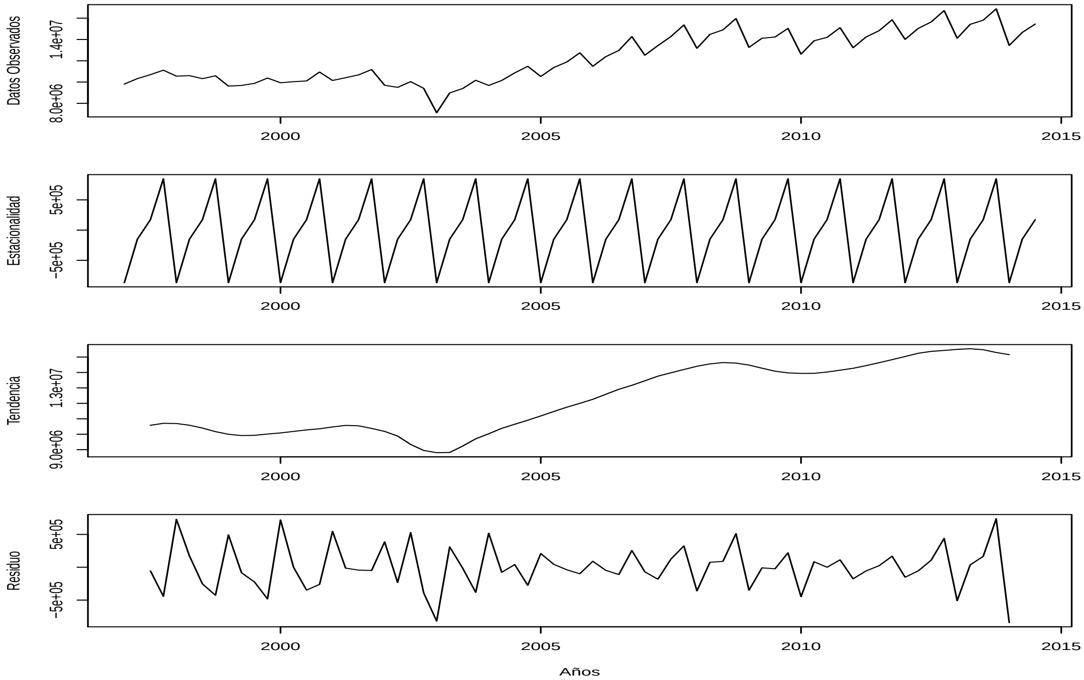

Figura 3.9. Descomposición de la serie PIB Total

Note que si observamos la Función de autocorrelación Figura 3.10 para la serie $\hat{Y}_t$ asociada a la serie PIB Total, hay retardos que están por fuera de la banda de confianza por lo cual buscamos un modelo de tipo $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ para completar el ajuste de la serie de tiempo.

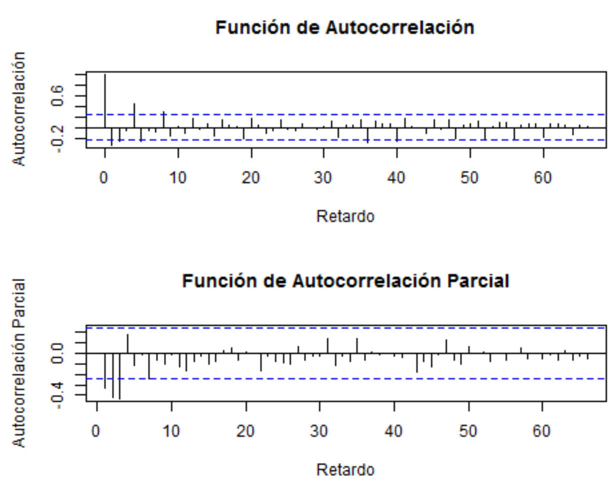

Figura 3.10. Función de ACF (parte superior) y PACF (parte inferior) para la serie la $\hat{Y}_t$ asociada serie PIB Total

Luego de proponer varios modelos a la serie $\hat{Y}_t$, se pudo apreciar que el mejor modelo que se ajusta, es el modelo $SARIMA(0,0,1) \times (0,1,1)_4$, en la Figura 3.11 se puede apreciar que los retardos de los residuos del modelo ajustado están dentro de la banda de confianza.

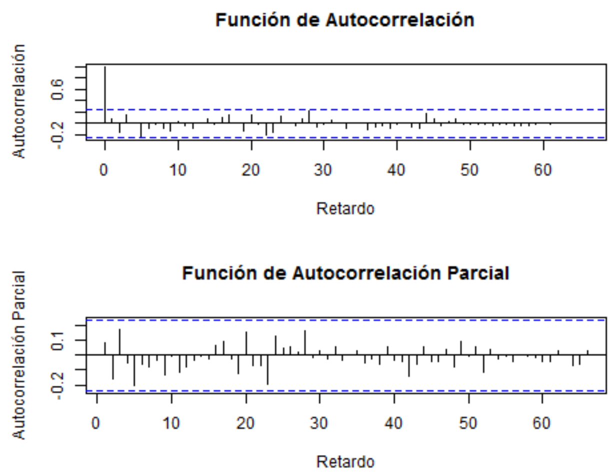

FIGURA 3.11. Función de ACF (parte superior) y PACF (parte inferior) para el modelo estimado

Con la finalidad de verificar para el modelo ajustado la gaussianidad de los residuos, se realizó un gráfico de cuantiles. En la Figura 3.12 se observa que gran parte de la información correspondiente a los residuos del modelo ajustado se aproxima a una recta, solo en los extremos de la recta se observa una sutil separación, sin embargo podemos aceptar la gaussianidad. Por otra parte dada la aleatoriedad de los residuos según se observó en la Figura 3.11 podemos decir que, $\widetilde{\varepsilon}_t \sim w_t$, con w_t un ruido blanco Gaussiano, como ya se vio en el Ejemplo 1.15, también es estacionario.

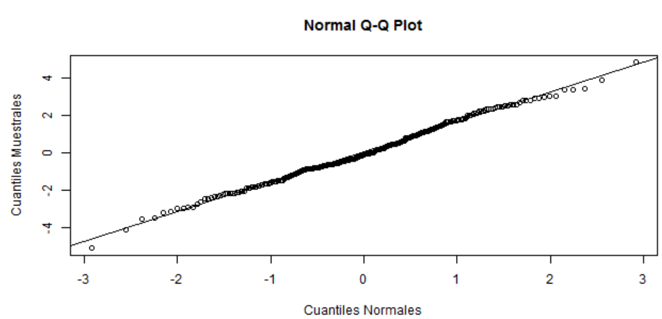

FIGURA 3.12. Gráfico de cuantiles para los residuos de la serie $\hat{Y}_t$

Como ya hemos mencionado para la serie $\hat{Y}_t$ se ajustó un modelo $SARIMA(0,0,1) \times (0,1,1)_4$, que denotaremos,

$$Y_t = (1 - B^4)\hat{Y}_t,$$

para Y_t un proceso ARMA causal definido por,

$$Y_t = \theta(B)\Theta(B^4)\widetilde{\varepsilon}_t, \ \textit{donde} \ \{\widetilde{\varepsilon}_t\} \ \textit{es un ruido blanco},$$

y

$$\theta(z) = 1 - 0{,}5577z; \Theta(z) = 1 - 0{,}5788z.$$

Al construir el modelo aditivo propuesto, $X_t = \hat{T}_t + \hat{E}_t + \hat{Y}_t + \widetilde{\varepsilon}_t$, donde $\hat{Y}_t$ es el modelo SARIMA que acabamos de explicar, obtenemos que se ajusta muy bien a la serie original PIB Total, puesto que los datos estimados (gráfica azul) están cercanos a los datos originales (gráfica roja), véase Figura 3.12, este resultado será de utilidad para hacer pronósticos del comportamiento de la serie.

