

**TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

**EVALUACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DE DISEÑO DE  
CONTROL Y SU APLICACIÓN A PROCESOS MEDIANTE EL  
USO DE MATLAB**

Presentado ante la ilustre  
Universidad Central de Venezuela

por el Br. **Torrealba Erick**

Para optar al Título de  
Ingeniero Mecánico

Caracas, 2012

## **TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

# **EVALUACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DE DISEÑO DE CONTROL Y SU APLICACIÓN A PROCESOS MEDIANTE EL USO DE MATLAB**

Tutor académico: Prof. Hernández, Simón

Presentado ante la ilustre  
Universidad Central de Venezuela  
por el Br **Torrealba Erick**  
Para optar al Título de  
Ingeniero Mecánico

Caracas, 2012



Facultad de Ingeniería  
INGENIERIA MECÁNICA  
Universidad Central de Venezuela  
DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA



Caracas, 29 de mayo de 2012

## ACTA

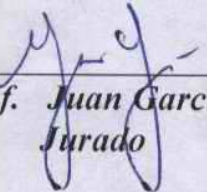
Los abajo firmantes, miembros del jurado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el (los) bachiller (es):

# **ERICK TORREALBA**

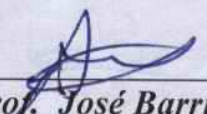
*Titulado:*

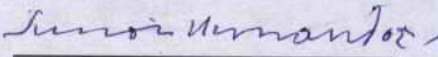
**“EVALUACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DE DISEÑO DE CONTROL, Y SU APLICACIÓN A PROCESOS, MEDIANTE EL USO DE MATLAB”**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudio conducente al Título de Ingeniero Mecánico.

  
Prof. Juan García  
Jurado



  
Prof. José Barriola  
Jurado

  
Prof. Simón Hernández  
Tutor

“50 años de la creación de la Escuela de Ingeniería Eléctrica, de la Escuela de Ingeniería Mecánica y del Instituto de Materiales y Modelos Estructurales”

## **DEDICATORIA**

El presente trabajo especial de grado esta dedica principalmente a Dios quien es mi salvador y mi camino.

A mi Mamá por ser mi ejemplo, por su apoyo, por sus correcciones y por su amor incondicional

A mi Papá, quien me ha enseñado la constancia y dedicación de realizar un oficio.

A mi Siry Guedes quien le da otro sentido a mi vida.

A mi abuela quien me enseñó en el tiempo que compartimos, la fortaleza que se debe tener ante las adversidades, a lo bello de la simplicidad de las cosas y a lo valioso de las procedencia de cada quien.

## **AGRADECIMIENTOS**

Antes que a nadie primero agradezco a Dios por ser el centro de mi vida y llenar mi vida de bendiciones.

A la Universidad Central de Venezuela y a todos los profesores que sirven de guía para formar personas y profesionales aptos para la realidad de un país y ante la vida.

A mi Tutor y amigo Simón Hernández por su apoyo, motivación, dedicación y por el tiempo invertido durante la realización de este proyecto ante las adversidades.

A mis Padres por ser mi soporte durante toda mi formación personal y académica,

A mi Siry Guedes por su presencia en mi vida, su apoyo y por ayudarme a encontrar la motivación que ha impulsado el trabajo

A mis Amigos Gerardo Delgado y Romer Mogollon, por sus ocurrencias, colaboración y hermandad brindada no solo durante este proyecto sino durante todos los estudios realizados en la universidad

Al Doctor José M Ercolino, Por su ayuda técnica en el uso del software MATLAB

Al grupo SAE UCV, que me permitió emplear la licencia del software para la realización de este proyecto

**Torrealba C, Erick A.**

**EVALUACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DE DISEÑO DE  
CONTROL Y SU APLICACIÓN A PROCESOS MEDIANTE EL  
USO DE MATLAB**

**Tutor académico: Prof. Hernández Simón, Tesis Caracas, Universidad  
Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería  
Mecánica, 2012, 153 págs.**

Palabras claves: Sistemas de control, procesos, realimentación de variables, MATLAB, linealización

**Resumen:** La gran mayoría de las industrias requieren de procesos de mezclados, de reacciones o procesos para transformar la materia prima en producto final, por lo tanto es imprescindible el control de estos procesos para lograr la mayor precisión posible y disminuir los costos. En este trabajo especial de grado, se realizó una comparación de las diversas estrategias de control tanto clásicas como modernas para tener una idea clara del modo correcto de uso y su implementación en base al criterio del diseñador del sistema. Esta comparación se realizó por medio de la simulación de un tanque de mezclado, el cual posee dos variables manipulables y dos controlables, mediante MATLAB partiendo desde el modelado matemático del mismo por medio de las ecuaciones diferenciales correspondientes y realizando un procedimiento de linealización para el manejo matemático del sistema. Se obtuvo como resultado que la acción de control determinante para los procesos es la acción integral pues asegura una disminución del error en estado estable y que las acciones de control moderno presentan mayor flexibilidad en el control para condicionar las salidas a los valores deseados.

**Torrealba C, Erick A.**

**EVALUATION OF THE DESIGN STRATEGIES FOR CONTROL AND  
ITS APPLICATION TO PROCESS USING MATLAB**

**Academic Tutor: Prof. Simon Hernandez, Thesis Caracas, Universidad  
Central de Venezuela, Faculty of Engineering, School of Mechanical  
Engineering, 2012, 153 pp.**

Keywords: Control systems, processes, feedback variables, MATLAB, linearization

**Abstract:** The vast majority of process industries require mixed reactions or processes to transform matter into the final product, therefore it is essential to control these processes to achieve the highest possible precision and lower costs. In this degree thesis, a comparison was made of the various control strategies both classic and modern to have a clear idea of the correct mode of use and implementation based on the criterion of the system designer. This comparison is performed by means of simulation of a mixing tank, which has two manipulated variables and two controlled by MATLAB starting from the mathematical modeling of the same by means of differential equations corresponding and performing a linearization procedure for handling mathematical system. The result was that decisive action to control such processes as integral action ensures a decrease in steady-state error and the modern control actions have greater flexibility in the control to condition the outputs to the desired values.

## INDICE

	Pág.
Introducción	1
<b>Capítulo I:</b>	
Planteamiento del problema	3
Objetivos	6
General	6
Específico	6
Justificación	7
<b>Capítulo II: Marco Teórico</b>	8
Representación de plantas o procesos	11
Función de transferencia	11
Variables de estado	12
Métodos de Identificación	15
Identificación teórica	15
Identificación experimental	16
Método Cohen-Coon	17
Método Ziegler-Nichols	19
Configuraciones de control	20
Serie	20
Realimentación (feedback)	21
En adelante (feedforward)	22
Análisis de la respuesta del sistema	23
Respuesta en el tiempo	23
Respuesta en frecuencia	25



Especificaciones en un sistema de control	27
Estabilidad	27
Criterios de estabilidad	29
Criterio de Routh-Hurwitz	31
Criterio de Nyquist	32
Margen de ganancia	34
Margen de fase	34
Error en estado estable	34
Respuesta transitoria	37
Características para sistemas de primer orden	40
Tiempo de levantamiento	40
Tiempo de estabilización	40
Características para sistemas de segundo grado	40
Frecuencia natural	41
Factor de amortiguación	41
Caracterización de las respuestas en segundo orden en base al factor de amortiguación	42
Tiempo pico	44
Porcentaje de máximo pico transitorio	44
Tiempo de establecimiento	45
Tiempo de levantamiento	45
Respuesta transitoria para sistemas de orden superior	46
Sistemas con más de dos polos	46
Sistemas con ceros adicionales	47
Técnicas de análisis y diseño de los sistemas de control	47
Lugar geométrico de las raíces	47
Trazas de bode o diagrama de bode	50
Margen de fase y de ganancia mediante trazas de bode	52

Estrategias de diseño de sistemas de control	53
Estrategias de control para sistemas SISO	53
Control proporcional	54
Control proporcional-integral	54
Control proporcional-Derivativo	55
Efecto de la adición de polos y ceros	56
Control proporcional-derivativo-integral	56
Compensación en atraso	58
Compensación en adelanto	59
Compensación en atraso-adelanto	60
Estrategia de control para sistemas MIMO	60
Realimentación de variables de estado	61
Análisis de estabilidad mediante Liapunov	67
Procedimientos para determinar los	
coeficientes de realimentación	69
Asignación de polos	69
Control óptimo	71
Realimentación En sistemas MIMO por medio	
de función de transformación	74
Desacoplamiento en sistemas MIMO	76
Linealización de ecuaciones	79
Procedimiento posible a seguir para el diseño del controlador	80

### **Capítulo III: Metodología empleada**

Diagrama de Flujo	84
Justificación de la metodología empleada	88
Modelado de la ilustración (tanque de mezclado)	93
Determinación de la función de transformación	94

Representación mediante variables de estado	101
Aplicación de las estrategias de control al modelo de la planta	104
Control proporcional	105
Control integral	107
Control derivativo	108
Control Proporcional e integral	108
Control por atraso	109
Control por adelanto	109
Control en adelanto y atraso	110
Control mediante la realimentación de variables estado	110
<b>Capítulo IV: Resultados y Conclusiones</b>	
Tabla de resultados	112
Tabla comparativa de las estrategias de control	114
Análisis de resultados	117
Conclusiones	120
Recomendaciones	122
Bibliografía	123
Anexos	
1- Códigos empleado en MATLAB	125
2- Expresión algebraica de la ganancia integral para realimentación de variables	126
3-Expresion algebraica de los coeficientes de la matriz P para la ecuación de Riccati	131
4- Programación en MATLAB: Control proporcional	134
5- Programación en MATLAB: Control Integral	135
6-Codigos de Programación en MATLAB: Control derivativo	137
7- Códigos de Programación en MATLAB: Control PID	139
8- Código de Programación en MATLAB: Control Lag o lead	141

9- Código de Programación en MATLAB: Control Lag- Lead	143
10- Código de Programación: realimentación de variables por asignación de polos	146
11- Códigos de MATLAB: Control Optimo	148
12- Péndulo Invertido	149

### Lista de cuadros y gráficos

Nº de figura	Nombre	Página
1	Diagrama general de un proceso o planta median variable de estado	13
2	Representación en diagrama de bloque de un sistema con realimentación en funciones de transferencia	14
3	Esquema de un sistema de realimentación para el método de la curva de reacción	16
4	Curva de reacción para la respuesta de un sistema	18
5	Diagrama de Nyquist para la función de transferencia $1/(s^2+2s+2)$	32
6	Esquema de control en realimentación	34
7	Respuesta de un sistema de primer orden, para una entrada de tipo escalón	36
8	Respuesta a un sistema de segundo orden, subamortiguado con una entrada de tipo escalón	37
9	Representación de las respuestas de acuerdo al factor de amortiguación	41
10	Representación de una respuesta a un sistema de segundo grado, en donde se resaltan algunas especificaciones básicas	43
11	Esquema general de un sistema de control en realimentación	45
12	Lugar geométrico de las raíces para la función $(s+1)/(s^2+2s+2)$	47
13	Diagrama de bode para la función de transferencia $(s+1)/(s^2+2s+2)$	49
14	Representación de margen de fase y de ganancia en el diagrama de bode	50
15	Representación en diagrama de bloque de un sistema con realimentación en funciones de transferencia	51
16	Representación de realimentación en diagrama de bloques, de realimentación de variables de estado	60
17	Diagrama de realimentación de variables de estado con una acción integral para el error en estado estable	62
18	Representación de variables de estado contra el tiempo	65
19	Representación de las variables de estado de un sistema MKC	19
20	Diagrama de bloque de proceso con interacción entre las variables independientes sistema de $2 \times 2$	73
21	Representación de diagrama de control para sistemas MIMO, son desacoplamiento	75
22	Diagrama de flujo de la metodología empleada	80
23	Esquema general del tanque de reacción con mezclador	87
24	Diagrama de bloques para el proceso	91
25	Representación de la interacción de las variables en un sistema de $2 \times 2$	92
26	Representación en diagrama de bloque para el proceso	94
27	Configuración de control en realimentación	95

## *INTRODUCCIÓN*

Cada año los avances en la tecnología apuntan hacia un mundo en donde los productos y servicios se presten con mayor facilidad, confiabilidad y rapidez, por ello es necesario que los procesos, que satisfagan esta creciente demanda mundial sean optimizados.

