

## APLICACIÓN MOVIL PARA APRENDIZAJE DEL MÉTODO DE CLEBSCH

**María F. Gouveia**

**Vannessa Duarte**

*Mafer16@gmail.com*

*vjduarte@gmail.com*

Instituto Nacional de Bioingeniería, Universidad Central de Venezuela. Caracas-Venezuela

**María E. Korody**

**Alba López**

*korodym@gmail.com*

*albalopezucv@gmail.com*

Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Civil, Universidad Central de Venezuela. Caracas-Venezuela.

**Resumen.** Elástica Clebsch es la primera aplicación para dispositivos móviles de uso educativo de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela. Está disponible en Google Play únicamente para dispositivos móviles de sistema operativo Android y es una herramienta de cálculo basada en el aprendizaje móvil, diseñada y construida con el fin de calcular la curva elástica de elementos sometidos a fuerzas cortantes y momentos flectores, basada en el Método de Clebsch de Resistencia de Materiales. Su creación surge de la necesidad de implementar herramientas tecnológicas en las aulas de clase con el fin de actualizar y complementar los métodos tradicionales de enseñanza, para motivar al estudiante a aprender mediante la práctica constante pero más importante aún, a generar sus propios contenidos. La app es una herramienta creada mediante el Entorno de Desarrollo Integrado (IDE) Android Studio, utilizando el lenguaje de programación Java, según la Metodología basada en prototipo y mediante la implementación de varios métodos matemáticos tales como el Método de Cramer y Método de la Bisección. Con Elástica Clebsch es posible obtener el estudio de la curva elástica de vigas isostáticas, obtener las ecuaciones que derivan del Método de Clebsch para cada caso de estudio y obtener los diagramas de solicitaciones del problema, entre otros, es una herramienta de fácil uso que podría facilitar a los estudiantes la verificación de resultados obtenidos analíticamente mediante el método mencionado, procedimiento que se ejecuta en 45 minutos aproximadamente. De esta forma se podría motivar al estudiante al estudio a través de dicho elemento innovador en el aula de clase.

**Abstract.** *Elastic Clebsch is the first educational application for mobile devices of the Faculty of Engineering of the Central University of Venezuela. The app is available at Google Play only for mobile devices using Android operating system, and it is a calculation tool based on mobile*

*learning, designed and constructed to calculate the elastic of beams under shear forces and bending moments, based on the Clebsch Method of Solids Mechanics. Its creation arise from the need to implement technological tools in classrooms with the purpose of upgrade and complement the traditional methods of teaching, and motivate the student to learn through the constant practice but more importantly to generate their own content. The app was created by using the Integrated Development Environment (IDE) Android Studio, with the programming language Java, according to the Prototype-based methodology and through the implementation of various mathematical methods such as Cramer's Rule and the Bisection Method. With Elastic Clebsch it is possible to obtain the elastic behavior of isostatic beams, the equations that derive from the Clebsch Method for each case of study, and it is also possible to obtain the forces diagrams, among others features, besides it is an easy implementation tool that could help students to verify their manually obtained results (using Clebsch Method), procedure that could take them around 45 minutes to perform. Therefore the use of this app could help motivate students to study harder by the use of this innovative element in the classroom.*