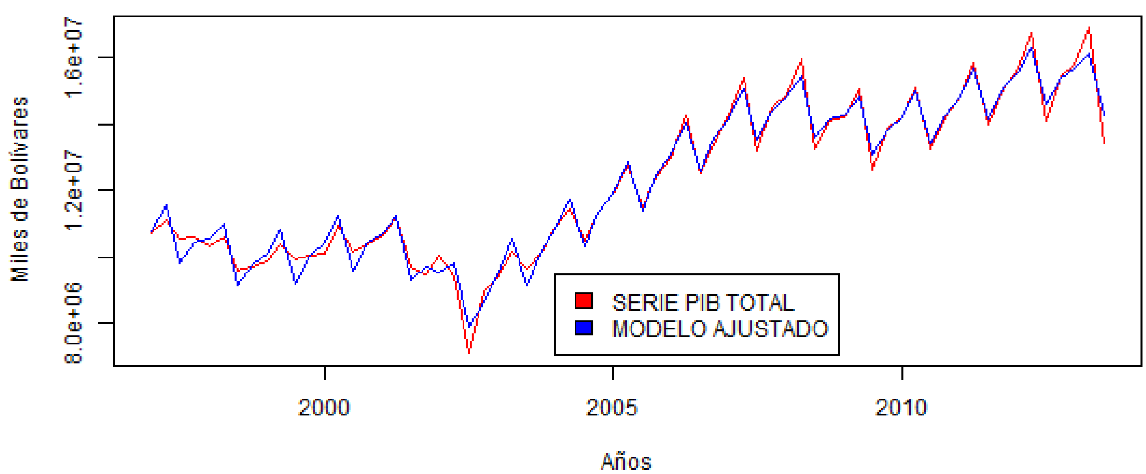

Figura 3.13. Serie PIB Total comparada con el modelo ajustado

4.2. Análisis para serie PIB Petrolero

Al igual que la serie anterior en la Figura 3.14 se aprecia el período de la serie PIB Petrolero. Tome en cuenta que cada una de las series están registradas cuatrimestralmente.

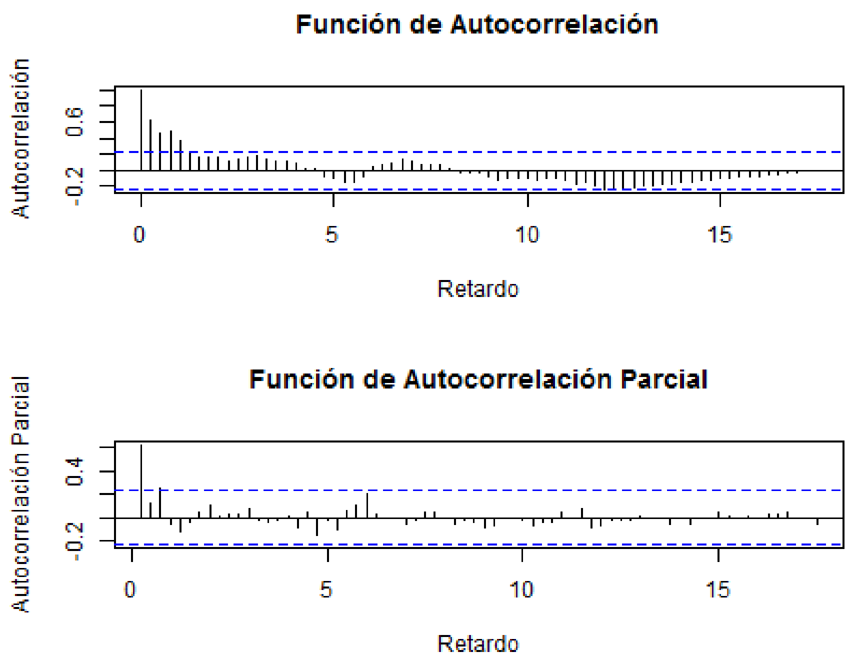

FIGURA 3.14. Función ACF (parte superior) y PACF (parte inferior) de la serie PIB Petrolero

El paso que sigue es aplicar la descomposición de la serie. Como resultado gráfico de la descomposición se obtuvo de arriba hacia abajo los datos observados (serie PIB Petrolero), seguidamente la componente estacional (véase ”Método E2: Estimación por promedio móvil”), luego la tendencia (obtenida por filtrados de promedios móviles) y por último la serie $\hat{Y}_t$ que es el resultado de extraer la componente estacional y la tendencia a los datos observados (serie PIB Petrolero), véase Figura 3.15.

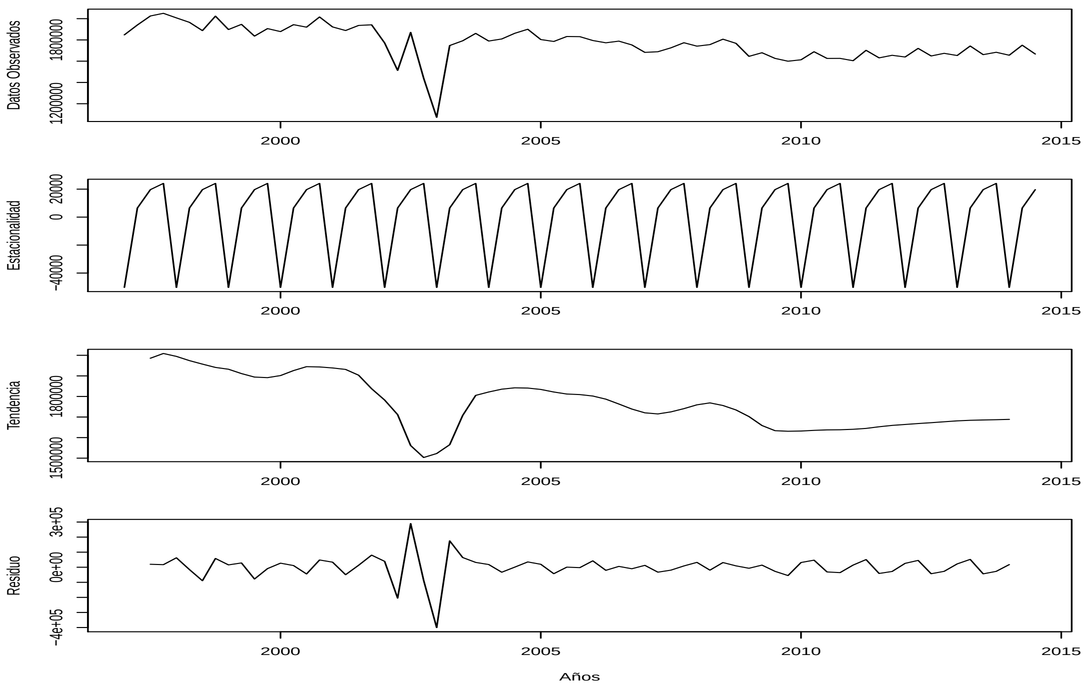

FIGURA 3.15. Descomposición de la serie PIB Petrolero

Si observamos la Función de autocorrelación Figura 3.16 para la serie $\hat{Y}_t$ asociada a la serie PIB Petrolero, hay retardos que se salen de la banda de confianza por lo cual buscamos un modelo de tipo $SARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ para completar el ajuste de la serie de tiempo.

