UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Sobre las Acciones Musicales

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Carlos J. Juárez R.** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Mauricio Angel.

Caracas, Venezuela
Febrero, 2014

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Sobre las Acciones Musicales**", presentado por el **Br. Carlos J. Juárez R.**, titular de la Cédula de Identidad **15.912.577**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Mauricio Angel
Tutor

M.Sc. Jean Liendo
Jurado

Dr. Manuel Maia
Jurado

Dedicatoria

A todos los que están en ésta dimensión: Nina, Carlos Eduardo, Bea, Victor Miguel, Moises, Eli, la música, el arte, las matemáticas, el amor, la paz, la paciencia y la sabiduria...

A los que se encuentra en otra dimensión: Lucia Antonia, Petra, Jacobo Díaz, Victoria, Hugo Antonio, Ernesto, Nestor Guillermo, Gladis Josefina,Claudia Anzola, Bernardo Sanoja, Marcos, Gavy, Xiomara Manzo, Dolores Barreto, Chucho Sanoja y Hugo Rafael.... Inmortales, insustituibles....

Agradecimientos

A Dios, Jah, Rá, Alá, Orula, Amor, Paz, Naturaleza... O simplemente a esa fuerza intangible que mueve al universo.

A mis padres, Nina y Carlos Eduardo, por la infinita paciencia. A mi bella hermana menor/mayor Beatríz Adriana, por saber cuando molestarme y cuando no. A mi tutor, el Dr. Mauricio Angel, quien me presentó la maravillosa idea de concatenar mis dos amores, y que con mucha soda entendió mis ausencias. A Gabriel Abellán, cuyos conocimientos musicales fueron de enorme ayuda, y por supuesto a toda mi familia por el apoyo de siempre.

A mis cuatro jinetes del apocalipsis: Luis Enrique, Gustavo Adolfo, Juan Jacobo y Juan José. Bendiciones para ustedes en cualquier lugar del mundo donde se encuentren, los amo enormemente.

A mis hermanos y hermanas de la carrera y afines: Hairol, German (el bichin), Marcelo, José (elmi), Olga, Merlín (el mago), Angie y Marco, sin ustedes no lo habría logrado... También quisiera mencionar a mis compañeros de "tertulias"(jejeje): Lennys, Edwing, Juan Carlos (Simon), Paola, Jacke, Luis Álvarez (el alquimista), Chepi, Máximo, Yanet, Engelberg (Bam-Bam), Pedro Pulido, Armandito, Oscar ,Cesar, Yei y Daniela.

A mi amada Coral de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela y todos integrantes, especialmente a Eduardo Arias, Charlotte López, Aragua Cedeño, Ana Pinto, Ana Virginia, a las Adrianas (desde la 1 hasta la 4), Giovanina, Aaron (er tio loco), Alexander, Andrés Barrios, Ludwing, Javier, Marisabel Bor, José Gregorio, Nayarit, Alix, Marielly, Wilmer, Reyfell, Armando, Rodolfo, Chucho, Paola Alejos, Yajaira y Ariany.

A mis amigos, consortes, aceres y formadores de la vida ... Adrian, Dayana y Mariana Ortiz, Yeniana, Silvia y Julio.. ustedes saben lo que hicieron por mi.

A mis amigos compañeros de mi amada y recordada banda Son Bugalú: Daniel, Benjamin, Lacho, Alexis (mi hijo), Danilo (mi sobrino), Cristian, Iván, Willy, Jacinto, los hermanos Gonzales, Ricardo y Armando ..., y por supuesto a mi enterno "front"; Rafa, Rebe, Alejandra ,Nano y Carlos Carvajal... Muchísimas gracias, dios bendiga su talento siempre.

A todos aquellos profesores y preparadores que me instruyeron y a los que de alguna u otra manera me inspiraron, me prestaron apoyo técnico, me alentaron a seguir, y/o me dieron un tirón de oreja cuando mas lo necesité: Pedro Alson, Jesus Nieto, Axel Voza, Gabriel Padilla , Goyo Mijares, Ines Nuñez, Jose Luis Sánchez, Jhonnathan Arteaga, Luis Paredes, Manuel Maia, Margarita Olivares, Mairene Colina, Angel Padilla, Maira Valera, Jesus Gash, Edward Torrealba, Hugo Villarroel, Tomás Guardia y Rafael Díaz.

A la gente del Cediam de la Biblioteca Central: Vince De Benedittis, Dunia Olaizola y Giovani Mendoza. Sin conocerme me ayudaron casi incondicionalmente con los aportes y asesoria musical.
Y por supuesto a todos esos locos, cuerdos, eclécticos, extraterrestres y creadores que me inspiraron siempre: Euclides, Arquímedes, Bethoveen, Descartes, Euler, Mozart, Einstein, Galois, Abel, Pascal, Leibnitz, Newton, Hendrix, Silvio , Pablo, Oscar, Juan Formell, Hector, Rubén, Mario, Neruda, Cortazar, John , George, Roger, Freddy, Brian, Bob, Sábato, Juan Luis, Eddie Palmieri, Chucho Valdéz, Beni Moré, Mayito, Alí, Gualberto, Iván, Francisco, Mick, Keith, Santana, Cerati, Vicentico, Calamaro, Willy, Quique Neira, Billo, Cheo y Felipe.

Índice general

Introducción

Con frecuencia se afirma que: “Las Matemáticas estan en todo”, aunque intrínsecamente cierto, a veces los estudios matemáticos no aparecen de forma explícita. Por ejemplo, no resulta obvio que las ecuaciones diferenciales pueden aplicarse para determinar la autenticidad de un cuadro. El conocimiento de estructuras de grupos se puede aplicar en la descripción de un cristal, luego, vale la pena preguntarse entonces si: se puede escuchar una acción sobre un grupo? ... Tal vez puedan describir como escuchamos la música también. En este trabajo veremos como la música puede ser interpretada en términos de la estructura del grupo diedral de orden 24 y su centralización, mediante la acción de dicho grupo sobre un conjunto de acordes musicales. El grupo diedral de orden 24 es el grupo de simetrías de un polígono regular de 12 lados, donde se pueden representar las 12 notas de la escala musical cromática y observar, por ejemplo, como se transporta un acorde hacia otro, que no es mas que una rotación sobre el polígono. En el artículo “Musical Actions of Dihedral Groups” escrito por Alissa Crans, Thomas Fiore y Ramon Satyendra [**1**], se ilustra como actúa el grupo diedral, sobre un conjunto de acordes musicales denominado Tríadas Consonantes, mediante dos acciones. La primera acción musical del grupo diedral de orden 24 son las transposiciones y las inversiones. Una transposición mueve secuencias de acordes hacia arriba y hacia abajo. Cuando cantantes deciden cantar una canción en un registro mas alto, por ejemplo, ellos hacen esto mediante transposición de la melodía. Una inversión por otra parte es una reflexión con respecto a los ejes, como reflejar un rostro en un reloj con respecto a el eje de las 0 a las 6 horas. La transposición y la inversión forman un grupo llamado Grupo TI. La segunda acción del grupo diedral de orden 24 son las operaciones musicales conocidas como: P (la operación paralela), L (Leading tone exchange) y R (la operación relativa). Estas operaciones forman un grupo denotado como el Grupo PLR, el cual también actúa sobre las tríadas consonantes. Lewin introdujo una noción de dualidad para grupos, la cual se conoce como dualidad de Lewin y establece que dos subgrupos, H y K, de un grupo G son duales si el centralizador de K es igual a H y viceversa. Los autores demuestran que el grupo TI y el grupo PLR son duales en el sentido de Lewin. El objetivo de este trabajo es generalizar el modelo introducido por Crans para las tríadas, estudiando los acordes de cuatro notas (tétradas) y cómo se escriben los operadores P, L y R en este caso, así como la dualidad de Lewin.

Capítulo 1

Preliminares Algebraicos

1. Teoría de Grupos

Definición 1.1. Un conjunto no vacío G se denomina *Grupo* si en él está definida una operación binaria, a la que llamaremos producto, denotada por . , tal que:

- Si $a, b \in G$ entonces $a.b \in G$.
- Si $a, b, c \in G$ entonces $a.(b.c) = (a.b).c$.
- Existe un elemento $e \in G$ tal que $a.e = e.a = a$ para todo $a \in G$.
- Para todo $a \in G$ existe un elemento a^{-1} tal que $a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$.

NOTA. Un grupo G se denomina *Abeliano* (o *conmutativo*) si para cualesquiera $a, b \in G$ se tiene que $ab = ba$.

Una característica importante de un grupo G es el número de elementos que contiene, este número se denomina orden de G y lo denotamos por $O(G)$. En éste trabajo nos centraremos en los grupos de orden finito.

1.1. Ejemplos de Grupos. Daremos ejemplos de grupos muy relevantes para nuestro estudio sobre las acciones musicales:

Ejemplo 1.2 (El Grupo de Simetría). Dado un conjunto no vacío S, el grupo de simetrías consiste en todas las biyecciones de S en sí mismo, donde la operación binaria definida es la composición de funciones. Comúnmente es denotado por S_n, si el cardinal de S es n, o por $Sym(S)$

Ejemplo 1.3 (El Grupo Cíclico). Consiste en todos los términos de la forma $a^i, i = 0, 1, 2..., n-1$ con $n \in \mathbb{Z}$, donde se cumple que: $a^0 = a^n = e, a^i.a^j = a^{i+j}$ si $i + j \leq n$ y $a^i.a^j = a^{i+j-n}$ si $i + j > n$.

Ejemplo 1.4 (El Grupo Diedro o diedral). Algebraicamente, el grupo diédrico o diedro de orden n es generado por dos elementos S y T sujetos a las siguientes relaciones:

- $S^n = T^2 = 1$, para $n > 2$.
- $TS = S^{-1}T$.

Ahora bien, el grupo diedro posee una representación geométrica importante: sea S una rotación del plano euclidiano alrededor del origen con un ángulo de giro de $2\pi/n$ radianes y sea T la reflexión con respecto al eje vertical. Luego el grupo G es el grupo de movimiento del plano generado por S y T. En particular nos centraremos en el estudio del grupo diedro de orden 24.

1.2. Subgrupos.

Definición 1.5. Un subconjunto H de un grupo G se dice que es un *subgrupo* de G si, respecto al producto definido en G, H es también un grupo.

Es de suma importancia tener algún criterio que nos permita verificar cuando un subconjunto de un grupo es un subgrupo, para ello los siguentes lemas:

Lema 1.6. *Un subconjunto no vacío H del grupo G es un subgrupo de G si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) $a, b \in H$ *implica que* $ab \in H$.
(2) $a \in H$ *implica que* $a^{-1} \in H$.

Demostración. Supongamos que H es un subconjunto de G para el cual se verifican 1) y 2). Para comprobar que H es un subgrupo solo hace falta probar que $e \in H$ y que se verifica la ley asociativa; esto último es trivial puesto que H es subconjunto de G. Por 2); $a^{-1} \in H$, luego por 1) podemos escribir $e = aa^{-1}$ lo cual completa la demostración.■

En el caso especial de un grupo finito, la situación es aún mas sencilla y más apropiada para el enfoque de este documento, para ello es muy útil el siguiente lema:

Lema 1.7. *Si H es un subconjunto no vacío de un grupo G, y H es cerrado respecto a la multiplicación, entonces H es un subgrupo de G.*

Demostración. Gracias al lema anterior, sólo debemos probar la existencia del elemento inverso. Supongamos que $a \in H$; entonces $a^m \in H$ ya que por hipótesis H es cerrado. Luego la secuencia $a, a^2, \ldots, a^m, \ldots$ debe estar contenida en H, que es un subconjunto finito de G. Luego debe haber repeticiones en esta secuencia, es decir, para algunos enteros r, s con $r > s > 0$, $a^r = a^s$. Por la ley de cancelación en G, $a^{r-s-1} \in H$ y $a^{-1} = a^{r-s-1}$ ya que $aa^{r-s-1} = a^{r-s} = e$. Por lo tanto $a^{-1} \in H$. ■

Definición 1.8. Un subgrupo N de G se dice que es un *subgrupo Normal* de G si para todo $g \in G$ y todo $n \in N$, $gNg^{-1} \in N$.

Es claro que si por gng^{-1} representamos el conjunto de todos los gng^{-1}, con $n \in N$, entonces N es un subgrupo normal de G si y sólo si $gNg^{-1} \subset N$ para todo $g \in G$.

