



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Homología Persistente y α -Formas

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Carlos Luis Noriega Méndez** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Mauricio Angel.

Caracas, Venezuela

Febrero 2014

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado: “**Homología Persistente y α -Formas**”, presentado por el **Br. Carlos Luis Noriega Méndez**, titular de la Cédula de Identidad **V-15.395.087**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Mauricio Angel
Tutor

Dr. Wuilian Torres
Jurado

MsC. Adriana Padrón
Jurado

A Dios y a mi familia.

Agradecimiento

A Dios por darme la oportunidad de apreciar el fascinante mundo de las matemáticas. A mis padres por apoyarme en cada momento vivido. A mis profesores por compartir sus geniales conocimientos y a mi compañera de vida, sin la cual no hubiese tenido la paz y tranquilidad necesaria para desarrollar este Trabajo Especial de Grado.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Preliminares.	3
1. Homología Simplicial.	3
2. Homología Persistente.	16
Capítulo 2. α -Formas	20
1. Introducción a las α -Formas.	21
2. Definición formal de α -Formas	25
3. Homología Persistente y α -Formas.	30
Capítulo 3. Reconstrucción 3D a partir de imágenes de rango.	32
1. Algoritmo de Reconstrucción.	32
2. Ejemplo de reconstrucción de superficie.	34
Capítulo 4. Conclusión y trabajo a futuro.	42
Apéndices.	44
1. Imágenes de Rango.	44
2. Diagrama de Voronoi en el plano.	47
3. Rutinas en MatLab.	49
Bibliografía	53

Introducción

La Homología Persistente [21] es una técnica que permite el estudio de la duración de atributos topológicos. Esta técnica consiste en el cálculo de los números de Betti asociados a una sucesión de cadenas de complejos y se utiliza para medir la persistencia de clases de homología a través de la variación de un parámetro específico.

El concepto de persistencia homológica tiene sus orígenes en la década de los 90, en el trabajo de Frosini y colaboradores en Bologna [13], Italia, en la tesis doctoral de Robins [22] en Boulder, Colorado y en el proyecto de biogeometría de Edelsbrunner [5] en Duke, California del Norte. Sus ideas convergen a que a partir de un conjunto de datos $X = \{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, se le puede construir una filtración de complejos $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r$ a la cual se calculan invariantes topológicos para determinar la forma representada por X .

La Homología Persistente tiene muchas aplicaciones en computación gráfica [1], reconocimiento óptico de los caracteres de un texto [18], en redes de sensores, en el estudio de moléculas biológicas [16], entre otros.

Por otra parte, en la última década, las imágenes de rango obtenidas de scanners de láser [3] han sido una importante herramienta en el diseño y fabricación industrial. Estos scanners 3D pueden captar una nube de puntos que yace en la superficie de un objeto sin importar el grado de complejidad geométrica que pueda tener. Para que el resultado de la digitalización sea computacionalmente útil, se debe convertir dicha nube de puntos en una superficie compuesta por polígonos a través de complejos simpliciales. Este proceso no es trivial, ya que las conexiones aparentes entre puntos vecinos dependen de las suposiciones sobre la suavidad y otras propiedades de la superficie en cuestión, como por ejemplo la conexidad.

Actualmente, existe un creciente interés por el problema de la reconstrucción de la forma de un objeto proveniente de imágenes obtenidas de scanners 3D [1].

El presente trabajo consiste en la aplicación del método de α -Formas a la reconstrucción 3D. Este método, descrito por Edelsbrunner en [7], nos permite visualizar o interpretar la forma que representa una nube de puntos mediante el estudio de la Homología Persistente asociada a una sucesión de complejos simpliciales.

En el capítulo 1 se expone la teoría básica de homología simplicial y su influencia en la Homología Persistente. Asimismo, se presenta un método para el cálculo de los números de Betti asociados a complejos simpliciales. El capítulo 2 está dedicado al método de α -Formas, comenzando el estudio con una idea intuitiva y culminando con la definición formal. Finalmente, en el capítulo 3 se presenta un ejemplo del problema de la reconstrucción 3D de un objeto a partir de una nube de puntos y su posible solución mediante la aplicación de Homología Persistente en el método de α -Formas [18].

Capítulo 1

Preliminares.

La Teoría de Homología comienza siendo un campo de la Topología y es Jules Henri Poincaré (1854-1912) el primero en dar una definición de esta disciplina en su *Analysis Situs* en 1895 como se expone en [17]. El objetivo radica en estudiar los grupos de homología, lo cual es a grosso modo, una manera de clasificar invariantes.

El Álgebra Homológica tiene aplicaciones incluso en otras ramas del álgebra, por ejemplo: los grupos finitos o álgebras de Lie tienen grupos de homología asociados. Entre los diversos tipos de homología, una de las más recientes es la Homología Persistente, una técnica algebraica para medir propiedades topológicas. En este capítulo, se explicará brevemente la teoría básica necesaria para el estudio de la Homología Persistente aplicada al método de α -Formas.

1. Homología Simplicial.

La homología simplicial es una herramienta para construir información algebraica de espacios topológicos. Forma parte de las nociones básicas de Topología Algebraica, las cuales proporcionan una manera de entender el problema planteado en este Trabajo Especial de Grado. Para introducir el concepto de Homología iniciamos con la presentación de los complejos simpliciales.

1.1. Símplices.

Dado un conjunto $V = \{p_0, p_1, \dots, p_k\}$ de puntos en \mathbb{R}^n , se dice que V es un conjunto *afínmente independiente*, si al tomar un elemento de V , en instancia p_0 , el conjunto de vectores $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0\}$ es linealmente independiente o, equivalentemente, si el conjunto de $k + 1$ elementos de V no está contenido en ningún plano $(k - 1)$ -dimensional. A dicho conjunto V se denomina *Conjunto de Vértices*.

DEFINICIÓN 1.1. Para $m \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq m$, el k -símplice o símplice de dimensión k generado por los $k + 1$ puntos de V denotado por $\Delta_k = \langle p_0 p_1 \cdots p_k \rangle$ es el conjunto:

$$\Delta_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=0}^k \lambda_i p_i \text{ con } \lambda_i \geq 0 \text{ para } i = 0, \dots, k \text{ y } \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

Para $x \in \Delta_k$ tal que $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i p_i$, el punto $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ es llamado *coordenadas baricéntricas* de x .

Nótese que para $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^3$, un 0-símplice $\Delta_0 = \langle p_0 \rangle$ es un punto, un 1-símplice $\Delta_1 = \langle p_0 p_1 \rangle$ es el segmento de recta que une p_0 con p_1 , un 2-símplice $\Delta_2 = \langle p_0 p_1 p_2 \rangle$ es el triángulo de vértices p_0, p_1, p_2 con su interior y un 3-símplice $\Delta_3 = \langle p_0, p_1, p_2, p_3 \rangle$ es el tetraedro de vértices p_0, p_1, p_2, p_3 con su interior incluido. Esto se observa en la Figura 1.1.

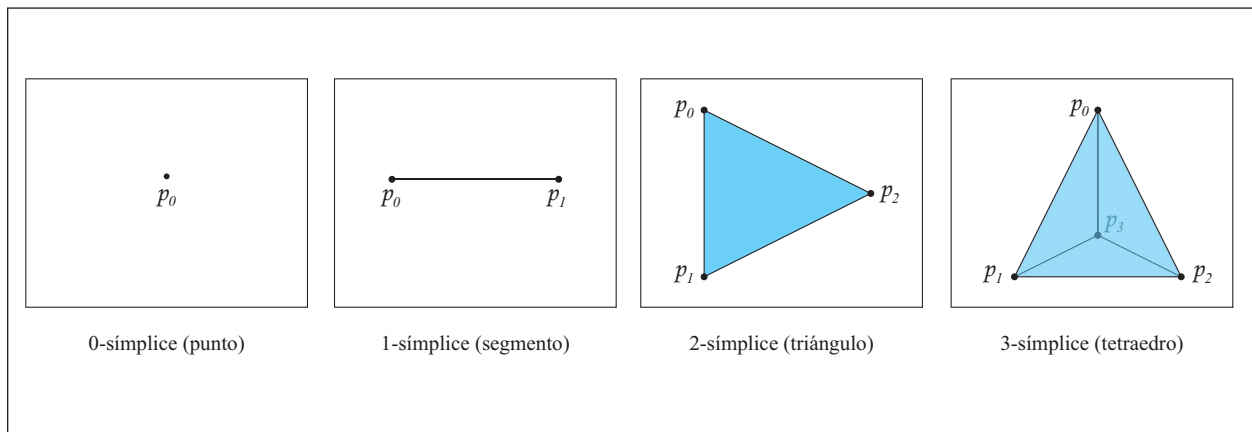


FIGURA 1.1. Símplices en \mathbb{A}^2 .

De esta manera, se interpreta a un k -símplice como la menor cápsula convexa ¹ que encierra a $k + 1$ puntos afínmente independientes, así como también puede decirse que los símplices generalizan el concepto de triángulos a dimensiones mayores que 3.

¹La cápsula convexa de un conjunto de puntos $V \subset \mathbb{R}^m$ es el menor conjunto convexo que contiene a V .

DEFINICIÓN 1.2. Sean p_0, p_1, \dots, p_k puntos afínmente independientes en \mathbb{R}^m ($k \leq m$) y $\{p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$ una permutación de ellos. Se dice que $\{p_0, p_1, \dots, p_k\}$ es equivalente a $\{p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$ si

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & k \\ p_{i_0} & p_{i_1} & \cdots & p_{i_k} \end{pmatrix}$$

es una permutación par.

Al ser la relación anterior de equivalencia, un k -símplice orientado es una clase de equivalencia. Un k -símplice con orientación p_0, p_1, \dots, p_k se denota por Δ_k , mientras que el k -símplice con orientación opuesta p_k, p_{k-1}, \dots, p_0 se denota por $-\Delta_k$. De todas las $(k+1)!$ ordenaciones, la mitad son de clase par, es decir, mantienen la misma orientación escogida inicialmente, mientras que la otra mitad corresponde a la orientación opuesta a la inicial.

Generalmente se utiliza la notación $(p_0 p_1 \cdots p_k)$ para representar un k -símplice orientado recorrido desde p_0 hasta p_k .

DEFINICIÓN 1.3. Dado $V = \{p_0, p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{R}^m$ ($k \leq m$) Sea $0 \leq r \leq k$. El r -símplice $\Delta_r = \langle p_{i_0} p_{i_1} \cdots p_{i_r} \rangle$ generado por elementos de V es llamado una r -cara de Δ_k la cual se denota por $\Delta_r \leq \Delta_k$.

1.2. Complejos Simpliciales.

DEFINICIÓN 1.4. Sea \mathcal{K} un conjunto finito de símlices en \mathbb{R}^m . Se dice que \mathcal{K} es un *complejo simplicial* si los símlices de \mathcal{K} satisfacen:

1.- Para $\Delta_k \in \mathcal{K}$ y $\Delta_r \leq \Delta_k$, se satisface que $\Delta_r \in \mathcal{K}$. Esto es, una cara arbitraria de un símplex en \mathcal{K} pertenece a \mathcal{K} .

2.- Si Δ y Δ' son dos símlices de \mathcal{K} entonces ó $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$ ó $\Delta \cap \Delta' \leq \Delta$ y $\Delta \cap \Delta' \leq \Delta'$. Es decir, la intersección de dos símlices en \mathcal{K} es o bien vacía o es una cara de ambos símlices.

Básicamente, un *complejo simplicial* es un conjunto cuyos elementos son símplices y la topología en \mathcal{K} es la inducida por la topología de \mathbb{R}^m . La unión de los símplices de \mathcal{K} es un subconjunto de \mathbb{R}^m al cual llamamos *polígono* del complejo simplicial \mathcal{K} que denotamos por $|\mathcal{K}|$. Para el caso $m = 2$ y $m = 3$ se utilizan los términos *polígono* y *poliedro* respectivamente.

EJEMPLO 1.5. Para $V = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$, un complejo simplicial sobre V está dado por el siguiente conjunto:

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{array}{l} 0 - \text{símplices} : (p_0), (p_1), (p_2), (p_3), (p_4), (p_5), \\ 1 - \text{símplices} : (p_0 p_1), (p_0 p_2), (p_1 p_2), \\ \quad (p_2 p_3), (p_3 p_4), (p_3 p_5), (p_4 p_5), \\ 3 - \text{símplice} : (p_0 p_1 p_2) \end{array} \right\}$$

Y su realización geométrica se ilustra en la Figura 1.2:

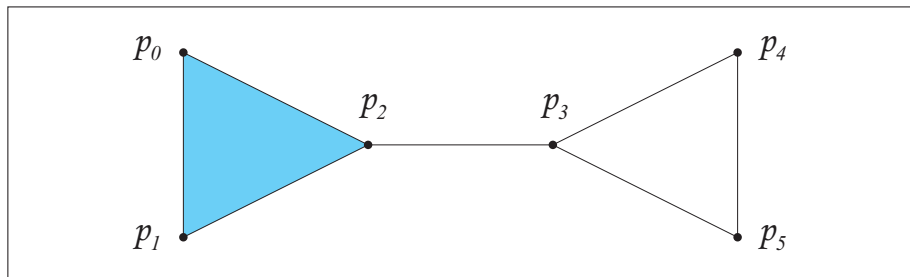


FIGURA 1.2. Complejo simplicial del ejemplo 1.5

EJEMPLO 1.6. En la Figura 1.3 se ilustra un ejemplo de un complejo simplicial en \mathbb{A}^3 .

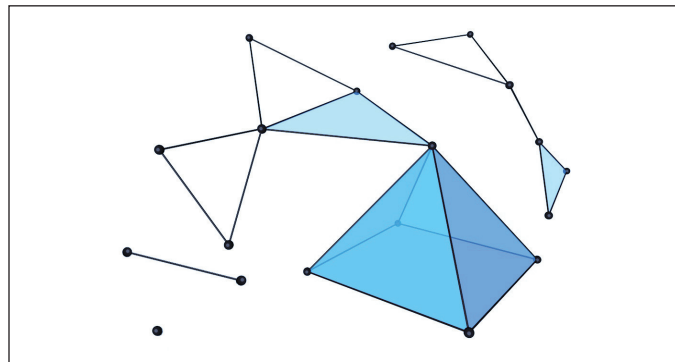


FIGURA 1.3. Complejo simplicial en \mathbb{A}^3

1.3. Grupos de cadenas de un complejo simplicial.

Dado un complejo simplicial \mathcal{K} , se denota por $S_n(\mathcal{K})$ al conjunto que contiene los n -símplices orientados de \mathcal{K} y $C_n(\mathcal{K})$ al grupo abeliano ² generado por $S_n(\mathcal{K})$ construido como se presenta a continuación.

Sea k_n el número de n -símplices en \mathcal{K} denotados por Δ_{n_i} con $1 \leq i \leq k_n$. Un elemento $c \in C_n(\mathcal{K})$ se llama n -cadena y se expresa como:

$$c = \sum_{i=1}^{k_n} c_i \Delta_{n_i}$$

Donde cada $c_i \in \mathbb{Z}$ y sólo un número finito de ellos es no nulo. A continuación se verifica que se satisfacen los axiomas de grupo.

Suma. Sean $c = \sum_{i=1}^{k_n} c_i \Delta_{n_i}$ y $c' = \sum_{i=1}^{k_n} c'_i \Delta_{n_i}$ dos n -cadenas de $C_n(\mathcal{K})$. Se define la suma de c y c' como:

$$c + c' = \sum_{i=1}^{k_n} (c_i + c'_i) \Delta_{n_i}$$

Elemento Neutro. Se define como $0 = \sum_{i=1}^{k_n} 0 \Delta_{n_i}$.

Elemento inverso. Si $c = \sum_{i=1}^{k_n} c_i \Delta_{n_i}$ entonces su inverso es $-c = \sum_{i=1}^{k_n} -c_i \Delta_{n_i}$.

Así, $C_n(\mathcal{K})$ es un grupo abeliano de rango I_n que se llama *grupo de n -cadenas de \mathcal{K}* .

OBSERVACIÓN 1.7. Nótese que al construir $C_n(\mathcal{K})$ se tomaron coeficientes en \mathbb{Z} ; sin embargo, la misma construcción es válida al tomar coeficientes en un anillo R , en cuyo caso, se tiene que $C_n(\mathcal{K})$ es un R -módulo. En lo sucesivo, los coeficientes se tomarán en \mathbb{Z} .

²Un grupo $G = (G, *)$ es *abeliano* si para cualesquiera $a, b \in G$ se satisface que $a * b = b * a$, es decir, si es válida la propiedad conmutativa con respecto a la operación $*$.

EJEMPLO 1.8. A partir del complejo simplicial \mathcal{K} dado en la Figura 1.2, los 3 primeros grupos de cadenas asociados son:

- $C_0(\mathcal{K}) = \left\{ \sum_{i=0}^5 c_i(p_i) : c_i \in \mathbb{Z} \right\} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{6 \text{ factores}}$, el \mathbb{Z} -módulo libre generado por los 0-símplices de \mathcal{K} (vértices)
- $C_1(\mathcal{K}) = \{c_1(p_0 p_1) + c_2(p_0 p_2) + c_3(p_1 p_2) + c_4(p_2 p_3) + c_5(p_3 p_4) + c_6(p_3 p_5) + c_7(p_4 p_5) : c_i \in \mathbb{Z}, i = 1 \cdots 7\} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{7 \text{ factores}}$, el \mathbb{Z} -módulo libre generado por los 1-símplices de \mathcal{K} (segmentos)
- $C_2(\mathcal{K}) = \{c(p_0 p_1 p_2) : c \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$, el \mathbb{Z} -módulo libre generado por el 2-símplice de \mathcal{K} (triángulo con interior)

1.4. Cadenas de complejos. Grupos de ciclos y grupos de bordes.

Se inicia esta sección con la definición de operador frontera, una pieza fundamental en la construcción de cadenas de complejos simpliciales.