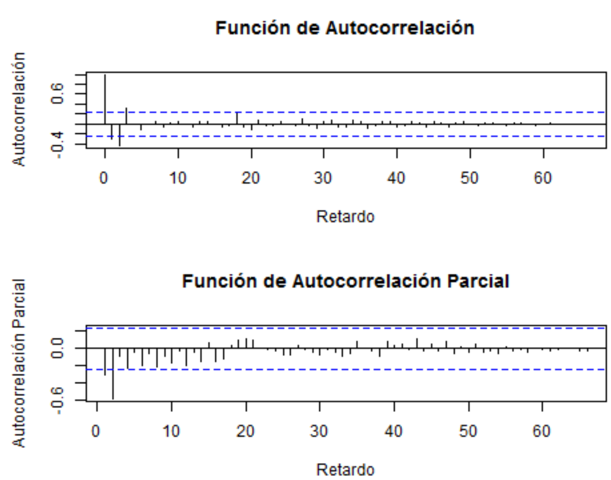

FIGURA 3.16. Función de ACF (parte superior) y PACF (parte inferior) para la serie $\hat{Y}_t$ asociada a la serie PIB Petrolero

Al proponer varios modelos a la serie $\hat{Y}_t$, se pudo apreciar que el mejor modelo ajustado es el $SARIMA(3,0,0) \times (2,0,0)_4$, en la Figura 3.17 se observa que los retardos de los residuos luego de aplicar este modelo están dentro de la banda de confianza.

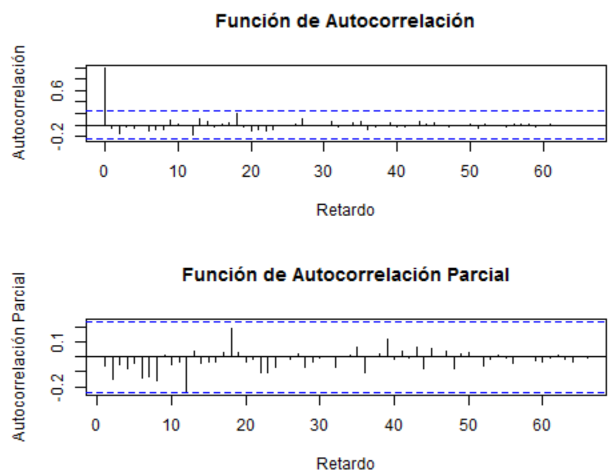

FIGURA 3.17. Función de ACF (parte superior) y PACF (parte inferior) para el modelo SARIMA ajustado a la serie $\hat{Y}_t$

Con el objetivo de verificar para el modelo ajustado la gaussianidad de los residuos, se realizó un gráfico de cuantiles. En la Figura 3.18 se observa que gran parte de la información correspondiente a los residuos del modelo ajustado se aproxima a una recta excepto que en las colas se aprecia una leve separación, sin embargo podemos aceptar la gaussianidad. Por otra parte dada la aleatoriedad de los residuos según se observó en la Figura 3.17 podemos decir que, $\widetilde{\varepsilon}_t \sim w_t$, con w_t un ruido blanco gaussiano, como ya se vio en el Ejemplo 1.15, también es estacionario.

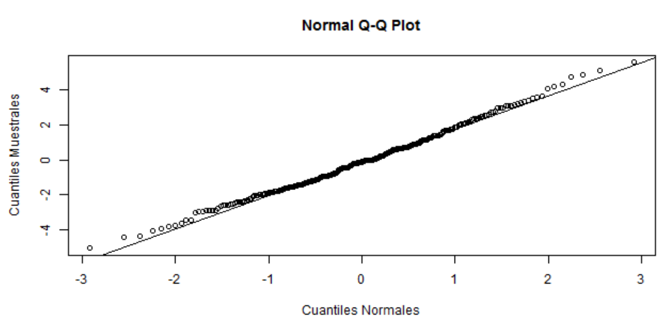

FIGURA 3.18. Gráfico de cuantiles para los residuos de la serie PIB Petrolero

Se ajustó para la serie $\hat{Y}_t$ un modelo $SARIMA(3,0,0) \times (2,0,0)_4$, que denotaremos por,

$$Y_t = \hat{Y}_t,$$

para Y_t un proceso ARMA causal definido por,

$$\phi(B)\Phi(B^4)Y_t = \widetilde{\varepsilon}_t, \ \textit{donde } \{\widetilde{\varepsilon}_t\} \textit{ es un ruido blanco},$$

y

$$\phi(z) = 1 - 0{,}5779z - 0{,}8299z^2 - 0{,}3564z^3; \ \Phi(z) = 1 - 0{,}5027z - 0{,}2577z^2.$$

Al construir el modelo aditivo propuesto, $X_t = \hat{T}_t + \hat{E}_t + \hat{Y}_t + \widetilde{\varepsilon}_t$, donde $\hat{Y}_t$ es el modelo SARIMA explicado anteriormente, observamos que se ajusta muy bien a la serie original PIB Petrolero, puesto que los datos estimados (gráfica azul) están cercanos a los datos originales (gráfica roja), sólo en los picos de los 2002 y 2003 el modelo no se acerca lo suficiente, véase Figura 3.19, sin embargo este modelo será útil para hacer pronósticos.

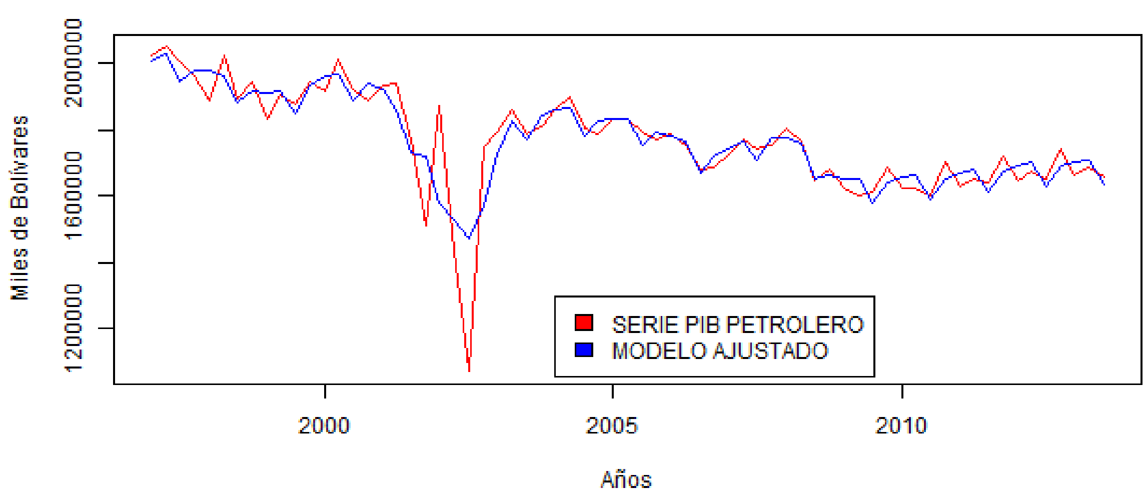

Figura 3.19. Comparación de la Serie PIB Petrolero con el modelo ajustado

4.3. Análisis para serie PIB NO Petrolero

La función de autocorrelación, Figura 3.20, para la serie PIB NO Petrolero muestra cada cuatro retardos el período de la serie, como hemos mencionado anteriormente se debe al registro cuatrimestral.