Es por ello que el control de estos procesos, debe ser de igual manera optimizado con la finalidad de obtener un mayor rendimiento y un menor costo.

Tal es el caso en donde la mayoría de los avances tecnológicos se realizan en el control de un proceso, por ejemplo existen actualmente modelos de vehículos en donde se tienen unas prestaciones estándar y al oprimir un botón estas prestaciones se convierten en deportivas.

Es decir con el control se puede variar el rendimiento o las especificaciones de un proceso o planta, en el ejemplo anterior se tiene el mismo vehículo con las mismas características físicas, en donde se tienen dos o hasta más posibles configuraciones.

Para Venezuela en donde las mayorías de las industrias están involucradas en algún proceso en particular, es necesario optimizarlos mediante el uso del control adecuado que garantice el mayor rendimiento al menor costo.

Tal es el caso de las industrias químicas, petroleras, farmacéuticas, alimenticias entre otras, en donde al menos es necesario mezclar dos compuestos, aumentar la temperatura para una separación, garantizar el vacío en enlatados y muchos otros procesos que son necesarios para satisfacer una necesidad.

Es por ello que este trabajo especial de grado, está orientado hacia el estudio de los sistemas de control, en donde se tratan temas como el modelado del proceso a controlar, los métodos de identificación de funciones de forma empírica, las especificaciones de las respuestas, la comparación entre varias estrategias de control orientadas hacia el área de procesos, en donde se manejan en algunas ocasiones más de dos variables dependientes entre sí, así como también la aplicación de estas estrategias a servomecanismos de múltiples variables (la cual se presenta como anexo).

Para ello se utiliza el modelado de un tanque de mezclado, planteado de forma general, en donde intervienen dos variables a manipular y dos variables a controlar, para la parte del servomecanismo se realiza el control de un péndulo invertido.

A éstos se le aplican todas las estrategias de control por medio de una herramienta computacional conocida como MATLAB, para el estudio de forma independiente de cada estrategia y analizar las respuestas que cada una produce.

Se ha seleccionado este software debido a que posee todas las herramientas necesarias para el análisis de los sistemas de control, además de poseer una alta capacidad de cálculos para realizar operaciones matemáticas y poseer otras características como por ejemplo, la obtención en tiempo real de datos y a su vez el análisis de forma instantánea.

Por ello es necesario conocer a fondo los códigos de programación del software para este estudio.

Finalmente se realiza una comparación en base a las características que cada estrategia brinda, para formar un criterio con el cual se pueda considerar rápidamente una estrategia que permita controlar un proceso deseado.

# CAPITULO I

## *PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA*

Existen diversas estrategias de control que logran mantener un proceso o planta dentro de los valores requeridos, estos se basan en desarrollos teóricos que incluyen la retroalimentación de señales, el análisis de su respuesta en frecuencias, entre otras. Es decir, se utiliza un controlador que permita mantener las variables de un proceso dentro de un rango de niveles establecidos y en el caso del servomecanismo se trata de seguir fielmente una señal que varía en el tiempo.

Es por ello que al enfrentarse a un proceso o sistema a controlar, es necesario identificar el modelo matemático que lo caracteriza para ejercer sobre éste el control.

Este modelo puede expresarse haciendo uso de la transformada de Laplace, en algunas ocasiones, para obtener su función de transferencia. También puede determinarse este modelo a partir de métodos de identificación experimentales y cabe mencionar que otro modo de representación se logra haciendo uso de las variables de estado.

Para un diseñador de sistemas de control, luego de tener bien identificado este modelo del proceso, debe decidir qué tipo de controlador debe emplear para lograr las especificaciones requeridas. Actualmente la mayoría de estos controladores son de tipo PID (control proporcional, derivativo e integral), lo que ha producido que las otras estrategias de control no sean tan frecuentes (introducción de compensaciones, realimentación de variables de estado, etc.) en el control de procesos.



Esta tendencia de emplear control tipo PID tiene algunos años aplicándose en las industrias, podría decirse que desde el empleo de los circuitos integrados a la industria, los cuales han permitido tener mayor flexibilidad en las variables empleadas en esta estrategia.

Esta estrategia de control (PID) tiene bases teóricas, donde se seleccionan, de acuerdo a las especificaciones requeridas, los valores de las variables del controlador (Método de Ziegler-Nichols), o en su defecto se deja a la experiencia del diseñador modificando a sus conveniencias los valores determinados por estas teorías.

Es por ello que debido a la facilidad, la costumbre o el descarte de las otras estrategias de control, se emplea en su mayoría este tipo de control (PID) para los procesos.

Para un diseñador de sistemas de control, con poca experiencia, le es de vital importancia conocer las ventajas y desventajas de cada estrategia. Para utilizar la de mayor conveniencia, logrando así mayor eficiencia en el sistema, en base a sus criterios.

Este estudio permite despejar las dudas sobre estas estrategias de control, para que pueda emplearse con mayor facilidad en el campo, es decir, se estableció una comparación que permita determinar similitudes o desigualdades. En donde se hace notar las ventajas de emplear un sistema de control en particular.

Esta comparación se realiza de forma teórica y se comprueba de forma práctica, mediante la aplicación a los ejemplos mencionados, en donde para el caso del tanque se realiza una mezcla de dos fluidos y se intenta controlar una propiedad intensiva y el caudal, debido a que el sistema presenta dos entradas y dos salidas fue necesario el estudio de los desacopladores, para el análisis separado de cada variable, según sea el caso. Y para el servomecanismo se le intenta controlar la estabilidad, ante la perturbación y señales de entrada que modifiquen esta condición.

Adicionalmente se emplea el software MATLAB, para verificar la aplicación de estas estrategias, a un modelo, el cual fue utilizado para ilustrar convenientemente las características de cada controlador.

Este software se ha seleccionado debido a que es un programa de matemáticas aplicadas que permite simular el comportamiento del sistema a controlar y resolver las ecuaciones de dichas simulaciones. Además tiene capacidad gráfica que permite ilustrar los resultados.

## **OBJETIVOS**

### ***Objetivo General***

- Evaluar las estrategias de diseño de control para sistemas lineales e invariantes en el tiempo y su aplicación mediante el uso del software MATLAB como herramienta de diseño.

### ***Objetivos Específicos***

- Analizar las estrategias de control para procesos.
- Estudiar las técnicas de análisis y diseño para sistemas de control.
- Estudiar algunos métodos de identificación de funciones de transferencias para procesos.
- Elaborar un cuadro comparativo de las estrategias de control.
- Aplicar la herramienta computacional MATLAB para el análisis de las estrategias de control.

## *JUSTIFICACIÓN*

A nivel industrial la necesidad de automatización y control va creciendo constantemente buscando obtener productos de manera más rápida, con mayor confiabilidad, precisión y menor costo.

Es por ello que es necesario para los ingenieros conocer estos métodos de automatización y control, para estar en la capacidad de adaptar y crear una industria venezolana capaz de competir a nivel mundial.

Para poseer una herramienta capaz de controlar estos procesos es necesario tener mayor claridad de las estrategias de control, esto para ahorrar tiempo en el diseño del controlador obteniendo mayores beneficios. Por ende, se debe conocer de manera detallada las estrategias de diseño de sistemas de control, además de tener a la mano las ventajas y desventajas de cada una de ellas, así como también sus similitudes.

Con esta investigación se beneficiarán todos los diseñadores de control, tanto experimentados como los que no lo son. Pues se podrá seleccionar el control de manera más eficaz con la finalidad de agilizar la producción de cualquier tipo de industria, como por ejemplo, las petroleras, las farmacéuticas, las de servicios básicos, entre otras.

Al realizar la comparación entre ellas de manera teórica se puede identificar las bondades de cada estrategia de control, mediante los resultados obtenidos al utilizar MATLAB, aplicándolo a un proceso o planta física.

También se puede decir que se entenderá el uso preferencial del control PID en los procesos y plantas **para** así aclarar el por qué las otras estrategias no son tan frecuentemente utilizadas.

## **CAPITULO II**

### ***MARCO TEÓRICO***

Antes de comenzar a describir todo lo referente al área control es importante que se tengan claros algunos conceptos para el buen entendimiento del tema.

Planta/ Proceso:

En la teoría de control, se le conoce como el objeto de estudio y análisis de las variables que están presentes en él, por ejemplo un servomecanismo, un control de posición de un objeto o un proceso como el control de temperatura en un intercambiador de calor.

Sistema:

El sistema se conoce como todas las partes involucradas dentro del estudio del control, considera la planta, los controladores y los dispositivos finales de control (válvulas, servomotores, reguladores, entre otros) incluyendo las variables que están presentes y la posible interacción que puede darse entre ellas.

VARIABLES DE UN SISTEMA:

Las variables se conocen como aquellas cantidades o magnitudes que son relevantes para el proceso, pueden ser variables dependientes, conocidas como señales de salida o independientes conocidas como señales de entrada y perturbaciones. Por ejemplo se puede mencionar la posición, la velocidad y la aceleración.

Lazo cerrado y Lazo abierto:

En el caso de lazo cerrado, una señal medida se compara con un valor de referencia deseado para el proceso, se condiciona a la variable de salida a ser lo más cercana posible a la referencia.

Mientras que el lazo abierto, no se compara con ninguna señal y por lo tanto la respuesta puede ser distinta a la señal de entrada o el punto de trabajo que se quiere.

Por ejemplo, se puede mencionar el llenado de un tanque, para esto se podrían considerar dos alternativas, en la primera una persona debe supervisar constantemente el llenado hasta el nivel deseado, para cerrar la válvula de admisión, este sería el caso de un lazo abierto (en donde se requiere la intervención de una persona), mientras que para un lazo cerrado, como segunda alternativa se coloca un flotador en el nivel deseado que permita el cierre de la válvula.

Sistema lineal e invariante en el tiempo:

Un sistema es lineal e invariante en el tiempo, si cumple con las siguientes características:

- 1- Para una entrada específica produce una salida específica.
- 2- Se puede aplicar el principio de superposición.
- 3- Si las ecuaciones de modelado poseen coeficientes constantes (invariantes en el tiempo)

Es decir, con este tipo de sistema se puede estudiar también las perturbaciones que puedan existir dentro del sistema, como por ejemplo, en el control de posición de una antena en donde luego de seleccionar un ángulo específico, la fuerza producida por el viento intente desviarla, por lo cual el control debe responder también ante esta situación.

En el modelado del sistema se puede observar y como se mencionara a lo largo del texto, que la mayoría de los procesos son considerados no lineales, por lo tanto debe aplicarse un procedimiento matemático que asegure esta condición dentro

de un rango específico para las variables, este procedimiento se llama linealización y será explicado posteriormente.

Ahora que se tiene una idea sobre el tema, se puede comenzar comentando que el objetivo principal de toda esta rama de la ingeniería mecánica, es la de controlar satisfactoriamente las variables de un sistema.

Es decir, se deben cumplir las especificaciones necesarias, impuestas de manera física o por criterio del diseñador en el sistema. Pero antes de realizar el control sobre una planta desconocida, se debe tener una aproximación de la función de transferencia del sistema, la cual es posible obtener mediante los métodos de identificación, que posteriormente se describirán.