DEFINICIÓN 1.9. Dado $\Delta_r = (p_0 p_1 \cdots p_r)$ con $(r > 0)$ un r -símplice orientado, la *frontera o borde* $\partial_r(\Delta_r)$ es la $(r - 1)$ -cadena definida como:

$$\partial_r(\Delta_r) = \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0 p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots p_r)$$

Donde \hat{p}_i significa que ese punto ha sido omitido.

La aplicación $\partial_r : S_r(\mathcal{K}) \longrightarrow S_{r-1}(\mathcal{K})$ es un operador que actúa sobre Δ_r para producir su frontera. Tomando $C_r(\mathcal{K})$, es posible extender ∂_r linealmente de la siguiente manera:

Para $c = \sum_{i=1}^r c_i \Delta_{r_i}$ se tiene:

$$\partial_r(c) = \sum_{i=1}^r c_i \partial_{r_i}(\Delta_{r_i})$$

Siendo $\sum_{i=1}^r c_i \partial_{r_i}(\Delta_{r_i})$ un elemento de $C_{r-1}(\mathcal{K})$, tenemos que $\partial_r : C_r(\mathcal{K}) \longrightarrow C_{r-1}(\mathcal{K})$ es un homomorfismo ³ llamado *operador frontera* que cumple con la condición de nilpotencia, es decir, $\partial_r \circ \partial_{r+1}$ es nula, resultado que se verifica en seguida.

TEOREMA 1.10. *La aplicación compuesta $\partial_r \circ \partial_{r+1} : C_{r+1} \longrightarrow C_{r-1}$ es la aplicación nula, es decir, $(\partial_{r+1} \circ \partial_{r+1})(c) = 0$ para toda $(r+1)$ -cadena $c \in C_{r+1}(\mathcal{K})$*

Demostración:

$$\begin{aligned}
\partial_r(\partial_{r+1}(\Delta)) &= \partial_r \left(\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i (p_0 p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots p_{r+1}) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \partial_r(p_0 p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots p_{r+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (p_0 p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots \hat{p}_j \cdots p_{r+1}) \\
&\quad + \sum_{j=i+1}^{r+1} (-1)^j (p_0 p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots \hat{p}_j \cdots p_{r+1}) \\
&= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (p_0 p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots \hat{p}_j \cdots p_{r+1}) \\
&\quad - \sum_{j > i} (-1)^{i+j} (p_0 p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots \hat{p}_j \cdots p_{r+1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

DEFINICIÓN 1.11. El núcleo y la imagen de ∂_r , $Z_r(\mathcal{K}) = Ker(\partial_r)$, $B_r(\mathcal{K}) = Im(\partial_r)$, son llamados *grupo de r -ciclos* y *grupo de r -bordes* respectivamente.

OBSERVACIÓN 1.12. Puesto que $C_r(\mathcal{K})$ es un grupo abeliano, $B_r(\mathcal{K})$ es un subgrupo normal de $C_{r-1}(\mathcal{K})$

³Dados dos grupos $(G, *)$ y (H, \circ) , una función $\phi : G \longrightarrow H$ es un *homomorfismo (de grupos)* si para todo $a, b \in G$ se cumple que $\phi(a * b) = \phi(a) \circ \phi(b)$

COROLARIO 1.13. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial n dimensional. Una sucesión de grupos de r -cadenas y operadores frontera $\{(C_r(\mathcal{K}), \partial_r)\}_{0 \leq r \leq n}$ con representación:

$$0 \xrightarrow{i} C_n(\mathcal{K}) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\partial_{n-2}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathcal{K}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathcal{K}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

es una cadena de complejos, la cual se conoce como cadena de complejos simpliciales de \mathcal{K} .

OBSERVACIÓN 1.14. Dado que $\partial_{r-1} \circ \partial_r = 0$, de la representación anterior es claro que $B_r(\mathcal{K}) \subset Z_{r-1}(\mathcal{K})$.

Por otra parte, al ser $C_r(\mathcal{K})$ el \mathbb{Z} -módulo libre generado por los r -símplices de \mathcal{K} , se puede representar a ∂_r matricialmente con respecto a la base estándar. Esta matriz se llama r -ésima matriz de incidencia del complejo simplicial \mathcal{K} .

Si k_r es el número de r -símplices y k_{r-1} el número de $(r-1)$ -símplices, al aplicar ∂_r a los r -símplices de la base de $C_r(\mathcal{K})$ y disponerlos en columna para construir a M_r , esta resulta de orden $k_{r-1} \times k_r$ con entradas dadas por:

$$[M_r]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta_i \in \partial(\Delta_j) \\ -1 & \text{si } -\Delta_i \in \partial(\Delta_j) \\ 0 & \text{si } \Delta_i \notin \partial(\Delta_j) \end{cases}$$

Donde Δ_i y Δ_j son el $(r-1)$ -símplice asociado a la fila i y el r -símplice dispuesto en la columna j respectivamente.

EJEMPLO 1.15. Para el complejo simplicial de la Figura 1.2, la matriz de incidencia asociada a ∂_1 , es:

$$\begin{array}{c} (p_0 \ p_1) \quad (p_0 \ p_2) \quad (p_1 \ p_2) \quad (p_2 \ p_3) \quad (p_3 \ p_4) \quad (p_3 \ p_5) \quad (p_4 \ p_5) \\ \begin{pmatrix} (p_0) & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (p_1) & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (p_2) & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (p_3) & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ (p_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ (p_5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.5. Grupos de Homología.

Asociado a un complejo simplicial n -dimensional K , se tienen los grupos:

$$B_{r+1}(\mathcal{K}) \subseteq Z_r(\mathcal{K}) \subseteq C_r(\mathcal{K})$$

En seguida se explicará la información topológica que se puede extraer a partir de estos grupos.

DEFINICIÓN 1.16. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial n -dimensional, para $0 \leq r \leq n$, el r -ésimo grupo de homología asociado a \mathcal{K} está definido por el cociente:

$$\mathcal{H}_r(\mathcal{K}) = \frac{Z_r(\mathcal{K})}{B_{r+1}(\mathcal{K})}$$

Y la homología de \mathcal{K} está determinada por:

$$\mathcal{H}(\mathcal{K}) = \bigoplus_{r=0}^n \mathcal{H}_r(\mathcal{K})$$

OBSERVACIÓN 1.17. Dada la estructura de subgrupo normal de $B_{r+1}(\mathcal{K})$, el r -ésimo grupo de homología de \mathcal{K} , $\mathcal{H}_r(\mathcal{K})$ está bien definido. Por convención, $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}) = 0$ para $r > n$ y $r < 0$.

Los elementos de $\mathcal{H}_r(\mathcal{K})$ son llamados *clases de homología* y dos r -ciclos z y z' están en la misma clase, si y sólo si $z - z' \in B_{r+1}(\mathcal{K})$ en cuyo caso decimos que z es homólogo a z' y lo denotamos por $z \sim z'$. Geométricamente, $z - z'$ es la frontera de alguna $(r + 1)$ -cadena. Por definición, cualquier borde $b \in B_{r+1}(\mathcal{K})$ es homólogo a 0, puesto que $b - 0 \in B_{r+1}(\mathcal{K})$.

$\mathcal{H}_r(\mathcal{K})$ contiene las clases de r -ciclos que no son borde de alguna $(r + 1)$ -cadena. Un r -ciclo en $\mathcal{H}_r(\mathcal{K})$ representa lo que se conoce como *hueco* o *agujero* de dimensión r ; por tanto, la homología mide la conexidad y la cantidad de huecos de dimensión r de un espacio topológico triangulable.

1.6. Triangulación y homología.

El objetivo de la Topología Algebraica es medir propiedades de espacios topológicos utilizando métodos algebraicos. Para extraer información de un espacio topológico X , se asocia una separación en símlices orientados (puntos, segmentos, triángulos...) Esta operación de asignación es la que se conoce como *triangulación*.

DEFINICIÓN 1.18. Sea X un espacio topológico. Si existe un complejo simplicial \mathcal{K} y un homeomorfismo $\mathcal{T} : |\mathcal{K}| \rightarrow X$, se dice que X es *triangulable* y $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ conforma una *triangulación* de X .

Con esta definición, puede decirse que a menudo se interpreta a $|\mathcal{K}|$ como el espacio topológico cuya triangulación es \mathcal{K} .

EJEMPLO 1.19. La Figura 1.4 muestra una triangulación del cilindro $S^1 \times [0, 1]$.

Un resultado interesante es el siguiente: al considerar una triangulación $(\mathcal{K}, \mathcal{T})$ de un espacio topológico X , los grupos de cadenas $C_r(\mathcal{K})$ cuentan los símlices de dimensión r y el operador borde ∂ entre ellos codifica la manera en que los símlices se asocian a X .

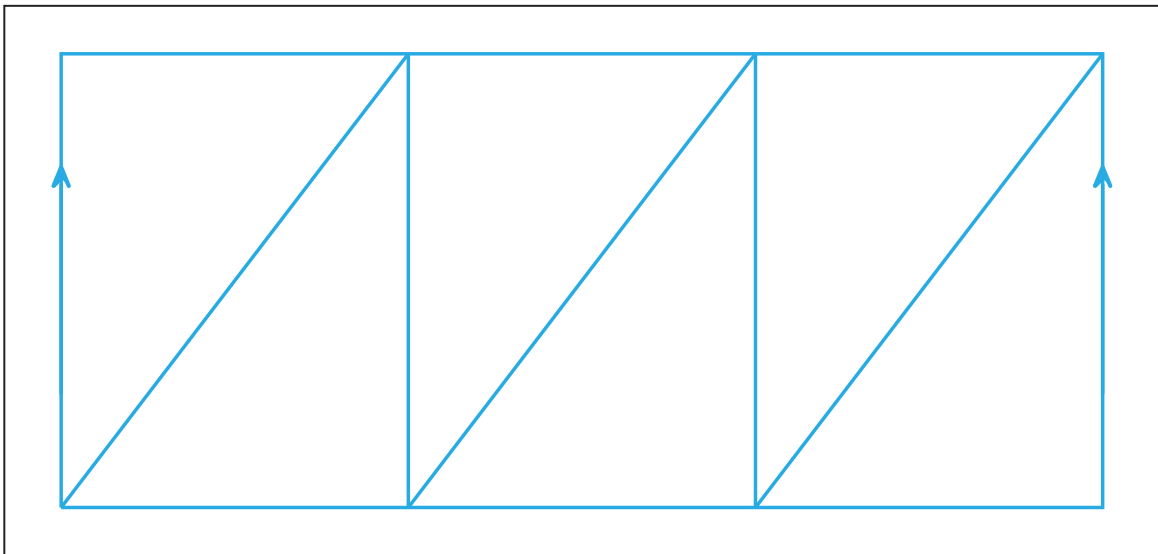


FIGURA 1.4. Triangulación de un cilindro.

Es importante resaltar que los grupos de homología asociados a un espacio topológico no dependen de la triangulación; consecuencia directa del hecho de que los grupos de homología son invariantes topológicos, específicamente:

Dados \mathcal{K} , \mathcal{L} dos complejos simpliciales, un morfismo simplicial $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ induce una función continua $|f| : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ lineal en cada símplice de \mathcal{K} , la cual a su vez, induce un homomorfismo $f_r : \mathcal{H}_r(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{H}_r(\mathcal{L})$, sin embargo, aunque no toda función continua entre poliedros es lineal, tiene sentido tomar en cuenta funciones continuas entre poliedros que induzcan homomorfismos entre grupos de homología gracias al teorema de aproximación simplicial de funciones continuas entre poliedros [19].

El razonamiento anterior conlleva a un resultado importante: *los grupos de homología son invariantes topológicos*, es decir, no dependen de la triangulación de X . De manera más precisa se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 1.20. *Sean X e Y dos espacios topológicos homeomorfos y sean $(\mathcal{K}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}})$ y $(\mathcal{L}, \mathcal{T}_{\mathcal{L}})$ triangulaciones de X e Y respectivamente. Entonces:*

$$\mathcal{H}_r(\mathcal{K}) \cong \mathcal{H}_r(\mathcal{L})$$

Y por tanto:

$$\mathcal{H}_r(X) \cong \mathcal{H}_r(Y)$$

Demostración extensa. Véase en [20].

En el caso particular en que $(\mathcal{K}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}})$ y $(\mathcal{L}, \mathcal{T}_{\mathcal{L}})$ son triangulaciones de X , se tiene que $\mathcal{H}_r(X)$ no depende de la triangulación elegida.

A continuación se explicará de forma explícita el vínculo entre los grupos de homología y las propiedades intrínsecas de un espacio topológico a través del número de clases de homología. El cálculo de la cantidad de estas clases es el objetivo central de los llamados Números de Betti.

1.7. Números de Betti y Conexidad.

En honor al matemático Enrico Betti (1823-1892), Poincaré define por primera vez los números de Betti. La importancia de estos números radica en que proporcionan una idea de conexidad de orden superior al numerar los ciclos tales que ninguna combinación lineal es homóloga a cero, esto es, el r -ésimo número de Betti representa el máximo número de r -ciclos independientes que existe en una triangulación arbitraria de V , más precisamente:

DEFINICIÓN 1.21. Dado un complejo simplicial n -dimensional \mathcal{K} , el r -ésimo número de Betti, denotado por $\beta_r(\mathcal{K})$ es el rango del r -ésimo grupo de homología $\mathcal{H}_r(\mathcal{K})$.

La definición 1.20 clarifica la relación entre los números de Betti y la conexidad, ya que $\beta_r(\mathcal{K})$ contabiliza la cantidad de r -ciclos generadores presentes en un complejo simplicial, es decir, los huecos r -dimensionales de \mathcal{K} . De esta manera, $\beta_0(\mathcal{K})$ cuenta el número de componentes conexas o huecos de dimensión 0, $\beta_1(\mathcal{K})$ los de dimensión 1, $\beta_2(\mathcal{K})$ los de dimensión 2 y así sucesivamente.

EJEMPLO 1.22. Sea X un toro. Sus números de Betti son $\beta_0 = \beta_2 = 1$ y $\beta_1 = 2$. β_0 indica que el espacio tiene una componente conexa, mientras que β_1 señala que existen dos clases de dimensión 1 representadas con color azul en la Figura 1.5. El valor de β_2 sugiere que el espacio tiene un hueco de dimensión 2: la región vacía interna cerrada.

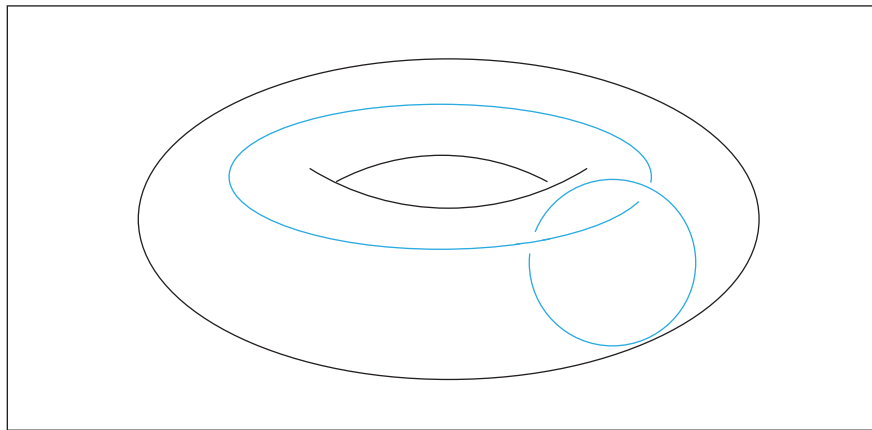


FIGURA 1.5. Dos clases independientes de dimensión 2 en el torus.

1.8. Cálculo de los números de Betti.

El r -ésimo número de Betti asociado a un complejo simplicial corresponde al número de r -ciclos independientes que no son borde, es decir:

$$(1.1) \quad \beta_r(\mathcal{K}) = Rg(Z_r) - Rg(B_{r+1})$$

Por tanto, $\beta_r(\mathcal{K})$ se puede calcular de manera sencilla considerando la r -ésima matriz de incidencia M_r y tomando en cuenta que:

$$(1.2) \quad Rg(Z_r) = k_r - Rg(M_r)$$

$$(1.3) \quad Rg(B_{r+1}) = Rg(M_{r+1})$$

De manera que, al sustituir (1.2) y (1.3) en la ecuación (1.1) se tiene que:

$$\beta_r(\mathcal{K}) = k_r - Rg(M_r) - Rg(M_{r+1})$$

EJEMPLO 1.23. Para el complejo simplicial de la Figura 1.2, en el Ejemplo 1.14 se mostró la matriz M_1 . La matriz M_2 está dada por:

$$\begin{matrix} & (p_0 & p_1 & p_2) \\ \begin{matrix} (p_0 & p_1) \\ (p_0 & p_2) \\ (p_1 & p_2) \\ (p_2 & p_3) \\ (p_3 & p_4) \\ (p_3 & p_5) \\ (p_4 & p_5) \end{matrix} & \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Y así, siendo $k_r = 7$, $Rg(M_1) = 5$ y $Rg(M_2) = 1$, se tiene que:

$$\beta_1 = 7 - 5 - 1 = 1$$

Con el resultado $\beta_1 = 1$ se identifica el agujero de dimensión 2 correspondiente al triángulo con vértices p_3, p_4 y p_5 sin el interior.