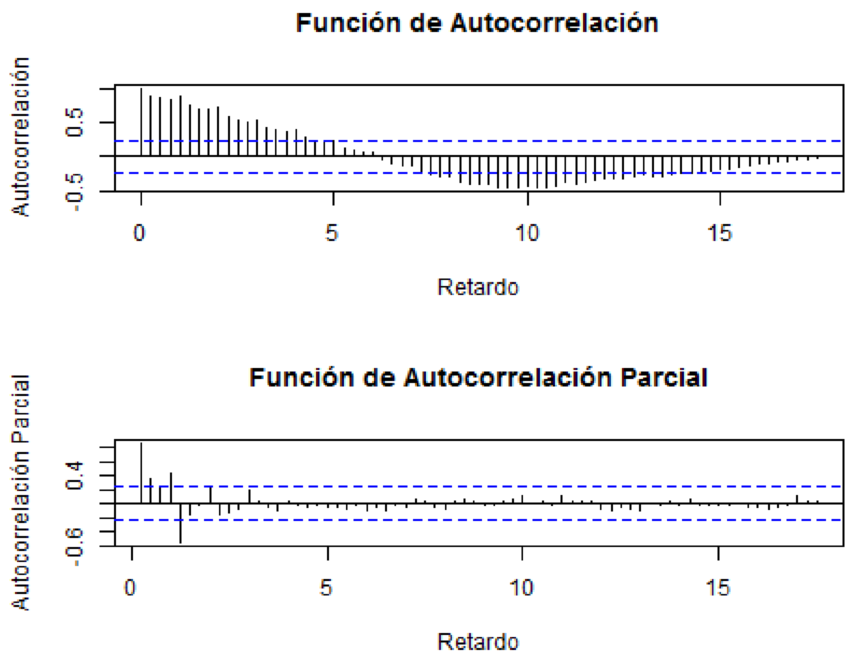

Figura 3.20. Función ACF (parte superior) y PACF (parte inferior) de la serie PIB NO Petrolero

En la descomposición de la serie se obtuvo cuatro gráficas las cuales contienen, los datos observados (serie PIB NO Petrolero), posteriormente la componente estacional (véase "Método E2"), después la tendencia (obtenida por filtrados de promedios móviles, véase "Método T2") y la última gráfica contiene la serie $\hat{Y}_t$ que es el resultado de extraer la componente estacional y la tendencia a los datos observados (serie PIB NO Petrolero), véase Figura 3.20.

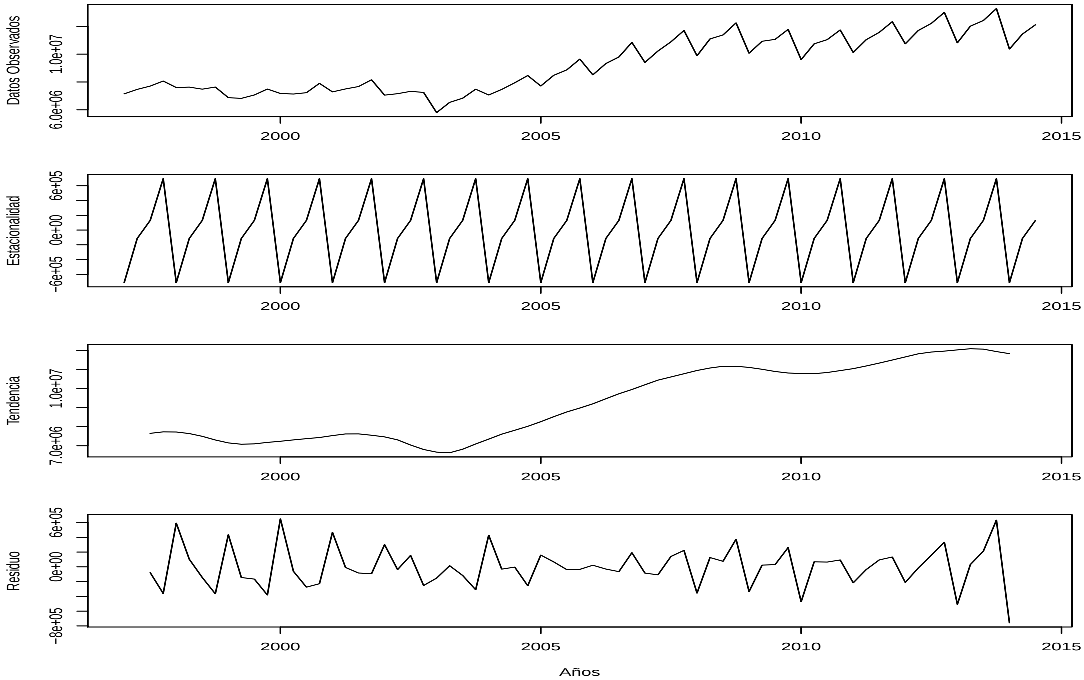

Figura 3.21. Descomposición de la serie PIB NO Petrolero

Mirando la Función de autocorrelación Figura 3.22 para la serie $\hat{Y}_t$ asociada a la serie PIB NO Petrolero, se puede apreciar que hay retardos que superan la banda de confianza por lo cual buscamos un modelo de tipo $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ para completar el ajuste de la serie de tiempo.

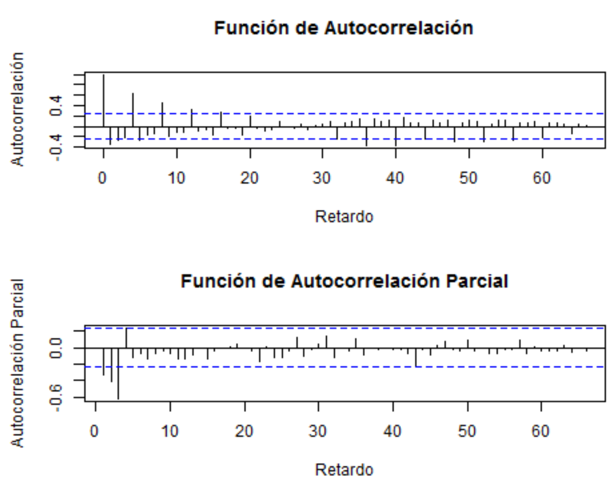

Figura 3.22. Función de ACF (parte superior) y PACF (parte inferior) para la serie $\hat{Y}_t$ asociada a la serie PIB NO Petrolero

Después de proponer varios modelos para la serie $\hat{Y}_t$. Por ser el mejor ajuste se eligió el modelo $SARIMA(0,0,1) \times (0,1,1)_4$, en la Figura 3.23 se verifica que los retardos de los residuos al aplicar este modelo están dentro de la banda de confianza.

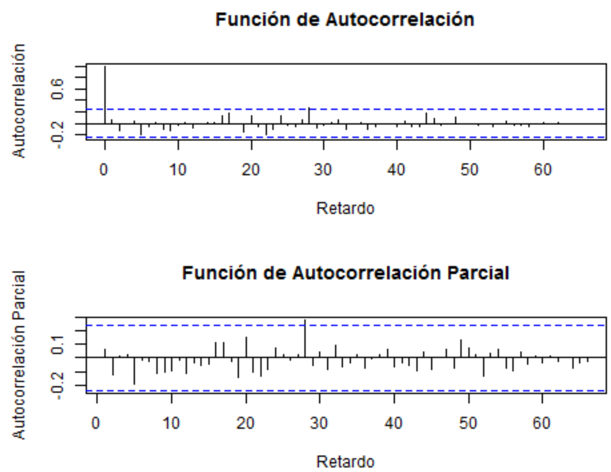

FIGURA 3.23. Función de ACF (parte superior) y PACF (parte inferior) para el modelo estimado

Con el propósito de verificar para el modelo ajustado la gaussianidad de los residuos, se realizó un gráfico de cuantiles. En la Figura 3.24 se observa que gran parte de la información correspondiente a los residuos del modelo ajustado se aproxima a una recta excepto en las colas, sin embargo podemos aceptar la gaussianidad. Por otra parte dada la aleatoriedad de los residuos según se observó en la Figura 3.23 podemos decir que, $\hat{\varepsilon}_t \sim w_t$, con w_t un ruido blanco gaussiano, como ya se vio en el Ejemplo 1.15, también es estacionario.