Lema 1.9. *N es un subgrupo normal de G si y sólo si $gNg^{-1} = N$ para todo $g \in G$.*

Demostración. Si $gNg^{-1} = N$ para todo $g \in G$, es claro que $gNg^{-1} \subset N$, luego N es normal en G. Supongamos que N es normal en G. Entonces si $g \in G$, $gNg^{-1} \subset N$ y $g^{-1}Ng = g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \subset N$. Pero como $g^{-1}Ng \subset N$, $N = g(g^{-1}Ng)g^{-1} \subset gNg^{-1}$, de donde $N = gNg^{-1}$.■

Lema 1.10. *El subgrupo N de G es un subgrupo normal de G si y sólo si toda clase lateral izquierda de N en G es una clase lateral derecha de N en G.*

Demostración. Si N es un subgrupo normal de G, entonces para todo $g \in G$, $gNg^{-1} = N$, de donde $(gNg^{-1})g = Ng$. Luego $gN = Ng$. Ahora supongamos que $gN = Ng$. Es decir, para $g \in G$ la clase lateral izquierda gN debe ser también una clase lateral derecha. Veamos lo siguiente: como $g = ge \in gN$, cualquiera que sea la clase lateral derecha resultante, gN debe contener al elemento g; pero g está en la clase lateral derecha Ng y dos clases laterales distintas no tienen ningún elemento en común, por lo tanto esta clase lateral derecha es única. Luego $gNg^{-1} = Ngg^{-1} = N$ lo cual implica que N es un subgrupo normal de G. Denotemos por G/N la colección de las clases laterales derechas de N en G.■

TEOREMA 1.11. *Si G es un grupo y N es un subgrupo normal de G entonces G/N es también un grupo. Se le llama grupo cociente de G por N.*

Demostración. Usemos el producto usual de subconjuntos de G para obtener un producto de G/N. Bajo estas condiciones verifiquemos que G/N es un grupo. Sean $x = Na$, $y = Nb$, $z = Nc \in G/N$ para algunos $a, b, c \in G$. Luego: 1)

$$xy = NaNb = Nab \in G/N.$$

2) $(xy)z = (NaNb)Nc = N(ab)Nc = Na(bc)$ (por la asociatividad en G)

$$= Na(Nbc = Na(NbNc) = x(yz).$$

3) Sea $N = Ne \in G/N$. Entonces

$$xN = NaNe = Nae = Na = x.$$

Análogamente $Nx = x$. 4) Es claro que $x^{-1} = Na^{-1} \in G/N$. Luego

$$xx^{-1} = NaNa^{-1} = Naa^{-1} = e.$$

Análogamente $x^{-1}x = e$. De 1) , 2) , 3) , 4) se deduce que G/N es un grupo.

LEMA 1.12. *Si G es un grupo finito y N es un subgrupo normal de G, entonces*

$$O(G/N) = O(G)/O(N).$$

Demostración. Por definición de G/N, este tiene como elementos las clases laterales derechas de N en G, y como el número de estas es precisamente $i_G(N) = O(G)/O(N)$ podemos afirmar el enunciado lema.■

DEFINICIÓN 1.13. Una aplicación ϕ de un grupo G en un grupo G^* se dice que es un *homomorfismo* si para $a, b \in G$ cualesquiera siempre, se tiene que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

NOTA. En el primer miembro de esta relación, el producto ab se calcula en G, mientras que en el segundo miembro se utiliza el producto en G^*.

LEMA 1.14. *Supongamos que G es un grupo y que N es un subgrupo normal de G; definamos la aplicación ϕ de G en G/N por $\phi(x) = Nx$ para todo $x \in G$. Entonces ϕ es un homomorfismo de G en G/N.*

Demostración. Es claro que todo elemento $x \in G/N$ es de la forma $x = Ny$, $y \in G$, luego $x = \phi(y)$, por lo tanto ϕ está bien definida. Sean $a, b \in G$. Luego:

$$\phi(ab) = Nab = NaNb = \phi(a)\phi(b).$$

■

DEFINICIÓN 1.15. Si ϕ es un homomorfismo de G en G^*, el *núcleo* de ϕ, $Ker(\phi)$, se define por:

$$Ker(\phi) = \{x \in G/\phi(x) = e^*\}$$

donde e^* es el elemento identidad en G^*.

LEMA 1.16. *Si ϕ es un homomorfismo de G en G^* núcleo K, entonces K es un subgrupo normal de G.*

Demostración. Si $x, y \in K$, entonces $\phi(x) = e^*, \phi(y) = e^*$. Luego

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = e^*e^* = e^*,$$

de donde $xy \in K$. Ademas para $x \in K$, por el lema anterior,

$$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1} = (e^*)^{-1} = e^*,$$

por lo tanto $x^{-1} \in K$. Los argumentos expuestos anteriormente demuestran que K es un subgrupo de G. Probemos la normalidad de K. Para $k \in K$, $\phi(gkg^{-1}) = e^*$ con $\phi(k) = e^*$. Luego:

$$\phi(gkg^{-1}) = \phi(g)\phi(k)\phi(g^{-1}) = \phi(g)e^*\phi(g)^{-1} = \phi(g)\phi(g)^{-1} = e^*.$$

■

DEFINICIÓN 1.17. Un homomorfismo ϕ de G en G^* se dice que es un *isomorfismo* si ϕ es biyectivo.

DEFINICIÓN 1.18. Dos grupos G, G^* son *isomorfos* si hay un isomorfismo de G sobre G^*. En este caso escribiremos $G \cong G^*$.

Definición 1.19. Sea H un subgrupo de un grupo G. Se define el *centralizador* de H como el conjunto de elementos de G que conmutan con todos los elementos de H, esto es:

$$C_G(H) = \{g \in G/gh = hg, para\ todo, h \in H\}.$$

La definición anterior es de mucha importancia porque nos permite dar el concepto de *Dualidad* en el sentido de Lewin (o *Dualidad Lewiniana*), el cual es crucial para el estudio de las acciones musicales en el presente trabajo.

Definición 1.20. Sean H y K dos subgrupos de un grupo G. Decimos que H y K son *duales Lewin* si $C_G(H) = K$ y si $C_G(K) = H$.

2. Acciones de Grupos

Sea $\Omega = \{\alpha, \beta, ..., \}$ un conjunto no vacío y finito. Recordemos que el conjunto S_Ω de todas las biyecciones de Ω se denomina grupo de simetría sobre Ω.

Definición 1.21. Una *acción* de un grupo G sobre un conjunto Ω es un homomorfismo $\pi : G \longrightarrow S_\Omega$. Lo denotaremos por π_g ó $\pi(g)$.

Definición 1.22. Diremos que el grupo G *actúa* en un conjunto Ω si existe una función:

$$\pi : G \times \Omega \longrightarrow \Omega$$

$$(g, x) \longrightarrow \pi(g, x),$$

donde $\pi(g, x)$ se denotará por gx, tal que se cumpla:

$$(e, x) \to \pi(e, x) = ex = x$$

y que

$$(gg', x) \to \pi(gg', x) = (gg')x = g(g'x).$$

Si se tiene que G actúa en Ω se dice que Ω es un $G-$ *conjunto*. En la notación $(g, x) \to \pi(g, x) = gx$, el hecho de escribir gx es un abuso de notación y está definido de manera particular en cada caso.

A continuación daremos dos ejemplos de acciones de grupos que se utilizan con frecuencia.

2.1. Ejemplos de Acciones.

Ejemplo 1.23. Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Una acción de H sobre G (mirando a G como conjunto) es dada por

$$\pi(h, x) = hx$$

donde hx es el producto en G.

Ejemplo 1.24 (La Conjugación). Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Otra acción de H sobre G es dada por

$$\pi(h, x) = hxh^{-1}.$$

El elemento hxh^{-1} se define como el *conjugado* de x.

Definición 1.25. Un subconjunto $Y \subset \Omega$ es denominado G-*invariante* si $\pi_g(y) \in Y$ para todo $y \in Y$, $g \in G$.

Siempre se puede tener una partición de Ω de subconjuntos minimales invariantes llamados órbitas.

Definición 1.26. Sea $\pi : G \longrightarrow S_\Omega$ una acción de grupos. La *órbita* de $x \in \Omega$ bajo G es el conjunto $\Theta_x = \{gx = y/g \in G\}$, con $x, y \in \Omega$.

Nótese que las órbitas son G-invariantes. Se puede probar que órbitas distintas son disjuntas y que la unión de todas ellas es el conjunto Ω, es decir, ellas forman una partición de Ω.

Definición 1.27. Sea $\pi : G \longrightarrow S_\Omega$ una acción de grupos. El *estabilizador* de $x \in \Omega$ bajo G es el conjunto $G_x = \{g \in G/gx = x\}$.

Definición 1.28. Una acción de grupo $\pi : G \longrightarrow S_\Omega$ es *transitiva* si sólo existe una sola órbita de G sobre Ω.

Ejemplo 1.29. Si G es un grupo y H un subgrupo de G, existe una acción:

$$\pi : G \longrightarrow S_{G/H},$$

dada por

$$\pi_g(xH) = gxH.$$

Ésta acción es transitiva.

Definición 1.30. Una acción del grupo G sobre el conjunto Ω es *libre* si para $g, h \in G$, y $x \in \Omega$ se cumple que $g.x \neq h.x$. Esta condición es equivalente a que $g.x = x$ si, y sólo si, g es el elemento identidad de G.

Definición 1.31. Una acción del grupo G sobre el conjunto Ω es *regular* si es transitiva y libre.

Sea Ω un G-conjunto con $\pi : G \times \Omega \to \Omega$. Diremos que dos elementos $x, y \in \Omega$ están *relacionados* (y escribiremos $x \sim y$) si, y sólo si, existe $g \in G$ tal que $\pi(g, x) = gx = y$ para algun $g \in G$.

Proposición 1.32. *Sea Ω un G-conjunto. Se tiene que:*

- *i) $\sim$ es una relación de equivalencia, y sus clases son las órbitas de la acción.*
- *ii) Para cada $x \in \Omega$, $G_x = \{g \in G / gx = x\}$ (es decir, el estabilizador de x) es un subgrupo de G.*

Demostración. i) Verifiquemos que $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva. Para cada $x \in X$, $ex = x$, entonces $x \sim x$. Si $x \sim y$ entonces existe $g \in G$ tal que $gx = y$ para algún $g \in G$. Luego, $x = ex = (g^{-1}g)x = g^{-1}(gx) = g^{-1}y$, por lo tanto $y \sim x$. Si $x \sim y$, y $y \sim z$, entonces existen $g, g' \in G$ tales que $gx = y$, y $g'y = z$ para $g, g' \in G$. Entonces $(g'g)x = g'(gx) = g'y = z$, luego $x \sim z$.

ii) Ahora veamos que G_x es un subgrupo de G. Sean $g, g' \in G_x$. Luego $gx = x$ y $g'x = x$. Así, $(gg')x = g(g'x) = gx = x$. Por lo tanto, $gg' \in G_x$. Nótese que $ex = x$, luego $e \in G_x$. Finalmente, si $g \in G_x$ entonces $gx = x$ y $x = ex = (g^{-1}g)x = g^{-1}(gx) = g^{-1}x$. Por lo tanto, $g^{-1} \in G_x$. Luego, G_x es un subgrupo de G.■

El resultado fundamental sobre acciones de grupos es el siguiente:

Teorema 1.33 (El Teorema de la Órbita). *Sea Ω un G-conjunto con $\pi : G \times X \longrightarrow X$. Si $x \in \Omega$, entonces el número de elementos de Θ_x es igual al índice de G_x en G, es decir, $|\Theta_x| = |G : G_x|$.*

Demostración. Definamos $\varphi : \Theta_x \longrightarrow G/G_x$ dada por:

$$\varphi(gx) = gG_x.$$

Notemos que $gx = hx$ si y sólo si $h^{-1}gx = x$, si y sólo si $h^{-1}g \in G_x$, si y sólo si $gG_x = hG_x$, por lo tanto φ está bien definida, es inyectiva y sobreyectiva. Luego, existe una biyección entre el conjunto G/G_x y el conjunto Θ_x.■

Capítulo 2

Preliminares Musicales

En este capítulo se expondran las nociones necesarias sobre la teoría musical indispensables para el estudio y la comprensión de las acciones de grupos sobre distintas clases de acordes. Primero definiremos de forma sencilla el sonido y sus propiedades, para luego dar los conceptos de armonía que se requieren como soporte para el estudio de las acciones musicales.

1. El Sonido y sus propiedades

DEFINICIÓN 2.1 (Sonido). Consiste en vibraciones en el aire, el cual es producido por colisiones de las partículas en un medio completamente elástico, donde se propaga en forma de ondas sonoras.

La velocidad media de moléculas de aire en condiciones normales está entre 450 y 500 metros por segundos; el desplazamiento libre de dichas moleculas es de 6×10^{-8} metros, con lo cual se puede calcular la frecuencia de colisiones mediante la siguente fórmula [**2**]:

$$\textit{Frecuencia de Colision} = \frac{\textit{Velocidad Media}}{\textit{Desplazamiento Libre}} \sim 10^{10}$$

colisiones por segundo. Las vibraciones habitualmente percibidas por el oído del hombre varían en número desde 16 hasta 15,000 por segundo aproximadamente.