2. Homología Persistente.

Desde una perspectiva combinatoria, es posible generar diversos complejos simpliciales a partir de un conjunto de puntos. El problema radica en construir un complejo simplicial que mantenga las propiedades topológicas de un objeto a partir de una muestra determinada. La Homología Persistente contribuye a la solución de este problema. Para un estudio a fondo de Homología Persistente, véase [6].

Por otra parte, es posible demostrar que dado un conjunto de puntos, en realidad sólo existe un número finito de complejos simpliciales que pueden ordenarse como una sucesión creciente. Este es el concepto de *filtración* de un complejo simplicial, cuyo enunciado se da a continuación.

DEFINICIÓN 1.24. Dado un complejo simplicial \mathcal{K} , una *filtración* de \mathcal{K} es una sucesión anidada $K^0 \subset K^1 \subset K^2 \subset \dots \subset K^m = \mathcal{K}$ de subcomplejos de \mathcal{K} .

Un ejemplo de filtración de un complejo simplicial se puede ver en la Figura 1.6 tomando el complejo simplicial de la Figura 1.2.

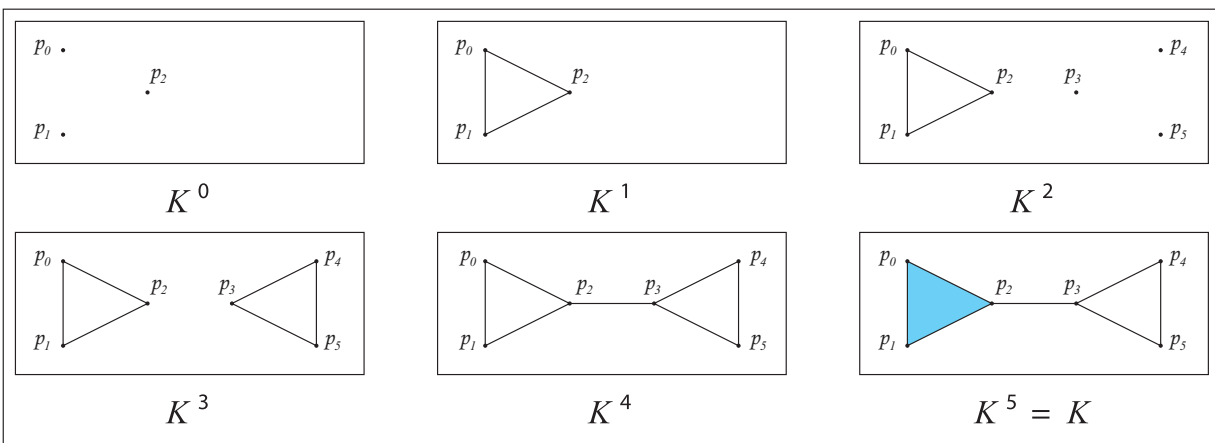


FIGURA 1.6. Filtración de un complejo simplicial.

En consecuencia, se ha establecido la existencia de un complejo simplicial maximal a partir de un conjunto de puntos en el que estos constituyen los 0-símplices.

Notación: Dado un complejo simplicial filtrado \mathcal{K} y tomando la j -ésima componente de la filtración \mathcal{K}^j , se denota a $C_r(\mathcal{K}^j)$, $Z_r(\mathcal{K}^j)$, $B_{r+1}(\mathcal{K}^j)$ y $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^j)$ por C_r^j , Z_r^j , B_{r+1}^j y \mathcal{H}_r^j respectivamente. Por tanto, se puede representar la filtración del complejo simplicial mediante el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
& 0 & & 0 & & \dots & & 0 & & 0 \\
& \downarrow i & & \downarrow i & & & & \downarrow i & & \downarrow i \\
& C_n^0 & \xrightarrow{i_n^0} & C_n^1 & \xrightarrow{i_n^1} & \dots & \xrightarrow{i_n^{m-2}} & C_n^{m-1} & \xrightarrow{i_n^{m-1}} & C_n^m \\
\partial_n^0 \downarrow & & & \partial_n^1 \downarrow & & & & \partial_n^{m-1} \downarrow & & \partial_n^m \downarrow \\
& C_{n-1}^0 & \xrightarrow{i_{n-1}^0} & C_{n-1}^1 & \xrightarrow{i_{n-1}^1} & \dots & \xrightarrow{i_{n-1}^{m-1}} & C_{n-1}^{m-1} & \xrightarrow{i_{n-1}^{m-1}} & C_{n-1}^m \\
\partial_{n-1}^0 \downarrow & & & \partial_{n-1}^1 \downarrow & & & & \partial_{n-1}^{m-1} \downarrow & & \partial_{n-1}^m \downarrow \\
& \vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\
\partial_3^0 \downarrow & & & \partial_3^1 \downarrow & & & & \partial_3^{m-1} \downarrow & & \partial_3^m \downarrow \\
& C_2^0 & \xrightarrow{i_2^0} & C_2^1 & \xrightarrow{i_2^1} & \dots & \xrightarrow{i_2^{m-2}} & C_2^{m-1} & \xrightarrow{i_2^{m-1}} & C_2^m \\
\partial_2^0 \downarrow & & & \partial_2^1 \downarrow & & & & \partial_2^{m-1} \downarrow & & \partial_2^m \downarrow \\
& C_1^0 & \xrightarrow{i_1^0} & C_1^1 & \xrightarrow{i_1^1} & \dots & \xrightarrow{i_1^{m-2}} & C_1^{m-1} & \xrightarrow{i_1^{m-1}} & C_1^m \\
\partial_1^0 \downarrow & & & \partial_1^1 \downarrow & & & & \partial_1^{m-1} \downarrow & & \partial_1^m \downarrow \\
& C_0^0 & \xrightarrow{i_0^0} & C_0^1 & \xrightarrow{i_0^1} & \dots & \xrightarrow{i_0^{m-2}} & C_0^{m-1} & \xrightarrow{i_0^{m-1}} & C_0^m \\
\partial_0^0 \downarrow & & & \partial_0^1 \downarrow & & & & \partial_0^{m-1} \downarrow & & \partial_0^m \downarrow \\
& 0 & & 0 & & \dots & & 0 & & 0
\end{array}$$

Donde i_r^j es la aplicación inducida por la inclusión entre los r -símplices de \mathcal{K}^j y los de \mathcal{K}^{j+1} . Más aún, para $j < p$, se denota por $i_r^{j,p}$ a la aplicación inducida por la inclusión entre los r -símplices de \mathcal{K}^j y los de \mathcal{K}^p . Con esta notación se presenta la definición de Homología Persistente para complejos simpliciales filtrados.

DEFINICIÓN 1.25. El p -persistente r -ésimo grupo de homología de K^j , denotado por $\mathcal{H}_r^{j,p}$ está definido por el cociente:

$$\mathcal{H}_r^{j,p} = \frac{i_r^{j,p}(Z_r^j)}{B_{r+1}^p \cap i_r^{j,p}(Z_r^j)}$$

Los elementos de $\mathcal{H}_r^{j,p}$ son los r -ciclos de K^j que perduran hasta K^p , por tanto, el p -persistente r -ésimo número de Betti $\beta_r^{j,p}$ cuenta los huecos de dimensión r que se forman en la componente j y *persisten* en la componente p . Si tomamos $\alpha > 0$ como el parámetro de la filtración, es posible definir la persistencia de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 1.26. La *persistencia* es una medida de la duración de un r -ciclo definida como la diferencia entre el valor de α para el cual el r -ciclo se produce y el valor α para el cual el r -ciclo se le añade su interior al formarse el $(r + 1)$ -símplice correspondiente.

EJEMPLO 1.27. En la filtración mostrada en la Figura 1.6, el hueco o clase 2-dimensional representada por el triángulo de vértices p_0, p_1, p_2 (en azul) se forma en la componente K^1 y se cierra en la componente K^5 , mientras que el hueco de dimensión 2 destacado en color rojo que se forma en la componente K^3 no se cierra.

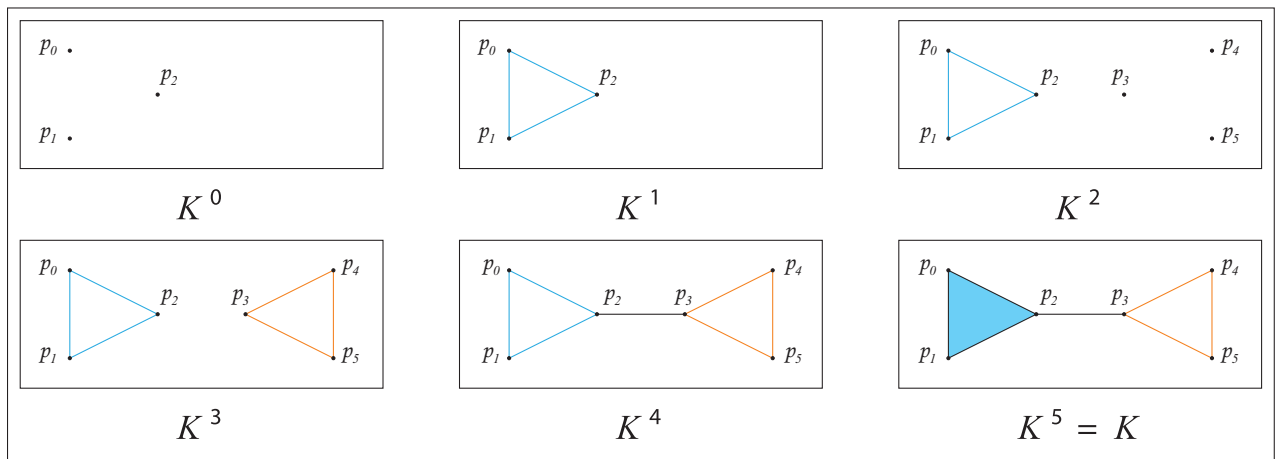


FIGURA 1.7. Clases de homología persistentes de dimensión 2.

2.1. Códigos de Barra.

Para dar una idea del significado de la Homología Persistente, se ofrece una breve descripción de la manera usual de visualización de la persistencia. La persistencia de una clase de homología r -dimensional puede representarse mediante un intervalo. Una clase de homología que se produce en una componente K^i de una filtración continua y concluye al ocurrir la componente K^j ($i < j$) se dice que persiste en $[i, j)$. Si dicha clase se produce a un nivel K^i y no concluye, utilizamos el intervalo $[i, \infty)$.

Se entiende por *código de barra* a la representación gráfica del conjunto de intervalos de persistencia resultantes de una filtración.

EJEMPLO 1.28. Los códigos de barra de grado 0 y 1 asociados a la filtración de la Figura 1.6 se muestran en la Figura 1.8

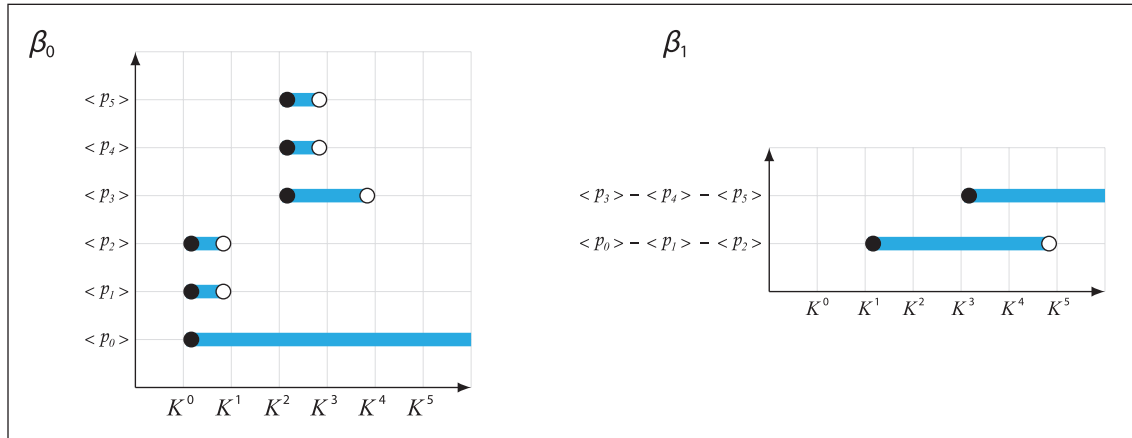


FIGURA 1.8. Ejemplos de códigos de barra.

En el caso del código de barra de β_0 , el vértice (p_0) es una componente conexa que se produce en el nivel 0 y persiste indefinidamente al contrario del vértice (p_5) , el cual persiste entre las componentes K^2 y K^3 . En el caso de β_1 , donde los huecos son las clases de homología de dimensión 1, un hueco entre los segmentos $(p_0 p_1)$, $(p_0 p_2)$, $(p_1 p_2)$ aparece en el nivel 1 de la filtración y se cierra con el triángulo $(p_0 p_1 p_2)$; mientras que el hueco que aparece en el nivel 3 de la filtración no desaparece.

Capítulo 2

α -Formas

Uno de los problemas más difíciles en la reconstrucción de la forma a partir de una nube de puntos es comprender cómo *conectar los puntos* para formar una superficie que tenga las mismas propiedades topológicas y características geométricas de la original. Las α -Formas fueron introducidas en el plano por Edelsbrunner en [10] y extendidas a dimensiones altas en [11], como una herramienta geométrica para entender la *forma* de un conjunto no organizado de puntos.

El objetivo inicial de las α -Formas fue dar una respuesta a las deficiencias que tiene el procedimiento del cálculo de la cápsula convexa de un conjunto de puntos utilizando una línea pivote, como se presenta en [15]. Con el método de α -Formas, en lugar de tomar una línea, se considera un disco de radio $\alpha \geq 0$ para precisar el contorno de la forma [10]. Existen tres categorías en las que se aplica el método de α -Formas:

Reconocimiento de Patrones. Caracterización de distribución de puntos en el espacio (por ejemplo galaxias en el universo)

Procesamiento del muestreo digital de formas. Reconstrucción de la forma de un objeto a partir de una muestra finita de puntos sobre la superficie.

Biología estructural molecular. Modelado de aspectos estructurales de proteínas y otras bio-moléculas relevantes para el funcionamiento de la vida.

En esta sección se proporciona una idea intuitiva de la técnica de α -Formas, se revela su definición formal, se ilustran algunos ejemplos, se expone la relación existente con la triangulación Delaunay y finalmente se conecta con la Homología Persistente.

1. Introducción a las α -Formas.

Tomando en cuenta que la idea central de este Trabajo Especial de Grado consiste en analizar un conjunto n -dimensional de puntos ($n = 2$ o 3) es necesario aclarar que en algunas aplicaciones la nube de puntos puede llegar a ser tan grande y complicada (con muchos huecos r -dimensionales) que la visualización o la comprensión de la *forma* representada por dicha nube de puntos puede ser muy difícil. Para dar una interpretación precisa, resulta indispensable considerar una definición de la *forma* de una nube de puntos. Las α -Formas (en inglés α -Shapes) facilitan este proceso.

Se inicia esta sección describiendo intuitivamente la idea detrás del método de α -Formas para luego revelar la definición formal a partir de la triangulación Delaunay. Al finalizar, se señala cómo se aplica la técnica de Homología Persistente en el método de α -Formas.

1.1. Idea intuitiva.

La α -Forma de una nube de puntos puede considerarse como una generalización de la cápsula convexa del conjunto de puntos. La denominación α se refiere a la siguiente idea:

Sea $V = \{p_0, p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^m$ ¹. Para $\alpha > 0$ y $x \in \mathbb{R}^m - V$ se define $B^\circ(x; \alpha) = B_x(\alpha)$ como la α -bola de x . Se dice que $B_x(\alpha)$ es *vacía* (de puntos en V) si, y sólo si $V \cap B_x(\alpha) = \emptyset$ y se denota por $U(\alpha)$ a la unión de α -bolas vacías. Los puntos que no pertenecen a $U(\alpha)$ constituyen la forma de la nube de puntos.

Se llama α -*cápsula* de V , denotada V_α , a la unión de k -símplices definidos por subconjuntos de V que satisfacen la siguiente condición:

Para $T \subset V$:

$$\Delta_T \in V_\alpha \iff \Delta_T \cap U(\alpha) = \emptyset$$

¹En lo sucesivo, para \mathbb{R}^m se tomará $m = 2$ o 3 .

La α -Forma de V es el resultado de omitir los k -símplices que forman el interior de V_α (ejemplo en la Figura 2.1-d).

La Figura 2.1 ilustra el caso en el plano. La frontera del conjunto de puntos que no están en $U(\alpha)$ está definida por arcos circulares de curvatura constante $\frac{1}{\alpha}$ que conectan los puntos de $V \cap \partial(B_x(\alpha))$ para alguna $B_x(\alpha)$ vacía (Figura 2.1-b) Al sustituir los arcos por segmentos, se obtiene la α -Forma de V como se observa en la Figura 2.1-d. Para los casos en \mathbb{R}^m con $m = 2$ o 3 , $\partial(V_\alpha)$ está formada por 1-símplices y 2-símplices respectivamente. La Figura 2.1-c ilustra el caso en el plano.