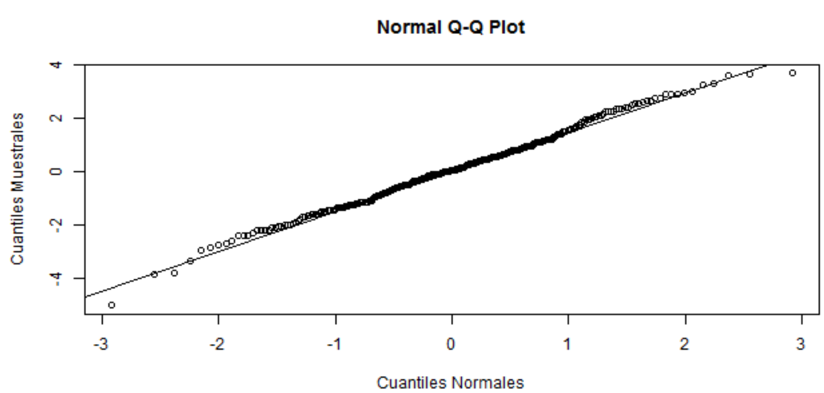

FIGURA 3.24. Gráfico de cuantiles para los residuos de la serie PIB NO Petrolero

Al igual que los casos anteriores para la serie $\hat{Y}_t$ se ajustó un modelo $SARIMA(0,0,1) \times (0,1,1)_4$, que denotaremos por,

$$Y_t = (1 - B^4)\hat{Y}_t,$$

para Y_t un proceso ARMA causal definido por,

$$Y_t = \theta(B)\Theta(B^4)\widetilde{\varepsilon}_t, \; donde \; \{\widetilde{\varepsilon}_t\} \; es \; un \; ruido \; blanco,$$

y

$$\theta(z) = 1 - 0{,}4171z; \;\; \Theta(z) = 1 - 0{,}3378z.$$

Al construir el modelo aditivo propuesto, $X_t = \hat{T}_t + \hat{E}_t + \hat{Y}_t + \widetilde{\varepsilon}_t$, donde $\hat{Y}_t$ es el modelo SARIMA que acabamos de resaltar, podemos observar que se ajusta muy bien a la serie original PIB Petrolero, puesto que los datos estimados (gráfica azul) están cercanos a los datos originales (gráfica roja), véase Figura 3.25, este resultado es útil para hacer pronósticos.

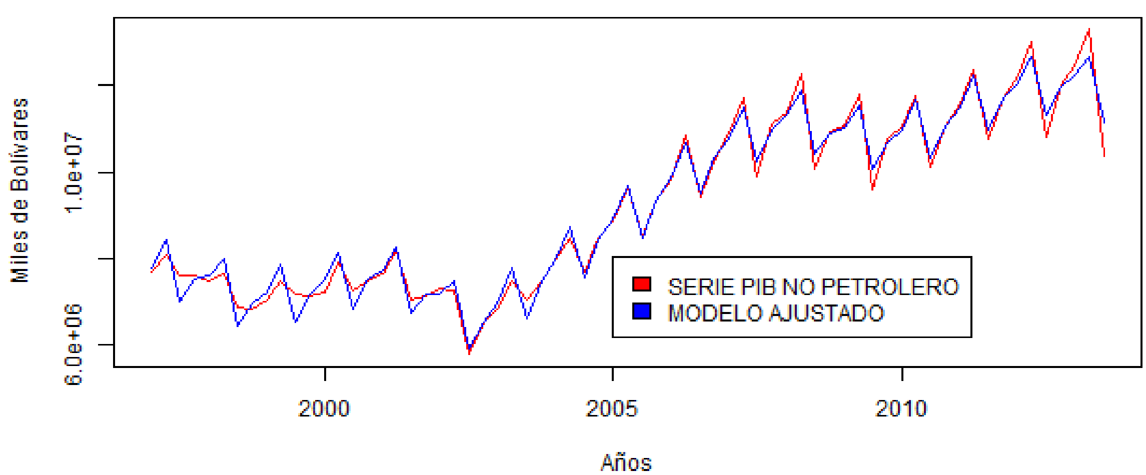

Figura 3.25. Comparación de la Serie PIB NO Petrolero con el modelo ajustado

4.4 Análisis para serie PIB Impuestos Netos sobre los productos

Mediante la función de autocorrelación de la serie PIB Impuestos Netos sobre los productos Figura 3.26, se observó al igual que las series anteriores una repetición cada cuatro retardos, lo cual indica el período de la serie.

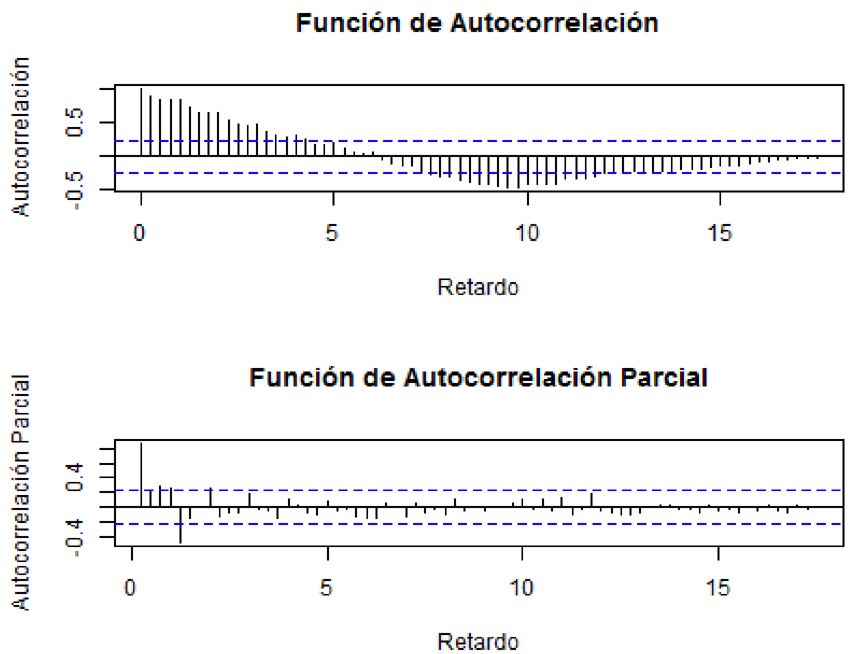

Figura 3.26. Función ACF (parte superior) y PACF (parte inferior) de la serie PIB Impuestos Netos sobre los productos

En los resultados gráficos de la descomposición, se obtuvo en primera instancia los datos observados (serie PIB Impuestos Netos sobre los productos), luego la componente estacional, posteriormente la tendencia (obtenida por filtrados de promedios móviles) y finalmente la serie $\hat{Y}_t$ que es el resultado de extraer la componente estacional y la tendencia a los datos observados de la serie PIB Impuestos Netos sobre los productos, véase Figura 3.27.