**Key words:** Aprendizaje móvil, Aplicación, Dispositivos móviles, Deformaciones en vigas, Método de clebsch.

## 1 INTRODUCCIÓN

El uso de herramientas de cálculo en Ingeniería genera una cantidad de ventajas sobre los procedimientos originales, que generalmente se asocian a una disminución del margen de error, y por lo tanto la reducción de tiempo de ejecución del procedimiento. Dichas herramientas permiten empoderar el conocimiento, ya que mediante su uso es posible expandir y profundizar conocimientos en el área de estudio al ejecutar análisis detallados y rigurosos. Esto sin duda abre nuevos horizontes para quienes las utilizan, sin embargo su uso no debe asociarse a la eliminación del estudio de los métodos convencionales, especialmente en la formación de ingenieros. El Método Macaulay-Clebsch es uno de los métodos utilizados en análisis estructural para calcular la deformación y curva elástica de una viga [1]. Su nombre se debe a que dicho método se fundamenta en los trabajos de Macaulay y Clebsch, Macaulay fue quien creó el método el cual luego fue estudiado y desarrollado por Clebsch, el cual llevó el método a lo que se conoce hoy en día. El método consiste en la doble integración de la ecuación de la elástica del elemento y la obtención de la deformación de la viga mediante la inclusión de las condiciones de borde del sistema. La escogencia de dicho método ante los otros existentes se debe a que es exacto y reproducible con lo cual es posible crear un algoritmo y programarlo. A continuación se analizan los fundamentos teóricos del método, se describe la metodología utilizada y se describe la estructura de la aplicación junto con las clases que componen.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La ecuación diferencial de la elástica (ecuación 1) que se presenta a continuación, puede ser estudiada mediante diferentes métodos, con el fin de predecir los valores que adopta dicha curva y así poder representarla gráficamente. En ella se relaciona la curvatura de una superficie neutra

con el momento flector de una viga sometida a flexión.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z(x)}{EI_z} \quad (1)$$

Donde  $\rho$  es el radio de curvatura [L],  $M_z(x)$  el momento flector [F-L],  $E$  el módulo de elasticidad del material [F/L<sup>2</sup>] y  $I_z$  el momento de inercia de la sección transversal de la viga [L<sup>4</sup>] También se conoce:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (2)$$

En el término del denominador de la ecuación 2 la primera derivada de la función es muy pequeña, por consiguiente al elevarla al cuadrado y sumarle uno tiende a uno, por lo que se puede despreciar [2], entonces:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z} \quad (3)$$

Se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden lineal (ecuación 3) la cual representa la deformación de la viga y su comportamiento. Como se dijo antes, el método de Clebsch consiste en integrar la ecuación diferencial de la elástica, obteniendo en cada integración una constante que tendrá un valor sujeto a las condiciones de borde del sistema,

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{M_z(x)}{EI_z} dx + C_1 \quad (4)$$

Las variaciones de las deflexiones son muy pequeñas por lo que se puede asumir:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\alpha) \approx \alpha \quad (5)$$

$$\alpha(x) = \int \frac{M_z(x)}{EI_z} dx + C_1 \quad (6)$$

$$Y(x) = \int \int \left[ \frac{M_z(x)}{EI_z} dx + C_1 \right] dx + C_2 \quad (7)$$

Al integrar una vez la ecuación 3 se obtiene la ecuación 6 que corresponde a la ecuación de la pendiente de la elástica, que en este caso llamaremos  $\alpha(x)$ , y al integrar por segunda vez dicha ecuación se obtiene la ecuación de la curva elástica (ecuación 7) que llamaremos  $Y(x)$ , evaluable en cualquier punto del elemento obteniendo directamente los valores. Al emplear el método se aplica una técnica particular a través del uso de corchetes angulares, que permite evaluar funciones de discontinuidad lo cual radica como la principal ventaja de dicho método. A continuación en la Figura 1 se muestra un esquema de la función  $Y(x)$  la cual se denominará como función de discontinuidad y dependerá, como se mencionó antes, de las condiciones y características de la viga en estudio.

Se conoce que la función en estudio es de tipo:

$$Y(x) = f(x) = (x - a)^n \quad (8)$$

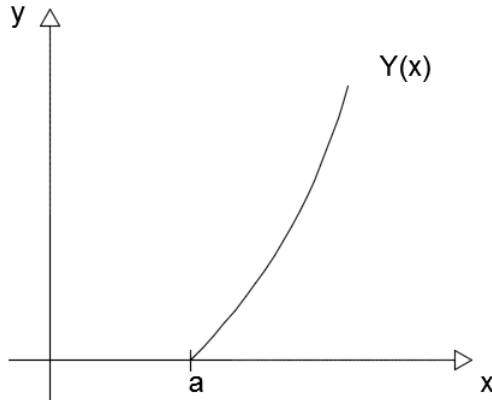


Figure 1: Función de discontinuidad

Donde Si  $x \leq a$  entonces  $Y(x) = 0$  o Si  $x > a$  entonces  $Y(x) = (x - a)^n$