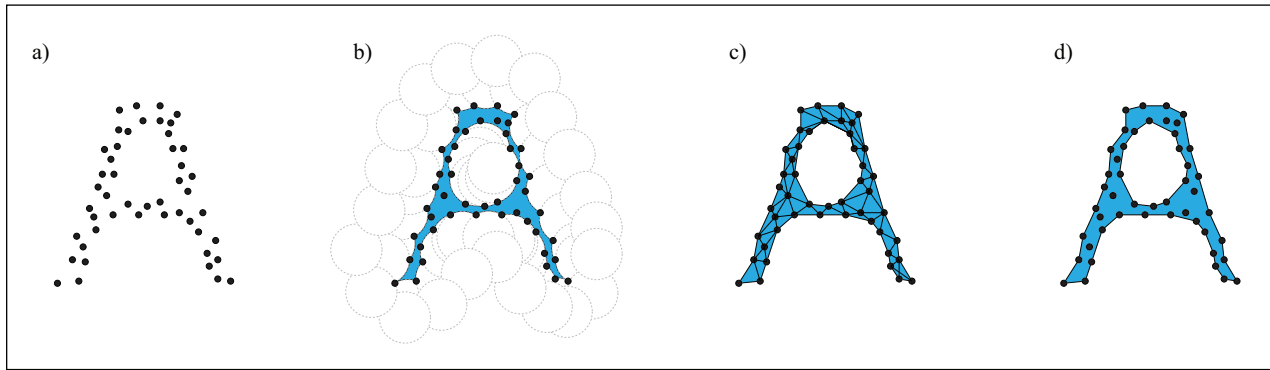


FIGURA 2.1. a) Nube de puntos en el plano. b) Puntos en \mathbb{R}^2 que no están dentro de alguna $B_x(\alpha)$. c) α -cápsula constituida por 2-símplices. d) α -Forma resultante.

Específicamente, para el caso en 2 dimensiones, si $V \cap \partial(B_x(\alpha)) = \{p_i, p_j\}$ entonces se reemplaza el arco circular que conecta p_i y p_j por el 1-símplice (p_i, p_j) y en general, si $T = \{p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\} \subset V$ es tal que $\partial(B_x(\alpha)) \cap V = T$ se añaden 1-símplices que conectan puntos de T próximos en distancia. El caso en 3 dimensiones se explica con detalle en [9].

OBSERVACIÓN 2.1. En \mathbb{R}^m , $\partial(V_\alpha)$ está conformada por $(m - 1)$ -símplices e $int(V_\alpha)$ por m -símplices.

Nótese que para α suficientemente pequeño, tal que no existen puntos de V a conectar ($B_x(\alpha) = \emptyset \forall x \in \mathbb{R}^m - V$), la α -Forma de V es precisamente V , mientras que para un valor de α suficientemente grande, la α -Forma corresponde a la cápsula convexa de V la cual generalmente se denota por $Con(V)$.

En lo que sigue, se asumirá que V es un conjunto de puntos afinmente independiente para evitar casos especiales, no obstante, se desarrolló una técnica llamada *Simulación de Simplicidad* (SoS) descrita en [8] la cual *simula una perturbación infinitesimal de los puntos* para colocarlos en posición general. Notemos que la suposición de independencia afín asegura que para cada $T \subset V$ con $|T| = r + 1 \leq n + 1$ la cápsula convexa de T tiene exactamente dimensión r y por tanto es un r -símplice.

1.2. Triangulación Delaunay.

Para realizar la construcción de la α -cápsula de un conjunto de puntos generalmente se utiliza la técnica de la triangulación Delaunay. Consideremos un conjunto V de puntos en \mathbb{R}^m , entonces para $m = 2$, la triangulación Delaunay es una triangulación tal que no existen puntos de V dentro del círculo circunscrito de cualquier triángulo, para el caso $m > 2$, las palabras círculo y triángulo son sustituidas por hiperesfera y símplice respectivamente. Más específicamente:

DEFINICIÓN 2.2. Dado un conjunto $V \subset \mathbb{R}^m$ afinmente independiente, la *triangulación Delaunay de V* es el complejo simplicial $Del(V)$ que consta de:

i) Todos los r -símplices $\Delta_r = (p_0 p_1 \cdots p_r)$ tal que la esfera circunscrita en $\{p_0, p_1, \cdots, p_r\}$ no contiene algún otro punto de V .

ii) Para $\Delta_r \in Del(V)$ si $\Delta_k \leq \Delta_r$ entonces $\Delta_k \in Del(V)$

OBSERVACIÓN 2.3. La condición de independencia afín de V garantiza la unicidad de la triangulación Delaunay.

EJEMPLO 2.4. Obsérvese el conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 de la Figura 2.2. La triangulación de Delaunay de este conjunto se muestra en la Figura 2.3.

Es importante destacar que la triangulación Delaunay puede entenderse como la realización geométrica del nervio del diagrama de Voronoi. El caso en \mathbb{R}^2 de este hecho se explica brevemente en el apéndice.

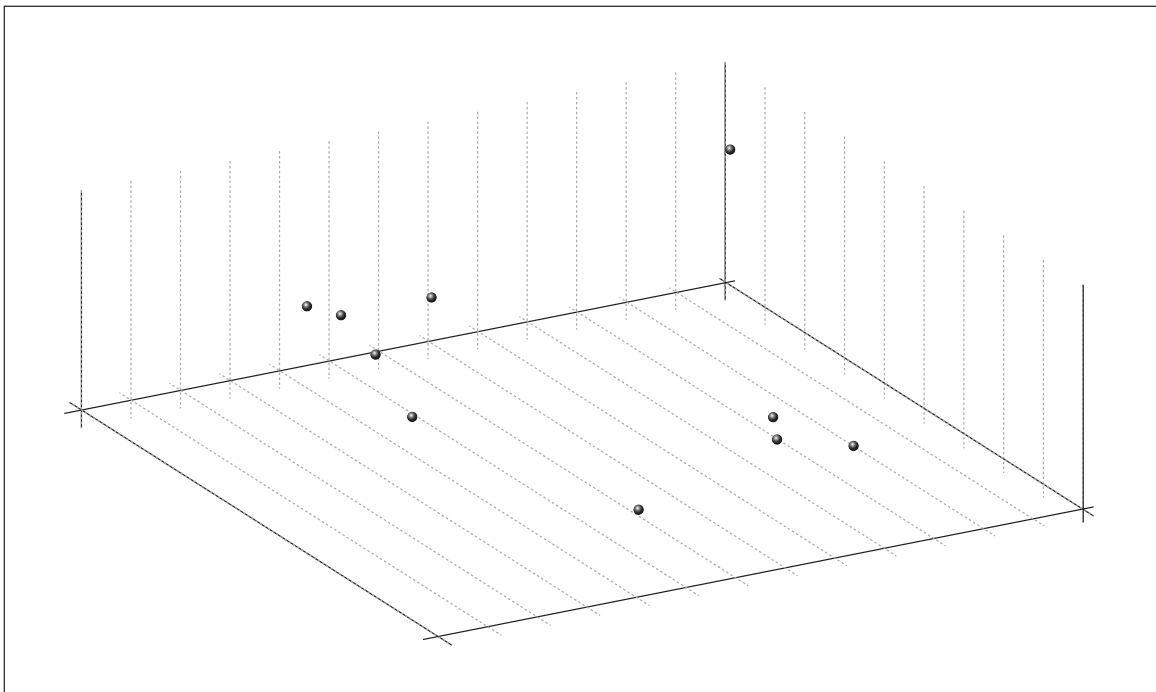
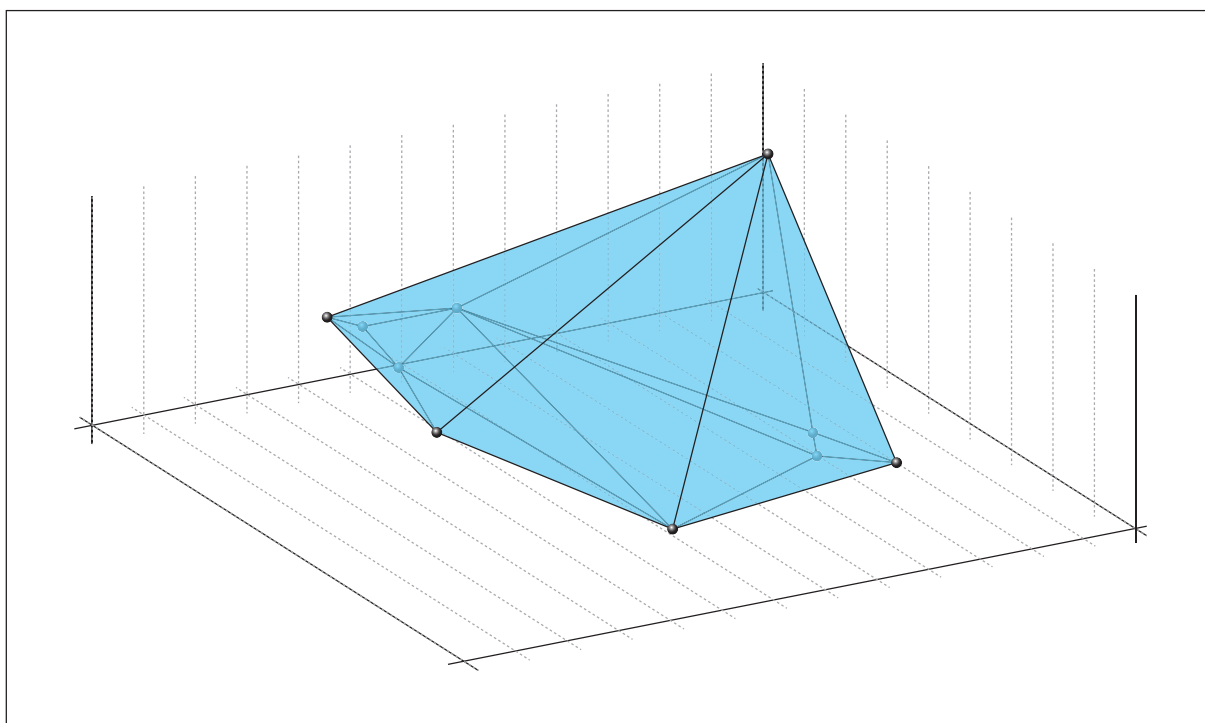
FIGURA 2.2. Conjunto de puntos en \mathbb{A}^3 .

FIGURA 2.3. Triangulación Delaunay del conjunto de puntos de la Figura 2.2.

2. Definición formal de α -Formas

DEFINICIÓN 2.5. Para $T \subset V$ con $|T| = r + 1$, un r -símplice Δ_T se dice α -expuesto si existe $x \in \mathbb{R}^m - V$ tal que $B_x(\alpha)$ es vacía y $T = \partial(B_x(\alpha)) \cap V$.

Nótese que si Δ_T es α -expuesto entonces todas sus caras también lo son.

EJEMPLO 2.6. Tomando $V = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ puntos en \mathbb{R}^2 como se muestra en la Figura 2.4. Para $T = \{p_2, p_3\}$, en el primer caso, el 1-símplice Δ_T está α -expuesto, debido a que para $x = x_0 \in \mathbb{R}^2$ se tiene:

$$\partial(B_{x_0}(\alpha)) \cap V = \{p_2, p_3\} = T$$

siendo $B_{x_0}(\alpha)$ vacía.

Obsérvese que, en el segundo caso, para $T = \{p_2, p_4\}$, el 1-símplice Δ_T no está α -expuesto, ya que no existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\partial(B_x(\alpha)) \cap V = T$ siendo $B_x(\alpha)$ vacía. Puede notarse claramente que para x_0 , a pesar de ser $T = \partial(B_x(\alpha)) \cap V$ es claro que $V \cap B_x(\alpha) = \{p_3\} \in V$ y por tanto no es vacía.

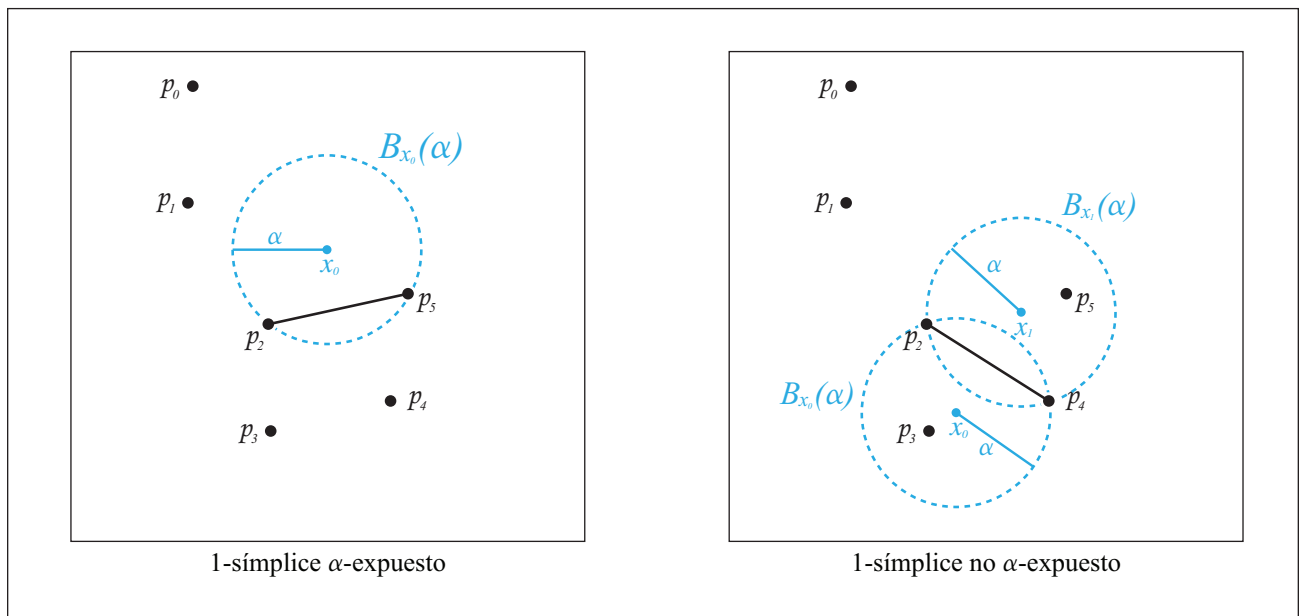


FIGURA 2.4. Ejemplo de 1-símplice α -expuesto.

Una vez alcanzada la definición de símplice α -expuesto, se puede demostrar una de las proposiciones más importante para este Trabajo Especial de Grado. La importancia de esta proposición radica en su influencia directa en la construcción de la α -Forma.

PROPOSICIÓN 2.7. *Sean $V \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto de puntos afínmente independiente, $T \subset V$ y $\alpha > 0$. Si Δ_T es un r -símplice α -expuesto entonces $\Delta_T \in Del(V)$.*

Demostración:

Como Δ_T es α -expuesto, entonces existe $x_0 \in \mathbb{R}^m$ tal que la bola abierta vacía $B_{x_0}(\alpha)$ satisface: $\partial(B_{x_0}(\alpha)) \cap V = T$, es decir, $B_{x_0}(\alpha)$ conforma la esfera circunscrita en los 0-símplices de Δ_T y no contiene puntos de V en su interior, además, al ser todas las caras de Δ_T símplices α -expuestos, se cumple que:

$$\Delta_T \in Del(V)$$

■

Claramente, el recíproco de la Proposición 2.7 no necesariamente es válido, sin embargo, es posible construir un complejo simplicial aplicando lo que se conoce como α -prueba, la cual consiste en tomar r -símplices en el sentido de la condición i) de la definición 2.8.

DEFINICIÓN 2.8. Para $\Delta_T \in Del(V)$, sea $B_{x_T}(r_T)$ la esfera circunscrita en los 0-símplices de Δ_T . Se llama α -complejo de V al complejo simplicial $V_\alpha \subset Del(V)$ dado por:

Δ_T está en V_α si se cumple una de las siguientes:

- i) $r_T \leq \alpha$ y la r_T -bola centrada en x_T es vacía (α -prueba)
- ii) Δ_T es una cara de otro símplice en V_α .

Por definición, es claro que la frontera del α -complejo está conformada por los símplices α -expuestos de V , es decir:

$$\partial(V_\alpha) = \{\Delta_T : T \subset V \text{ y } \Delta_T \text{ es } \alpha\text{-expuesto}\}$$

Es de suma importancia notar que la Proposición 2.6 junto con la Definición 2.8 implican que $\partial(V_\alpha) \subset Del(V)$ y en conjunto garantizan la existencia de un polígono que tiene los simplices $\partial(V_\alpha)$ como frontera; **este polígono es la α -Forma de V** , de manera que la siguiente puede tomarse como una definición alternativa de la α -Forma de V .

DEFINICIÓN 2.9. La α -Forma de V es el polígono cuya triangulación es V_α , es decir, si se denota como $\mathcal{F}_\alpha(V)$ a la α -Forma de V , entonces:

$$\mathcal{F}_\alpha(V) := |V_\alpha|$$

$\mathcal{F}_\alpha(V)$ puede ser no convexa e incluso tener huecos. Nótese además que el conjunto $\partial(V_\alpha)$ no necesariamente representa una frontera, por ejemplo: En la Figura 2.5, el símplice no es frontera puesto que un segmento está contenido en una región encerrada. Para subsanar este tipo de problemas, la Proposición 2.10 muestra que este caso no es posible para $\mathcal{F}_\alpha(V)$.

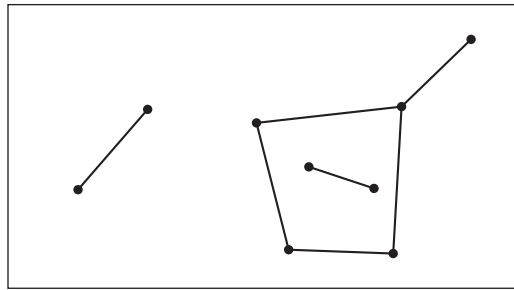


FIGURA 2.5. Símplices que no son frontera

PROPOSICIÓN 2.10. Sea $\Delta_T \in \partial(V_\alpha)$. Δ_T delimita el interior de $\mathcal{F}_\alpha(V)$ si y sólo si, una de las dos α -bolas $B_{x_T}(\alpha)$ con $T = \partial(B_{x_T}(\alpha)) \cap V$ es vacía.