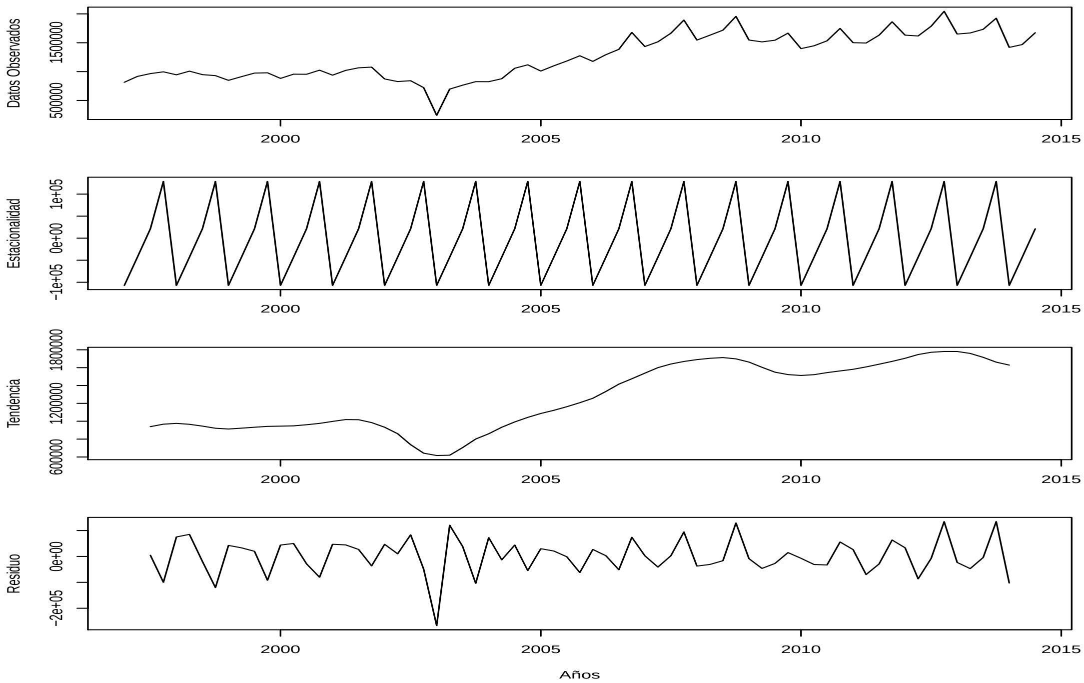

FIGURA 3.27. Descomposición de la serie PIB Impuestos Netos sobre los productos

Observando la Función de autocorrelación Figura 3.28 para la serie $\hat{Y}_t$ asociada a la serie PIB Impuestos Netos sobre los productos hay retardos que salen fuera de la banda de confianza por lo cual buscamos un modelo de tipo $ARIMA(p, d, q)$ para completar el ajuste de la serie de tiempo.

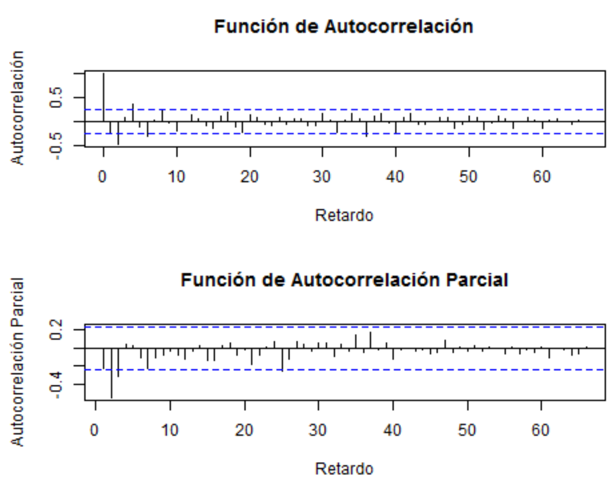

FIGURA 3.28. Función de ACF (parte superior) y PACF (parte inferior) para la serie $\hat{Y}_t$ asociada a la serie PIB Impuestos Netos sobre los productos

Proponiendo varios modelos para la serie $\hat{Y}_t$, se pudo apreciar que el mejor modelo que se ajusta, es el $ARIMA(3,0,0)$. En la Figura 3.29 se puede notar que los retardos de los residuos del modelo aplicado están dentro de la banda de confianza.

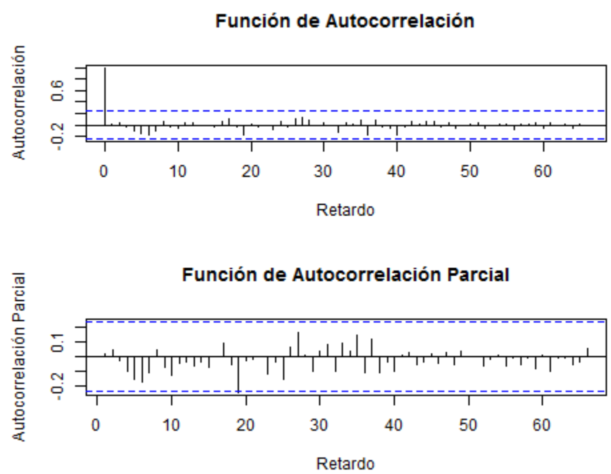

FIGURA 3.29. Función de ACF (parte superior) y PACF (parte inferior) para el modelo estimado

Con el fin de verificar para el modelo ajustado la gaussianidad de los residuos, se realizó un gráfico de cuantiles. En la Figura 3.30 se observa que gran parte de la información correspondiente a los residuos del modelo ajustado se aproxima a una recta salvo en las colas, sin embargo podemos aceptar la gaussianidad. Por otra parte dada la aleatoriedad de los residuos según se observó en la, Figura 3.29, podemos decir que, $\hat{\varepsilon}_t \sim w_t$, con w_t un ruido blanco gaussiano, como ya se vio en el Ejemplo 1.15, también es estacionario.

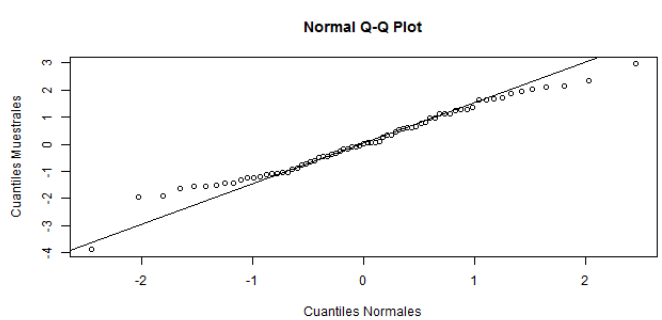

FIGURA 3.30. Gráfico de cuantiles para los residuos de la serie PIB Impuestos Netos sobre los productos

A diferencia de las series estudiadas anteriormente, para la serie $\hat{Y}_t$ se ajustó un modelo $ARIMA(3,0,0)$ ó Modelo Autoreguesivo de orden tres $AR(3)$, que denotaremos por,

$$\phi(B)\hat{Y}_t = \widetilde{\varepsilon}_t,$$

donde,

$$\phi(B) = 1 - 0{,}5155B - 0{,}6781B^2 - 0{,}2966B^3.$$

Al construir el modelo aditivo propuesto, $X_t = \hat{T}_t + \hat{E}_t + \hat{Y}_t + \widetilde{\varepsilon}_t$, donde $\hat{Y}_t$ es el modelo ARIMA antes expuesto, obtenemos que se ajusta muy bien a la serie original PIB Impuestos Netos sobre los productos, puesto que los datos estimados (gráfica azul) están cercanos a los datos originales (gráfica roja), véase Figura 3.31, con este resultado haremos pronósticos del comportamiento de la serie.