Luego de esto se introduce un controlador que puede ser de diversas maneras, de acuerdo al criterio de diseño, que cumpla la función anteriormente comentada de satisfacer las especificaciones

Cabe destacar que el software MATLAB posee herramientas para muchos de los puntos que se desarrollaran en este capítulo, los códigos y formas de programación se encuentran en el anexo 1.

A continuación, se describirán de manera general lo anterior comentado, como son los métodos de identificación, las estrategias de control, las especificaciones del sistema y los métodos de análisis para el diseño del control

## ***REPRESENTACIÓN DE PLANTAS O PROCESOS***

### ***Función de transferencia***

Esta forma de representación utiliza las transformadas de Laplace, para facilitar las operaciones matemáticas que deben realizarse durante el proceso de diseño.

El uso de funciones de transformación permite la visualización de los polos, los ceros (raíces de los polinomios del nominador y denominador respectivamente) y la ganancia que puede tener un sistema de control. Así como también su empleo en las

técnicas de análisis y diseño de control, como lo son el análisis en frecuencia y el lugar geométrico de las raíces.

Existen algunas desventajas de las representaciones de los procesos mediante el uso de funciones de transformación, la primera es que no puede considerarse condiciones iniciales en el proceso. Es decir, el sistema parte del estado en reposo en donde la señal en estudio se encuentra en un valor de 0 para un tiempo  $t=0$ .

Otra desventaja de esta es que sólo se puede relacionar una variable de salida para una sola señal de entrada, lo que en algunos sistemas es conveniente por la simplicidad, pero en la mayoría de los procesos industriales se emplean múltiples entradas y múltiples salidas y en algunas ocasiones es necesario poder observar las interacciones de estas variables entre sí, por lo tanto para utilizar este método es necesario tener una matriz de funciones de transformación que relacione cada salida con cada entrada, una por una, por lo tanto se hace tedioso el uso de las ecuaciones correspondientes.

La representación en función de transformación es la siguiente:

$$\frac{G(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \quad [1]$$

### ***Variables de estado***

Esta representación utiliza un vector de estado que permite la visualización del sistema en cualquier momento del tiempo, lo que implica que pueden considerarse condiciones iniciales en el estudio y aplicarse a sistemas no lineales, sistemas discretos, entre otros.

Estas variables de estado son el grupo de variables más pequeñas del sistema que deben ser linealmente independientes entre sí, tales que los valores de ellas en un tiempo  $t=t_0$  con una función de entrada completamente conocida pueda determinar los valores de las variables del sistema para todo el tiempo de estudio.



Es por ello que existen algunos criterios para la selección de variables de estado para seleccionar las más adecuadas. A continuación se comenta de manera muy general el criterio de selección de variables de estado, ya que estas dependen también de los requerimientos del sistema, de la posible medición de estas variables en el proceso y la experiencia del diseñador.

- 1- El número de variables que deben seleccionarse para el vector de estado, debe ser la cantidad mínima para describir completamente el estado del sistema.
- 2- Las componentes del vector de estado deben ser linealmente independientes entre sí, lo que significa que una no puede ser combinación lineal de otras.
- 3- Se selecciona el tipo de representación de estas variables convenientemente para la solución al problema de diseño.

Este tipo de representación no tiene una sola forma algebraica, ya que se puede expresar las ecuaciones diferenciales de modelaje del sistema convenientemente para la determinación de las matrices del proceso o puede hacerse un cambio en ellas mediante transformaciones lineales, sin alterar la esencia del modelaje de la planta.

Estas representaciones son denominadas de acuerdo a la selección de las variables. Es decir, pueden ser variables físicas que sean tomadas directamente del proceso y las cuales permiten mayor comprensión del sentido físico del sistema.

Una de estas representaciones son las variables de fase, que permiten facilidad en procesos aritméticos a realizarse posteriormente, otra representación pueden ser las variables canónicas que además de facilitar aun más los procesos aritméticos, los simplifican lo que representa una mayor rapidez en los cálculos.

La ventaja de emplear este sistema de representación, es que pueden controlarse varias señales de salida a la vez para observar las iteraciones entre ellas, empleando una o varias señales de entrada además de introducir condiciones iniciales de manera independiente.

Esta representación maneja múltiples entradas y múltiples salidas, que es lo más común dentro de procesos industriales. Como por ejemplo, en el modelaje de un

sistema masa-resorte-amortiguador (el cual es el modelo empleado para el estudio de vibraciones mecánicas, suspensiones de automóviles y algún ajuste por vibración), en donde al producirse una señal de entrada de tipo impulso, puede observarse como varía la velocidad conforme lo hace la posición del objeto, considerando condiciones iniciales para cada variable.

La desventaja de este sistema puede ser la complejidad algebraica que puede llegar a tenerse en el diseño del controlador. Por este tipo de representación se emplean las variables de estado de acuerdo al criterio de selección de las mismas, y esto puede que no tengan ningún significado físico, lo que podría dificultar la interpretación de los resultados.

Cabe destacar que los métodos de diseño de controladores para esta representación, en algunas ocasiones son complicados de comprender y por lo tanto su aplicación se hace engorrosa.

La representación en variables de estado de una planta lleva la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned} \quad [2]$$

Donde  $\dot{x}$  representa la derivada con respecto al tiempo del vector de estado,  $x$  representa el vector de estado, y  $A, b, c^T$  representan las matrices de coeficientes del proceso, la matriz de señal de entrada y la matriz de señal de salida respectivamente.

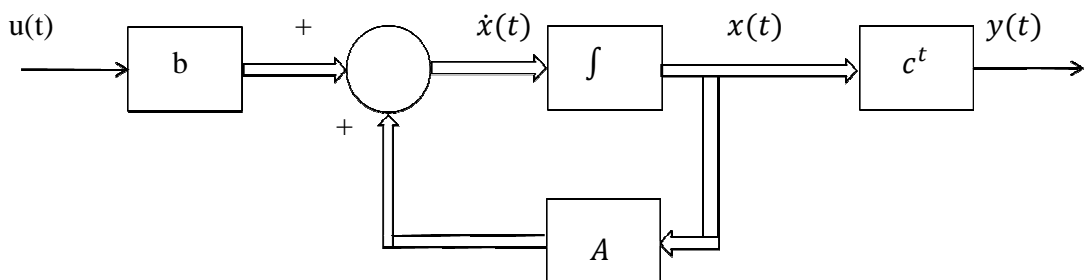


Figura [1]: Diagrama general de un proceso o planta mediante variables de estado.

Se puede hacer mayor visualización de estas matrices y de la configuración del sistema haciendo referencia en la figura 1, la cual se representa en diagrama de bloque.

Es posible el cambio de representación entre una forma y otra, solo deben seguirse un procedimiento bastante sencillo, el cual se describe con más detalle en la bibliografía.<sup>6</sup>

Mediante el uso de funciones de transformación o variables de estado, se permite una representación gráfica que facilita la visualización del sistema, ya que se puede emplear el diagrama de bloque o el diagrama de flujo de señal, para observar la interacción de las variables que participan en el proceso y por lo tanto realizar operaciones matemáticas para la simplificación del mismo.<sup>7</sup>

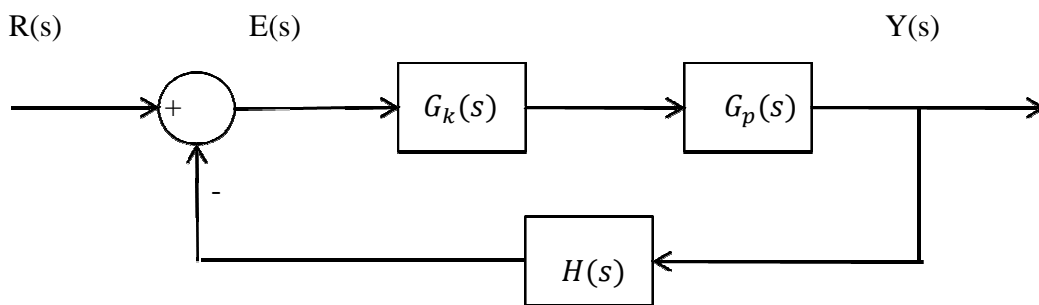


Figura 2: Representación en diagrama de bloque de un sistema con realimentación en funciones de transferencia.

En la figura 2, se representa un diagrama de bloque en donde se observan las funciones de transferencia  $G_k$ , que representa el controlador,  $G_p$  que representa la función de transformación de la planta y  $H(s)$  la cual representa la función de transferencia del instrumento de medición empleado para realimentar la salida. Esta configuración de sistema realimentado se explicara posteriormente.

## ***MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN***

El objetivo de los métodos de identificación es determinar o aproximar la función de transferencia de la planta o proceso. Esta parte es muy importante dentro del proceso de diseño porque los datos determinados en esta etapa, se emplearan como base para el diseño del controlador.

Los métodos de identificación se pueden clasificar dentro de dos grupos, los cuales son métodos teóricos y los métodos experimentales. Estos métodos se emplean de acuerdo al criterio del diseñador considerando la facilidad y confiabilidad de los datos obtenidos.

### ***Métodos de identificación teórica***

Estos métodos de identificación utilizan las ecuaciones del proceso o planta. Es decir, se deben conocer las relaciones entre las variables (ya sea mecánica, física, térmica, entre otras) que participan en el proceso, empleando las ecuaciones diferenciales que modelen el sistema en su forma más aproximada.

Luego de tener las ecuaciones de modelaje para el sistema, se emplea un procedimiento matemático como lo son las transformadas de Laplace para representar la función de transformación, esta facilita el manejo de las expresiones algebraicas y las señales que se quieran emplear, como por ejemplo de tipo escalón, rampa, impulso entre otras, además de emplearse en los métodos de análisis para las estrategias de control.

También se pueden representar estas ecuaciones diferenciales de modelaje del sistema mediante su representación en el espacio de estados, en donde se expresa de manera matricial el modelo introduciendo el concepto de vector de estado, el cual permite determinar en cualquier instante de tiempo el estado del sistema y por lo tanto la respuesta que se obtiene del mismo de acuerdo a una señal de entrada específica. Posteriormente se describirá con más detalle los tipos de representaciones.

Para el empleo de estos métodos de identificación antes nombrados, es necesario conocer el proceso y las variables que participan en él o al menos conocer cómo pueden interactuar estas variables para realizar un modelaje correcto.

Esto hace complicado el empleo de estos métodos para procesos más elaborados que puedan ser desconocidos por el diseñador del controlador. Por ello también se desarrollaron los métodos de identificación experimentales que a continuación se describen.

### ***Métodos de identificación experimentales***

Estos métodos son empleados en la mayoría de control de procesos, ya que resultan muy complejos para desarrollar el modelo matemático para emplear en las ecuaciones. Por lo tanto se procede de manera experimental.

Los procedimientos que a continuación se describen fueron desarrollados de una manera empírica, en donde mediante ensayo y error se logra una aproximación a al comportamiento del sistema, esto también se denomina ajuste de controlador.

### ***Método de Cohen-Coon (curva de reacción, lazo abierto)***

Es la técnica más conocida para la identificación de procesos, también conocida como el método de la curva de reacción, desarrollado por Cohen-Coon.