Las ondas sonoras poseen cuatro propiedades físcas que insiden directamente en como nuestro oído percibe el sonido, dichas propiedades son las siguentes:

- <u>Amplitud</u>: es el tamaño de la vibración, la cual es percibida como *Intensidad.*
- <u>Frecuencia</u>: se refiere a la frecuencia de las vibraciones, cuya percepción auditvia se traduce en *Armónicos.*
- <u>Espectro</u>: forma de la frecuencia del sonido, lo cual nos permite distinguir su tipo, es decir, su *Tímbre.*
- <u>Distancia</u>: que mide el tiempo que dura un sonido, es decir, la *Duración.*

Éstas nociones pueden sufrir modificaciones por múltiples razones, una de ellas, por ejemplo, es que muchas vibraciones no consisten en una sola frecuencia. La más importante es que dichas nociones están definidas desde el punto de vista de la percepción auditiva del sonido, y no en términos del sonido en sí mismo. La mayor parte de las vibraciones musicales son de tal naturaleza que el oído las descompone espontáneamente en cierto número de sistemas de vibraciones. Sin embargo, la dificultad que se tiene al oír armónicos como sonido no proviene de su poca intensidad, sino de que la educación del oído esté encaminada, no hacia la descomposición, sino hacia la percepción simultánea de un sonido y sus armónicos.

2. Conceptos Básicos de Armonía

Definición 2.2. El signo o figura gráfica que sirve para representar los sonidos dentro de la escritura musical es lo que conocemos como *Nota*.

Luego de la nota musical es necesario definir la medida o distancia que existe desde una nota hasta otra. Ésta distancia es lo que se conoce como *intervalo*. Los intervalos se denominan según el lugar que ocupan al subir del sonido grave al sonido agudo. Por convención se consideran ascendentes a menos que se indique lo contrario. Se llaman *melódicos* cuando los sonidos son escuchados sucesivamente y *armónicos* cuando resuenan simultáneamente. La sucesión de todos los sonidos mensurables dispuestos por orden riguroso de altura es lo que se conoce como *Escala*.

NOTA. Instrumentalmente, la facultad auditiva del hombre distingue ordinariamente los sonidos comprendidos entre el *Do* grave del órgano y el *Re* agudo producido por el flautín.

Definición 2.3. Se denomina como *Tono* a la nota unidad de división sobre el cual se regula la afinación de los instrumentos o de las voces. Sobre el tono se mueven las frases musicales.

Los doce tonos de nuestro sistema moderno llevan los nombres de las primeras 7 letras del abecedario [**10**]. Cada letra representa una frecuencia distinta y las letras se repiten cuando se duplica la frecuencia del tono. El rango de tonos que comienza con una frecuencia hasta su doble, se conoce como una *octava*. Convencionalmente se divide a la octava en 12 intervalos iguales, de modo que obtenemos un conjunto de notas tales que la frecuencia de cada una resulta de multiplicar por $x = \sqrt[12]{2}$, El número x es, por definición, el cociente de las frecuencias entre un tono y otro que está un semitono por arriba del anterior. Esto se conoce como la *afinación equitemperada.*

El cerebro humano percibe dos tonos como esencialmente idénticos cuando sus frecuencias guardan una razón igual a 2^r con $r \in \mathbb{Z}$. Es decir, identifica dos frecuencias $u, w \in (x) < (R*, .)$ cuando $u^{-1}w \in (x^{12})$, donde x es el número real dado anteriormente. Efectivamente,

$$x^{12} = (\sqrt[12]{2})^{12} = 2,$$

y $u^{-1}w = \dfrac{w}{u} \in (2) = (x^{12})$ significa que $\dfrac{w}{u} = 2^r$ para algún $r \in \mathbb{Z}$. Puesto que:

$$h : \mathbb{Z} \longrightarrow (x),$$

$$n \longrightarrow x^n,$$

define un isomorfismo entre $\mathbb{Z}$ y (x), resulta que para la percepción humana los tonos esencialmente distintos son aquellos del cociente:

$$\frac{(x)}{(x^{12})} = \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{12}.$$

Así se justifica el abuso de la nomenclatura al identificar tanto a un elemento de $\mathbb{Z}$ como a uno de $\mathbb{Z}_{12}$ con un tono. [**10**]

Un tono (siendo la unidad musical) pudiera dividirse tantas veces como el oído permita diferenciar sus partes, esto no ocurre en la actualidad, salvo cuando es dividido solamente en dos partes. Cada una de ellas recibe el nombre de *Semitono.* La forma de escribir los semitonos es mediante signos que indiquen cuando una nota debe ser elevada o disminuida en esa distancia, en el primer caso la alteracíon se define como el *Sostenido* ($\sharp$) mientras que en el segundo caso se define como el *Bemól* ($\flat$). Estos signos se les conocen con el nombre de *Alteraciones.*

Ahora podemos definir los dos tipos de escalas principales:

Definición 2.4 (Escala Natural o Diatónica). Se compone de siete notas por octava (intervalo de ocho grados). Estos sonidos, colocados dentro de una octava por orden riguroso, forman la sucesión diatónica *Do*, *Re*, Mi, Fa, *Sol*, *La*, *Si*, que comprende cinco tonos y dos semitonos sin alteración alguna.

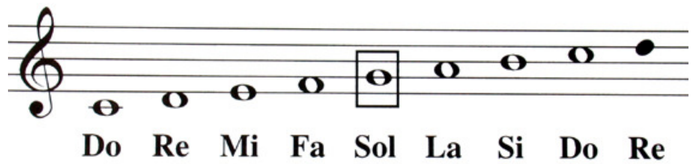

Figura 2.1. Escala Diatónica

Definición 2.5 (Escala Cromática). Es la octava es divida en doce semitonos. Explícitamente está conformada por las siguientes notas:

$$Do, Do\sharp/Re\flat, Re, Re\sharp/Mi\flat, Mi, Fa, Fa\sharp/Sol\flat, Sol, Sol\sharp/La\flat, La, La\sharp/Si\flat, Si$$

.

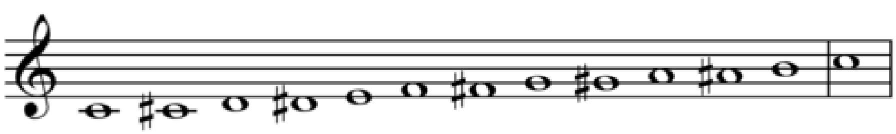

Figura 2.2. Escala Cromática

NOTA. Sobre éste tipo de escala definiremos las acciones musicales, pero es necesario dar la definición de lo que es un acorde musical, la cual (dentro de cierta doctrina) nos ayudará a clasificar distintos tipos de acordes necesarios para la realización del presente trabajo.

Definición 2.6. se conoce como *Acorde* a la reunión coordinada de varias notas escuchadas simultáneamente.

Examinados aisladamente se clasifican de acuerdo con el número de sonidos diferentes que lo componen. Para que un acorde esté bien definido como tal se requiere de un mínimo de tres notas distintas.

Antíguamente no se ejecutaban los acordes, sino solamente intervalos de dos sonidos, redoblados o no. En el Renacimiento fue cuando aparecieron los acordes, primero de tres y despues de cuatro sonidos. Los acordes existen en estado fundamental y en estado de inversión. Todo acorde en estado fundamental se compone de una serie ininterrumpida de terceras (intervalos de tres grados) superpuestas, cuyo sonido mas grave es llamado *fundamental*. El acorde en estado de inversión es aquel en el cual se ha invertido el orden de los intervalos y el sonido fundamental transportado a una situación distinta de la mas grave.

También se puede definir el concepto de escala con respecto a un acorde (o tono) dado mediante la teoría de grupos. Una escala E es un subconjunto de $\mathbb{Z}$ (al cual vemos como tonos) tal que $e^{12}(E) = E + 12 = E$, es decir, $x + 12 \in E$ para todo $x \in E$. Las escalas se comportan bien bajo la proyección canónica $p : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12} = \dfrac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$, en el sentido de que

$$p^{-1}(p(E)) = E.$$

Al conjunto $p(E) \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ se le llama la *escala de un acorde*. Generalmente se abusa de la nomenclatura al referirse a una escala por su acorde.

3. Tipos de Acordes

En general, los tipos de acordes aparecen cuando se dan, en un orden específico, los sonidos en la escala cromática. Existen diversos tipos de acordes; ésta diversidad depende del número de sonidos que los compogan. En el presente trabajo haremos el estudio de las acciones musicales sobre acordes *Simples* de tres y cuatro notas. Dentro del conjunto de acordes conformados por tres sonidos, a los cuales llamaremos *Tríadas*, estudiaremos dos tipos principales: tríada *Mayor* y tríada *Menor*. El modo *Mayor* consiste en tocar simultáneamente una nota fundamental (o nota *raíz*), una segunda nota 4 semitonos por encima de la primera y una tercera nota 7 semitonos por encima de la nota fundamental. El modo *Menor* sólo difiere del *Mayor* en la ejecución de la segunda nota; ésta estará por encima de la nota fundamental 3 semitonos. Dentro del conjunto de acordes conformados por cuatro sonidos, a los cuales llamaremos *Tétradas*, estudiaremos dos tipos principales: tríada mayor incorporando un sonido de *Séptima Mayor*, y la tríada menor incorporando un sonido de *Séptima Menor*.

Es necesario definir un punto de partida para crear un acorde, para eso definiremos a continuación el concepto de grado, el cual es muy útil para diferenciar, en términos musicales, cuando un sonido se encuentra en una u otra escala dada.

Definición 2.7. Se denomina como *Grado* a la "situación" de las notas (o acordes) dentro de alguna escala dada.

Los siete sonidos de la escala diatónica, en el intervalo de una octava, son designados por las primeras siete cifras romanas; desde el punto de vista armónico son: I, tónica; II, segunda; III, tercera; IV, cuarta; V, quinta; VI, sexta; VII séptima. Considerados desde el punto de vista tonal (con la misma numeración) son: tónica, super tónica, mediante, subdominante, dominante, superdominante y subtónica.

NOTA. Para mayor comprensión del lector en el presente trabajo, supondremos en todo momento que, dado cualquier acorde que a su vez defina una escala, éste representará la tónica, es decir, estará en el grado uno, lo cual justifica el abuso de notación al definir anteriormente el concepto de escala con respecto a un acorde.

Definición 2.8. Los acordes que se forman sobre los grados 1, 5 y 4 se llaman *Acordes Tonales*

Los acordes tonales son llamados así porque son los que determinan y afianzan la tonalidad de una obra musical, siendo prácticamente imprescindibles. El acorde más importante es el de tónica, puesto que le da nombre a la tonalidad. Le sigue en importancia el acorde de dominante, que incluso a veces llega a predominar más que el de tónica. Estos dos acordes forman la parte más consistente del grupo, la más rígida, pues ellos dos solos se bastan para establecer una estructura armónica y determinar la tonalidad. El acorde de subdominante añade suavidad al conjunto de los acordes tonales e introduce variedad y sutileza en la obra musical.

EJEMPLO 2.9. *En la tonalidad Do mayor se tiene*:
Tónica: Do (mayor)
Dominante: Sol
Subdominante: Fa (normalmente mayor)

EJEMPLO 2.10. *En la tonalidad Do menor se tiene*:

Tónica: Do menor
Dominante: Sol
Subdominante: Fa (normalmente menor)

El acorde de dominante siempre es mayor en ambas tonalidades (mayor y menor), y normalmente lleva siempre añadida la séptima (nota *Fa* en este caso). El acorde de subdominante puede ser mayor o menor, indistintamente de que la tonalidad sea mayor o menor. Es decir: una tonalidad mayor puede llevar el acorde de dominante menor, y viceversa; una tonalidad menor puede llevar el acorde de dominante mayor.

También es necesario introducir el concepto de *Enarmonía*, el cual es indispensable dentro de la música para la ortografía, composición y entendimiento armónico de toda pieza.

DEFINICIÓN 2.11. Modernamente, significa cambio de nombre o de gráfico que experimenta un sonido percibido por el oído sin modificación.

Por ejemplo el *Sol*$\sharp$ y el *La*$\flat$, representan, para efectos de la percepción auditiva, el mismo sonido, cuando esto ocurre se dice que las notas son *enarmónicamente equivalentes*. Así mismo, el concepto cambia de significado cuando están representados por combinaciones de signos gráficos, e igualmente, en la ortografía musical, una misma sonoridad escrita (por ejemplo) en *Do*$\sharp$ o en *Re*$\flat$ corresponde a la misma tonalidad, pero presentando un doble recurso en el discurso armónico. Un ejemplo se da en la obra *"La Leyenda de la Ciudad Invisible de Kitege"* de Rimsky-Korsakov (1905), en la que el coro a tres voces está escrito en tono $Si - Mayor$, mientras que las partes de los instrumentos de cuerda, la flauta, el oboe y el trombón están escritas en tono $Do\flat$; luego, en el transcurso de la pieza, el $Sol\sharp$ y el $Fa\sharp$ de las voces del coro suenan al unísono con el $La\flat$ y el $Sol\flat$ (respectivamente) de la orquesta.