Demostración:

(\Rightarrow) Como $\Delta_T \in \partial(V_\alpha)$, una de las dos α -bolas es entonces vacía. Se debe verificar que la otra no lo es, no obstante, como Δ_T está en la frontera de V_α , entonces existe un símplice $\Delta_U \in V_\alpha$ tal que $\Delta_T \leq \Delta_U$. En consecuencia, la esfera circunscrita en los 0-simplices de Δ_U tiene radio $r_U < \alpha$ lo cual prueba que la α -bola que encierra a Δ_U no es vacía.

(\Leftarrow) Al ser una de las α -bolas con $T = \partial(B_{x_T}(\alpha)) \cap V$ vacía, el símplice Δ_T es α -expuesto y por tanto está en $\partial(V_\alpha)$.

■

OBSERVACIÓN 2.11. Esta proposición permite determinar el “lado” de $\Delta_T \in \partial(V_\alpha)$ que contiene el interior de $\mathcal{F}_\alpha(V)$.

2.1. Ejemplos:

- La Figura 2.6 muestra un ejemplo del proceso de obtención de la $\mathcal{F}_\alpha(V)$ de un conjunto de puntos en el plano.
- La Figura 2.7 ilustra algunas $\mathcal{F}_\alpha(V)$ con diferentes valores de α para un conjunto de 2630 puntos en \mathbb{R}^3 tomados de datos del programa *Silicon Graphic's Solidview*. En el primer cuadro, se utilizó un parámetro α muy grande, dando como resultado la cápsula convexa de la nube de puntos. Seguidamente, en cada cuadro a derecha se aprecia una muestra de la α -bola correspondiente. En el último cuadro, claramente se observa que al tomar α muy pequeño entonces $\mathcal{F}_\alpha(V)$ es exactamente V .

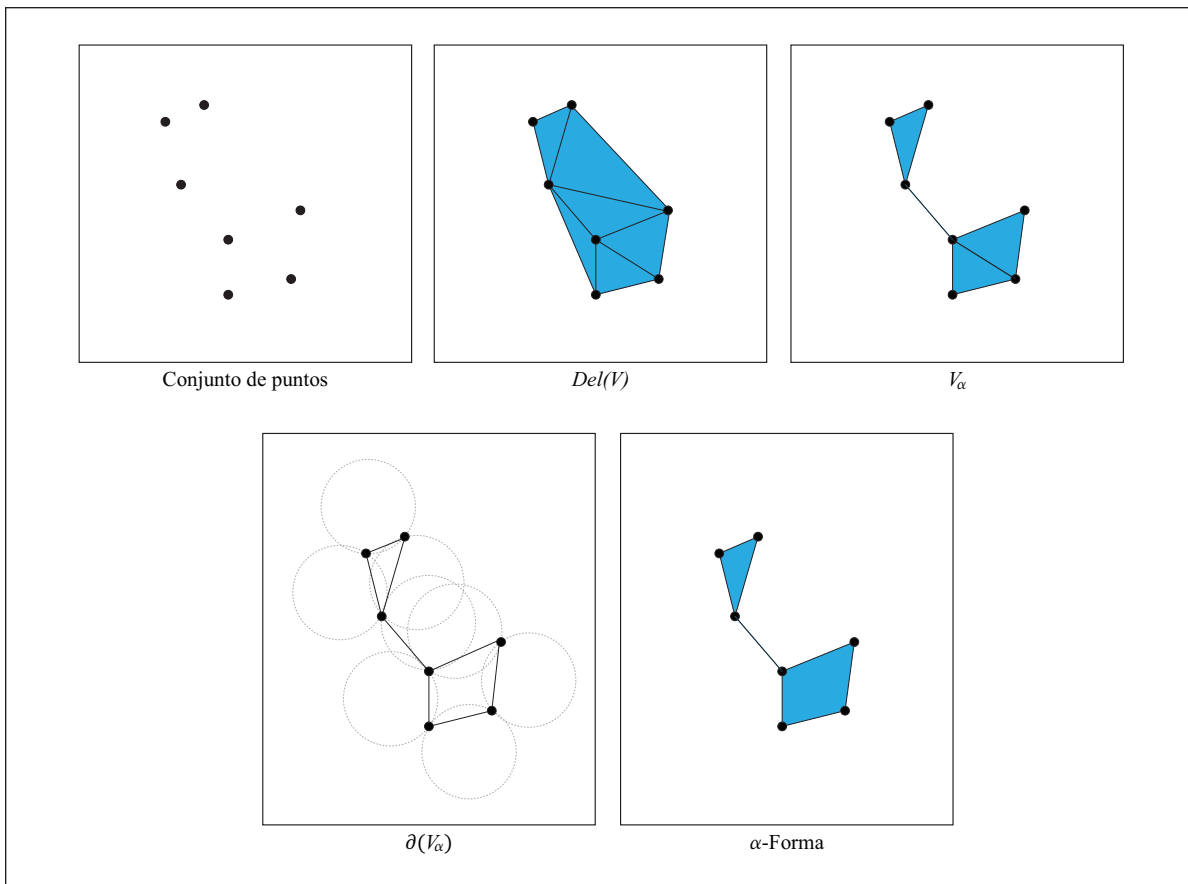


FIGURA 2.6. Proceso de obtención de α -Forma de un conjunto de puntos.

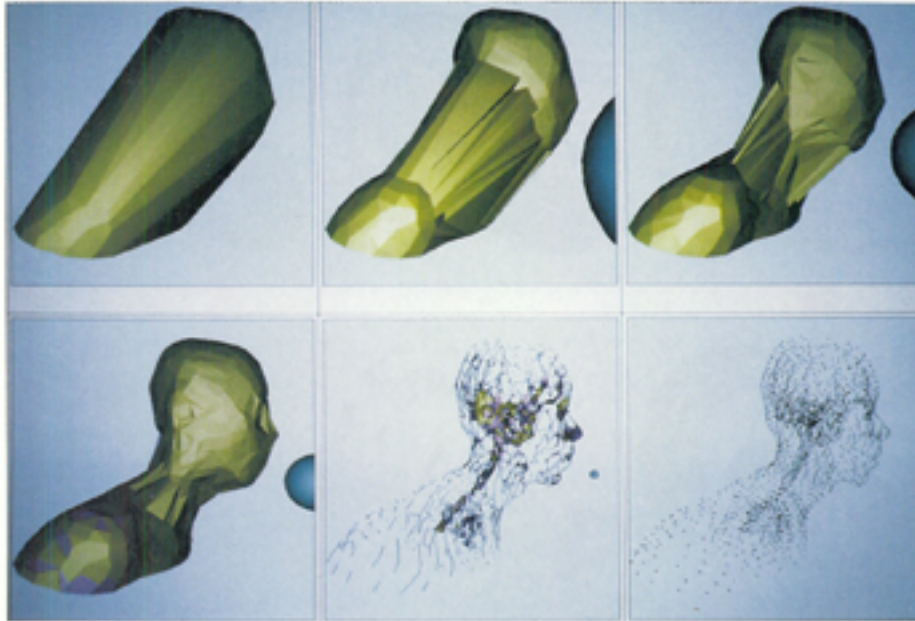


FIGURA 2.7. $\mathcal{F}_\alpha(V)$ de un busto para diferentes valores de α . Nube de 2630 puntos con triangulación de 35196 2-símplices. Imagen extraída de [9].

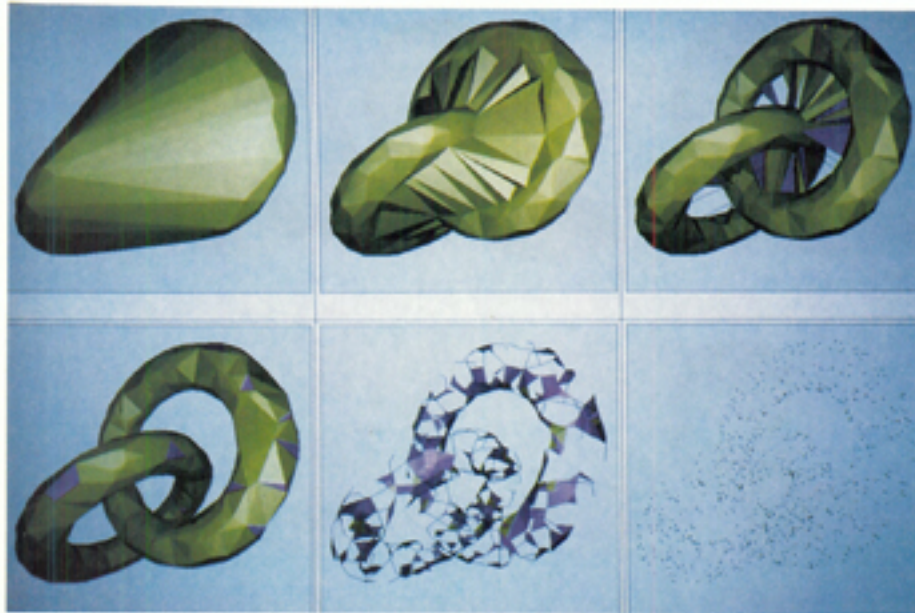


FIGURA 2.8. $\mathcal{F}_\alpha(V)$ de dos toros para diferentes valores de α . Nube de 800 puntos con triangulación de 12197 2-símplices. Imagen extraída de [9].

3. Homología Persistente y α -Formas.

Al tomar un conjunto de puntos en \mathbb{R}^m , realizar la triangulación Delaunay y construir el α -complejo para $\alpha > 0$ (y así $\mathcal{F}_\alpha(V)$) se pueden calcular los grupos de homología asociados y, por medio de la Homología Persistente, medir la duración de los huecos r -dimensionales del α -complejo; de manera que la α -Forma a seleccionar como definitiva preserve las mismas propiedades topológicas de la superficie representada por la nube de puntos.

Con el siguiente resultado es posible variar el valor de α construyendo una filtración por α -complejos de $Del(V)$ para aplicar la Homología Persistente a la sucesión de complejos simpliciales y medir la persistencia de las clases de homología.

PROPOSICIÓN 2.12. *Si $\alpha_1 \leq \alpha_2$ entonces $V_{\alpha_1} \subseteq V_{\alpha_2}$.*

Demostración:

Sea $\Delta_T \in V_{\alpha_1}$ y $B_{x_T}(r_T)$ la r_T bola vacía centrada en $x_T \in \mathbb{R}^m - V$ tal que se satisface que $T = V \cap \partial(B_{x_T}(r_T))$, entonces $r_T \leq \alpha_1$. Como $\alpha_1 \leq \alpha_2$ se sigue que $r_T \leq \alpha_2$ y por tanto $\Delta_T \in V_{\alpha_2}$, de donde $V_{\alpha_1} \subseteq V_{\alpha_2}$. ■

La Proposición 2.12 muestra además que para cada simple $\Delta_T \in Del(V)$, existe un intervalo $I = [a, \infty]$ tal que $\Delta_T \in V_\alpha$ si, y sólo si $\alpha \in I$. Si se elige α con valores enteros con α_n suficientemente grande como para producir la triangulación Delaunay de V ; se tiene entonces la siguiente filtración de α -complejos:

$$V = V_0 \subseteq V_{\alpha_1} \subseteq \cdots \subseteq V_{\alpha_{n-1}} \subseteq V_{\alpha_n} = Del(V)$$

Para cada componente V_{α_i} con $0 \leq i \leq n$ se puede construir el i -ésimo grupo de r -cadenas $C_r(V_{\alpha_i})$ junto con el operador frontera $\partial_r : C_r(V_{\alpha_i}) \rightarrow C_{r-1}(V_{\alpha_i})$, resultando en cada componente la cadena de α_i -complejos $\{(C_r(V_{\alpha_i}), \partial_r)\}_{0 \leq r \leq n}$.

Una vez precisadas las cadenas de α -complejos, se puede medir la variación de los números de Betti (dimensión de los grupos de homología asociados) desde V_0 hasta V_{α_n} para calcular la persistencia de las clases de homología que se producen y concluyen en la filtración.

OBSERVACIÓN 2.13. Las clases con mayor persistencia capturan mayor precisión en las características topológicas del conjunto de puntos.

La Figura 2.9 muestra un ejemplo de filtración por α -complejos a partir de la triangulación Delaunay.

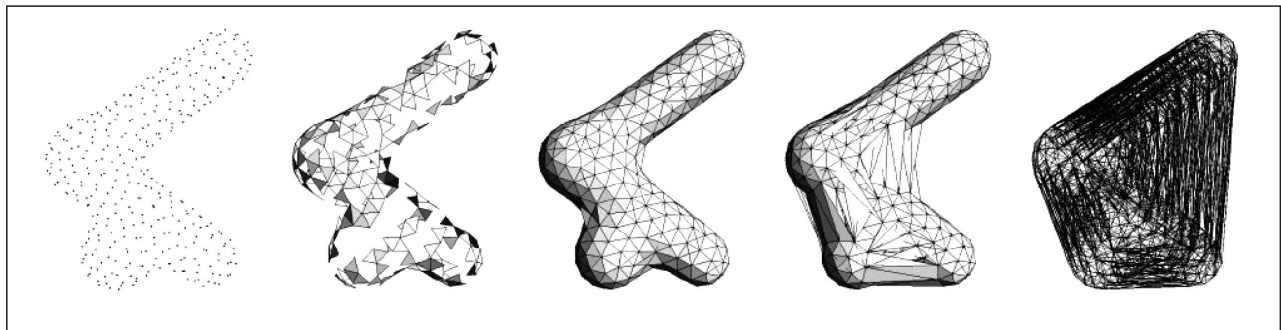


FIGURA 2.9. Ejemplo de filtración por α -complejos a partir de la triangulación Delaunay.

Un ejemplo detallado de la aplicación de Homología Persistente al método de α -Formas se expone en el siguiente capítulo referente a la reconstrucción 3D de la superficie de un objeto a partir de imágenes de rango.

Reconstrucción 3D a partir de imágenes de rango.

Al hacer la digitalización 3D, se quiere saber si se preservan las propiedades topológicas. Las imágenes de rango del objeto real proporcionadas por la scanner 3D son interpretadas en MatLab como matrices de coordenadas rectangulares (Esta transformación puede revisarse en el apéndice) y a partir de esta se aplica el método de α -Formas para reconstruir la superficie. Para que el modelo digital conserve las mismas propiedades topológicas del objeto real utilizamos la Homología Persistente. La idea central del procedimiento fue extraída de [18] y consiste en eliminar los segmentos de la triangulación Delaunay cuya longitud es $d < \alpha$.

1. Algoritmo de Reconstrucción.

- (1) Lectura de la imagen de rango.
- (2) Transformación de la imagen de rango a nube de puntos con coordenadas rectangulares.
- (3) En MatLab, se introducen las coordenadas de los puntos representadas en 3 matrices $m \times 1$ correspondientes a las coordenadas x, y y z de los m puntos.
- (4) Se genera la triangulación Delaunay de la nube de puntos mediante la rutina

$$Del = delaunay(X, Y, Z)$$

la cual resulta una matriz cuyas filas especifican los tetraedros que conforman la triangulación. La matriz resultante es de dimensión $\#tetraedros \times 4$ y cada entrada $[Del]_{ij}$ es un valor entre 1 y m que indica el índice fila de las matrices X, Y y Z que son coordenadas del j -ésimo vértice del i -ésimo tetraedro.

- (5) Se toma un valor $\alpha > 0$ el cual representa el radio de las α -bolas.
- (6) Para cada triángulo de $[Del]$ se analizan los segmentos de la siguiente manera:
 - (a) Si la distancia entre los vértices del segmento es mayor o igual que α , se almacenan los vértices como 0-símplices, el segmento como 1-símplice y se incrementa en una y dos unidades la cantidad de 0-símplices y 1-símplices respectivamente.
 - (b) Si los vértices que forman un triángulo satisfacen la condición, entonces se almacena el 2-símplice correspondiente y se incrementa en una unidad la cantidad de 2-símplices.
- (7) Se construye el α -complejo resultante.
- (8) Se determina la matriz del operador frontera ∂ en la base estándar y se calcula su rango.
- (9) Se computan los números de Betti con las fórmulas presentadas en 1.7.
- (10) Se repite el procedimiento para distintos valores de α y se analiza la persistencia de las clases de homología para producir un resultado final que conserve las propiedades topológicas del objeto real.

El procedimiento radica en tomar $\alpha = \infty$ para obtener la cápsula convexa de la nube de puntos. Seguidamente, se realiza la α -prueba a la triangulación Delaunay y se calculan los números de Betti del α -complejo. El siguiente paso consiste en disminuir el valor de α , reconstruir el α -complejo y recalcular los números de Betti. Se continúa reduciendo el parámetro hasta que los número de Betti permanezcan constantes a menos que se alcance un valor muy pequeño de α para el cual el α -complejo resultante es el conjunto de puntos. Si la filtración es exitosa se producen números de Betti apropiados por medio de la persistencia de las clases.

2. Ejemplo de reconstrucción de superficie.

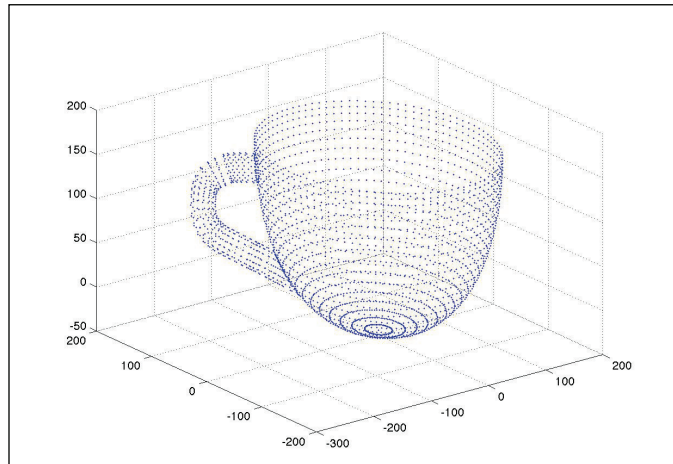


FIGURA 3.1. Nube de 2.864 puntos.