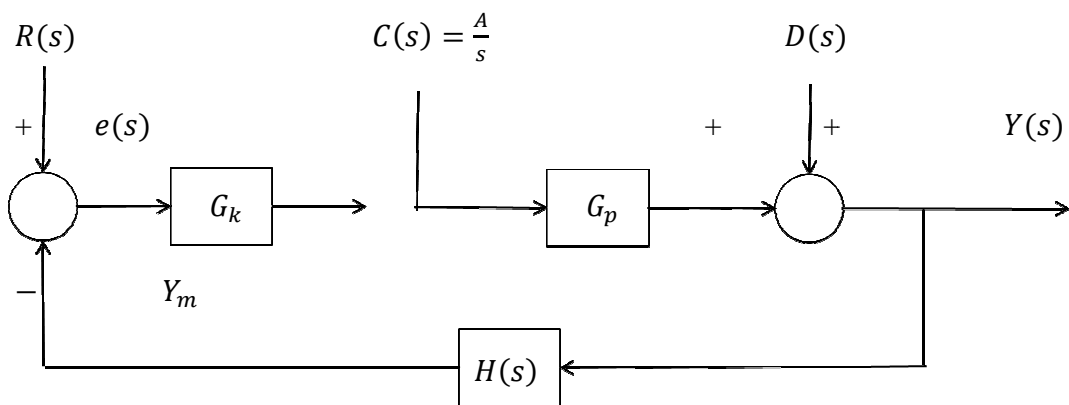


Figura 3: Esquema de un sistema de realimentación para el método de la curva de reacción.

En la figura 3 se puede apreciar un esquema en lazo cerrado, el cual se ha abierto con la finalidad de realizar la identificación, en ella se describen los siguientes parámetros:

$R(s)$  = punto de referencia del sistema (setpoint)

$C(s)$  = señal de prueba de tipo escalón con magnitud  $A$

$D(s)$  = entrada de perturbaciones al sistema

$Y(s)$  = señal de salida

$Y_m$  = salida del medidor-transmisor para el comparador

$e(s)$  = error del sistema

$G_k(s)$ ,  $G_p(s)$ ,  $H(s)$  = representan las funciones de transformación del controlador, el proceso y el medidor- transmisor respectivamente.

Se ha desconectado el controlador del elemento final de control para evaluar solo el proceso, al cual se le introduce una señal de tipo escalón de magnitud  $A$ , la curva obtenida al realizar este procedimiento, se denomina curva de reacción.

Al obtener la función de transformación entre  $Y_m(s)$  y  $C(s)$ , se puede apreciar que la curva de reacción es afectada por la dinámica del proceso y también por la dinámica del sensor-transmisor.

Cohen y Coon, observaron que la respuesta de muchos procesos para un tipo de entrada escalón, tiene la forma de una función sigmoidea, la cual puede ser aproximada a una respuesta de primer orden con retraso.

Es decir, se puede aproximar la siguiente función de transformación:

$$\frac{Y_m(s)}{C(s)} \cong \frac{K e^{-t_d s}}{\tau s + 1} \quad [3]$$

La cual tiene tres parámetros, la ganancia estática  $K$ , el tiempo muerto  $t_d$  y la constante de tiempo  $\tau$ , las cuales se determinan de la siguiente manera:

$$K = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{B}{A} \quad (\text{En estado estable})$$

$\tau = \frac{B}{s}$ , donde  $s$  es la inclinación de la recta que se debe trazar por el punto de inflexión de la curva de reacción.

$t_d$  = el tiempo que tarda el sistema en responder, el cual se obtiene a partir de la recta trazada con el punto de inflexión y donde se interseca con el eje horizontal referente al tiempo.

Cohen y Coon basándose en criterios como un cuarto de caída en la respuesta, el menor pico transitorio, y el menor error en estado estable (los cuales son explicados posteriormente), se desarrolló el ajuste de controladores según la estrategia de control que se esté aplicando.

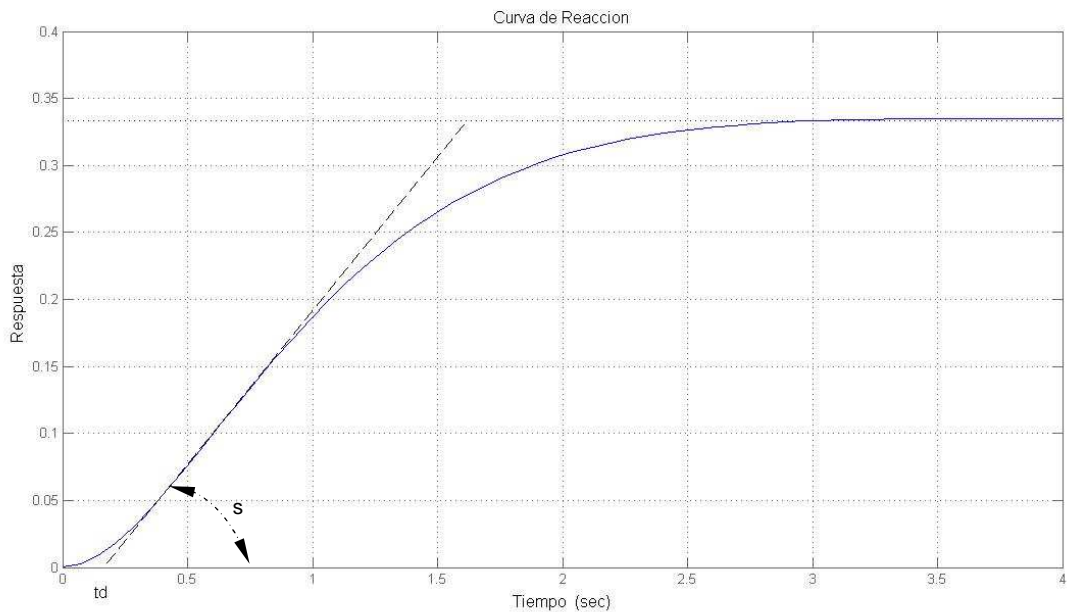


Figura 4: Curva de reacción para la respuesta de un sistema, los valores de  $t_d$  y  $s$  se determinan por observación, mientras que  $B = 0.35$  y  $A = 1$ , como puede observarse.

### ***Método de Ziegler-Nichols (lazo cerrado)***

Mientras el método anterior descrito utiliza la curva de reacción con datos procesados de la respuesta del sistema, este método está basado en el análisis de la

respuesta, manipulando la ganancia del controlador proporcional, hasta alcanzar la estabilidad crítica, para entradas de tipo escalón.

A diferencia del método de la curva de reacción, aquí se emplea el ajuste para sistemas en lazo cerrado, sin la necesidad de desconectar el sistema. Por lo tanto emplea el siguiente procedimiento:

- 1- Llevar el sistema al punto de operación
- 2- Solo emplear control de tipo proporcional, es decir, de existir otras estrategias de control, como por ejemplo proporcional- integral, proporcional-derivativo o proporcional-derivativo e integral (estas estrategias serán estudiadas posteriormente), las ganancias respectivas deben ser llevadas a cero.
- 3- Con el sistema en lazo cerrado, se debe introducir al sistema un escalón unitario y se debe variar la ganancia proporcional hasta que el sistema comience a oscilar de manera continua y con frecuencia constante.
- 4- Al comenzar el sistema a oscilar se determina la ganancia última del sistema, para el límite de estabilidad y el período de oscilación mediante las ecuaciones:

$$\text{Ganancia última} = K_u = \frac{1}{M} \quad [4]$$

$$\text{Período de oscilación} = P_U = \frac{2\pi}{w} \quad [5]$$

En donde  $M$  es la amplitud de oscilación de la respuesta y  $w$  es la frecuencia de oscilación.

- 5- Se realiza el ajuste de controlador, basándose en los valores que se indican en la tabla correspondiente al ajuste de los parámetros del controlador PID.



## ***CONFIGURACIONES DE SISTEMAS DE CONTROL***

### ***Configuración en serie***

Esta configuración coloca en serie el controlador con la función de transformación, es decir la señal de entrada a la función de transformación del proceso es la señal de salida de la función de transferencia del controlador, la cual se modifica convenientemente.

Para entender esta configuración se puede tomar un ejemplo como lo es mover un peso grande mediante el uso de una palanca. Es decir, la fuerza que se ejerce sobre un lado de la palanca se ve influenciado por las dimensiones de la palanca la cual puede amplificar la fuerza aplicada para mover un mayor peso.

Esta configuración es muy empleada por las estrategias de control, pues permite modificar la respuesta convenientemente, en la figura 2, si suponemos un valor unitario en la función de transformación en  $H(s)$  (es decir, la señal de salida se comparara directamente con la señal de referencia), la funciones de transformación de la planta está en serie con la del controlador.

### ***Realimentación de señales (Feedback).***

En un lazo cerrado de control se tiene una señal de referencia (valor deseado de la variable a controlar) la cual se compara con la variable a controlar (medida) para obtener lo que se denomina error que es utilizado por el controlador para generar la señal de control que va al elemento final de control (válvula de control, motor, etc).

Es una técnica muy sencilla que ayuda a la compensación de la señal de salida, cuando esta se ve perturbada por una señal externa. Por ejemplo, al controlar la posición de un avión mediante un servomecanismo la instrucción del piloto es la referencia, la altura del avión es la variable a controlar y el elemento final de control son el conjunto del servomecanismo y el alerón cuya acción tiende a corregir la desviación del curso de avión causada por la perturbación.

Ahora esta configuración actúa sólo cuando la señal de salida varía de la referencia, es decir, una vez que la perturbación haya sido propagada a través del sistema. En el caso de control de procesos es posible saber de la existencia de una perturbación antes de que ella se haya propagado por el sistema ej. Un aumento en la temperatura de un componente que va a ingresar al proceso.

La configuración en realimentación (feedback) utiliza muy poca información del proceso, de hecho la única información que requiere es en qué dirección debe compensar la señal de salida.

Se puede decir que la desventaja de la configuración es la anteriormente comentada, la cual es que el sistema se compensa luego de que la variable controlada es desviada de la referencia. Es decir, que la perturbación debe propagarse por todo el sistema antes de que este esquema de control pueda iniciar una acción para realizar la compensación.

La figura 2 representa esta configuración, en donde como puede observarse la señal de salida se realimenta y se compara con la señal de referencia, y esta diferencia que es conocida como el error del sistema es la que se introduce al controlador y al resto del sistema.

Cabe destacar que al realizar esta configuración mediante la representación en variables de estado, no se realimenta la señal de salida, se realimenta el vector de estado, el cual debe ser multiplicado por una matriz de ganancia para lograr las especificaciones necesarias. Esta es una estrategia de control que más adelante se comentara al respecto.

### ***Configuración de alimentación en adelante (feedforward)***

Esta configuración muy común en las estrategias de control de procesos como complemento a la realimentación, ya que permite actuar anticipadamente para compensar el efecto que produce la perturbación antes de que éste se propague por el

sistema. En algunos procesos la configuración en realimentación presenta algunos inconvenientes.

Por ejemplo, en un intercambiador de calor donde se calienta un fluido, no se detectan cambios en sus propiedades de entrada (condiciones de entrada) sino después de que el fluido ha pasado por el intercambiador, lo que dificulta controlar las propiedades de salida. El control por adelanto detecta dichos cambios en la entrada e instruye al controlador adecuadamente.

Por lo tanto siempre se debe emplear conjuntamente con la configuración en realimentación, para que esta se encargue de las pequeñas variaciones mientras que el feedforward se encarga de reducir el efecto de la perturbación específica.

## ***ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA***

### ***Análisis de la respuesta en el tiempo***

El primer paso para realizar el análisis de un sistema de control, como se ha comentado anteriormente es obtener un modelo matemático del mismo, una vez obtenido el modelo existen varios métodos para el análisis del desempeño del sistema.

En la práctica, la señal de entrada para un sistema de control no se conoce con anticipación, pero es de naturaleza aleatoria y la entrada instantánea no puede expresarse en forma analítica. Solo en algunos casos especiales se conoce con anticipación la señal de entrada y se puede expresar en forma analítica mediante curvas, tal es el caso del control automático de herramientas de corte.