NOTA HISTÓRICA. Anteriormente se definía como la división del cuarto de tono, que fue utilizada en la antigua música griega para constituir un género en el cual los semitonos se dividían en cuartos de tono, uso conservado durante largo tiempo en el canto gregoriano, el cual desapareció al desarrollarse el instrumento *Órganum* en el siglo XI. Salvo casos excepcionales, el canto a solo o la ejecución de algunos violinistas dotados de una gran sensibilidad de su oído, la reproducción y la percepción de un cuarto de tono escapa de las capacidades de la mayoría de los músicos.

Ahora daremos los conceptos musicales de las funciones y los operadores que nos servirán para definir las acciones en el siguiente capítulo, las cuales son ejecutadas por los músicos para realizar composiciones o arreglos sobre alguna pieza musical.

Definición 2.12. Se conoce como la *Transposición* a la operación mediante la cual una escala, una melodía o una pieza musical son elevados o bajados en uno o varios tonos en la escala musical.

Un ejemplo es lo que ocurre con la famosa Fuga de Bach, la cual fija una melodía y ésta es repetida durante la obra de manera transpuesta en la escala.

Definición 2.13. Para los efectos del presente trabajo el concepto que daremos de *Inversión* no será el mismo que se maneja en la teoría musical. Mientras la inversión dentro de la música conserva el modo del acorde (mayor o menor), para el estudio de las acciones musicales, al invertir un acorde se cambiará de modo mayor a modo menor y viceversa a su correspondiente tercera (mayor o menor).

Por último definiremos los operadores P,L y R de manera musical.

- P (La operación Paralela): pasa de una tríada mayor a su correspondiente paralela menor y viceversa.

- L (Leading Tone Exchange): transporta la nota raíz de un acorde medio tono hacia abajo, es decir, a su correspondiente séptima mayor (se dice que cambia hacia la "sensible").
- R (La operación Relativa): pasa de una tríada mayor a su relativa menor y viceversa.

Estas operaciones forman un grupo denotado como el Grupo PLR, el cual también actúa sobre las tríadas consonantes. En el siguiente capítulo veremos como se definien matemáticamente a través de las funciones T e I.

Capítulo 3

Acciones Musicales.

En éste capítulo estudiaremos las acciones del grupo diedral sobre conjuntos de acordes particulares, siguendo la referencia [**1**] y estudiando su modelo en el caso de las tríadas consonantes, y luego extender la acción al conjunto de las tétradras consonantes.

1. Clases de Acordes y $\mathbb{Z}_n$

Consideremos la escala cromática:

$$Do, Do\sharp/Re\flat, Re, Re\sharp/Mi\flat, Mi, Fa, Fa\sharp/Sol\flat, Sol, Sol\sharp/La\flat, La, La\sharp/Si\flat, Si.$$

Siguendo las ideas de Crans, representamos las clases de notas mediante el conjunto de 12 elementos usando la correspondencia:

$$Do \longrightarrow 0$$

$$Do\sharp \longrightarrow 1$$

$$\vdots$$

$$Si \longrightarrow 11.$$

Dichos elementos pueden ser representados gráficamente en lo que Crans define como el *Reloj Musical*. Consideremos la cara de un reloj con los números desde el 0 hasta el 11 donde el 0 está en la posición de las 12 en punto. Así determinamos, mediante la adición módulo 12, el intervalo de una nota a otra, por ejemplo, desde Do hasta Mi hay cuatro semitonos.

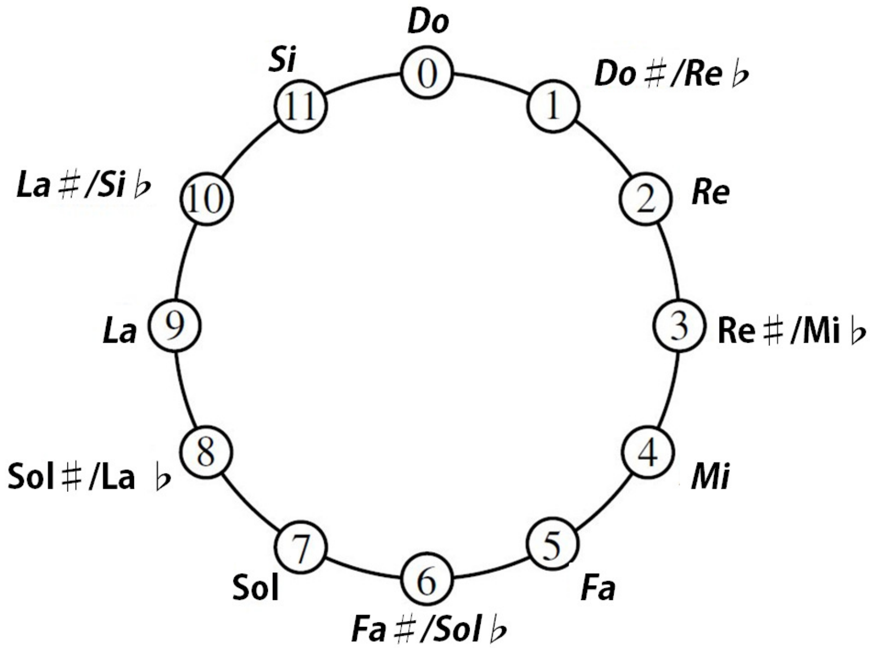

FIGURA 3.1. Reloj Musical

El conjunto mostrado anteriormente, y a su vez representado en el reloj musical, es el espacio de las notas musicales dentro de una misma octava, por consiguiente es necesario definir un conjunto más extenso, ya que en el presente trabajo nuestros objetos de estudio serán principalmente acordes musicales.

DEFINICIÓN 3.1. Sea $X = \{Do, Do\sharp, Re........Si\}$, el conjunto de las notas musicales (es decir, la escala cromática). Definimos el *Espacio de Acordes* (de n notas), denotado por Ω^n, como el subconjunto de $\wp(X)$ tal que si $x \in \Omega^n$ x es un acorde.

NOTA. Musicalmente, $1 \leq n \leq 12$, pues no existen acordes de 1 ó 2 notas, y un acorde de mas de doce notas no sería un acorde simple.

En particular, nos concentraremos en el grupo de acordes de las tríadas, es decir, conjuntos de 3 notas se tocan simultáneamente. Ahora bien, existen $\binom{12}{3} = 220$ subconjuntos de 3 notas del conjunto de 12 notas. Sin embargo, nos limitaremos a estudiar a los conjuntos de 3 elementos que se conocen como acordes mayores y menores, es decir, los acordes que poseen la propiedad musical de la consonancia.

Como vimos en el capítulo anterior, las tres notas en una tríada son conocidas como la fundamental o raíz, la tercera y la quinta (respectivamente). A cada tríada se le nombra según la nota raíz. En nuestro trabajo, las tríadas son conjuntos y el orden no importa salvo para identificar a la raíz. Los acordes mayores y menores se definen matemáticamente como:

Definición 3.2. Diremos que el acorde $\{x, y, z\} \in \wp(X)$ es un acorde *Mayor* si, dada una nota raíz $x \in \mathbb{Z}_{12}$ se tiene que:

$$\{x, y = x + 4, z = x + 7\}, \textit{Mod 12.}$$

Definición 3.3. Diremos que el acorde $\{x, y, z\} \in \wp(X)$ es un acorde *menor* si, dada una nota raíz $x \in \mathbb{Z}_{12}$ se tiene que:

$$\{x, y = x + 3, z = x + 7\}, \textit{Mod 12.}$$

Ahora podemos definir matemáticamente el conjunto de tríadas consonantes, esto es:

Definición 3.4. Denotaremos como Ω_c^3 como el conjunto dado por:

$$\Omega_c^3 = \{\{x, x + 4, x + 7\}, \{x', x' + 3, x' + 7\} / x, x' \in \mathbb{Z}_{12}\}, \textit{Mod 12.}$$

2. Transposición e Inversión

Las funciones tienen una representación particular en el reloj musical definido anteriormente. La transposición T_1 corresponde a una rotación en el reloj por $1/12$ de vuelta, mientras que la inversión I_0 corresponde a una reflexión con respecto al eje $0-6$. Estas últimas generan el grupo diedral sobre el polígono de 12 lados.

Definición 3.5. Sea n un entero mod 12. Definimos la *transposición* como una función $T_n : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$ como:

$$T_n(x) = (x + n), \textit{Mod 12.}$$

Definición 3.6. Sea n un entero mod 12. Definimos la *inversión* como una función $I_n : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$ como:

$$I_n(x) = (-x + n), \textit{Mod 12}.$$

Estas funciones están definidas para ser aplicadas a un elemento de $\mathbb{Z}_{12}$, es decir, a una nota puntual, sin embargo se puede inducir una aplicación a cualquier cantidad de elementos, por ejemplo, a un intervalo ó a un acorde. Mas adelante se definiran los operadores P, L, y R que actúan sobre un conjunto de acordes particular y son inducidos por las funciones $T_n(x)$ e $I_n(x)$.

Proposición 3.7. *Sean las siguientes relaciones dadas por las distintas transposiciones e inversiones:*

- $T_m T_n = T_{m+n}$, *Mod 12*
- $T_m I_n = I_{m+n}$, *Mod 12*
- $I_m T_n = I_{m-n}$, *Mod 12*
- $I_m I_n = T_{m-n}$, *Mod 12.*

Éstas relaciones forman un grupo muy importante, al cual denotaremos como grupo TI.

Demostración. Haremos la prueba de que TI es cerrado solamente para las dos primeras relaciones, las otras dos son análogas. Para la primera tenemos que:

$$\begin{aligned} T_m \circ T_n &= T_m(T_n(x)) \\ &= T_m(x+n) \\ &= x+n+m \\ &= x+(m+n) \\ &= T_{m+n}, \textit{Mod 12} \end{aligned}$$

y para la segunda tenemos que:

$$\begin{aligned} T_m \circ I_n &= T_m(I_n(x)) \\ &= T_m(-x+n) \\ &= -x+n+m \\ &= -x+(m+n) \\ &= I_{m+n}, \textit{Mod 12} \end{aligned}$$

Ahora bien, la función T_0 satisface para todas las relaciones definidas anteriormente lo siguiente:

$$T_0 \circ T_n = T_{0+n} = T_n,$$

$$T_n \circ T_0 = T_{n+0} = T_n,$$

$$T_0 \circ I_n = I_{0+n} = I_n,$$

$$I_n \circ T_0 = I_{n+0} = I_n.$$

lo cual demuestra que $T_0 = e$. Por otro lado, las relaciones:

$$T_n \circ T_{12+n} = T_{n+12+n} = T_{12} = T_0,$$

$$T_{12+n} \circ T_n = T_{12+n+n} = T_{12} = T_0,$$

implican $T_n^{-1} = T_{12+n}$, mientras que $I_n \circ I_n = T_{n-n} = T_0$, muestra que $I_n^{-1} = I_n$. Finalmente, la asociatividad se obtiene por propiedad de la composición de funciones. Luego TI es un grupo. ■

3. Tríadas Mayores y Menores

Recordemos que Ω_c^3 es el espacio de tríadas mayores y menores, que una tríada consiste en reproducir simultáneamente tres notas. Por ejemplo la tríada *Do*-Mayor está dada por $\{0, 4, 7\} = \{Do, Mi, Sol\}$ y puede ser representada por un triangulo en el reloj musical. Anteriormente definimos las funciones T e I desde $\mathbb{Z}_{12}$ a $\mathbb{Z}_{12}$. Sin embargo, este conjunto es insuficiente para hacer el estudio de las acciones de grupos, puesto que, en el presente trabajo, nuestros objetos de estudio son acordes, en lugar de notas aisladas. A continuación definamos las funciones T e I desde el conjunto de acordes Ω_c^3.

Definición 3.8. Sean $n, x, y, z \in \mathbb{Z}_{12}$. Definimos la *transposición* como una función $T_n : \Omega_c^3 \longrightarrow \Omega_c^3$ como:

$$T_n\{x, y, z\} = \{(x+n), (y+n), (z+n)\}, \textit{Mod 12}.$$

Definición 3.9. Sean $n, x, y, z \in \mathbb{Z}_{12}$. Definimos la *inversión* como una función $I_n : \Omega_c^3 \longrightarrow \Omega_c^3$ como:

$$I_n \{x, y, z\} = \{(-x+n), (-y+n), (-z+n)\}, \textit{Mod 12.}$$

Nótese que dichas funciones se pueden definir de Ω^n a Ω^n con $n \in \mathbb{Z}_n$. Ahora bien, podemos aplicar transposiciones e inversiones a las tríadas mayores y menores.

3.1. Ejemplos.

Ejemplo 3.10. Apliquemos T_3 a la tríada $do - menor$, esto sería:

$$T_3(\{0,3,7\}) = \{T_3(0), T_3(4), T_3(7)\} = \{3,6,10\}$$

cuyo resultado es la tríada $re\sharp - menor$ (o $mi\flat - menor$, por equivalencia enarmónica).