Como se puede apreciar, el Método de Clebsch resulta ventajoso cuando se deben estudiar vigas con condición de discontinuidad en el diagrama de momento, debido a que la ecuación generada es única para el sistema y aplicable para cualquiera de los tramos de la viga en estudio. Al aplicar dicho método se tiene un caso de estudio que consiste en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se procede a resolver, en este caso, usando el Método de Cramer, el cual es un método matricial que se describe a continuación. Se tiene:

$$Ax = B \quad (9)$$

Se designa como  $A_i$  la matriz que resulta de sustituir la columna  $i$  de la matriz  $A$  por la matriz  $B$  de términos independientes, la obtención de resultados viene dado como (siempre y cuando  $|A| \neq 0$ ) [3][4]:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, i = 1, \dots, n \quad (10)$$

### 3 ESTUDIO DEL SISTEMA ACTUAL

Para el desarrollo del prototipo resultó imprescindible conocer el proceso de aplicación del Método de Clebsch, para lo cual se delimitó el procedimiento a seguir actualmente, basándose en los fundamentos teóricos del método. Dicho proceso se ilustra de manera resumida en el diagrama de flujo que se muestra a continuación.

Luego de establecer cada paso a seguir, se realizó la matriz FODA de dicho sistema que se presenta a continuación en la Tabla 1, con el fin de determinar la factibilidad de la construcción de la herramienta en cuestión.

Según lo establecido a través del estudio de la matriz FODA del sistema actual, resultaba factible la construcción del prototipo, en este caso la aplicación para el cálculo de deformaciones en vigas.

Table 1: Matriz FODA del sistema actual

Fortalezas(F)	Oportunidades(O)
Por ser un cálculo analítico es exacto	Posibilidad de automatizar y optimizar el proceso de resolución del problema
Es un método reproducible, con lo cual se puede convertir en algoritmo y programarlo	Disminuir la posibilidad de cometer errores en el análisis
Sólo requiere del estudio de discontinuidades del elemento para su aplicación	Disminuir el tiempo de resolución de un problema
Debilidades(D)	Amenazas(A)
La resolución del problema manualmente puede significar altos tiempos de ejecución	Posibilidad de cometer errores en el cálculo
Es recomendable la utilización de una calculadora para la resolución del problema	
Es recomendable la utilización de una calculadora para la resolución del problema	