En el análisis y diseño de sistemas de control, se debe tener una base de comparación del desempeño de diversos sistemas de control. Esta base se configura especificando las señales de entrada de pruebas particulares y comparando las respuestas de varios sistemas a estas señales de entrada.

El uso de señales de prueba se justifica porque existe una correlación entre las características de respuesta de un sistema para una señal de entrada de prueba común y la capacidad del sistema de manejar las señales de entrada reales.

Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones de tipo escalón, rampa, parábola, impulso o sinusoidales. Con estas señales de prueba es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control, porque las señales son funciones del tiempo muy simples y sus transformadas también lo son.

La forma de la entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia bajo una operación normal determina cual de las señales de entrada típicas se debe usar para analizar las características del sistema.

Por ejemplo, si las entradas para un sistema de control son funciones del tiempo que cambian de forma gradual, una función rampa sería una buena señal de prueba. Asimismo si un sistema está sujeto a perturbaciones repentinas, una función escalón sería la mejor.

Para el estudio de entrada de tipo perturbación (mostrada en la figura 3 como  $D(s)$ ), se emplea la definición de sistemas lineales en donde se puede obtener la respuesta total al superponer las respuestas de ambas condiciones, es decir, en primera condición se analiza la entrada de prueba del sistema, haciendo cero la perturbación, y luego se estudia la respuesta del sistema en base a la perturbación sin considerar la entrada de prueba.

La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes; la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable. Por respuesta transitoria se hace referencia a la que desaparece cuando el tiempo tiende a infinito. Por respuesta en estado estable se hace referencia a la manera en la cual se comporta la salida del sistema una vez que haya desaparecido la respuesta transitoria. Se considera que el sistema se ha estabilizado una vez que la respuesta entra y permanece dentro del 98% de su valor final.

En la respuesta transitoria existen algunas características que son propias de ellas, como lo son el máximo pico de la respuesta, el cual en ocasiones se le hace referencia a un porcentaje por encima de la salida estable, el tiempo de establecimiento y el tiempo pico, todas estas son especificaciones que deben ser satisfechas según el criterio de diseño que se requiere. Todas estas especificaciones serán detalladas posteriormente.

En la respuesta en estado estable se puede definir una característica muy importante denominada error en estado estable, el cual ocurre cuando la salida del sistema no coincide exactamente con la entrada. Este error indica la precisión del sistema por lo cual es también una especificación que debe considerarse al diseñar la estrategia de control para el sistema.

En todas las bibliografías consultadas para la realización de este proyecto, se detallan las respuestas de forma general de sistemas de primer y segundo orden, según la señal de prueba que se le introduce.

Un método para el análisis de la respuesta en el tiempo es mediante el método del lugar geométrico de las raíces.

### ***Análisis de respuesta en frecuencia***

Este análisis de la respuesta en frecuencia se caracteriza por introducir señales sinusoidales al sistema para observar la característica de su respuesta, la cual es también una respuesta sinusoidal porque el sistema es lineal.

Un ejemplo de esto es la introducción de una función sinusoidal específica a un sistema masa-resorte-amortiguador para analizar su respuesta, una aplicación de esto es el estudio de vibraciones en el ala de un avión, producidas por el flujo de aire.

En un estado estable, señales de tipo sinusoidales introducidas a un sistema lineal produce una respuesta sinusoidal con la misma frecuencia, su diferencia es la amplitud y la fase, las cuales son funciones de la frecuencia.

Las señales sinusoidales pueden tener tres representaciones, la primera es mediante las funciones trigonométricas clásicas (ecuación [6]) y la segunda es mediante el álgebra de fasores (números complejos, ecuación [7]), en donde la magnitud del número complejo es la magnitud de la amplitud y el ángulo del número complejo es el ángulo de fase de la sinusoidal y la tercera mediante la ecuación de Euler [8].

$$F(w) = M_1 \cos (wt + \varphi_1) \quad [6]$$

$$M_1 \angle \varphi_1 \quad [7]$$

$$M_1 e^{j\varphi_1} \quad [8]$$

Una ventaja del enfoque de la respuesta en frecuencia es que son en general sencillas y pueden ser muy precisas con el uso de generadores de señales sinusoidales que se obtienen con facilidad y un equipo de medición preciso.

Por lo general las funciones de transferencias de los componentes complicados se determinan experimentalmente mediante pruebas de la respuesta a un escalón (método de Cohen Coon).

Como comentario, este enfoque tiene la ventaja de que permite diseñar un sistema en el que se desprecian los efectos de ruido así como que se puede extender este análisis y diseño de control a ciertos sistemas no lineales que mediante el proceso de linealización se puedan estudiar en un rango válido.

Para la presentación de las características de la respuesta en frecuencia en forma gráfica, la función de transferencia sinoidal (sustituir en la función de transformación la variable  $s$  por  $jw$ ) es una función compleja de la frecuencia  $w$ . Por lo general se usan tres representaciones de las funciones de transferencias sinusoidales:

- 1- Trazas de Bode o trazas logarítmicas
- 2- La traza de Nyquist o Traza polar

Estas serán explicadas en los métodos de análisis que posteriormente se describirán en el capítulo.

Los métodos de respuesta en frecuencia fueron desarrollados por Nyquist y Bode en los años 1930, mientras que el método de análisis de la respuesta en el tiempo, fue desarrollado en 1948 por Evans.

Los métodos de la respuesta en frecuencia no son tan intuitivos como el lugar geométrico de las raíces, por otra parte la respuesta en frecuencia tiene ventajas en el análisis desde el punto de vista de la realimentación, además de poseer las siguientes ventajas según la situación:

- a) Cuando se modela una función de transferencia desde datos físicos reales, como por ejemplo los tomados de un osciloscopio.
- b) Cuando se diseñan compensadores por adelanto o atraso para mejorar el error y la respuesta transitoria.
- c) Para determinar la estabilidad en sistemas no lineales.
- d) Cuando se presentan ambigüedades en el método del lugar geométrico de las raíces.

## ***ESPECIFICACIONES EN UN SISTEMA DE CONTROL***

### ***Estabilidad***

La estabilidad es uno de los requerimientos más básicos de cualquier sistema de control y el más importante.

Para comenzar se puede decir que la respuesta final o total de un sistema es la suma de la respuesta natural del sistema y la respuesta forzada. Así como con las soluciones de las ecuaciones diferenciales, estas se conocen como la solución homogénea y la solución particular.

La respuesta natural describe como el sistema disipa o adquiere energía, la forma de esta respuesta natural depende solo del sistema y no de la entrada. Por otro lado la respuesta forzada depende de la señal de entrada.

La estabilidad se define en un sistema lineal e invariante en el tiempo, como una propiedad que refleja el carácter de la respuesta transitoria, en donde lo que se desea es obtener una respuesta natural que presente un decaimiento asintótico rápido y con buen comportamiento cuando el tiempo tiende a infinito. Si la respuesta natural no decae el efecto se observa como una pérdida de la acción de control deseada.

En algunos sistemas la respuesta natural crece sin mostrar indicios de disminución a cero o a oscilaciones, por lo tanto eventualmente la respuesta natural es mucho mayor a la respuesta forzada, y por lo tanto el sistema no es controlable. A esto se le denomina inestabilidad.

La inestabilidad podría llevar a la auto destrucción del dispositivo a controlar o del proceso, al punto de que exista la posibilidad de herir a un ser humano si no se diseñan limitadores.

Algunos ejemplos indeseables de sistemas inestables podrían ser, que un ascensor choque contra el suelo o contra el techo de la estructura, un avión al realizar una maniobra en vuelo comience a girar fuera de control, o que una antena de recepción al ser enviada a un punto específico, comience a oscilar incrementalmente sobre el punto deseado y se ocasionen daños estructurales

Ahora además de los dos casos que se ha mencionado, la estabilidad y la inestabilidad para los sistemas, también existe otro tipo de definición que es denominado límite de estabilidad o borde de estabilidad.

Este caso es cuando la respuesta natural del sistema oscila de manera periódica y con amplitud constante, cuando el tiempo se aproxima a infinito, esto se considera límite de estabilidad y se identifica mediante el método de análisis del lugar geométrico de las raíces que posteriormente se describirá.

Para un sistema con múltiples entradas y salidas se podría decir también, que el sistema es estable si para todas las entradas conocidas y limitadas, producen salidas limitadas y controlados. Y que un sistema es inestable si para cualquier entrada



controlada y limitada, se produce al menos una salida que no pueda ser limitada y controlada.

Para determinar si un sistema es estable o no existe algunos criterios, que a continuación serán descritos.

### ***Criterios de estabilidad***

Antes de comenzar a describir los criterios de estabilidad, se debe hacer referencia a los polos y ceros de las funciones de transformación y a una operación matemática que debe realizarse en la representación mediante variables de estado.

En una función de transformación ya simplificada en donde se incluya la acción o acciones de los controladores, al realizar todas las operaciones correspondientes el denominador de la esta función resultante se le conoce como ecuación característica del sistema, la cual es una ecuación con un orden y un tipo específico en donde las raíces de esta ecuación son conocidas como los polos del sistema. Mientras que los ceros del sistema se conocen como las raíces del polinomio ubicado en el numerador.

Esta ecuación característica está expresada en término de la variable de la Laplace, es decir en términos de  $s$ , estas raíces pueden ser graficadas en un plano complejo, es decir un plano en cuyo eje de las abscisas se representen las partes reales y en el eje de las ordenadas se representen la partes imaginarias.

Ahora al ubicar los polos en este plano se pueden observar que existen 4 cuadrantes los cuales pueden dividirse como el lado izquierdo, con los números reales imaginarios y el lado derecho con los números reales positivos.

La estabilidad puede determinarse a partir de la ubicación de los polos del sistema, si las raíces se encuentran al lado izquierdo del plano con raíces reales puras o raíces con parte real e imaginaria, el sistema es estable. Si las raíces se encuentran en el lado derecho con solo parte real pura o parte real y parte imaginaria el sistema es inestable. Basta una sola raíz en el lado derecho del plano complejo para que el sistema sea inestable.

Si los polos poseen solo parte imaginaria pura el sistema se encuentra en el borde de la estabilidad, es decir comienza a oscilar con frecuencia y amplitud constante cuando el tiempo se hace infinito, esto es estabilidad limite.

La explicación de esto puede encontrarse mediante las funciones de Laplace, cuando se cambia la función de transformación a dominio en el tiempo, las raíces en el lado derecho del plano harían que el exponente de la función de conversión se haga cada vez mayor conforme transcurre el tiempo, lo que representa una repuesta natural creciente, mientras que si los polos se encuentran en el lado izquierdo este exponente tiende a disminuir.

Para los números naturales, las transformación al dominio en el tiempo van a una función trigonométrica, la cual se caracteriza por tener una frecuencia constante al igual que la amplitud.

$$e^{-(aT)} = \frac{1}{s+a} \quad [9]$$

$$\cos(\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad [10]$$

Las ecuaciones [9] y [10] representan la ecuación de transformación de Laplace para ilustrar lo anteriormente comentado.

Para la representación en variables de estado los autovalores de la matriz característica del proceso, matriz A, son los polos del sistema a los cuales al igual a lo anteriormente comentado según su ubicación en el plano complejo el sistema puede ser estable o no.

Una manera para determina la ecuación característica del sistema en variables de estado es realizar la operación matemática siguiente

$$\det(sI - A) = 0 \quad [11]$$

En donde I es una matriz identidad, que se caracteriza por ser diagonal con todos sus coeficientes iguales a 1. La cual va multiplicada por una constante (s) para llevar la operación a términos de la variable de Laplace.

### ***Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz***

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz dice si existen o no raíces inestables en una ecuación característica, sin tener que obtenerlas en realidad. Este criterio de estabilidad solo se aplica a los polinomios con una cantidad finita de términos.