Ejemplo 3.11. Apliquemos I_0 a la tríada $Do - Mayor$ (ver figura 3.2), esto sería:

$$I_0(\{0,4,7\}) = \{I_0(0), I_0(4), I_0(7)\} = \{0,5,8\}$$

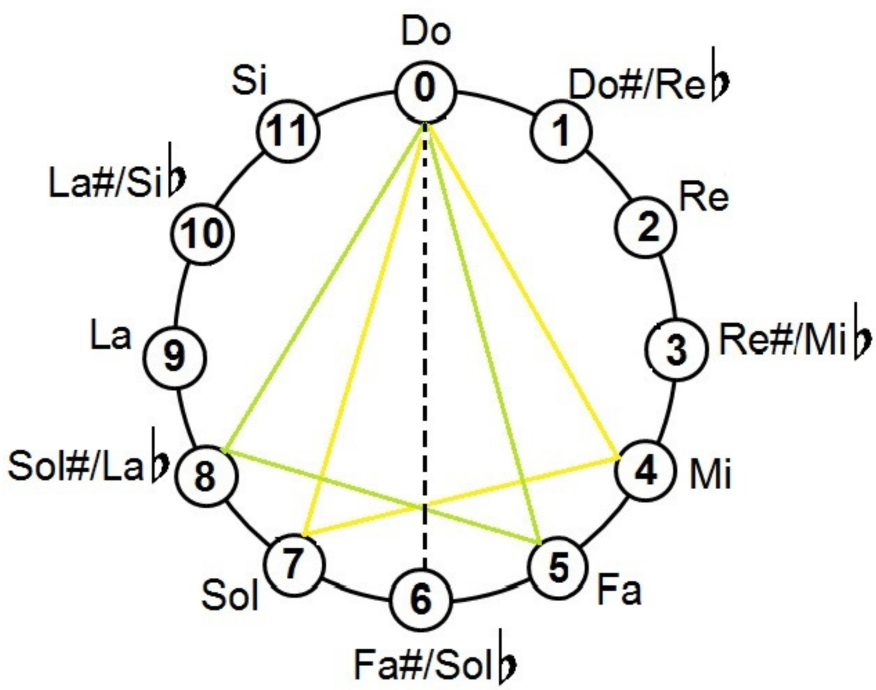

Figura 3.2. I_0 Aplicado a *Do* Mayor

Lo cual no resulta ser una tríada mayor, esto sería una tríada menor. Comúnmente los músicos denotan los acordes mayores y menores con letras mayúsculas y minúsculas respectivamente.

Como el espacio de las tríadas consonantes es finito, podemos hacer sendas listas de todas ellas. Veamos la siguiente tabla:

Tríadas Mayores	Tríadas Menores
$Do = \{0,4,7\}$	$do = \{0,3,7\}$
$Do\sharp/Re\flat = \{1,5,8\}$	$do\sharp/re\flat = \{1,4,8\}$
$Re = \{2,6,9\}$	$re = \{2,5,9\}$
$Re\sharp/Mi\flat = \{3,7,10\}$	$re\sharp/mi\flat = \{3,6,10\}$
$Mi = \{4,8,11\}$	$mi = \{4,7,11\}$
$Fa = \{5,9,0\}$	$fa = \{5,8,0\}$
$Fa\sharp/Sol\flat = \{6,10,1\}$	$fa\sharp/sol\flat = \{6,9,1\}$
$Sol = \{7,11,2\}$	$sol = \{7,10,2\}$
$Sol\sharp/La\flat = \{8,0,3\}$	$sol\sharp/la\flat = \{8,11,3\}$
$La = \{9,1,4\}$	$la = \{9,0,4\}$
$La\sharp/Si\flat = \{10,2,5\}$	$la\sharp/si\flat = \{10,1,5\}$
$Si = \{11,3,6\}$	$si = \{11,2,6\}$

CUADRO 1. El conjunto Ω_c^3

Observemos que, el hecho de que la función I_n nos permita cambiar de una tríada mayor a una menor (y viceversa), hace que la acción del grupo TI sea transitiva sobre el conjunto Ω_c^3. Primero verificaremos que el grupo TI actúa sobre el conjunto Ω_c^3, verificando la definición 1.20.

LEMA 3.12. *El conjunto Ω_c^3 es un TI-conjunto. En otras palabras, el grupo TI actúa sobre Ω_c^3.*

Demostración. Definimos las acciones de $T_m, I_n \in TI$ sobre $x \in \Omega_c^3$ para, a través de la evaluación, demostrar el lema, es decir:

$\pi(T_m, x) = T_m * x = T_m(x)$ y $\pi(I_n, x) = I_n * x = I_n(x)$.

Es claro que $e * x = T_0 * x = T_0(x) = x = e(x)$. Luego, para $f, g \in TI$ se cumple que $(f \circ g) * x = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f * (g * x)$, con lo cual concluye la demostración del lema.$\blacksquare$

Ahora probemos que la acción del grupo TI sobre el conjunto de tríadas consonantes es transitiva, es decir, que existe solamente una única órbita de (sin pérdida de la generalidad) Do bajo TI.

LEMA 3.13. *Para todo $x \in \Omega_c^3$:*

$$(TI)_x = \{g \in TI/gx = x\} = \{e\} = \{T_0\}.$$

Demostración. Aplicando el teorema de la órbita tenemos que:

$$|\Theta_x| = |TI : (TI)_x|$$

Pero $|TI| = 24$ puesto que existen 24 funciones en TI. Además $|\Theta_x| = 24$ dado que, $|\Theta_x| = \Omega_c^3$. Por lo tanto obtenemos:

$$|(TI)_x| = \frac{24}{24} = 1.$$

$\blacksquare$

En el capítulo anterior se hizo referencia a tres operaciones que cambian de un acorde a otro, respetando ciertas relaciones dentro de la teoría musical entre dichos acordes (P, R y L). A continuación definiremos dichas operaciones matemáticamente como biyecciones de Ω_c^3 en Ω_c^3.

DEFINICIÓN 3.14. Sean P,R y L biyecciones dadas de la siguiente manera:
$P, L, R : \Omega_c^3 \longrightarrow \Omega_c^3$

- $P\{x, y, z\} = I_{x+z}\{x, y, z\}$, *Mod 12*
- $L\{x, y, z\} = I_{y+z}\{x, y, z\}$, *Mod 12*
- $R\{x, y, z\} = I_{x+y}\{x, y, z\}$, *Mod 12*

Recordemos: la función P toma una tríada consonante en su paralela menor correspondiente; por ejemplo $Do = \{0, 4, 7\}$ la transforma en $do = \{7, 3, 0\}$ y viceversa. L cambia la nota fundamental por su séptima. La función R, por otro lado permite pasar de una tríada mayor a su relativa menor, por ejemplo $R(Do) = R(\{0, 4, 7\}) = la = \{4, 0, 9\}$.

Nótese que estas tres biyecciones, al igual que las funciones T_n e I_n, también pueden ser representadas fácilmente en el reloj musical. Veamos un ejemplo de lo que ocurre cuando se le aplican las funciones P, L y R a el acorde Do.

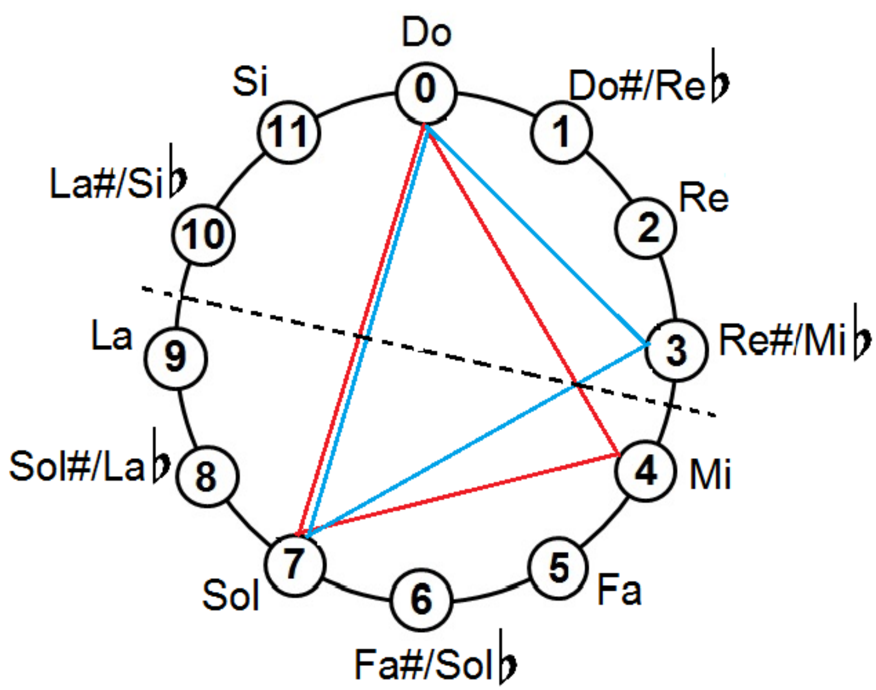

FIGURA 3.3. P Aplicado a Do

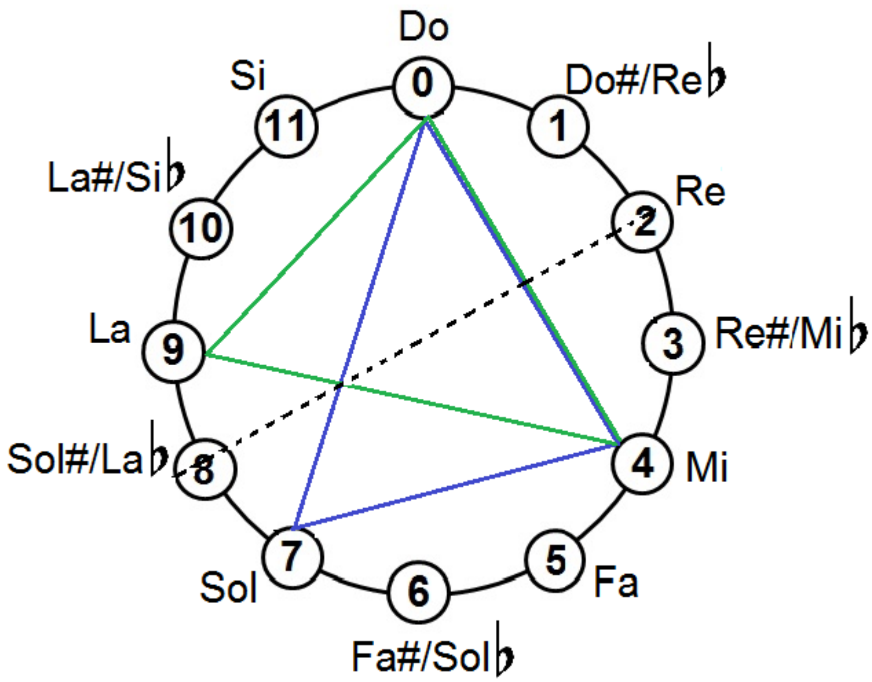

FIGURA 3.4. L Aplicado a *Do*

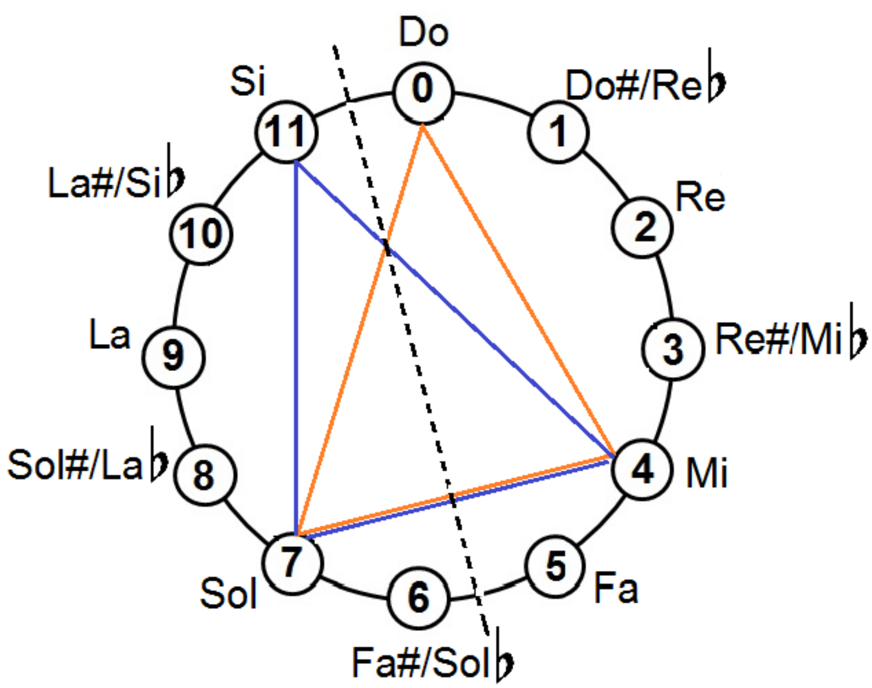

FIGURA 3.5. R Aplicado a *Do*

Notemos que podemos usar las biyecciones definidas anteriormente y mostrar que $PT_1 = T_1P$, $LT_1 = T_1L$, y $RT_1 = T_1R$. Si comenzamos por Do y alternadamente aplicamos R y L obtenemos las siguientes tríadas:

$$Do, la, Fa, re, La\sharp, sol, Re\sharp, do, Sol\sharp, fa, Do\sharp, la\sharp, Sol\flat, Mi\flat, \cdots$$

Esto nos dice que las 24 biyecciones $R, LR, LRL, (LR)^{12} = 1$ son distintas, y que el conjunto PLR tiene al menos 24 elementos, LR es de orden 12. Luego, se puede ver que $R(LR)^3 = P$.