Para este ejemplo, se desarrolló la simulación de una nube de 2.864 puntos provenientes de una scanner 3D como se observa en la Figura 3.1. Se calculó la triangulación Delaunay la cual está conformada por 14.278 tetraedros (Figura 3.2) Luego, se aplicó el método de α -Formas mediante la rutina que se presenta en el apéndice. Variando el valor de α desde 200 hasta 0 se visualizaron las distintas α -Formas (para $\alpha = 200$ la triangulación Delaunay. Para $\alpha = 0$ la nube de puntos) iniciando el proceso con $\alpha = 150$. Para este valor se forma un hueco 0-dimensional que representa una componente conexa.

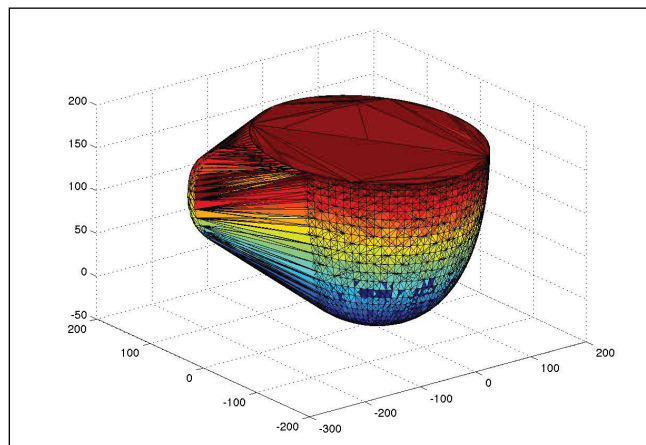


FIGURA 3.2. Triangulación Delaunay de la nube de puntos

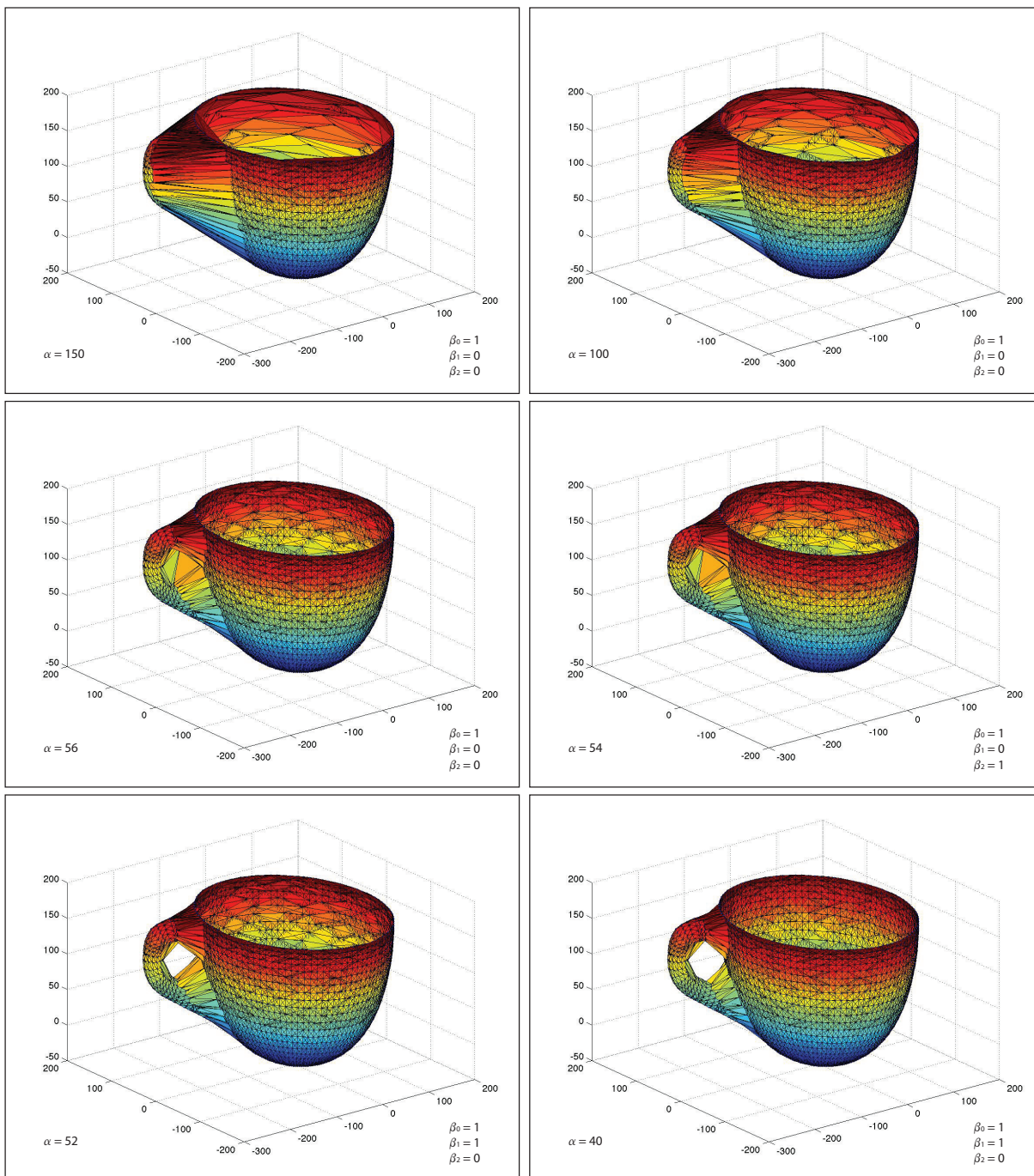


FIGURA 3.3. α -Formas en el intervalo $[40,150]$

Nótese que en la componente $\alpha = 54$ (Figura 3.3) se genera un hueco 2-dimensional que concluye en la componente $\alpha = 52$. Dada la longitud del intervalo del parámetro α podemos decir que esta clase de homología tiene poca persistencia.

En la componente $\alpha = 52$ se genera una clase de dimensión 1 que persiste en el intervalo $[16,52)$.

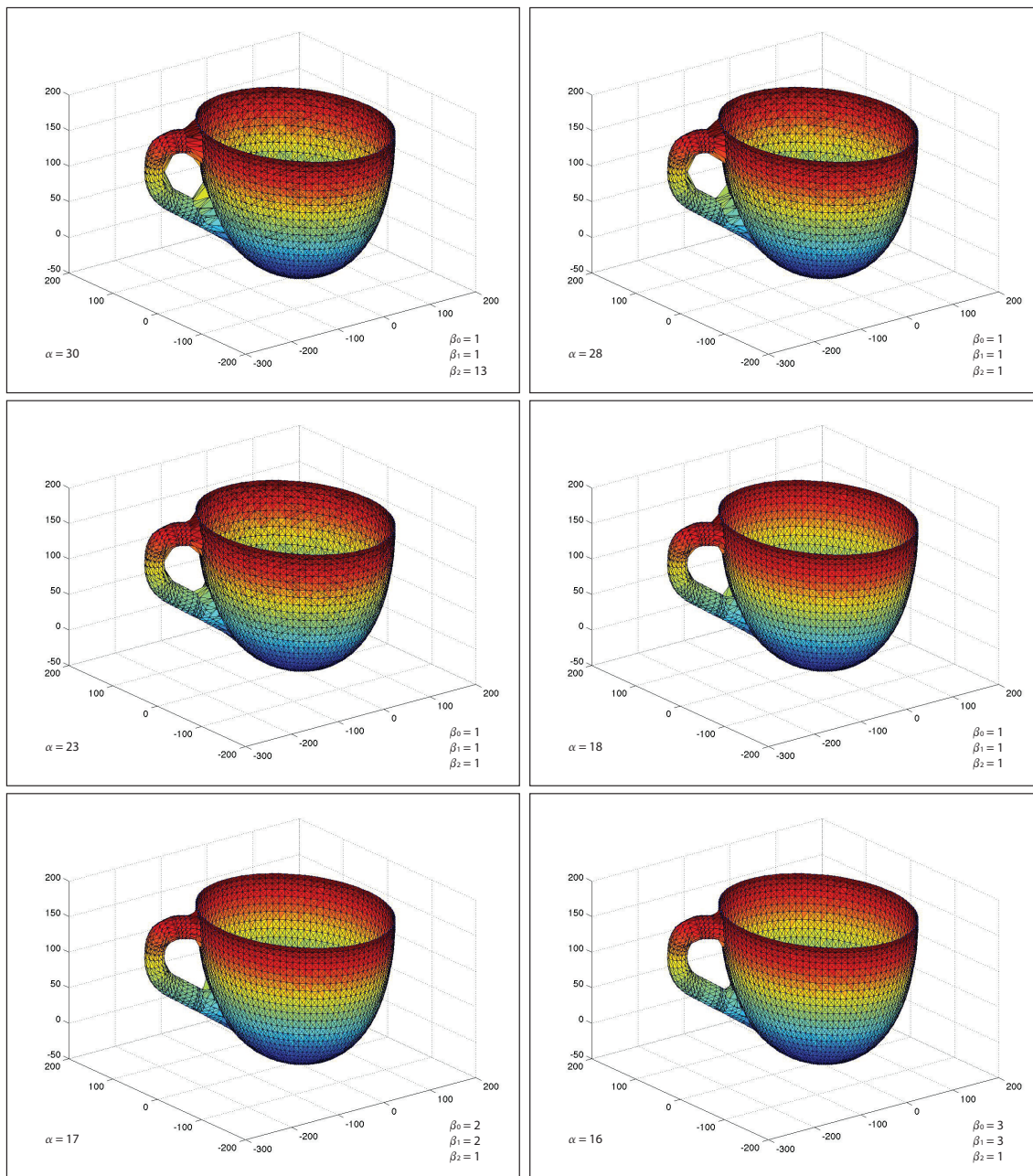


FIGURA 3.4. α -Formas en el intervalo $[16,30]$

Para $18 \leq \alpha \leq 28$ los números de Betti son $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ correspondientes a una componente conexa (taza), un hueco de dimensión 1 (asa) y un hueco de dimensión 2 (región vacía cerrada dentro del asa)

Claramente, a medida que el valor de α es más pequeño el número de componentes conexas se incrementa hasta alcanzar la cantidad de puntos de la nube.

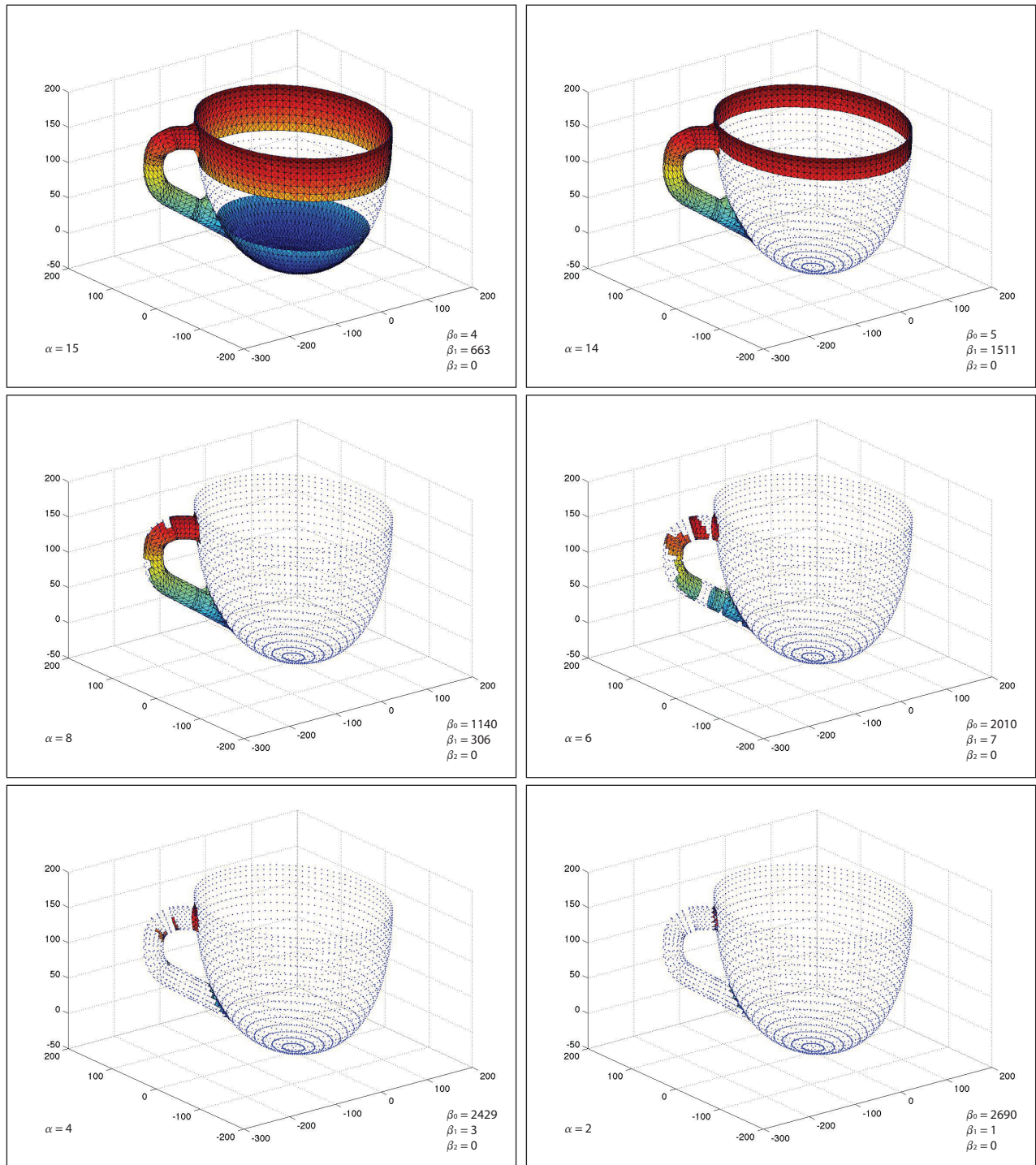
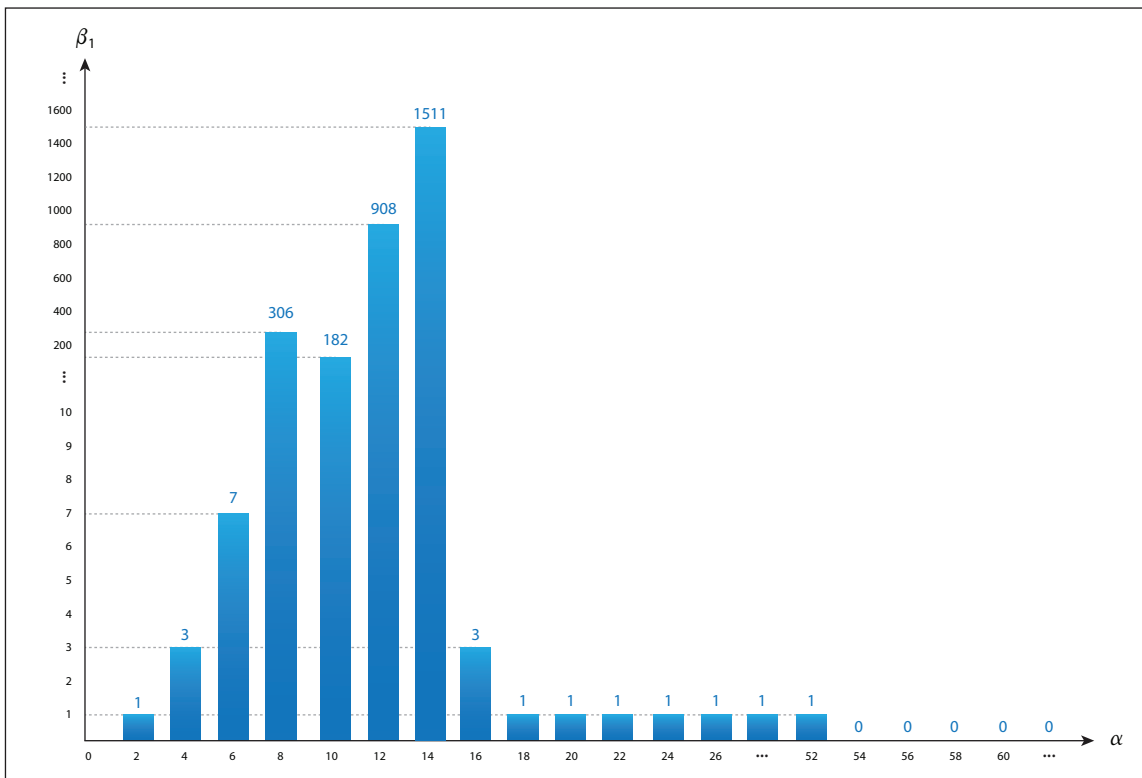
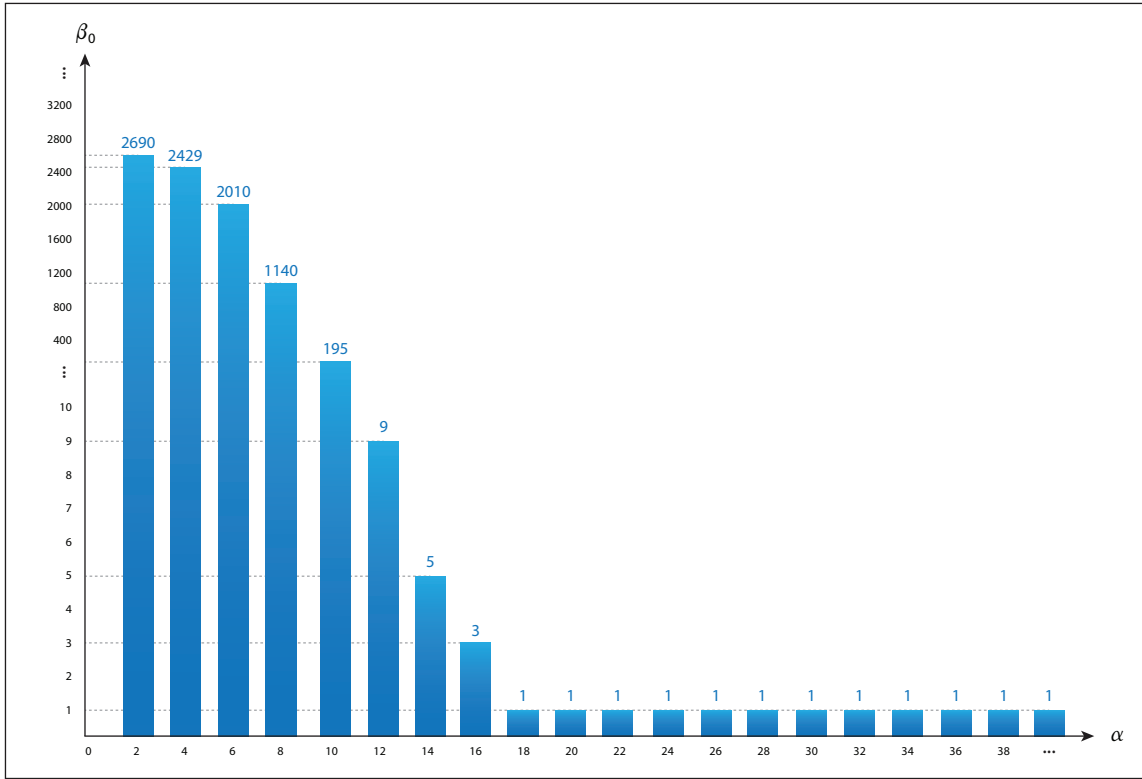
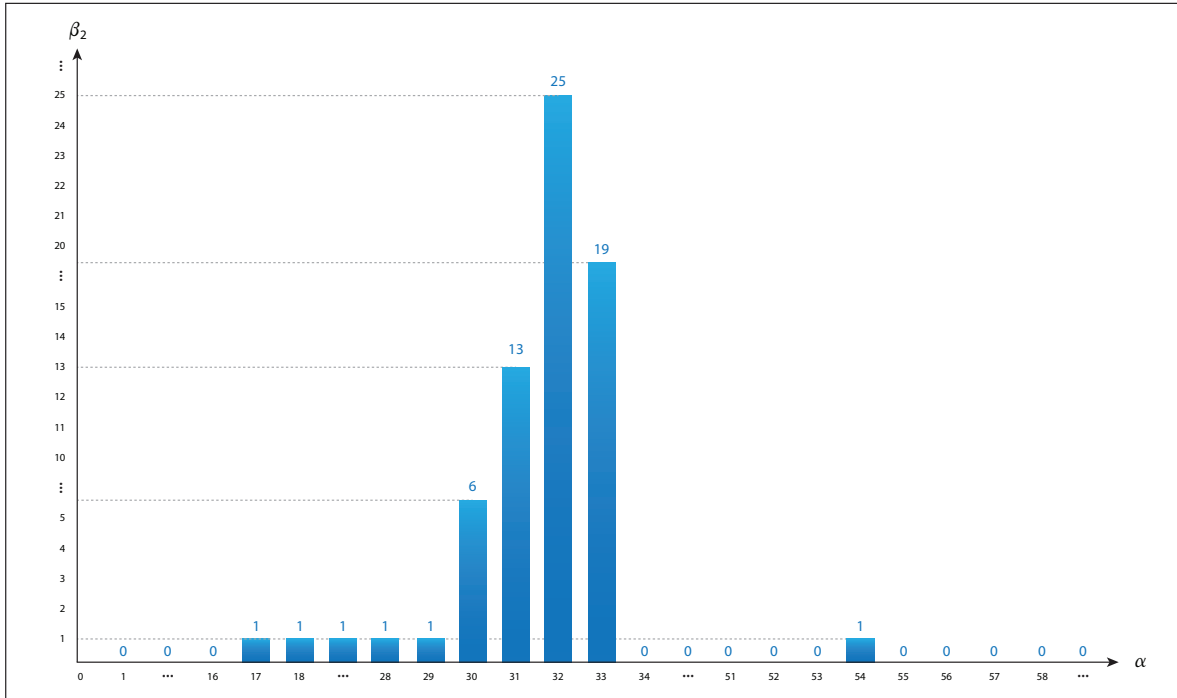