Cuando se aplica el criterio a un sistema de control, la información acerca de la estabilidad se obtiene directamente de los coeficientes de la ecuación característica.

En todos los textos consultados para la realización de este trabajo especial de grado se detalla el procedimiento para este criterio, a continuación se realizan algunos comentarios con respecto a este.

Al ordenar la ecuación característica de forma creciente, si alguno de los coeficientes es negativo ante la presencia de al menos un coeficiente positivo, hay una raíz o raíces imaginarias o que tiene partes reales positivas. Es decir el sistema es inestable.

Posteriormente a este análisis de los coeficientes, se realiza el arreglo matricial correspondiente. Y el criterio plantea que el número de raíces de la ecuación característica con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna del arreglo.

### ***Criterio de estabilidad de Nyquist***

El método anteriormente presentado, es un método analítico y trabaja directamente con la ecuación característica en lazo cerrado. Este criterio de Nyquist por otro lado es un método gráfico y trabaja con los polos y ceros de la función de transferencia simplificada.

$$1 + G_k(s) * G_p(s) * H(s) \quad [12]$$

Es decir se puede determinar la estabilidad del lazo cerrado localizando los polos de la ecuación [12] <sup>6</sup>.

Este método se emplea en el análisis de estabilidad por medio de la respuesta en frecuencia. Es decir permite determinar la estabilidad o no cuando la señal de entrada es una función sinusoidal, la cual puede variar en amplitud o frecuencia.

Este método se grafica en el plano complejo y consiste en el proceso denominado mapeo, en donde al tener una función  $F(s)$ , se le sustituye un número imaginario y esta función produce otro número imaginario, el cual se va graficando conforme se prueba este valor.

Otro método de realizar este gráfico es mediante el álgebra de fasores, en donde se emplea el módulo del número imaginario, y el ángulo que este forma con el eje horizontal o polar, ya que mediante este procedimiento la gráfica cambia a coordenadas polares.

Para ello se toma la función de transformación y se realiza el cambio de variable  $s$  por  $jw$ , en donde  $w$  es la frecuencia de la señal de entrada. Lo que significa que al recorrer un número de frecuencias limitado puede obtenerse los correspondientes puntos en el plano polar.

La ventaja de emplear el diagrama de Nyquist es que muestra las características de la respuesta en frecuencia de un sistema a lo largo de todo el rango de frecuencias en una única gráfica. La desventaja es que la representación no indica claramente la contribución de cada factor individual de la función de transferencia en lazo abierto

Es decir que al conocer la frecuencia de la señal de entrada, se puede conocer la respuesta en frecuencia del sistema.

En el sistema que se muestra en la figura 2 (pag 15), suponiendo que  $G_k = 1$ , el criterio de estabilidad de Nyquist, dice que si la función de transferencia en lazo abierto,  $G_p(s)$  tiene  $P$  polos en el semiplano derecho  $s$ , entonces para que sea estable

el lugar  $G_p(s)$ , cuando un punto representativo  $s$  recorre el camino de Nyquist en el sentido de las agujas de un reloj debe enlazar al punto  $-1+oj$ , P veces en el sentido contrario a las agujas de un reloj

En la figura 5, se representa la función de transformación  $F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$ , en donde puede observarse que el sistema es estable pues el recorrido enlaza o es menor al punto establecido en el criterio de Nyquist

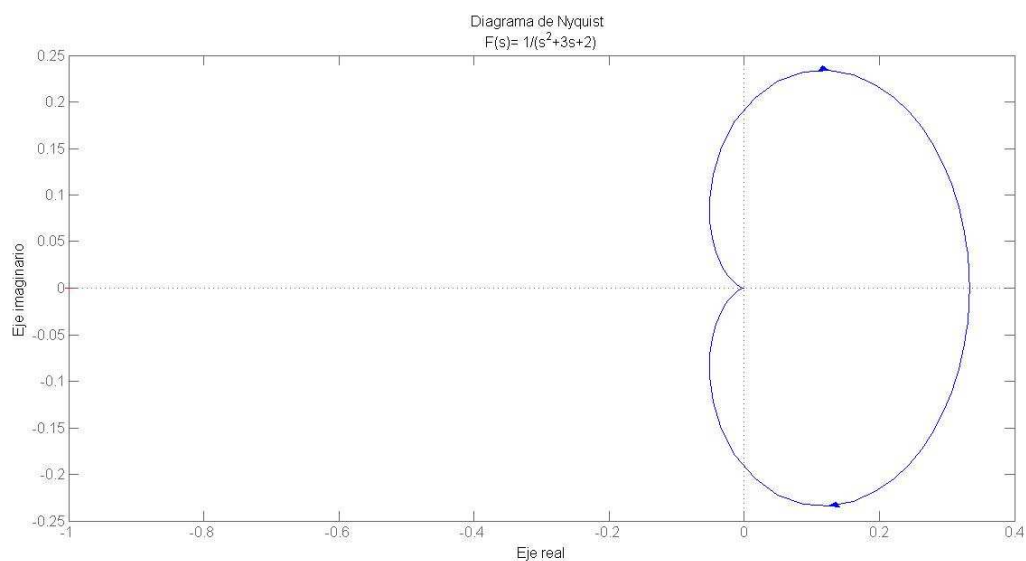


Figura 5: Diagrama de Nyquist para la función de transferencia  $G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$

### ***Margen de ganancia mediante el diagrama de Nyquist***

Si nuevamente se considera el diagrama mostrado en la figura 2 con  $H(s) = 1$  y con  $G_k = k$ , es decir un control proporcional (posteriormente se explicara en las estrategias de control), en donde se puede varia el valor de k convenientemente, esto hace que el diagrama de Nyquist modifique el área encerrada dentro de sí, manteniendo la forma, es decir puede cambiar sus dimensiones.

Ahora el lazo que se expresa en el criterio de Nyquist puede estar a la derecha de  $-1+j$  o a la izquierda. La primera condición haría el sistema inestable, ahora en la segunda, se podría determinar la distancia que existe entre el punto del criterio y el

punto por donde pasa el lazo del diagrama. Esta distancia es conocida como el margen de ganancia, pues indica cuanta ganancia se puede aumentar, para que el sistema llegue a la condición límite de estabilidad y se convierta en oscilatorio.

### ***Margen de fase mediante el diagrama de Nyquist***

El margen de fase es la cantidad de retardo de fase adicional en la frecuencia de la ganancia de cruce que se requiere para llevar al sistema al límite de estabilidad. La frecuencia de la ganancia de cruce es la frecuencia en la cual la magnitud de la función de transferencia en lazo abierto vale la unidad.

### ***Error en estado estable***

Es otro punto importante en el análisis y diseño del sistema de control enfocado a la respuesta estable del sistema a controlar, como se ha comentado anteriormente esta respuesta corresponde a una señal de entrada, la cual es usualmente la que permanece luego de que la respuesta transitoria a decaído a cero. Por ejemplo en ascensor que se detiene en el tercer piso dejando un desnivel con respecto al pasillo.

Ahora en esta respuesta lo que se busca es que tenga precisión en el estado estable, el ascensor debe detenerse en el tercer piso con el nivel suficiente para que los pasajeros puedan salir.

El error en estado estable, se define como la diferencia entre la señal de entrada y la señal de salida, para una señal preestablecida de prueba cuando el tiempo se aproxima a infinito. Como se ha comentado anteriormente estas señales de prueba son de tipo escalón, tipo rampa y de tipo parábola.

Se está interesado en la diferencia entre la señal de entrada y de salida, por lo tanto el análisis se limita solo a sistemas estables, ya que sistemas inestables representan la pérdida del control en el estado estable.

Los errores en un sistema de control se pueden atribuir a mucho factores. Los cambios en la entrada de referencia provocan errores inevitables durante los períodos transitorios. Las imperfecciones en los componentes tales como la fricción estática, el

envejecimiento y deterioro de los componentes provocan errores en el estado estable, sin embargo para el análisis de esta especificación no se enfoca en las imperfecciones de los componentes del sistema

En la figura 2, suponiendo que  $H(s) = 1$ , y que  $G_k$  y  $G_p$  se sustituyen por  $G(s)$ , se obtiene el siguiente esquema.

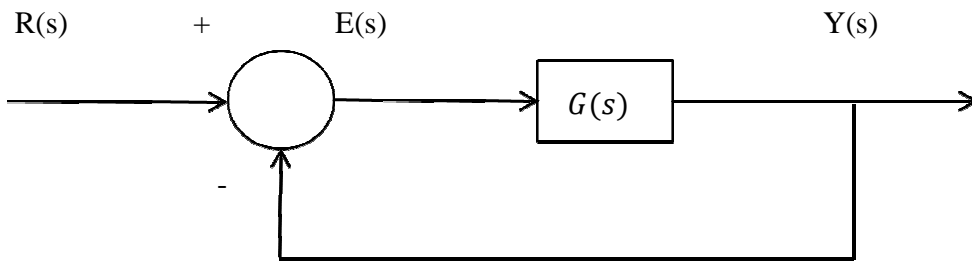


Figura 6: Esquema de control en realimentación

Cuya función de transferencia en lazo cerrado es.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad [13]$$

Y la función de transferencia del error  $e(t)$  y la señal de entrada  $r(t)$  es:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)} \quad [14]$$

Ahora mediante el teorema del valor final se puede encontrar el desempeño en estado estable de un sistema estable, mediante:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)},$$

Se puede apreciar que el error, es entonces una función que depende del tipo de entrada y de la función de transformación como tal, por ello emplea la siguiente definición para obtener una tabla (1) con la cual se pueda resumir lo que aquí se describe.

La función de transformación como bien se ha mencionado puede contener  $n$  número de polos y  $m$  número de ceros, considerando que los polinomios que constituyen la función transformación pueden ser del mismo o distinto orden.

Pero algo que es característico de esto, es que puede existir  $n$  polos ubicados en el cero, lo que de alguna manera puede diferenciarse claramente en la función de transformación. Por ello se ha denominado como tipo, a la cantidad de polos ubicados en el origen de coordenadas.

Es decir una función de transformación  $G_{1(s)} = \frac{s+1}{(s)(s+2)}$  sera de tipo 1, mientras que una función  $G_2 = \frac{1}{(s^n)(s+3)}$  sera de tipo  $n$

Por lo tanto la siguiente tabla [1] tomada de la bibliografía<sup>6</sup>. Resume en base al tipo del sistema y al tipo de entrada las expresiones para el error, estas expresiones utilizan las siguientes ecuaciones que simplifica el cálculo del error:

Constante de error estacionario de posición:  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$  [15]

Constante de error estacionario de velocidad:  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$  [16]

Constante de error estacionario de aceleración:  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)$  [17]

Tabla [1]: Relación entre el señal de entrada, el tipo del sistema, las constantes de error y el error en estado estables.

		Tipo 1		Tipo 2		Tipo 3	
Entrada	Ecuación del error	Cttes de error	Error	Cttes de error	Error	Ctte de error	Error
Escalón $[u(t)]$	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p = ctte$	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa $[tu(t)]$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	$\infty$	$K_v = ctte$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parábola $[\frac{1}{2}t^2u(t)]$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	$\infty$	$K_a = 0$	$\infty$	$K_v = ctte$	$\frac{1}{K_a}$



### ***Respuesta Transitoria***

La respuesta de un sistema a un señal de entrada conocida antes de llegar al estado estable, pasa por una respuesta transitoria, la cual se considera como la trayectoria de la respuesta desde el tiempo cero hasta llegar a la respuesta estable del sistema.

La respuesta transitoria también es importante en un sistema de control, por ejemplo si un ascensor tiene una respuesta transitoria muy baja, los pasajeros podrían impacientarse, mientras que la respuesta es muy rápida podrían sentirse incómodos, así como también si oscilara en el piso deseado por más de un segundo.