Proposición 3.15. *El conjunto PLR forma un grupo bajo composición. En particular,*

$$(R(LR)^n)^{-1} = R(LR)^n,$$

y

$$((LR)^n)^{-1} = (LR)^k$$

donde $k = -n \ mod\ 12$.

Demostración. Como P, L y R están definidas mediante la función I_n es claro que todas las composiciones posibles permanecen en el conjunto PLR. Así, todas las funciones cumplen con todas las propiedades de grupo, ya que la asociatividad es una propiedad de las funciones. Aunque sabemos que los inversos existen, es de interés ver los inversos de los generadores del grupo PLR. Luego, para toda función de la forma $R \circ (LR)^n$, se tiene $R \circ (LR)^n \circ R \circ (LR)^n = e$. Por lo tanto, $(R \circ (LR)^n)^{-1} = R \circ (LR)^n$. En cuanto a todas las funciones de la forma $(LR)^n$,

$$((LR)^n)^{-1} = (LR)^n = (LR)^n mod 12 = (LR)^k,$$

donde $k = -n$ mod 12.■

Nótese que las demostraciones que el grupo PLR actúa sobre Ω_c^3, la transitividad y la de la unicidad de la órbita de dicho grupo, son análogas a las del caso en que $G = TI$. También resulta trivial que la órbita $(PLR)_x$ para toda $x \in \Omega_c^3$ es la identidad en PLR, es decir $(LR)^0 = e$. Recordemos que tanto el grupo TI como el grupo PLR son definidos por aplicaciones sucesivas de las funciones T_n e I_n, lo cual hace que, de manera intuitiva, podamos suponer que existe algún tipo de relación entre estos dos grupos mas allá de su definición. Demostraremos que, efectivamente, estos dos grupos son duales en el sentido de Lewin, definida en el primer capítulo del presente trabajo.

Antes de probar la dualidad de los grupos TI y PLR enunciemos el siguente lema:

Lema 3.16. *Todos los elementos de los grupos TI y PLR conmutan.*

Demostración. Basta mostrar la conmutatividad de los generadores de cada grupo, es decir, dados T_1, I_0 generadores de TI, y $R, (LR)$ generadores de PLR se puede demostrar lo siguiente:

$$T_1 \circ (LR) = (LR) \circ T_1,$$

$$T_1 \circ R = R \circ T_1,$$

$$I_0 \circ (LR) = (LR) \circ I_0,$$

$$I_0 \circ R = R \circ I_0.$$

Haremos la prueba para la primera igualdad, el resto de ellas se demuestran de manera análoga. Por la proposición 3.7 y la definición de las funciones P, L y R tenemos que:

$$T_1 \circ (LR) = T_1 \circ I_{y+z} \circ I_{x+z},$$

$$T_1 \circ (LR) = T_1 \circ T_{z-x},$$

$$T_1 \circ (LR) = T_{1+z-x},$$

como $x, z \in \mathbb{Z}_n$:

$$T_1 \circ (LR) = T_{z-x+1},$$

$$T_1 \circ (LR) = T_{z-x} \circ T_1,$$

por lo tanto $T_1 \circ (LR) = (LR) \circ T_1$.■

Teorema 3.17. *El grupo PLR y el grupo TI son duales, esto es, cada uno actúa de forma libre sobre el conjunto Ω_c^3 y cada uno es igual a la centralización del otro en el grupo de simetrías $Sym(\Omega_c^3)$.*

Demostración. Consideremos el centralizador del grupo TI:

$$C_{Sym(\Omega_c^3)}(TI) = \left\{g \in Sym(\Omega_c^3)/fg = gf, \forall f \in TI\right\}.$$

Por el lema anterior tenemos que para toda $g \in PLR$, y $f \in T/I$, se tiene que $fg = gf$. Entonces PLR está contenido en $C_{Sym(\Omega_c^3)}(TI)$. Veamos como es el estabilizador de x en $C_{Sym(\Omega_c^3)}(TI)$. Supongamos que existe $h \in C_{Sym(\Omega_c^3)}(TI)$, que deja fijo a $x \in \Omega_c^3$. Sea $g \in TI$. Entonces:

$$h(x) = x,$$

$$g(h(x)) = g(x),$$

$$h(g(x)) = g(x),$$

de donde se sigue que h está en el centralizador. Sabemos que TI actúa regularmente, entonces, para todo $y \in \Omega_c^3$ existe g tal que $y = g(x)$. Ésto nos muestra que, para todo $x, y \in \Omega_c^3$,

$$h(y) = h(g(x)) = g(x) = y.$$

Luego $h(y) = y$. Sin embargo, el único elemento en $C_{Sym(\Omega_c^3)}(TI)$ que fija cualquier elemento es e y, por lo tanto, h es el elemento identidad. Así obtenemos

$$C_{Sym(\Omega_c^3)}(TI)_x = e.$$

Aplicando el teorema de la órbita, se tiene:

$$|\Theta_{(TI)x}| = \frac{|C_{Sym(\Omega_c^3)}(TI)|}{|C_{Sym(\Omega_c^3)}(TI)_x|} = |C_{Sym(\Omega_c^3)}(TI)| \leq |\Omega_c^3| = 24,$$

pues la órbita de x bajo $C_{Sym(\Omega_c^3)}(TI)$ está contenida en Ω_c^3. Así que:

$$24 = |PLR| \leq |C_{Sym(\Omega_c^3)}(TI)|.$$

Combinando éstas desigualdades, vemos que $|C_{Sym(\Omega_c^3)}(TI)| = 24$ y necesariamente el centralizador de TI es el grupo PLR. Demostrar que el centralizador del grupo PLR es el grupo TI, se hace de forma análoga.■

Podemos concluir que los grupos TI y PLR son duales en el sentido Lewin. En la siguiente sección veremos bajo cuales condiciones el modelo de Crans se puede extender a un conjunto de acordes más grande; el conjunto de las tétradas mayores y menores, el cual es utilizado con frecuencia en el mundo de la música.

4. Tétradas Mayores y Menores

Como se mostró anteriormente, el modelo de Crans estudia como el grupo diedro actúa sobre un conjunto específico de clases de acordes: el conjunto de las tríadas consonantes. Por definición de consonancia (dentro de la teoría de armonía convencional) al ejecutar un sonido adicional distinto a los que componen el acorde de tres sonidos, inmediatamente se pierde la propiedad de consonancia. Sin embargo, los acordes definidos mediante tríadas no son los únicos acordes que aparecen dentro de la música como tal; por ejemplo, el conjunto de las tétradas definido en el capítulo anterior, son acordes muy utilizados por compositores y arreglistas. Como dicho conjunto, trivialmente, es mas extenso que el conjunto de tríadas consonantes, nos concetraremos en las tétradas que contengan una tríada consonante, agregando la séptima (mayor o menor) con respecto a la nota raíz; esto nos permite obtener un conjunto de igual cardinal que el anterior.

Definición 3.18. Diremos que el acorde $\{x, y, z, w\} \in \wp(X)$ es un acorde *Mayor-séptima Mayor* si, dada una nota raíz $x \in \mathbb{Z}_{12}$ se tiene que:

$$\{x, y = x + 4, z = x + 7, w = x + 11\}\,, \textit{Mod 12}.$$

Definición 3.19. Diremos que el acorde $\{x, y, z\} \in \wp(X)$ es un acorde *menor-séptima menor* si, dada una nota raíz $x \in \mathbb{Z}_{12}$ se tiene que:

$$\{x, y = x + 3, z = x + 7, w = x + 10\}\,, \textit{Mod 12}.$$

Ahora podemos definir matemáticamente del conjunto de tétradas consonantes, esto es:

Definición 3.20. Denotaremos como Ω_c^4 como el conjunto dado por:

$$\Omega_c^4 = \{\{x, x + 4, x + 7, x + 11\}\,, \{x', x' + 3, x' + 7, x' + 10\}\,/x, x' \in \mathbb{Z}_{12}\}\,, \textit{Mod 12}.$$

Seguidamente podemos hacer (así como en el caso de las tríadas) sendas listas de los acordes del conjunto Ω_c^4 :

Tétradas Mayores	Tétradas Menores
$Do = \{0, 4, 7, 11\}$	$do = \{0, 3, 7, 10\}$
$Do\sharp/Re\flat = \{1, 5, 8, 0\}$	$do\sharp/re\flat = \{1, 4, 8, 11\}$
$Re = \{2, 6, 9, 1\}$	$re = \{2, 5, 9, 0\}$
$Re\sharp/Mi\flat = \{3, 7, 10, 2\}$	$re\sharp/mi\flat = \{3, 6, 10, 1\}$
$Mi = \{4, 8, 11, 3\}$	$mi = \{4, 7, 11, 2\}$
$Fa = \{5, 9, 0, 4\}$	$fa = \{5, 8, 0, 3\}$
$Fa\sharp/Sol\flat = \{6, 10, 1, 5\}$	$fa\sharp/sol\flat = \{6, 9, 1, 4\}$
$Sol = \{7, 11, 2, 6\}$	$sol = \{7, 10, 2, 5\}$
$Sol\sharp/La\flat = \{8, 0, 3, 7\}$	$sol\sharp/la\flat = \{8, 11, 3, 6\}$
$La = \{9, 1, 4, 8\}$	$la = \{9, 0, 4, 7\}$
$La\sharp/Si\flat = \{10, 2, 5, 9\}$	$la\sharp/si\flat = \{10, 1, 5, 8\}$
$Si = \{11, 3, 6, 10\}$	$si = \{11, 2, 6, 9\}$

Cuadro 2. El conjunto Ω_c^4

Nótese que cada tétrada contiene dos tríadas consonantes. Veamos dos ejemplos de tétradas consonantes representadas en el reloj musical.

Dada la lista anterior de acordes musicales debemos plantear la idea de si las operaciones definidas anteriormente se pueden aplicar a este nuevo conjunto. Armónicamente siempre es posible, sin embargo debemos verificar que ocurre con las tétradas al aplicarle las funciones definidas matemáticamente en la sección anterior. Sean las funciones T_n e I_n definidas como en la sección anterior. Veamos que ocurre con el acorde $Do - séptima - Mayor$ al aplicarle T_1:

$$T_1(\{0, 4, 7, 11\}) = \{T_1(0), T_1(4), T_1(7), T_1(11)\} = \{1, 5, 8, 0\}$$

Como era de esperarse, el resultado fue el acorde $Do\sharp - Mayor$, puesto que T_1 consiste en sumar un semitono a cada componente del acorde, por lo tanto el resultado sigue siendo un acorde modo mayor (es decir, pertenece a la misma columna de la tabla dada anteriormente). Ahora veamos que sucede si le aplicamos al mismo acorde I_0:

$$I_0(\{0,4,7,11\}) = \{I_0(0), I_0(4), I_0(7), I_0(11)\} = \{0,5,8,1\}$$

A diferencia del caso de las tríadas, el resultado no es una tétrada menor, mas aún, se obtiene que $I_n = T_{(n+1)}$. Por lo tanto, dichas funciones preservan el modo (mayor o menor) según sea el caso. Con las funciones así definidas se puede concluir, sin pérdida de la generalidad, que la órbita de *Do* es distinta a la de *do*. Formalmente, ésto sería:

PROPOSICIÓN 3.21. *El grupo TI no actúa de manera transitiva sobre el conjunto Ω_c^4*

Demostración. Verifiquemos la proposición con un contraejemplo. Sean $X = \{0,4,7,11\}$, es decir, *Do*-séptima mayor, y $y = \{0,3,7,10\}$. Trivialmente no existe $g \in TI$ tal que $gx = y$, puesto que $I_n = T_{n+1}$ para algún n.■

Geométricamente, las tríadas representan un triángulo en el reloj musical, cuya área es invariante por I_n, la cual, de manera natural, cambia un acorde mayor a uno menor. En el caso de las tétradas, tanto las mayores como las menores, son representadas por un trapecio isósceles, el cual sí se desforma si queremos pasar de una columna de la tabla hacia la otra; esto a su vez trae como consecuencia que las funciones P, L y R no pueden construirse de la misma manera, puesto que, según su definición en la sección anterior, éstas dependen directamente de I_n.