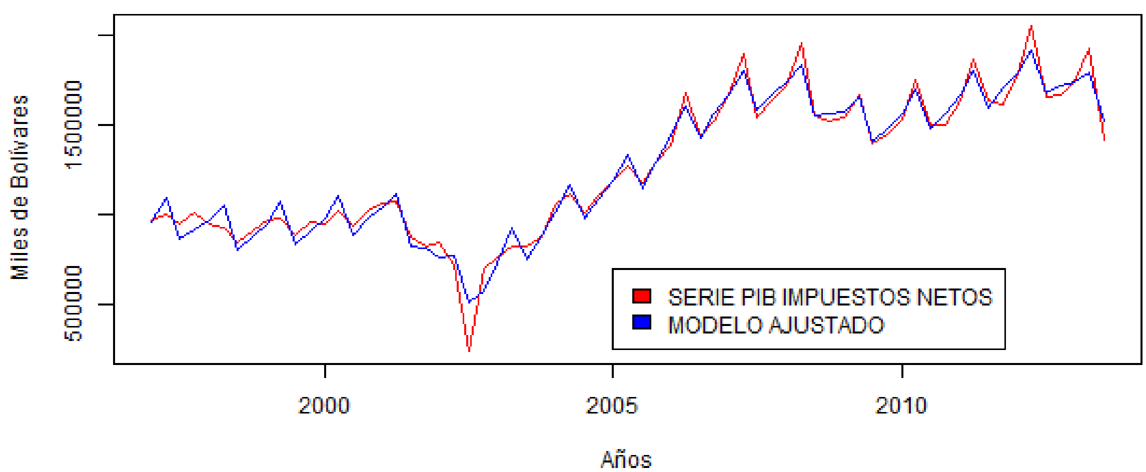

Figura 3.31. Serie PIB Impuestos Netos Sobre los Productos comparada con el modelo ajustado

7. Predicción para los modelos ajustados

En las secciones anteriores de este capítulos observamos el comportamiento de cada una de las series caracterizando su oscilación y tendencia según la información conocida de las series, pero más precisamente en la sección anterior se obtuvo un modelo con el cual existe la posibilidad de hacer pronósticos. En efecto esta sección estará dedicada para los pronósticos de cada una de las series estudiadas.

Realizaremos la predicción a cada una de las series para los años 2014 (cuarto trimestre), 2015, 2016 y 2017 (primeros tres trimestres) en total esto equivale a tres años de predicción.

7.1. Pronósticos para la serie PIB Total.

Para realizar la predicción hemos considerado la tendencia y la estacionalidad de los años 2011 (primer trimestre), 2012, 2013 y 2014 (primeros tres trimestres) obtenida a través de la descomposición de la serie efectuada en la sección anterior, véase Figura 3.9. Además para construir los intervalos de confianza se consideró el máximo PIB por un monto de Bs. 16.883.058 que corresponde al cuarto trimestre del año 2013, por otra parte a partir del año 2005 a 2014 se tomo en cuenta el mínimo PIB registrado en ese período que fue de Bs. 10.523.822 correspondiente al primer trimestre del año 2005.

La Figura 3.32 muestra la serie PIB Total en color negro, las bandas azules es el intervalo de confianza para la predicción y la banda roja es la predicción.

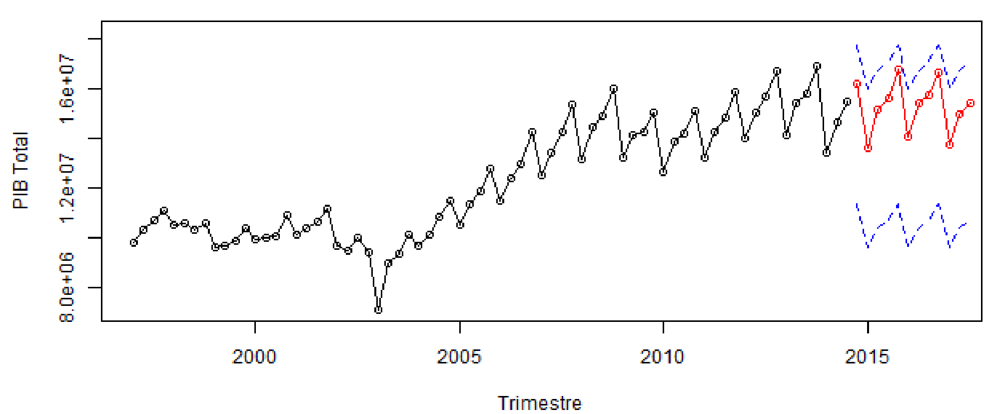

Figura 3.32. Predicción para el modelo ajustado de la serie PIB Total

Como hemos mencionado el máximo PIB Total fue alcanzado en el cuarto trimestre del año 2013 por un monto de Bs. 16.883.058, ahora bien la predicción arrojó para el cuarto trimestre del 2014 un monto de Bs. 16.161.695 que representa un descenso de 4,2 % respecto al PIB máximo. Por otro lado la predicción arrojó para el cuarto trimestre de los años 2015 y 2016 un monto de Bs. 16.757.561 y 16.624.581 respectivamente, esto representa en descenso de 0,7 y 1,5 respectivamente. Si nos basamos en los intervalos de confianza y en los análisis previos en los que hemos observado el comportamiento de esta serie, podemos decir que la predicción tiene mucha posibilidad de descender y que la posibilidad del ascenso de la predicción es reducida.

7.2. Pronósticos para la serie PIB Petrolero.

Hemos considerado para la predicción la tendencia y la estacionalidad de los años 2011 (primer trimestre), 2012, 2013 y 2014 (primeros tres trimestres) obtenida a través de la descomposición de la serie efectuada en la sección anterior, véase Figura 3.9. Se tomo en cuenta para construir los intervalos de confianza la predicción, la estacionalidad de la predicción, la tendencia y la estacionalidad antes mencionadas. La Figura 3.33 muestra la serie PIB Petrolero en color negro, la banda roja es la predicción y las bandas azules es el intervalo de confianza para la predicción.

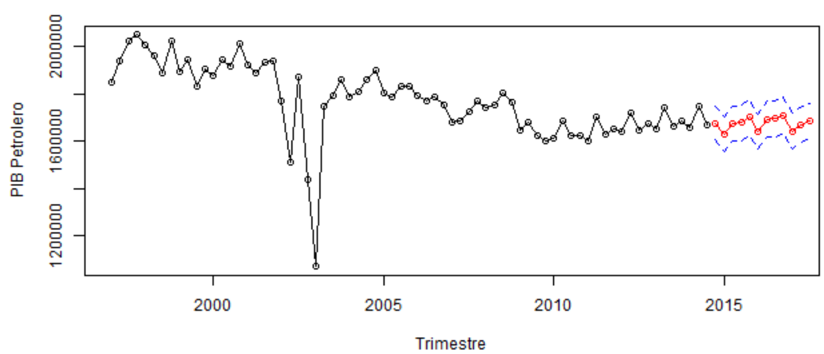

FIGURA 3.33. Predicción para el modelo ajustado de la serie PIB Petrolero

Se observa en la Figura 3.33 que la predicción realizada tiende a mantenerse constante con un promedio de Bs. 1.675.289, además es importante acotar que la predicción obtenida está por debajo del PIB máximo, que como ya se menciono fue alcanzado en el cuarto trimestre del año 1997 por un monto de Bs. 2.050.168. Tomemos en cuenta el PIB Petrolero del años 2014 (segundo trimestre) que alcanzó un monto de Bs. 1.750.408, por ser este el más alto en los últimos cuatro años lo compararemos con los PIB de los años 2014, 2015 y 2016 (cuarto trimestre) arrojados por la predicción. Los montos obtenido por la predicción para los años 2014, 2015 y 2016 (cuarto trimestre) fueron Bs. 1.675.467, 1.700.763 y 1.710.715 respectivamente, esto representa un descenso del 4,2 %, 2,8 % y 2,2 %. respectivamente, al compararlo con el PIB del segundo trimestre del año 2014.