FIGURA 3.5. α -Formas en el intervalo $[2,15]$

A continuación se presentan las gráficas para β_0, β_1 y β_2 en función de α .





Seguidamente se grafica el código de barra más importante para este estudio: β_1 . Dada la cantidad de huecos 2-dimensionales que se producen y concluyen, sólo se muestran algunos. Nótese que la clase de homología h_3 (agujero del asa de la taza) es persistente.

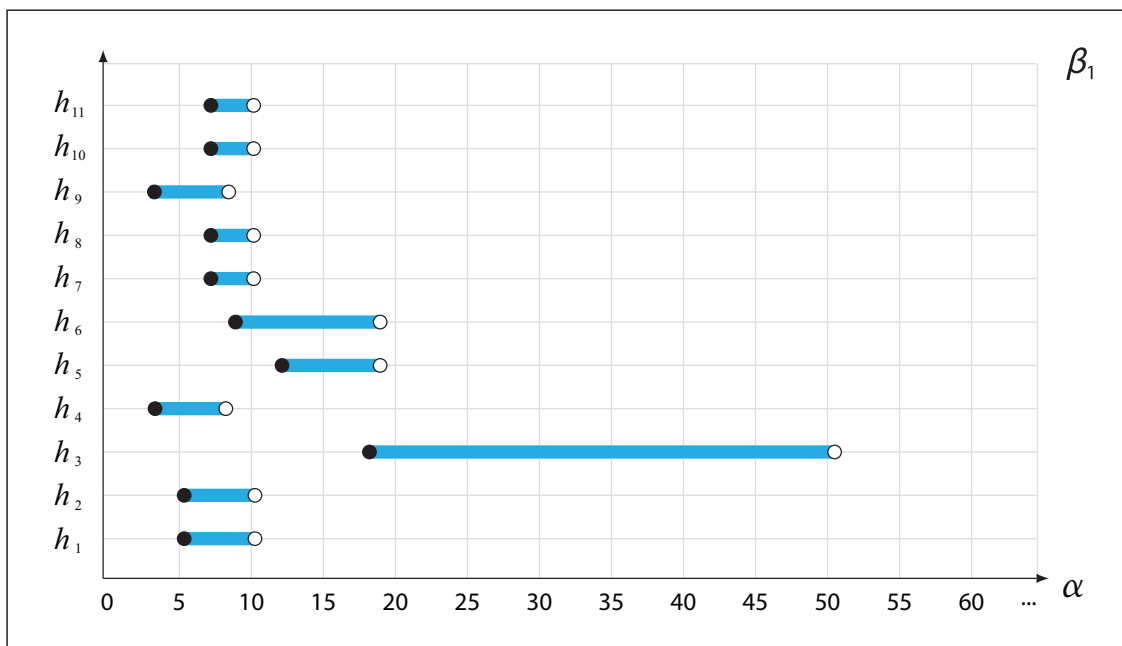


FIGURA 3.6. Código de barra para β_1 .

Con las gráficas, el código de barra de β_1 y los resultados obtenidos se pudo determinar la persistencia de las clases de homología. Para β_0 se observó que la clase de homología con mayor persistencia es la del intervalo $[18, \infty)$, para β_1 , la clase de homología que representa el asa de la taza persiste en el intervalo $[18, 52)$, mientras que las demás persisten en intervalos pequeños con relación al anterior. En el caso de β_2 , existe una clase que persiste en el intervalo $[16, 28)$. De manera que, los números de Betti más cercanos que representan las propiedades topológicas de la nube de puntos son

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$$

los cuales persisten simultaneamente en el intervalo:

$$[18, \infty) \cap [18, 52) \cap [16, 28) = [18, 28)$$

Por tanto se puede concluir que para $\alpha \in [18, 28)$ se obtiene una α -Forma de la nube de puntos que preserva las propiedades topológicas del objeto digitalizado (Figura 3.7)

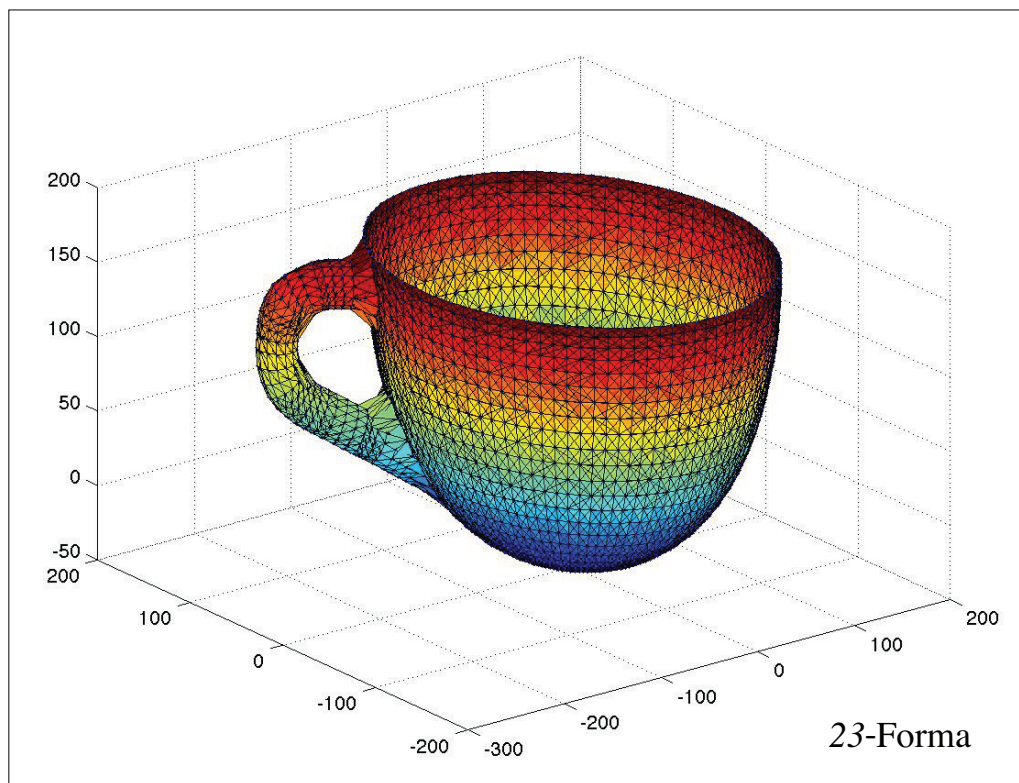


FIGURA 3.7. α -Forma para $\alpha = 23$.

A nivel computacional, es importante destacar el tiempo de procesamiento, por tanto, se especifican los tiempos de desarrollo junto con las especificaciones del computador utilizado.

El algoritmo se ejecutó con un procesador de 2.5 GHz Intel Core i5, 8 GB de RAM a 1600 MHz DDR3 y una tarjeta de video Intel HD Graphics 4000 de 1024 MB. Los tiempos de procesamiento variaron según el valor de α . Para $0 \leq \alpha \leq 20$ el tiempo de construcción de la α -Forma estuvo entre 0 y 120 segundos por imagen. Para valores de α entre 30 y 100, el tiempo de procesado por α -Forma se incrementó de 5 a 40 minutos aproximadamente, mientras que para valores altos de α , es decir, $100 \leq \alpha \leq 200$, el algoritmo llegó a demorar hasta 1 hora en procesar cada α -Forma. A raíz de este inconveniente y considerando los intervalos de persistencia importantes, se decidió realizar el proceso para $0 \leq \alpha \leq 40$ variando por unidad, para $40 \leq \alpha \leq 60$ variando en dos unidades, para $60 \leq \alpha \leq 100$ variando en 5 unidades y para $100 \leq \alpha \leq 150$ la variación fue de 10 unidades.

Conclusión y trabajo a futuro.

En este trabajo se implementaron técnicas para calcular la Homología Persistente de una muestra de datos. La homología asociada a un objeto está representada por los números de Betti, invariantes topológicos que básicamente son únicos entre objetos homeomorfos. La topología algebraica, el lenguaje formal del álgebra homológica y las técnicas computacionales han dado paso a la visualización de la forma de una nube de puntos y a la reconstrucción de un objeto 3D a partir de imágenes de rango.

Para lograr el objetivo, la triangulación Delaunay resultó ser una herramienta sumamente útil. Las rutinas diseñadas en MatLab facilitan una alternativa para construir un complejo simplicial y calcular los números de Betti en el proceso. Cabe destacar que a veces sólo necesitamos la construcción de un complejo simplicial, lo cual se obtiene directamente de las rutinas presentadas en tiempos de procesamiento mucho menor.

La idea de utilizar códigos de barra junto con la filtración del complejo simplicial a partir de la triangulación Delaunay ayudó a identificar los números de Betti de la estructura simplicial a ser tomados en cuenta.

Se ha verificado que el análisis de la persistencia de las clases de homología en la reconstrucción 3D de una nube de puntos resulta útil para saber que tan cerca o lejos está la forma obtenida de preservar las propiedades topológicas del objeto real, lo cual, de alguna manera, garantiza que se ha alcanzado la forma del conjunto de datos digitalizados.

Por otra parte, un problema notable en el método de α -Formas surge al examinar la longitud óptima de filtración para que la reconstrucción de la forma sea lo más precisa posible, una posible solución consiste en considerar la importancia de la selección del cambio del valor de α , puesto que si la progresión es muy lenta se podría detener el proceso muy pronto y si es muy extensa se puede saltar a un valor muy pequeño rápidamente; en ambos casos se pierde la persistencia. Sin embargo, si se encuentra un rango lo suficientemente amplio de valores de α que produzcan los mismos números de Betti podemos decir que se tiene un rango bastante óptimo de valores de α .

Una manera confiable de escoger el valor de α es observar los vértices y definir un valor de inicio de manera aproximada, para luego determinar el valor de cambio. Se ha mostrado que una posible solución es variar el parámetro en 2, 5 o 10 unidades. Detenemos el proceso cuando o bien los números de Betti dejan de cambiar o cuando el valor de α es menor que la distancia mínima entre los vértices.

Resulta interesante la investigación de nuevos métodos de cálculo para agilizar el curso del algoritmo que procesa las clases de homología. Así como también, continuar el estudio optimizando el valor inicial de α y su tasa de cambio para representar, con cierto grado de precisión, la forma real del objeto digitalizado.

Apéndices.

1. Imágenes de Rango.

Una imagen de rango [2] es una colección de puntos en un sistema de referencia conocido (por ejemplo \mathbb{R}^3) que representan la superficie de un objeto real. En la Figura 4.1 se ilustra el proceso de digitalización 3D a partir de un scanner de láser. En el proceso, el escáner realiza una fusión de seis planos de escaneo para generar un conjunto único de puntos con coordenadas 3D.

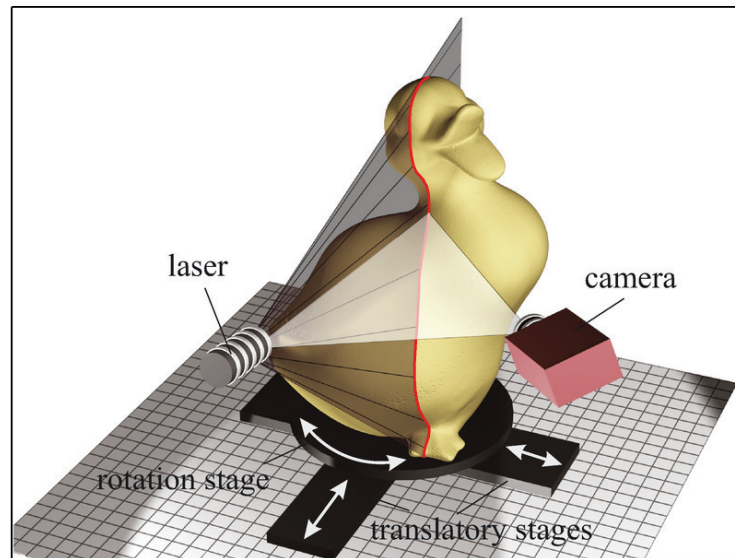


FIGURA 4.1. Proceso de digitalización 3D de un objeto sobre una bandeja que rota y se traslada.

El escáner láser 3D es también un escáner activo que usa la luz del láser para examinar un entorno. El haz de luz láser incide en el objeto y se usa una cámara para buscar la ubicación del punto del láser. Dependiendo de la distancia a la que el láser golpee una superficie, el punto del láser aparece en lugares diferentes en el sensor de la cámara.

Las técnicas para obtención de imágenes de rango están basadas en los procesos de: lectura por radar, triangulación, patrones moire, interferometría holográfica, enfoque y difracción de Fresnel.

Los sensores de imágenes de rango adquieren una gran cantidad de coordenadas 3D a partir de superficies visibles en un espacio real que pueden ser utilizadas en un amplio campo de aplicaciones incluyendo reconstrucción de formas, articulación mecánica, ensamblaje robótico, inspección y calibración, navegación móvil, cartografía automatizada y diagnóstico médico (biostereometría) Son dispositivos únicos de digitalización que permiten la representación de la geometría de superficies mediante una nube de puntos.



FIGURA 4.2. Modelos de escáneres 3D.