Usemos el modelo de Crans para visualizar un ejemplo (ver la figura a continuación):

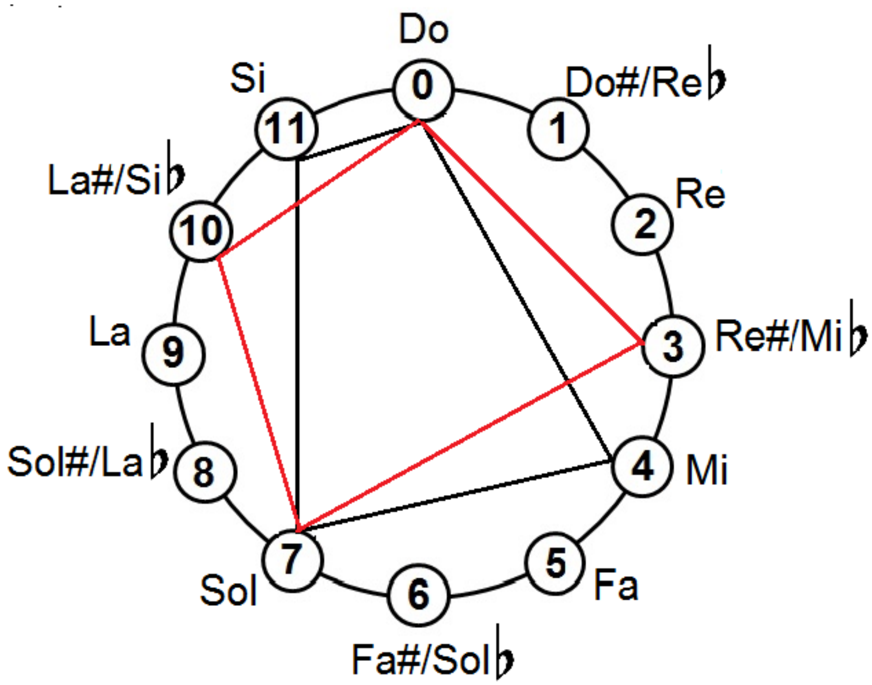

Figura 3.6. *Do* y *do*

Sin embargo, musicalmente dichas operaciones siempre existen, por ende, se pueden construir de manera conveniente para llegar al resultado que se desea. A continuación redefiniremos matemáticamente los operadores P, L y R introduciendo una constante que nos permitirá conservar su definición como operadores musicales.

- $P(\{x, y, z, w\}) = I_{x+z}\{x, y, z, w\} + (0, 0, 0, 2)$, *Mod 12*
- $L(\{x, y, z, w\}) = I_{y+z}\{x, y, z, w\} + (0, 0, 0, 2)$, *Mod 12*
- $R(\{x, y, z, w\}) = I_{x+y}\{x, y, z, w\} + (0, 0, 0, 2)$, *Mod 12*.

Así, los operadores actúan de la misma manera sobre el conjunto de tétradas al igual que sobre el conjunto de tríadas. Veamos, por ejemplo, lo que ocurre al acorde $Do - séptima - mayor$ al aplicarle P,L y R :

$P(\{0, 4, 7, 11\}) = I_7(\{0, 4, 7, 11\}) + (0, 0, 0, 2) = (7, 3, 0, 8) + (0, 0, 0, 2) = \{7, 3, 0, 10\} = do - séptima - menor$

$L(\{0, 4, 7, 11\}) = I_1(\{0, 4, 7, 11\}) + (0, 0, 0, 2) = (11, 7, 4, 0) + (0, 0, 0, 2) = \{11, 7, 4, 2\} = mi - séptima - menor$

$R(\{0,4,7,11\}) = I_4(\{0,4,7,11\}) + (0,0,0,2) = (4,0,9,5) + (0,0,0,2) = \{4,0,9,7\} = la - séptima - menor$

Sin embargo, las funciones P, L y R redefinidas de ésta manera, no resultan ser homomorfismos. Es conveniente plantearse la siguiente interrogante: se puede extender el modelo de Crans para el conjunto de tétradas consonantes?; la respuesta es que sí se puede, aunque no para todo el conjunto Ω_c^4 como tal. El grupo TI actúa de forma regular sobre el conjunto de acordes de tétradas mayores, análogamente sobre las menores. Veamos varios ejemplos usando el reloj musical de como se puede, por ejemplo, reflejar un acorde en Ω.

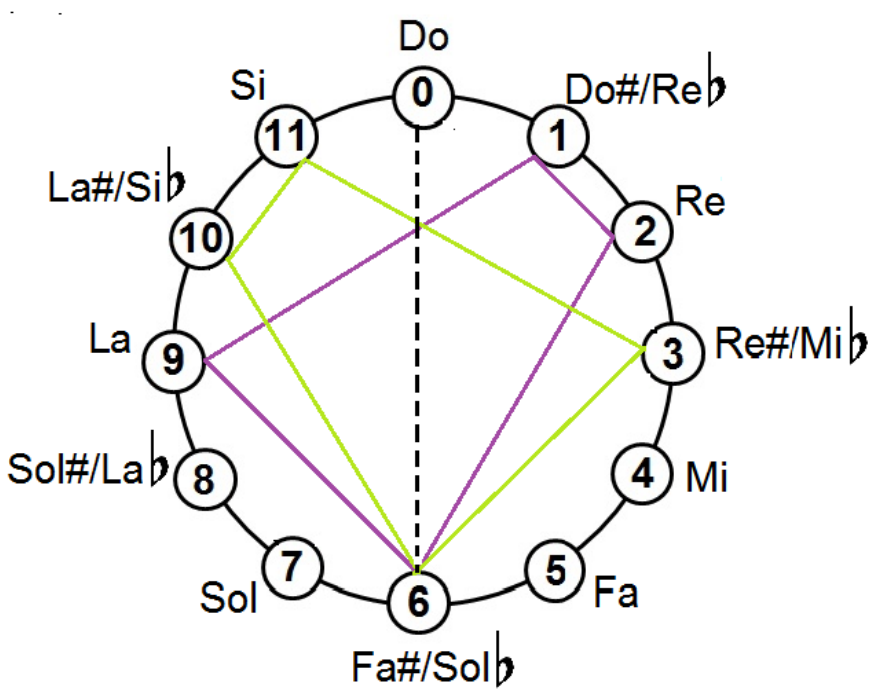

FIGURA 3.7. I_3 aplicado a *Si*- séptima mayor

5. Otros Ejemplos

Mediante el modelo de Crans, veamos como el grupo diedral actúa sobre otro tipo de acordes en Ω^3.

DEFINICIÓN 3.22. Diremos que el acorde $\{x,y,z\} \in \wp(X)$ es un acorde *Disminuido* si, dada una nota raíz $x \in \mathbb{Z}_{12}$ se tiene que:

$$\{x, y = x+3, z = x+6\}, Mod\ 12.$$

Nuevamente, podemos hacer una tabla de las tríadas disminuidas.

Tríadas Disminuidas
$Do = \{0, 3, 6\}$
$Do\sharp/Re\flat = \{1, 4, 7\}$
$Re = \{2, 5, 8\}$
$Re\sharp/Mi\flat = \{3, 6, 9\}$
$Mi = \{4, 7, 10\}$
$Fa = \{5, 8, 11\}$
$Fa\sharp/Sol\flat = \{6, 9, 0\}$
$Sol = \{7, 10, 1\}$
$Sol\sharp/La\flat = \{8, 11, 2\}$
$La = \{9, 0, 3\}$
$La\sharp/Si\flat = \{10, 1, 4\}$
$Si = \{11, 2, 5\}$

Cuadro 3. El conjunto $D \subseteq \Omega^3$

Se puede apreciar mediante el modelo de Crans que dicho conjunto se comporta de manera isomorfa al conjunto de las tétradas mayores (o menores). Notemos que al aplicarle las funciones I_n y T_n a el acorde $Do - aumentado$ podemos obtener el resto de las tríadas, en particular, el resultado de la función I_n nos deja dentro del mismo conjunto. Veamos los siguientes ejemplos utilizando nuevamente el reloj musical:

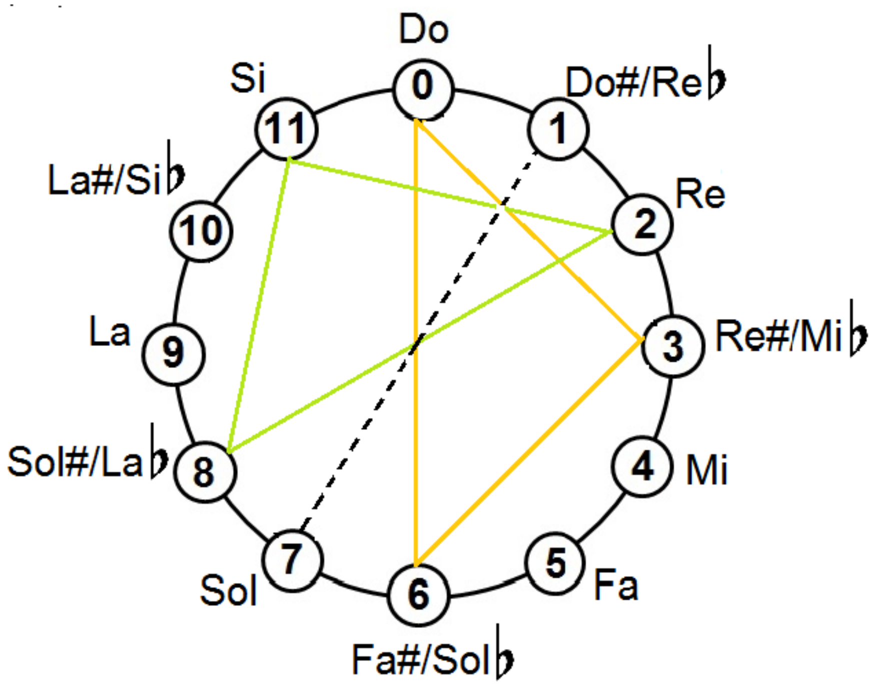

FIGURA 3.8. I_2 aplicado a *Do* disminuido

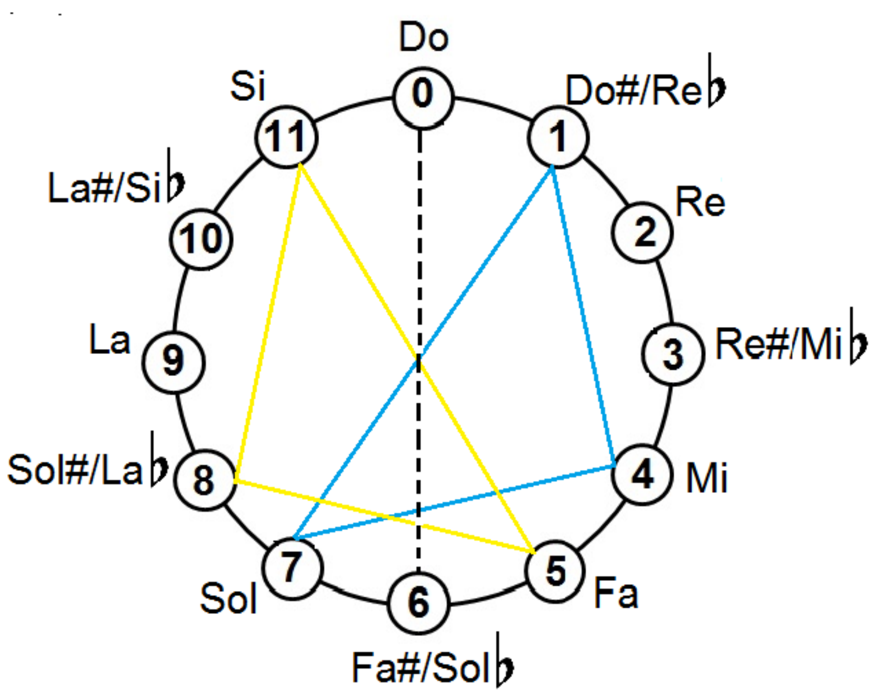

FIGURA 3.9. T_4 aplicado a *do*♯ disminuido

Existe otro conjunto de tríadas, llamadas Aumentadas.

DEFINICIÓN 3.23. Diremos que el acorde $\{x, y, z\} \in \wp(X)$ es un acorde *Aumentado* si, dada una nota raíz $x \in \mathbb{Z}_{12}$ se tiene que:

$$\{x, y = x + 4, z = x + 8\}\,, \textit{Mod 12}.$$

Hagamos una lista de los acordes aumentados para observar su comportamiento.

Tríadas Aumentadas		
$Do = \{0, 4, 8\}$	$Mi = \{4, 8, 0\}$	$Sol\sharp/La\flat = \{8, 0, 4\}$
$Do\sharp/Re\flat = \{1, 5, 9\}$	$Fa = \{5, 9, 1\}$	$La = \{9, 1, 5\}$
$Re = \{2, 6, 10\}$	$Fa\sharp/Sol\flat = \{6, 10, 2\}$	$La\sharp/Si\flat = \{10, 2, 6\}$
$Re\sharp/Mi\flat = \{3, 7, 11\}$	$Sol = \{7, 11, 3\}$	$Si = \{11, 3, 7\}$

CUADRO 4. El conjunto $A \subseteq \Omega^3$

El conjunto dado anteriormente, nos muestra (de forma intuitiva) como pueden actuar otros grupos distintos al diedral. Nótese que, por definición, matemáticamente sí resulta de mucha importancia el orden en el cual se coloquen las notas en las ternas, aunque auditivamente representaran el mismo sonido, armónicamente no resultan iguales. En el reloj musical se puede notar que las ternas representan triángulos equiláteros, los cuales nos arrojan tres simetrías en lugar de una, con respecto a los conjuntos anteriores.