La respuesta transitoria es importante considerarla por razones estructurales del proceso, por ejemplo una respuesta muy rápida podría tener como consecuencia daños físicos a los equipos

Esta respuesta tiene ciertas características que son importantes al momento de diseñar el controlador, pero antes se debe comentar que esta respuesta varía de acuerdo al orden del sistema.

En el polinomio del denominador de la función de transferencia ordenado, se le conoce como orden del sistema al número del mayor coeficiente de la variable  $s$ , también podría decirse que el número de raíces del sistema también es el orden. Esta característica en el polinomio determina el tipo de respuesta transitoria que se presentará.

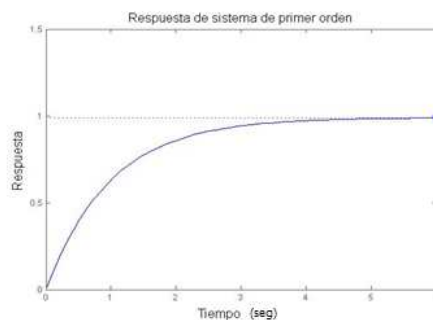


Figura 7: Respuesta de sistema de primer orden, para una entrada tipo escalón

Los sistemas de primer orden presentan una respuesta transitoria como la mostrada en la figura 7. En ella puede apreciarse que la respuesta tiene una forma exponencial, además de no oscilar en el estado transitorio.

Los sistemas de segundo orden, pueden presentar una respuesta transitoria (ya que dependen del coeficiente de amortiguación) como la mostrada en la figura 8, en donde se puede apreciar que esta curva tienen ha disminuir las oscilaciones hasta alcanzar la respuesta estable.



Figura 8: Respuesta a un sistema de segundo orden, subamortiguado con una entrada tipo escalón.

La respuesta en la figura 8, se ha modelado matemáticamente mediante una expresión que incluye términos trigonométricos y exponenciales que resultan de la transformaciones de Laplace, las cuales consideran dos constantes características del sistema como lo son el factor de amortiguación y la frecuencia natural del sistema, los cuales serán explicados posteriormente.

El número de tipo del sistema, es el número de polos ubicados en el origen de coordenadas, es decir, en una función de transformación de la forma;

$$G(s) = \frac{s+4}{s^2(s+3)} \quad [18]$$

El sistema es de tipo dos, ya que presenta dos polos en el origen de coordenadas, aumentar el tipo del sistema, mejora el error en estado estable, pero disminuye otra característica de la respuesta transitoria como lo es el tiempo de establecimiento, la cual es una de las características de las respuesta transitoria.

### ***Característica de la respuesta transitoria para sistemas de primer orden***

Considérese la siguiente función de transformación de primer orden:

$$C(s) = \frac{b}{(s+a)} \quad [19]$$

Como se ha mencionado estos sistemas presentan una sola raíz o un solo polo dominante, para la ecuación mostrada [19] la raíz representa el valor de  $a$ , y presenta solo dos características importantes como lo son:

#### ***Tiempo de levantamiento, $T_r$***

El tiempo de levantamiento se define, como el tiempo que tarda la curva de respuesta en ir desde 0.1 a 0.9 veces el valor de la respuesta final:

$$T_r = \frac{2.2}{a} \quad [20]$$

#### ***Tiempo de estabilización, $T_s$***

El tiempo de estabilización es definido, como el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar y permanecer en al menos un margen de 2% del valor final:

$$T_s = \frac{4}{a} \quad [21]$$

### ***Característica de la respuesta transitoria para los sistemas de segundo orden***

Antes de comenzar a describir las características de los sistemas de segundo orden, es necesario definir dos significados físicos que establecen una característica cuantitativa que ayuda a describir las respuestas de segundo orden, estas son la frecuencia natural y el factor de amortiguación.

### ***Frecuencia natural, $\omega_n$***

La frecuencia natural de un sistema de segundo orden, es la frecuencia de oscilación de un sistema sin amortiguación (dispersión de energía).

### ***Factor de amortiguación, $\xi$***

Este factor es derivado de la necesidad de describir las oscilaciones amortiguadas a pesar de la escala del tiempo, esto quiere decir que si un sistema realiza tres ciclos en un segundo antes de llegar al estado estable, tendrá el mismo factor que un sistema que también realiza tres oscilaciones pero en una hora.

La definición viable para este factor es aquella en donde se compara la frecuencia del decaimiento exponencial, en relación con la frecuencia natural esto es:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\text{frecuencia de decaimiento exponencial}}{\text{frecuencia natural } \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)} \\ &= \frac{1 \text{ periodo natural (seg)}}{2 \pi \text{ constante del tiempo exponencial}}\end{aligned}\tag{22}$$

Ahora si se considera la siguiente función de transformación escrita de forma general:

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}\tag{23}$$

Por definición la frecuencia natural es la frecuencia de oscilación del sistema, en donde las raíces del sistema están en el eje imaginario  $\pm j \sqrt{b}$

$$\omega_n = \sqrt{b}\tag{24}$$

Si se asume que el sistema es subamortiguado (es decir, tiene la forma de la figura 6). Se tiene entonces que

$$a = 2\xi\omega n \quad [25]$$

Entonces de forma general una ecuación de transformación de segundo orden será de la forma:

$$G(s) = \frac{\omega n^2}{s^2 + 2\xi\omega n s + \omega n^2} \quad [26]$$

***Caracterización de las respuestas de segundo grado en base al factor de amortiguación***

De acuerdo al factor de amortiguación se pueden obtener cuatro tipos de respuestas transitorias para los sistemas de segundo grado, podría decirse entonces que la respuesta depende principalmente de la ubicación de las raíces de la ecuación característica.

Tabla 2: Tipo de respuesta de acuerdo al factor de amortiguación  $\xi$ .

Respuesta	Factor de amortiguación, $\xi$	Ubicación de los polos
Sin amortiguación	0	Ambos imaginarios en $\pm j\omega_1$
Subamortiguado	$0 < \xi < 1$	Ambas complejas en $-\sigma_d \pm j\omega_d$
Críticamente amortiguado	$\xi = 1$	Ambas reales en $\sigma_1$
Sobre amortiguado	$1 < \xi$	Ambos reales en $-\sigma_1, -\sigma_2$

Para definir las especificaciones a satisfacer en estos sistemas se emplea la forma subamortiguada, ya que en ella se pueden apreciar todas claramente.

A continuación se muestra una figura en donde se puede apreciar como de acuerdo al cambio en el factor de amortiguación, se obtiene diferentes respuestas para un mismo sistema:

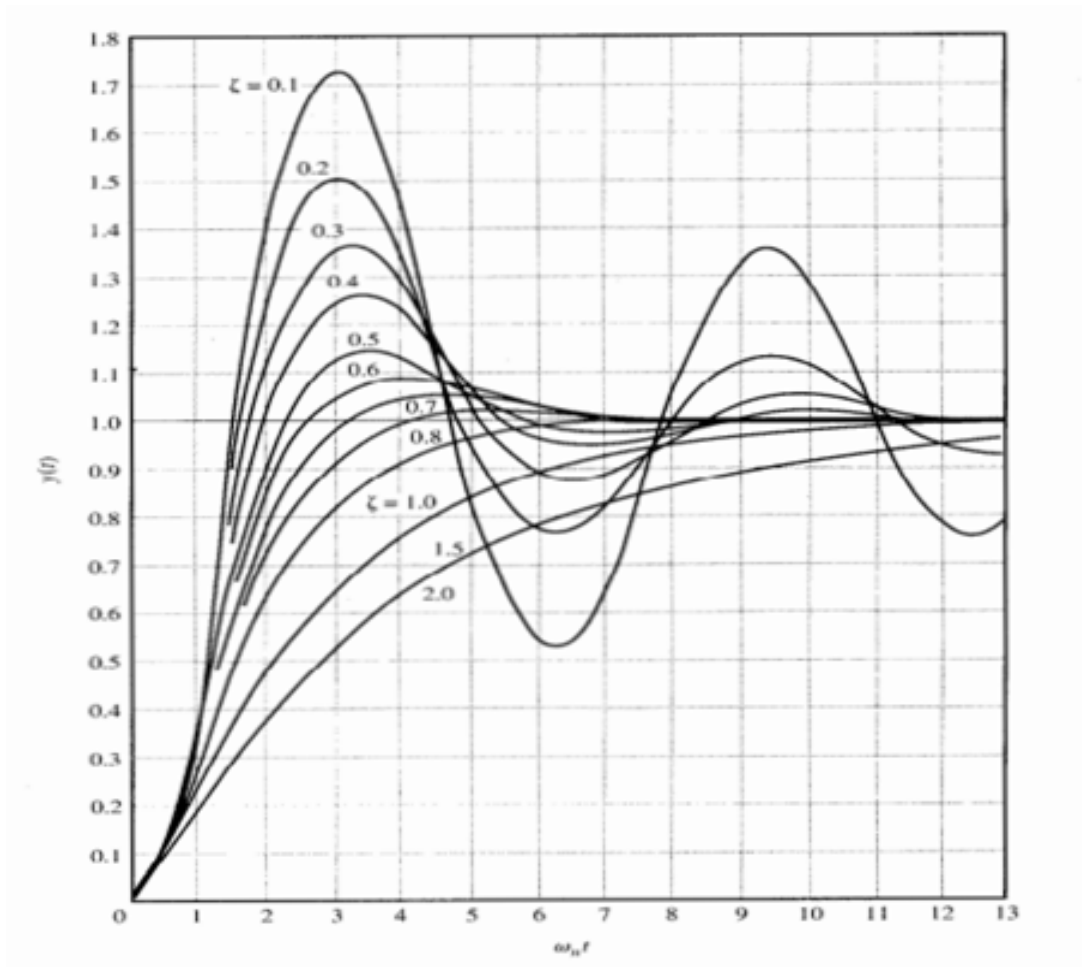


Figura 9: Representación de las respuestas de acuerdo al factor de amortiguación.

Se puede determinar la respuesta del sistema en base a la frecuencia natural y el factor de amortiguación, mediante la siguiente ecuación, que proviene de la solución de la ecuación diferencial representativa del sistema:

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} * e^{-\xi \omega_n t} * \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \phi) \quad [27]$$

Con 
$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \quad [28]$$

Las primeras ya se han comentado, son la frecuencia natural y el factor de amortiguación, los otros parámetros son el porcentaje del máximo pico, el tiempo

pico, el tiempo de establecimiento y el tiempo de levantamiento, las cuales se obtienen al analizar la respuesta del sistema ante una señal de entrada se tipo escalón.

**Tiempo pico,  $t_p$**

Es el tiempo en el cual se alcanza el primero y por lo tanto máximo pico de la respuesta a partir de la derivada de la ecuación [27] se determina el primer cero de la ecuación y se obtiene:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega n \sqrt{1-\xi^2}} \quad [29]$$

**Porcentaje de máximo pico transitorio (overshoot), %OS**

Es el máximo valor de la respuesta que sobrepasa el valor final en el estado transitorio, es expresado como el porcentaje del valor final alcanzado en el estado estable.

Se obtiene al evaluar la ecuación [27] en el tiempo pico y suponiendo que el valor de la respuesta alcanza el valor del escalón (  $c_{tfinal} = 1$ ), al sustituir y reemplazar se obtiene:

$$\% OS = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{(1-\xi^2)}}} * 100 \quad [30]$$

Lo que significa que el máximo pico de la respuesta solo depende del factor de amortiguación, por lo tanto si se desea conocer el valor del factor de amortiguación para un porcentaje de sobrerrespuesta específica, se emplea la siguiente ecuación, derivada de la ecuación anterior:

$$\xi = \frac{-\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right)}{\sqrt{(\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%OS}{100}\right))}} \quad [31]$$

### Tiempo de establecimiento, $T_s$

De igual manera que para los sistemas de primer orden, este es el tiempo requerido por las oscilaciones transitorias del sistema para alcanzar y mantenerse en un margen de  $\pm 2\%$  de su respuesta en estado estable:

$$T_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad [32]$$

### Tiempo de levantamiento, $T_r$

Es el tiempo que tarda la curva de la respuesta en ir desde 0.1 a 0.9 veces el valor final del estado estable.