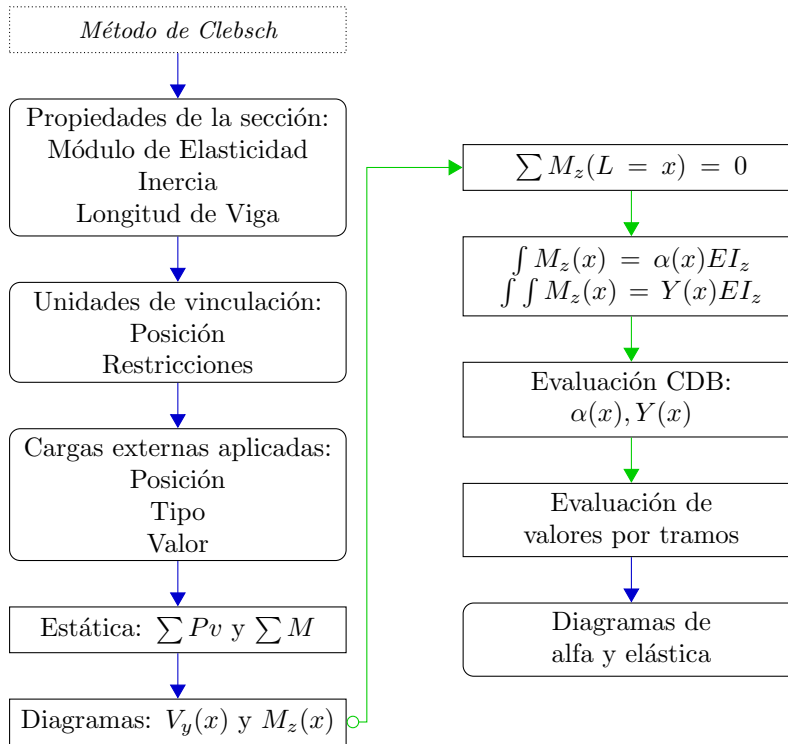


Figure 2: Sistema actual

## 4 METODOLOGÍA PARA LA REALIZACIÓN DE LA APLICACIÓN

Para la elaboración de la app se utilizó la metodología basada en prototipos ya que el proceso resulta iterativo, donde influyen muchos factores tales como el diseño del sistema, las herramientas disponibles, el cliente, entre otros. El ciclo que se establece en dicha metodología, se repitió hasta construir un prototipo que supliera los requisitos y exigencias fijadas por el cliente [5].

### 4.1 Estructura de la Aplicación

Para describir el funcionamiento de la aplicación se muestra en la Figura 3 el diagrama de clases de Elástica Clebsch, en donde aparecen todas las clases que conforman la misma, sus atributos y métodos, y la forma en que se relacionan entre ellas. Luego se define cada clase de manera individual, con el fin de describir el proceso que es llevado a cabo en la app.

#### 4.1.1 Clase Viga

La clase viga posee como atributo la longitud del elemento en estudio, según la cual se rige la ubicación de los demás elementos del sistema. De igual forma están los atributos de Módulo de Elasticidad e Inercia de la sección con respecto al eje Z, ya que el usuario puede elegir si hacer el estudio completo o no. Es la clase principal del programa, por esto contiene los arreglos donde se