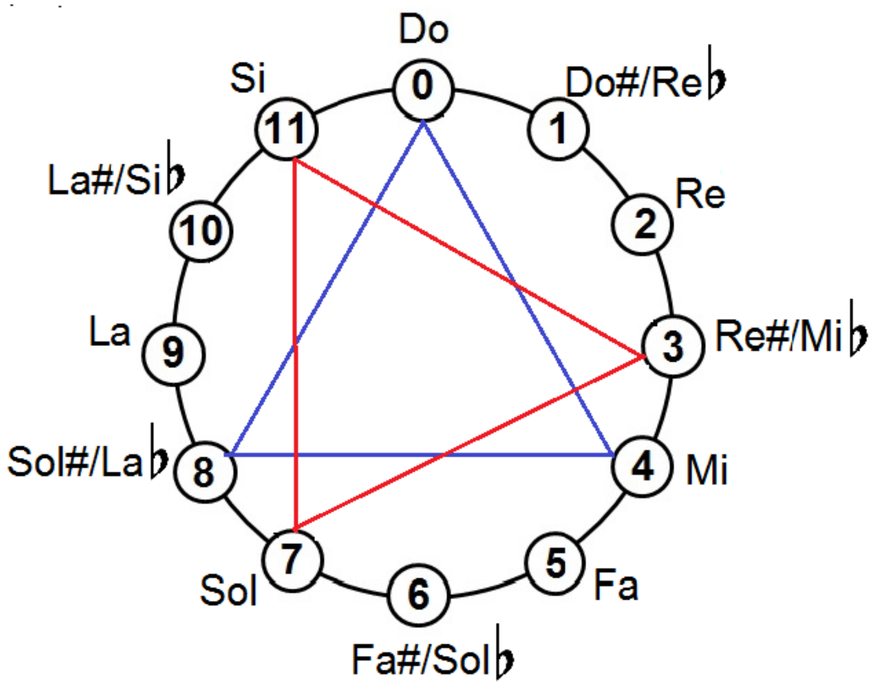

FIGURA 3.10. T_1 aplicado a *sol* aumentado

Los conjuntos de acordes antes definidos no son tríadas consonantes, sin embargo, son utilizados frecuentemente por los músicos para enriquecer sus obras. De igual manera, ambos están contenidos en el conjunto de tríadas Ω^3.

6. Algunas Aplicaciones

En la siguiente sección daremos algunos ejemplos de como pueden describirse ciertas estructuras armónicas mediante las biyecciones que se han definido matemáticamente en el presente trabajo. Para ello, mostraremos distintas variantes del joropo venezolano [**11**]. Existen disitntas formas de clasificar el mencionado género, bien sea por la región del país donde se creó o se ejecute, el tiempo de su respectivo compás rítmico, la forma literaria del canto, los instrumentos, entre otros. En los ejemplos que daremos, se hará énfasis en las semejanzas y diferencias entre las secuencias armónicas que lo constituyan (probablemente la mas apreciable y distinguible por el oído de una persona, sin que ésta tenga conocimientos musicales), las cuales pueden ser de forma *libre* o de *ciclo armónico repetitivo*. Nos concentraremos en éste último sub-género.

El Seis por Derecho: éste golpe de joropo se ejecuta en tonos mayores y tiene una secuencia armónica dada por: Tónica, Subdominante y Dominante (puede ser la séptima en el caso de las tétradas). Podemos visualizarla de la siguente manera, fijando a *Do* como la tónica obtenemos:

$$\{0,4,7\} \longrightarrow \{5,9,0\} \longrightarrow \{7,11,2\} \longrightarrow \{0,4,7\}\,.$$

Cuales serían las biyecciones adecuadas para colocarlas sobre las flechas?. Las más sencillas serían las transposiciones T_5, T_2, T_5, esto nos da:

$$\{0,4,7\} \mapsto T_5 \mapsto \{5,9,0\} \mapsto T_2 \mapsto \{7,11,2\} \mapsto T_5 \mapsto \{0,4,7\}\,.$$

Es decir, matemáticamente y armónicamente el seis por derecho puede verse de la siguiente manera:

$$T_5(T_2(T_5(\{0,4,7\})))$$

Resulta importante resaltar que no conviene desarrollar las operaciones de composición de funciones, así podemos entender mejor la estructura armónica de cualquier género musical.

El Pajarillo llanero: el pajarillo es ejecutado en tonos menores. Por ende, cuando debemos pasar al acorde dominante, debemos realizar una inversión. Esto sería (fijando como la tónica a *do*):

$$\{0,3,7\} \mapsto T_5 \mapsto \{5,8,0\} \mapsto I_{07} \mapsto \{7,11,2\} \mapsto T_5 \circ P \mapsto \{0,3,7\}\,.$$

Nótese como, a pesar de que dichos géneros tienen la misma estructura tonal, matemática y armónicamente son diferentes. Dicha diferencia se tornará también de modo auditivo.

$$T_5 P(I_0(T_7(T_5(\{0,3,7\}))))$$

El Seis Numereao: al igual que el seis por derecho, éste golpe se toca en tonos mayores, sin embargo tiene una estructura muy diferente, por ejemplo, no se inicia la pieza con la tónica. La estructura es la siguiente: Dominante o Subdominante, Subdominante, Dominante y Tónica.

$$\{7,11,2\} \mapsto T_{10} \mapsto \{5,9,0\} \mapsto T_2 \mapsto \{7,11,2\} \mapsto T_5 \mapsto \{0,4,7\}\,.$$

Resulta un ejemplo interesante, puesto que, a pesar de que la tónica es *Do*, matemáticamente debemos comenzar aplicando las biyecciones a *Sol*. Es decir:

$$T_5(T_2(T_{10}(\{7,11,2\})))$$

Zumba que Zumba: éste golpe tiene una estructura cíclica un poco más larga, se ejecuta en tonos menores de la siguente manera: Tónica, Dominante, Tónica, Dominante, Subdominante, Dominante, Tónica, Dominante, Tónica.

$$\{0,3,7\} \mapsto T_5 \mapsto \{5,8,0\} \mapsto T_7 \mapsto \{0,3,7\} \mapsto T_5 \mapsto \{5,8,0\} \mapsto T_7 \circ I_0 \mapsto$$

$$\{7,11,2\} \mapsto T_5 \circ I_0 \mapsto \{0,3,7\} \mapsto T_5 \mapsto \{5,8,0\}\,.$$

Finalmente, la estructura en cuanto a la composición resulta:

$$T_7(T_5(T_5 \circ I_0(T_7 \circ I_0(T_5(T_7(T_5(\{0,3,7\})))))))$$

La Chipola: es un golpe sumamente sencillo desde el punto de vista armónico. Normalmente se toca en modo mayor, pero posee dos períodos: uno en mayor (T, D) y otro en relativa menor en la misma secuencia. Este estilo fue citado para ejemplificar como pudieran fusionarse dos golpes distintos. Así pudieramos obtener la siguiente progresión:

$$T_5 P(I_0(T_7(T_5(\{0,3,7\})))) \circ R(T_7(\{0,4,7\}))$$

lo cual resulta un pajarillo con chipola, estilo del popular contrapunteo de "Florentino y el Diablo", donde el diablo es interpretado en pajarillo y Florentino en chipola.

En el mundo se pueden encontrar géneros donde se aprecie la secuencia repetitiva, por ejemplo el famoso Blues, el cual a su vez nos aporta un notable ejemplo de lo útil que resulta el uso de las tétradas.

El Blues: existen muchas variaciones, pero todas son derivadas de esta estructura clásica de blues, que resulta en la secuencia de Tónica, Subdominante, Tónica, Dominante, y resolución a Tónica. El blues busca un sonido basado en la "tensión" musical, pretende hacer una música sencilla, pero no carente de movimiento, y por ello, utilizando la progresión típica dada anteriormente, incluye los acordes de cuatro notas, es decir las tétradas, que aportan esa tensión propia del estilo.

$$T_5(T_7(T_5(T_5(\{0,4,7,11\}))))$$

Podemos tomar como ejemplo de un blues clásico en modo mayor el tema "Oh! Darling" de The Beatles. Otro ejemplo similar es el del tema "Stand by me", versionado por John Lennon, Marvin Gaye, entre otros, la cual sirve para mostrar como actúan P, L y R:

$$L \circ R(R \circ L \circ R \circ L(L(R(\{0,4,7,11\}))))$$

Nótese que, a pesar de lo sencillo que resultan las estructuras armónicas en los ejemplos dados anteriormente, se puede apreciar la riqueza matemática que presenta cada secuencia. Ésto resulta muy útil para simplificar y ejemplificar ciclos dentro de la armonía musical. Sin embargo, las biyecciones utilizadas durante el desarrollo del presente trabajo, pueden ser aplicadas a otro tipo de secuencia dentro de la música; por ejemplo, la *melodía* o el *motivo* de una pieza. Primero definiremos éste último término.

Definición 3.24. Definiremos como un *n-motivo* a la sucesión $(x_i)_{i=1}^n$ con$x_i \in \mathbb{Z}_{12}$ para todo i.

Si denotamos por $\psi(n)$ al conjunto de todos los n-motivos, podemos definir las funciones T e I tal que:

$$T_k : \psi(n) \longrightarrow \psi(n)$$

$$(x_i)_{i=1}^n \to (y_i = x_i + k)_{i=1}^n, \textit{Mod 12},$$

y también:

$$I_k : \psi(n) \longrightarrow \psi(n)$$

$$(x_i)_{i=1}^n \to (y_i = -x_i + k)_{i=1}^n, \textit{Mod 12.}$$

Ahora veamos uno de los ejemplos mas famosos de esa aplicación. Sea el 12-motivo dado por:

$$\langle 2, 4, 5, 7, 4, 5, 2, 1, 2, 10, 7, 9 \rangle .$$

Al aplicarle T_7 obtenemos:

$$\langle 9, 11, 0, 2, 11, 0, 9, 8, 9, 5, 2, 4 \rangle .$$

Donde el motivo se preserva a pesar de cambiar de tonalidad. El ejemplo anterior es un motivo de la Fuga de Bach.

Conclusiones y Recomendaciones

El modelo que Crans, plantea sí se puede extender a otros conjuntos de acordes, restringiendo de manera conveniente dichos conjuntos, o redefiniendo la acción del grupo diedral a otro conjunto de llegada distinto al grupo de simetrías (por ejemplo, en el grupo de simetrías afines). Dado que las operaciones P, L, y R musicalmente siempre pueden aplicarse, permitiría investigar bajo cuales condiciones la dualidad entre otros grupos de notas, pudiera extrapolarse de los acordes consonantes. De igual manera, éste trabajo sirvió para ilustrar, una vez más, como la matemática sí se puede encontrar en todo ámbito, no solo dentro de la ciencia misma, sino también en áreas como el arte, donde, a priori, no parecen poder concatenarse; siendo más específico el caso de la música.

Bibliografía

[1] A.Crans, T.Fiore,R. Satyendra *" Musical Actions of Dihedral Groups"*,American Mathematical Monthly, Junio - Julio 2009. Artículo.

[2] Benson, Dave "*Music: A mathematical Offering*", version Web, Marzo 2007.

[3] Brenet, Michel " *Diccionario de la Musica, Historico y tecnico*",Iberia - Joaquín Gil ,Editores S.A., Abril 1946.

[4] Danhausser, A. "*Teoria de la Musica*", Enrique Lemoine y Ca. , Editores, 1897.

[5] Fiore, Thomas M. "*Music and Mathematics*", Lectures Notes , 2007.

[6] Herstein, I.N. , " *Algebra Abstracta*", Editorial Trillas S.A. México, 1970.

[7] Hungerford, Thomas , "*Algebra*".Graduate texts in Mathematics V.73, Springer, 1974.

[8] Kurzweil, Hans; Stellmacher, Bernd " *The Theory of Finite Groups, an introductions*". Editorial Board (North America) , Springer, 2003.

[9] Loy,Gareth " *Musicamtics : the mathematical fundations of music , Volume 1*", The MIT press Cambrige, Massachusetts, London , England, 2006.

[10] Agustin Aquino, Octavio; Du Plessis, Janine ; Lluis Puebla, Emilio; Montiel, Mariana "*Una Introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la Teoía Matemática de la Música*", Primera edición,Sociedad matemática mexicana, México.2009.

[11] Guido, Walter; Peñín, José "Enciclopedia de la Música en Venezuela, TOMO IZ". Fundación Bigott, página 79 "Joropos de cadencias fijas (de cíclo armónico repetitivo)". Artículo.