7.3. Pronósticos para la serie PIB NO Petrolero.

La predicción la hemos realizado tomando en cuenta la tendencia y la estacionalidad de los años 2011 (primer trimestre), 2012, 2013 y 2014 (primeros tres trimestres) obtenida a través de la descomposición de la serie efectuada en la sección anterior, véase Figura 3.21. En la construcción de los intervalos de confianza se ha considerado el máximo PIB NO Petrolero por un monto de Bs. 13.274.337 alcanzado en el cuarto trimestre del año 2013, por otra parte a partir del año 2005 a 2014 se consideró el mínimo PIB registrado en ese período que fue de Bs. 7.710.629 correspondiente al primer trimestre del año 2005.

Se observa en la Figura 3.34 la serie PIB NO Petrolero en color negro, las bandas azules es el intervalo de confianza para la predicción y la banda roja es la predicción.

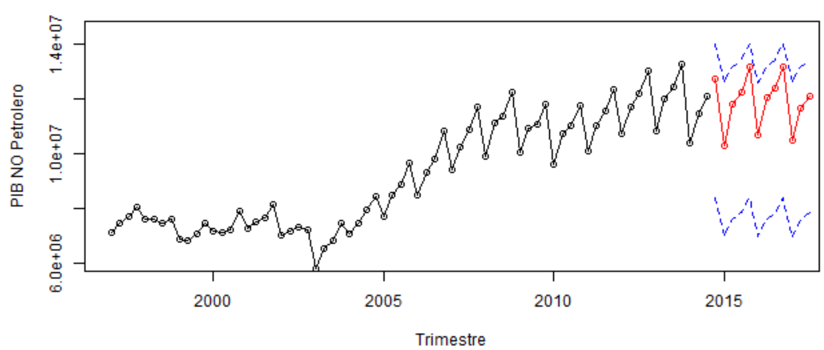

Figura 3.34. Predicción para el modelo ajustado de la serie PIB NO Petrolero

Observando los intervalos de confianza y tomando en cuenta el comportamiento observado de esta serie en los análisis previos, se puede notar que la predicción tiene poca posibilidad de ascender y tiene mucha posibilidad de descender. Por otro lado el máximo PIB NO

Petrolero fue alcanzado en el cuarto trimestre del año 2013 por un monto de Bs. 13.274.337, al compararlo con los montos arrojados por la predicción para los años 2014, 2015 y 2016 (cuarto trimestre) los cuales fueron Bs. 12.707.465, 13.174.935 y 13.151.408 respectivamente, se observa un descenso del 4,2 %, 0,7 % y 0,9 % respectivamente.

7.4. Pronósticos para la serie PIB Impuestos Netos sobre los productos.

La predicción de esta serie la hemos realizado similar a la serie anterior. Para construir los intervalos de confianza se consideró el máximo PIB por un monto de Bs. 2.044.034 que corresponde al cuarto trimestre del año 2012, por otra parte a partir del año 2005 a 2014 se consideró el mínimo PIB registrado en ese período que fue de Bs. 1.009.669 correspondiente al primer trimestre del año 2005.

En la Figura 3.35 se observa la serie PIB Impuestos Netos sobre los productos en color negro, las bandas azules es el intervalo de confianza para la predicción y la banda roja es la predicción.

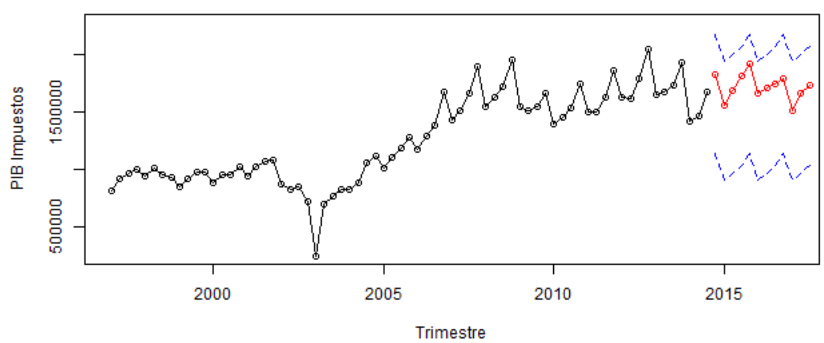

FIGURA 3.35. Predicción para el modelo ajustado de la serie PIB Impuestos Netos sobre los productos

Al igual que la serie anterior la predicción realizada para esta serie tiene poca posibilidad de ascender, pero mucha posibilidad de descender.

Los montos que arroja la predicción de esta serie para los años 2014, 2015 y 2016 (cuarto trimestre) son Bs. 1.829.654, 1.919.318 y 1.793.364 respectivamente, al compararlos con el máximo PIB Impuesto Netos sobre los productos que fue de Bs. 2.044.034, se observa un descenso del 10,4 %, 6,1 % y 12,2 % respectivamente.

Conclusiones

El lector habrá podido notar que el PIB petrolero tiende a descender entre los años 1997 y 2014, tal como se pudo apreciar en la regresión lineal simple y en el análisis exploratorio para esta serie. Lo más alarmante es que la predicción arrojó un descenso de al menos 10 % respecto al año base 1997, lo cual indica que la producción de Petrolero en Venezuela a venido menguando en los últimos 15 años. Hay motivos para hacer una reflexión acerca de la producción de petroleo en Venezuela, entendido que esta empresa es de vital importancia para el desarrollo económico del país por lo menos en el sector público. Sin embargo no todo está perdido sólo hace falta incrementar la producción para recuperar nuestro PIB Petrolero. Es importante resaltar que si bien el PIB Petrolero decae en el tiempo estudiado, el PIB Impuestos Netos sobre los productos aumenta, lo cual es razonable pensar ya que de alguna manera el Estado venezolano debe equilibrar los gastos públicos.

Se podía haber pensado que tanto el PIB NO Petrolero, como el PIB Impuestos Netos sobre los productos iban a crecer para el año 2015, pues así se pudo notar mediante todos los resultados obtenidos. Sin embargo la predicción arrojó un descenso para ambas series, lo cual nos dice que Venezuela tendrá que trabajar duro para recuperar el PIB. El secreto es elevar el nivel de producción en el país y generar mercados internos y externos que permitan nutrir el comercio Venezolano. Este hecho sera útil para incrementar el PIB per cápita venezolano que entre los 2000 y 2013 se obtuvo un promedio de Bs. 1,8 anuales por persona, siendo un PIB per cápita considerablemente malo. Seria interesante conocer el PIB per cápita actual, prevemos que no será mayor de Bs. 2 según la predicción obtenida, pero desafortunadamente el Banco Central de Venezuela no ha publicado el PIB consolidado para los años 2014 y 2015.

Se han empleado distintas metodologías para estimar los intervalos de confianza para los pronósticos de las series estudiadas, debido a que de la manera convencional para las series asociadas al PIB Total, PBI NO Petrolero y PIB Impuestos Netos sobre los productos, coincidieron con las predicciones obtenidas en cada caso. Se recomienda realizar métodos más exhaustivos que permitan implementar intervalos de confianza de manera estándar.

Bibliografía

[1] Brockwell,P.J. y Davis,R.A.,(1996). Introduction to Time Series and Forecasting. Springer.

[2] Brockwell,P.J. y Davis,R.A.,(2006). Time Series: Theory and Methosds. 2^{nd} edition. Springer.

[3] Shumway, R.H. y Stoffer, D.S., (2006). Time Series Analysis and Its Aplications with R examples. 2^{nd} edition. Springer.

[4] Paul Krugman y Robin Wells, (2009). Macroeconomía: Introduccón a la economía. Editorial Reverté,S.A.

[5] Warner, R.M. Spectral Analysis of Time Serie Data., (1998). The Guilford Press.

[6] Banco Central De Venezuela, Departamento Económico, Boletín Económico Informativo. Disponible en: *http:www.bcv.org.ve.*