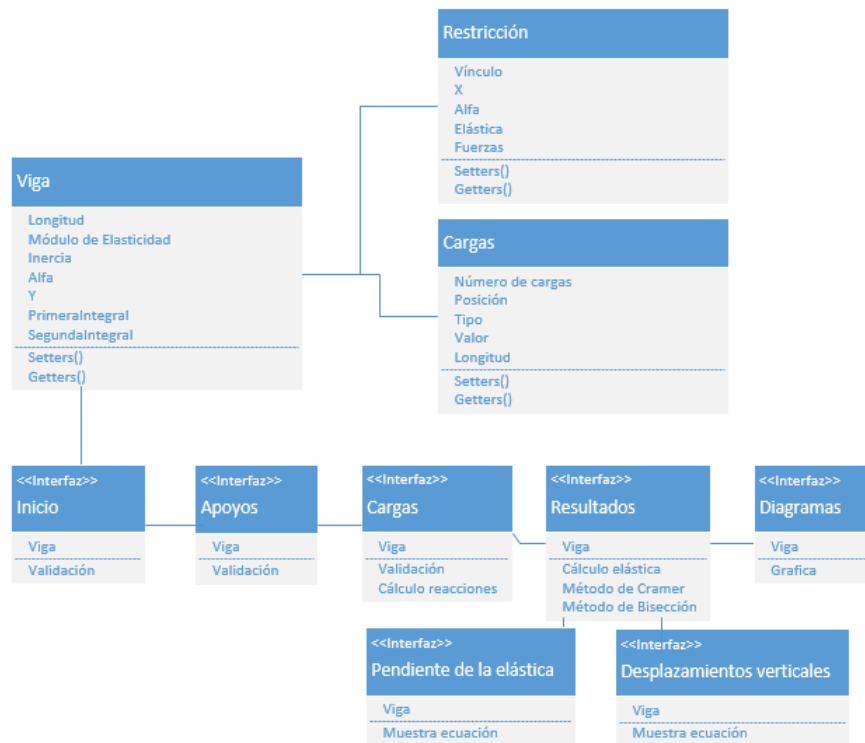


Figure 3: Diagrama de clases de la aplicación

almacenan los valores de la primera y segunda integral de la ecuación de momento del sistema, utilizados luego para el estudio de la elástica. Dentro de sus métodos contiene aquellos destinados a almacenar y obtener dichos atributos cuando deban ser consultados. En la clase Viga se llama a las otras dos clases del método, las clases Restricción y Cargas. Esto quiere decir que al crear un objeto de la clase Viga, se crea un objeto de tipo Restricción y otro de tipo Cargas, permitiéndole llamar a sus atributos y utilizar sus métodos. La clase viga está relacionada con la pantalla Inicio, la cual es la pantalla inicial de la aplicación, es decir, al iniciar la aplicación se crea un objeto de tipo Viga. Una vez validados los valores correspondientes se puede acceder a la próxima interfaz.

## 4.2 Clase Restricción

Esta clase posee como atributos: Vínculo, X (posición del mismo), Alfa (pendiente de la elástica) y Elástica. Mediante estos atributos se establecen las restricciones de desplazamiento a las cuales se encuentra sometido el sistema, por consiguiente en la clase se establecen las condiciones de borde (CDB) que se generan al aplicar dichas restricciones. Dentro de sus métodos al igual que en la clase Viga, se encuentran aquellos destinados a almacenar y obtener dichos atributos cuando deban ser consultados. En esta clase los atributos se almacenan en arreglos. Como se mencionó antes, el modelo de viga a estudiar consiste en vigas isostáticas, por lo que permiten máximo dos unidades de vinculación, las cuales, según su grado, permiten aplicar tres tipos de restricciones a la viga, dichas restricciones se definen como:

- Restricción en X: se restringe el movimiento de la barra en dirección horizontal con respecto a la tierra.
- Restricción en Y: se restringe el movimiento de la barra en dirección vertical con respecto a la tierra.
- Restricción de Alfa ( $\alpha$ ): se restringe la rotación de la barra con respecto a la tierra.

La clase Restricción se asocia con la pantalla Apoyos, mediante la cual se lleva a cabo la introducción, validación y almacenamiento de los diferentes datos. Allí se programan los métodos a ejecutar para tal fin, mostrando los posibles casos de estudio para el desarrollo del método.

#### 4.2.1 Clase Cargas

Mediante esta clase se definen las cargas a las cuales se encuentra sometido el sistema, con lo cual finaliza la caracterización del mismo. Ella posee como atributos: Número de cargas, Posición (donde se aplica la carga), Tipo (Puntual, Lineal distribuida, Momento), Valor (de la carga), y Longitud (si la carga es linealmente distribuida). En esta clase los datos introducidos referentes a las características de cada una de las cargas se almacenan en arreglos dinámicos, puesto que el número de cargas determina el tamaño de los mismos. Esta clase se encuentra asociada con la pantalla Cargas. Mediante dicha interfaz se introducen los datos ya mencionados, y una vez culminado el proceso se muestra un resumen de las cargas introducidas y finalmente las reacciones del sistema que fueron calculadas.

#### 4.2.2 Clase Resultado

La clase Resultado es la clase donde se maneja la pantalla con el mismo nombre. Dentro de sus atributos se encuentran los contenedores gráficos dispuesto en él, y dicha clase posee los métodos que calculan los valores de la pendiente de la elástica (alfa) y de la elástica, para toda la extensión del elemento. De igual forma posee los métodos de Cramer y de la Bisección [6], con los cuales se calcularon las constantes de integración C1 y C2 y los valores máximos de la elástica respectivamente. En dicha pantalla se muestran todos los resultados referentes al estudio de la elástica como lo son C1 y C2, los valores de Alfa y Elástica para los puntos notables (inicio y final de la viga así como puntos donde haya cargas aplicadas) y permite a su vez calcular dichos valores para cualquier distancia. Mediante esta clase es posible acceder a las pantallas donde se muestran las ecuaciones de la pendiente de la elástica y la elástica.