Si las distancias de los puntos al origen en una imagen de rango se colocan en coordenadas rectangulares, se dice que la imagen de rango está en su forma xyz . Si las distancias indican rangos a lo largo de una dirección vectorial en 3D indexado por 2 enteros (i, j) , la imagen de rango está en su forma $r_{i,j}$. Toda imagen de rango en su forma $r_{i,j}$ puede ser convertida directamente a la forma xyz , sin embargo, el recíproco no es cierto. La forma xyz es la más general, puesto que no se requiere un orden en la disposición de los puntos, no obstante, es más difícil de procesar que la forma $r_{i,j}$.

Si los intervalos de la muestra son consistentes en las direcciones x e y de una imagen de rango dada en su forma xyz , esta puede ser representada como una matriz con valores de rango $r_{i,j}$ donde las correspondientes coordenadas x, y y z están determinadas implícitamente por las filas, columnas y valores de las entradas de la matriz.

La expresión *gran cantidad* de coordenadas 3D es relativa, el estándar de datos es alrededor de 100 puntos (x, y, z) . Si $r_{i,j}$ es el valor del píxel en la i -ésima fila y la j -ésima columna de la matriz, entonces las coordenadas rectangulares están dadas por:

$$\begin{cases} x = a_x + s_x i \\ y = a_y + s_y j \\ z = a_z + s_z i \end{cases}$$

Donde s_x, s_y y s_z son factores de escala y a_x, a_y y a_z son valores de compensación de coordenadas. Esta transformación afín es apropiada para imágenes de rango ortográficas en forma $r_{i,j}$, donde la profundidad es medida a lo largo de rayos ortogonales al plano de la imagen.

171	160	163	163	166	166	168	166	168	166	163	160	163	163	160	163	166	163	166	163		
168	166	166	163	166	163	168	166	166	166	163	163	166	163	166	163	166	160	163	166	160	163
168	168	166	166	166	163	160	166	166	171	166	168	168	166	160	163	166	160	163	166	160	166
166	163	166	166	163	163	160	163	179	174	185	177	185	179	212	196	185	204	196	185		
163	166	160	166	163	163	166	190	174	168	168	182	185	190	201	196	199	182	196	199		
166	163	163	163	168	160	163	166	166	163	168	177	190	188	199	188	190	196	193	185		
163	166	166	157	160	160	160	171	160	168	168	182	199	199	199	193	199	188	193	193		
160	160	160	166	157	160	168	166	166	163	163	182	201	199	190	188	190	190	193	193		
163	166	157	163	160	157	160	177	166	160	171	201	215	199	196	201	190	190	188	188		
155	160	160	163	160	163	160	166	166	163	163	204	207	207	190	185	193	190	196	196		
157	155	163	160	157	157	168	166	168	163	177	188	201	199	196	196	201	182	210	196		
157	157	155	157	160	157	163	171	163	157	155	204	185	196	193	188	196	188	193	201		
157	160	155	155	157	157	168	168	163	166	166	190	201	201	196	188	190	193	185	193		
157	155	160	160	157	157	163	157	157	160	157	182	204	190	185	190	190	188	185	188		
157	157	157	160	157	157	152	166	160	163	166	193	196	193	199	190	190	185	190	185		
155	157	160	160	160	152	166	152	163	152	168	171	212	212	193	190	188	182	188	185		
152	157	155	155	152	155	149	163	160	155	157	185	210	210	212	215	210	185	204	193		
155	155	157	152	152	155	155	171	174	166	171	188	188	199	188	204	188	185	215	207		
155	157	152	157	149	157	157	168	179	204	182	221	174	193	182	179	212	188	201	182		
155	155	155	155	152	149	146	174	188	193	168	185	168	179	171	190	190	193	190	179		

FIGURA 4.3. Ejemplo de una imagen de rango en forma $r_{i,j}$.

2. Diagrama de Voronoi en el plano.

DEFINICIÓN 4.1. Sea $V = \{p_0, p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto de vértices. La *región de Voronoi* V_i del punto p_i consta de todos los puntos para los cuales p_i es el más cercano, esto es:

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, \forall j \neq i\}$$

Los puntos x que satisfacen $\|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|$ para un valor de $j \neq i$ fijo definen un semiplano cerrado, de manera que, V_i es la intersección de los $(n - 1)$ -semiplanos, es decir, un polígono convexo posiblemente infinito. Por construcción, para $i \neq j$ se tiene que:

$$\text{int}(V_i) \cap \text{int}(V_j) = \emptyset$$

No obstante, dos regiones de Voronoi distintas se pueden intersectar en un trozo contenido en una frontera común y en general, este es el único caso posible.

Juntas, las n regiones de Voronoi de V cubren espacio. El *diagrama de Voronoi* de V es el conjunto:

$$\text{Vor}(V) = \{V_i : 1 \leq i \leq n\}$$

2.1. Triangulación Delaunay y Diagrama de Voronoi en el plano.

La triangulación de Delaunay de V , que generalmente se denota por $\text{Del}(V)$ está representado por el *nervio* del diagrama de Voronoi, específicamente:

i) Si $p_0, p_1 \in V$ son tales que V_0 y V_1 tienen un lado en común, entonces el 1-símplice orientado, $(p_0 p_1)$ pertenece a la triangulación Delaunay.

ii) Si $p_0, p_1, p_2 \in V$ son tales que sus regiones de Voronoi V_0, V_1 y V_2 respectivamente comparten un vértice, entonces el 2-símplice dado por $(p_0 p_1 p_2)$ está en la triangulación Delaunay.

La triangulación Delaunay es la realización canónica geométrica del nervio de $\text{Vor}(V)$ y su definición es la siguiente.

DEFINICIÓN 4.2. Dado $V \subset \mathbb{R}^m$ ($m = 2$ o 3) un conjunto de puntos afínmente independientes, la *triangulación Delaunay* de V es el complejo simplicial $Del(V)$ conformado por:

- i) Todos los m -símplices construídos en el sentido de la especificación anterior.
- ii) Si $\Delta \in Del(V)$ entonces todas las caras de Δ están en $Del(V)$.

En la Figura 4.4, se muestra un ejemplo del diagrama de Voronoi y los 1-símplices de la triangulación Delaunay de un conjunto de puntos.

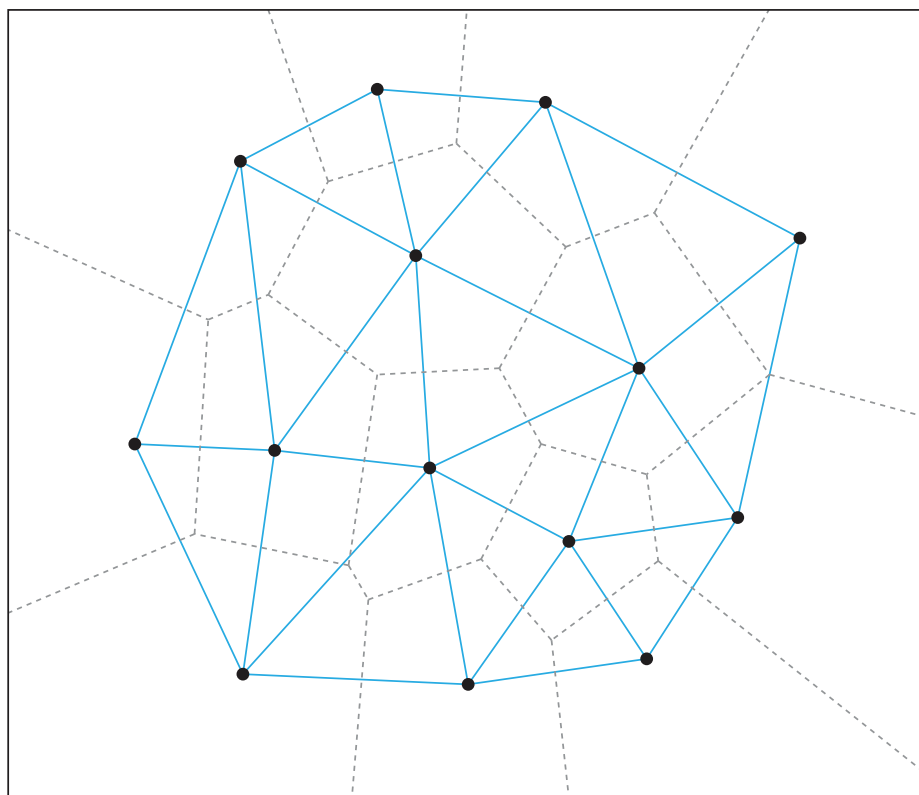


FIGURA 4.4. Ejemplo del diagrama de Voronoi (regiones limitadas por las líneas pespunteadas) y los 1-símplices de la triangulación Delaunay (segmentos en azul) de un conjunto de puntos en el plano.

Es importante destacar que tanto el diagrama de Voronoi como la triangulación Delaunay son casos particulares de la Cohomología de Čech.

3. Rutinas en MatLab.

El siguiente algoritmo se desarrolló en [18] para calcular la α -Forma de una nube de puntos considerando un intervalo para α , en nuestro caso [0,200]:

Código en MatLab

```

1  for Alpha = 200:-1:0;
2  a = Alpha^2; %Se define el cuadrado de una alfa esfera
3
4  s0 = []; % 0-simplices (vértices)
5  s1 = []; % 1-simplices (segmentos)
6  s2 = []; % 2-simplices (triángulos)
7  s3 = []; % 3-simplices (tetraedros)
8  D1 = []; % matriz conectando vértices con segmentos
9  D2 = []; % matriz conectando segmentos con triángulos
10 M1 = []; % una matriz auxiliar
11 i0 = 0; % número de vértices
12 i1 = 0; % número de segmentos
13 i2 = 0; % número de triángulos
14 i3 = 0; % número de tetraedros
15
16 d = delaunay(Coor(:,1),Coor(:,2),Coor(:,3));
17 x = Coor(:,1);
18 y = Coor(:,2);
19 z = Coor(:,3);
20
21 %Ensamblaje de todos los vértices de la triangulación Delaunay
22 for j = 1:length(x)
23     if ismember(j,DelV)
24         s0 = [s0; j];
25         i0 = i0 + 1;
26     end
27 end
28
29 %Luego, se procede a almacenar todos los triángulos de la triangulación Delaunay.
30 %Se toma cada fila de d por separado, la cual representa la estructura
31 %de la triangulación Delaunay y se procesa cada segmento de esta.
32 %Después de verificar la distancia entre vértices de un segmento se decide
33 %si añadir o no este segmento a s1.
34 %Si se añade entonces se incrementa el número de segmentos y se agregan dos

```

```

35 %entradas a la matriz D1.
36 %Si todos los segmentos son aceptados para añadirse a D1 entonces se coloca el
37 %triángulo en s2 y se incrementa el número de triángulos.
38 %Análogamente para los elementos de s3.
39
40 for i = 1:size(d,1)
41     d1 = d(i,:); %algunos parámetros adicionales
42     xx = x(d1); yy = y(d1); zz = z(d1);
43     t = true; %los puntos que forman un tetraedro procesando cada tetraedro
44     ind = [1 2 3; 1 2 4; 1 3 4; 2 3 4];
45     for w = 1:4
46         b = true; %los puntos que forman un triángulo
47         for j = 1:2
48             %elementos auxiliares
49             p = ind(w,j);
50             xcurr = xx(p); ycurr = yy(p); zcurr = zz(p);
51             d1p = d1(p);
52             for k = j+1:3
53                 q = ind(w,k);
54                 d1q = d1(q);
55                 d2 = [d1p d1q];
56                 %los puntos deben estar lo suficientemente cerca
57                 if (xcurr-xx(q))^2 + (ycurr-yy(q))^2 + (zcurr-zz(q))^2 < a
58                     if ~ismember(d2,s1,'rows') &&...
59                         ~ismember([d1q d1p],s1,'rows') s1 = [s1; sort(d2)];
60                 i1 = i1 + 1;
61                 %La matriz auxiliar conecta los segmentos y los triángulos
62                 M1(d1p,d1q) = i1;
63                 M1(d1q,d1p) = i1;
64                 %almacenamos los valores en la matriz
65                 D1(d1p,i1) = -1;
66                 D1(d1q,i1) = 1;
67             end
68         else %si la distancia es muy grande
69             b = false;
70             t = false;
71         end
72     end
73 end %Los segmentos de los triángulos han sido procesados

```

```

74 if b
75     d3 = sort(d1(ind(w,:)));
76     dperm = perms(d3);
77     bool = true;
78     for j = 1:6
79         if ismember(dperm(j,:),s2,'rows')
80             bool = false;
81             break
82         end
83     end
84     if bool
85         s2 = [s2; d3];
86         i2 = i2 + 1;
87         D2(M1(d3(1),d3(2)),i2) = 1;
88         D2(M1(d3(1),d3(3)),i2) = -1;
89         D2(M1(d3(2),d3(3)),i2) = 1;
90     end
91 end %El triángulo ha sido procesado
92 end %Los triángulos del tetraedro han sido procesados
93 if t
94     s3 = [s3; d1];
95     i3 = i3 + 1;
96 end
97 end %Todos los tetraedros han sido procesados
98
99 %El último paso consiste en el cálculo del rango de la matriz ensamblando todos
100 %los símlices en forma estructural y calculando los números de Betti.
101
102 r1 = rank(D1);
103 r2 = rank(D2);
104 C.s3 = s3;
105 C.s2 = s2;
106 C.s1 = s1;
107 C.s0 = s0;
108 b = [Alpha i0-r1 i1-r1-r2 i2-r2-i3];
109
110 Betti = vertcat(Betti,b);
111
112 T = trisurf(s2,Coor(:,1),Coor(:,2),Coor(:,3));

```



```
113 hold on
114 Points = scatter3(Coor(:,1),Coor(:,2),Coor(:,3),1,'filled');
115 hold off
116
117 %Se procede a observar el resultado y guardar la imagen correspondiente a alfa.
118
119 Name = num2str(Alpha);
120 saveas(T,Name,'jpg')
121
122 end
```

Bibliografía

- [1] F. BERNARDINI, C. L. BAJAJ. Sampling and reconstructing manifolds using Alpha Shapes. *Purdue University, Computer Science* (1997), 97-013.
- [2] P. J. BESL. Active, Optical Range Images. *General Motors Research Laboratories, Warren, Michigan* (1988)
- [3] F. BLAIS. Review of 20 years of range sensor development. *Journal of Electronic Imaging* (2004)
- [4] G. CARLSSON, A. COLLINS, L. GUIBAS, A. ZOMORODIAN. Persistent Homology and shape description. *Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, CA* (2003)
- [5] C. J. A. DELFINADO AND H. EDELSBRUNNER. An incremental algorithm for Betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere. *Comput. Aided Geom. Design* **12** (1995) 771–784.
- [6] H. EDELSBRUNNER, J. HARER. Persistent Homology - A survey. *Surveys on Discrete and Computational Geometry. Twenty Years Later* (2008) Berlin Mathematical School, 257-282.
- [7] H. EDELSBRUNNER. Alpha Shapes - A survey. *Departments of Computer Science and of Mathematics, Duke University, Durham, North Carolina, USA* (2011)
- [8] H. EDELSBRUNNER, E. P. MÜCKE. Simulation of simplicity: a technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms. *ACM Trans. Graphics* **9** (1990) 66–104.
- [9] H. EDELSBRUNNER, E. P. MÜCKE. Three-dimensional Alpha Shapes. *University of Illinois ACM Trans. Graphics* (1994) **13** 415-440.
- [10] H. EDELSBRUNNER, E. P. MÜCKE. On the shape of a set of points in the plane. *IEEE Trans. Inform. Theory IT-29* (1983) 43-72 503–532.
- [11] H. EDELSBRUNNER, E. P. MÜCKE. Weighted Alpha Shapes. *Tech. Rep. UIUCDCS-R-92-1760* (1992) University of Illinois, Urbana-Champaign, IL.
- [12] K. FISCHER. Introduction to Alpha Shapes. *Stanford Computer Graphics Laboratory* (2011)
- [13] R. P. FROSINI AND C. LANDI. Size theory as a topological tool for computer vision. *Pattern Recognition and Image Analysis* **9** (1999), 596–603.
- [14] J. HERAS, T. COQUAND, A. MÖRTBERG, V. SILES. Computing persistent homology within Coq/SSReflect. *Department of Computer Science and Engineering, Chalmers University of Technology and University of Gothenburg, Sweden* (2012) MTM2009-13842- C02-01.
- [15] R. A. JARVIS. On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane. *Inform. Process. Lett* **2** (1973) 18-21.

- [16] C. A. JOHNSON. Applications of computational homology. *Marshall University, Department of Mathematics* (2006)
- [17] M. MACHO. De la Homología a la Cohomología. *Curso de Doctorado, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea* (2006-2007)
- [18] I. MARTINOV. Computing the persistent homology of range images with Alpha Shapes. *Lappeenranta University of Technology* (2008), a0315930.
- [19] E. G. MINIAM. Complejos simpliciales y poliedros. *Notas de curso Depto Matemática FCEyN, UBA.*
- [20] J. R. MUNKRES. Elements of Algebraic Topology. *Perseus, Cambridge, Massachusetts* 1984.
- [21] S. PLAZA. Topología Algebraica: Una introducción. *Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemáticas* (2010)
- [22] V. ROBINS. On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane Toward computing homology from finite approximations. *Topology Proceedings* **24** (1999)
- [23] K. G. WANG. The basic theory of persistent homology. *University of Chicago, Department of Mathematics* (2012)
- [24] C. A. WEIBEL. An introduction to Homological Algebra. *Cambridge University* (1994)
- [25] T. Y. XIAOTIAN. Persistent Homology and applications. *Stony Brook University, Computer Science* (2008), CSE-658.