#### 4.2.3 Clase Diagramas

En la clase diagramas se poseen los atributos referentes a los contenedores gráficos de la pantalla con el mismo nombre. Esta clase posee un método mediante el cual se grafican los valores de fuerza cortante, momento flector, pendiente de la elástica y elástica (ambos multiplicados por la rigidez a flexión del elemento). Los diagramas mostrados por orden de aparición son:

- Diagrama de fuerza cortante  $V_y(x)$  en unidades de Toneladas [T].



- Diagrama de momento flector  $M_z(x)$  en unidades de Toneladas-metros [T-m]
- Diagrama de la pendiente de la elástica Alfa (línea azul) y diagrama de la elástica (línea verde), ambos multiplicados por la rigidez a flexión:  $\alpha(x)EI_z$  y  $Y(x)EI_z$ .

Por último es importante mencionar que la relación de las pantallas es lineal, puesto que sólo se puede acceder a una siempre y cuando se hayan introducido los datos de manera satisfactoria en la anterior.

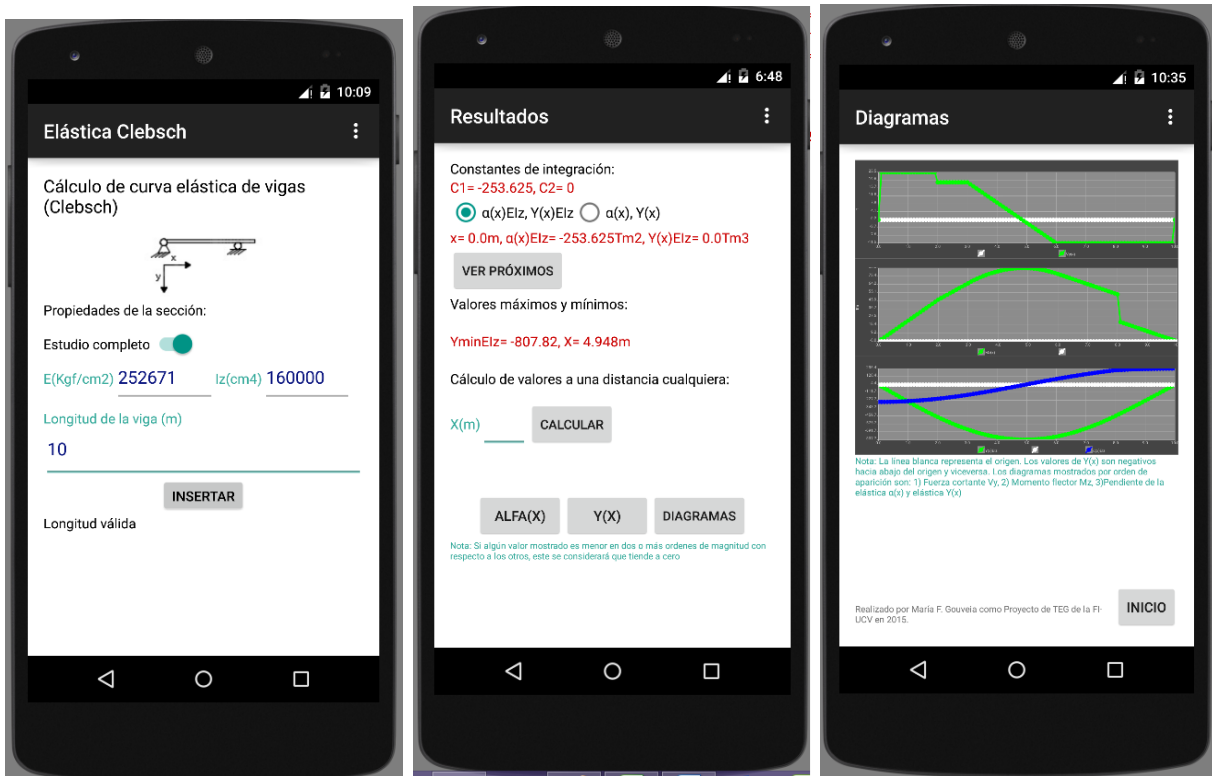
## 5 PRODUCTO FINAL

En la Figura 4 se muestran la pantalla Inicio, Resultados y Diagramas respectivamente de la app Elástica Clebsch, la cual está disponible actualmente en Google Play y posee las siguientes funciones:

- Estudio de diferentes configuraciones de vigas isostáticas, sometidas a cargas externas.
- Permite el estudio completo del sistema (introduciendo Módulo de elasticidad:  $E$  e Inercia de la sección:  $I_z$ ), o el estudio sencillo (únicamente introduciendo longitud del elemento y los resultados obtenidos se mostrarán como  $Y(x)EI_z$ ,  $\alpha(x)EI_z$ )
- Calcula y muestra las reacciones internas del sistema.
- Calcula y muestra las constantes de integración (C1 y C2) que surgen al obtener las ecuaciones de la pendiente de la elástica ( $\alpha(x)$ ) y la elástica ( $Y(x)$ ).
- Muestra las ecuaciones de la pendiente de la elástica y de la elástica, ambas multiplicadas por la rigidez a flexión del elemento.
- Calcula y muestra los valores de momento, pendiente de la elástica y elástica para los diferentes tramos del elemento.
- Muestra los valores máximos y mínimos de la elástica y las longitudes a las cual ocurren.
- Muestra los diagramas de corte, momento, pendiente de la elástica y elástica del sistema propuesto.
- No necesita internet para ejecutarse.

## 6 CONCLUSIONES

Elástica Clebsch es en una aplicación para dispositivos móviles Android capaz de calcular y graficar la curva elástica de elementos sometidos a flexión. Entre sus ventajas se encuentra su fácil uso y amplia disponibilidad, considerando que actualmente la mayoría de los jóvenes posee un dispositivo móvil a su alcance y es un mercado que se encuentra en ascenso [7]. La herramienta presentada resulta de uso sencillo, amigable y es capaz de resolver configuraciones complejas en un tiempo muy corto, obteniendo una reducción de los tiempos de ejecución de aproximadamente 25 minutos, brindando así dos de las principales ventajas de las herramientas de cálculo: precisión



(a) Principal

(b) Resultados

(c) Diagramas

Figure 4: Pantallas principales de la app Elástica Clebsch

y rapidez. Con la implementación de la aplicación Elástica Clebsch en el aula de clase, se hace frente a la inminente demanda actual sobre el uso de tecnologías (tanto de la Universidad como del país) como parte del Aprendizaje Móvil, esperando que repercuta de manera positiva al brindar una nueva perspectiva sobre la educación y múltiples oportunidades a los estudiantes, propiciando el uso de diferentes métodos de ejercitación.

### Agradecimientos

Proyecto PEII N°201304116 del Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), por el apoyo brindado en la realización de este trabajo.

### REFERENCIAS

- [1] STIOPIN, P., *Resistencia de materiales*. Mir Moscú, 1979.
- [2] TIMOSHENKO, S., *Resistencia de materiales*. Espasa-Calpe, 1976.
- [3] HUERTA, A., SARRATE, J., & RODRIGUEZ, A., *Métodos numéricos. Introducción, aplicaciones y programación*. Edicions UPC, 1998.

- [4] PALACIOS, F., *Métodos Numéricos: Resumen y ejemplos. Resolución aproximada de ecuaciones*. Universidad Politécnica de Catalunya, 2009.
- [5] PRESSMAN, R., *Ingeniería del Software, un enfoque práctico*. McGraw Hill, 2002.
- [6] NIEVES, A., & DOMÍNGUEZ, F., *Métodos Numéricos aplicados a la ingeniería*. CECSA, 1995.
- [7] UNESCO., *Directrices para las políticas de aprendizaje móvil*. 2013.