No existe una relación analítica precisa entre el tiempo de levantamiento y el factor de amortiguación, sin embargo se pueden relacionar mediante el uso de herramientas computacionales, que emplean términos como la frecuencia natural y el factor de fricción.

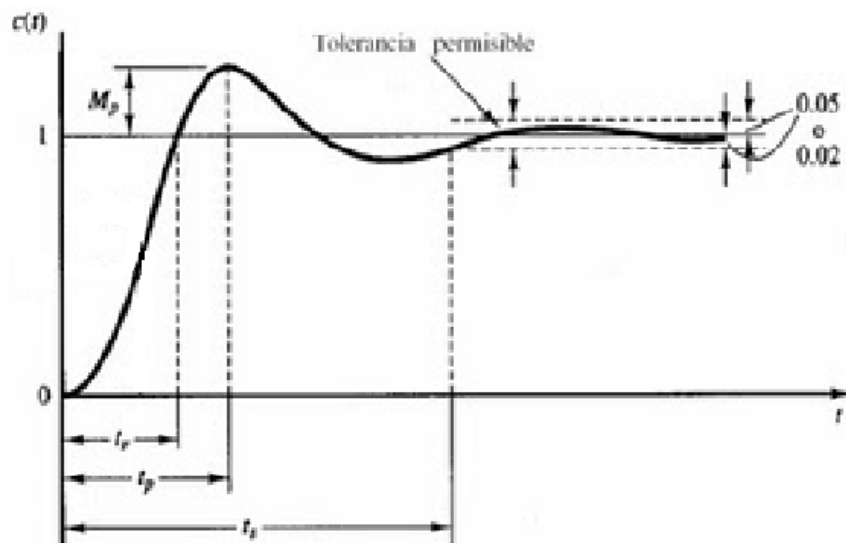


Figura 10: Representación de una respuesta a un sistema de segundo grado, en donde se resaltan las especificaciones antes mencionadas, así como también la tolerancia en la cual se considera el sistema en estado estable.



El tiempo de levantamiento, el tiempo de establecimiento y el tiempo pico, permiten obtener información acerca de la velocidad de la respuesta transitoria, esta información ayuda al diseñador para determinar la velocidad y la naturaleza de la respuesta, para realizar o no ajustes en el rendimiento del sistema.

Como por ejemplo el confort de los pasajeros depende en parte del sistema de suspensión del auto y de cuanto tardan las oscilaciones que ocurren al estar en movimiento o si se posee un almacén inteligente en donde se organicen varios productos y exista un mecanismo automático para encontrar un objeto específico, la velocidad y la precisión con la que los brazos mecánicos agarran el objeto podría ser puntos importantes para considerar

### ***Respuesta transitoria para sistemas de orden superior***

Se puede observar que las definiciones de tiempo de levantamiento y el tiempo de establecimiento son iguales para los sistemas de primer y segundo orden. Lo que implica que estas definiciones lo son también para sistemas de orden superior.

### ***Sistemas con más de dos polos.***

Expresiones analíticas para estas definiciones a los sistemas de orden superior, no pueden determinarse a menos que el sistema se aproxime a un sistema de segundo orden y esto se realiza al considerar los polos dominantes del sistema.

Los polos dominantes es un concepto que entra en lazo cerrado de control, la dominancia relativa de los polos se determina mediante el cociente de las partes reales de los polos en lazo cerrado. Si estos cocientes son superiores a cinco y no hay ceros cerca, los polos en lazo cerrado más cercano al eje  $j\omega$  dominarán el comportamiento de la respuesta transitoria, debido a que corresponde al término de la respuesta transitoria que se disminuyen lentamente.

Con mucha frecuencia, los polos dominantes en lazo cerrado aparecen en forma de un par complejo conjugado. Y es frecuente que la ganancia de un sistema de orden superior se ajuste para que exista un par de polos dominantes complejos conjugados

en lazo cerrado, este ajuste de ganancia se realiza mediante un controlador proporcional, que será explicado en las estrategias de control.

### *Sistemas con ceros adicionales*

El añadir polos y ceros a un sistema cambian el lugar geométrico de las raíces y por lo tanto afecta la respuesta del sistema dependiendo del valor que se le asigne a la ganancia del controlador.

## **TÉCNICAS DE ANÁLISIS Y DISEÑO DE LOS SISTEMAS DE CONTROL**

### *Lugar geométrico de las raíces*

Las características básicas de la respuesta transitoria de un sistema en lazo cerrado se relaciona estrechamente con la ubicación de los polos, si el sistema tiene una ganancia de lazo variable, el cual es la estrategia de control más simple, si se toma como referencia la figura 11, la función de transferencia  $G_k$  representa a dicho controlador. Este es una variable  $K$ , la cual puede modificarse de acuerdo al criterio del diseñador, esta estrategia recibe el nombre de controlador proporcional.

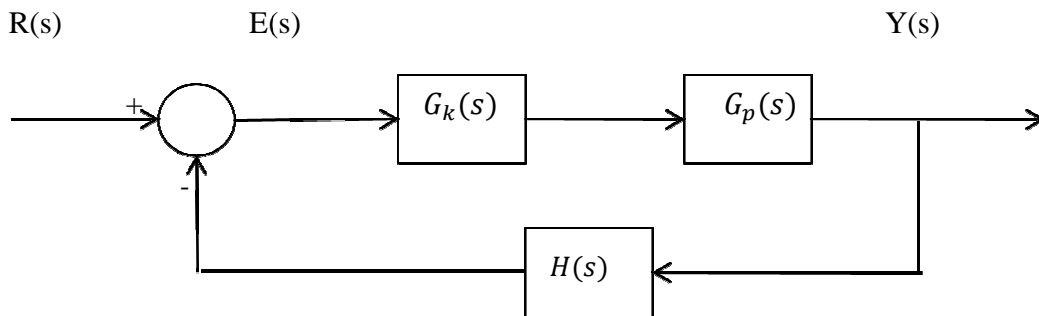


Figura 11: Esquema general de un sistema de control en realimentación

La ubicación de los polos en lazo cerrado depende del valor de la ganancia de lazo elegida, mediante la ecuación [33] se puede apreciar como el controlador varía la ecuación característica del sistema:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_k(s)G_p(s)}{1+G_k(s)G_p(s)H(s)} \quad [33]$$

Esta misma ecuación, es la forma simplificada del sistema de control en lazo cerrado al realizar las operaciones matemáticas correspondiente. Por ello es importante conocer como se mueven los polos en lazo cerrado con un simple cambio en la ganancia.

W.R. Evans diseñó un método sencillo para encontrar las raíces de la ecuación característica, el cual se denomina método del lugar geométrico de las raíces, el cual consiste en graficar las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro del sistema, el cual por lo general es la ganancia proporcional, aunque es posible utilizar otra variable de la función de transferencia en lazo abierto.

Algunos sistemas de control pueden tener más de un parámetro que deba ajustarse, para este tipo de sistemas el gráfico se construye variando un parámetro a la vez. Y el diagrama resultante se denomina contorno de las raíces.

Para este trabajo de grado se supondrá que la ganancia de la función de transferencia en lazo abierto es el parámetro que puede adoptar todos los valores de cero al infinito.

Al diseñarse un sistema de control lineal, encontramos que el método del lugar geométrico de las raíces resulta muy útil, dado que indica la forma en la que se deben modificar los polos y ceros para que la respuesta cumpla las especificaciones de desempeño del sistema.

En la figura 12, puede apreciarse un lugar geométrico de función de transferencia  $G_p = \frac{(s+3)}{(s^2+3s+3)}$ , en donde se varía la ganancia del controlador para obtener la gráfica. Puede apreciarse como existe trayectorias para la solución del sistema (es decir, raíces de la ecuación característica) que van desde los polos para terminar en los ceros, (los cuales pueden ser un punto de la función de transformación) el infinito en los ejes de coordenadas o las asíntotas del diagrama.

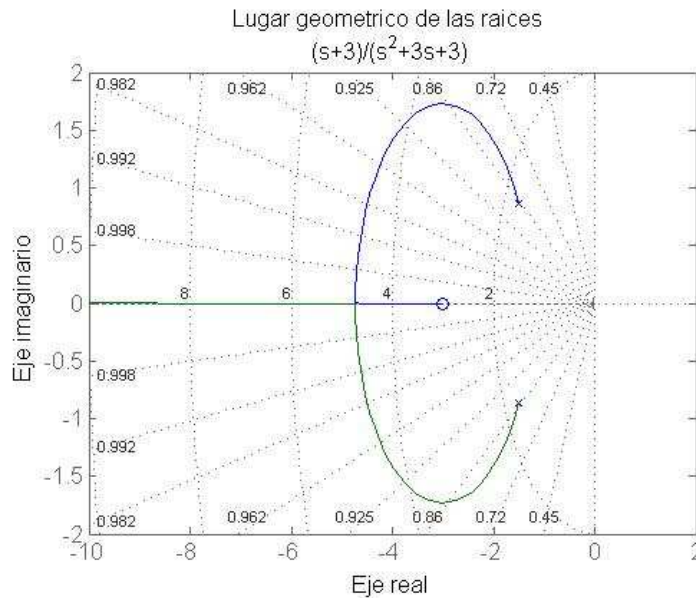


Figura 12: Lugar geométrico de las raíces para la función  $G_P = \frac{(s+3)}{(s^2+3s+3)}$

También puede apreciarse en la gráfica obtenida mediante MATLAB, aparecen las líneas para el coeficiente de amortiguación, el cual como se ha mencionado anteriormente y mediante la ecuación [30] determina el máximo pico de la respuesta transitoria del sistema.

La ventaja de este diagrama, además de garantizar las especificaciones de la respuesta transitoria del sistema, es que permite visualizar la zona en la cual el sistema es estable o no, para algunos valores de la ganancia del controlador.

Es decir, mediante las trayectorias del sistema puede localizarse el valor de la ganancia para lo cual el sistema se convierte en inestable (al pasar las trayectorias del lugar geométrico de las raíces al semiplano derecho del sistema de coordenadas) y también el valor de la ganancia en donde el sistema alcanza el límite de estabilidad.

### ***Trazas de Bode o Diagrama de Bode***

En el lugar geométrico de las raíces se estudia el comportamiento de la respuesta en el tiempo para cualquier tipo de señal de entrada. Mientras que las trazas de Bode se emplean para el estudio de la respuesta en frecuencia del sistema, es decir alimentar el sistema con señales sinusoidales cuya frecuencia varía entre 0 e  $\infty$

Como por ejemplo de este diagrama se puede aproximar la posible respuesta amplificada o atenuada de un sistema amortiguado al someterse a una señal de entrada de tipo sinusoidal.

Este Diagrama se complementa con el anteriormente comentado para el análisis de estabilidad para la respuesta en frecuencia mediante el diagrama de Nyquist, para este caso se analiza de igual manera mediante la función de transferencia sinusoidal (es decir, en la función de transferencia del proceso se sustituye la variable  $s$  por  $j\omega$ ), la cual se caracteriza por su magnitud y ángulo de fase con la frecuencia como parámetro.

Una función de transferencia sinusoidal, puede representarse mediante dos graficas distintas: una es la magnitud contra la frecuencia y otra que muestra el ángulo de fase en grados contra la frecuencia.

Las trazas de Bode están formadas por dos gráficas: una es el logaritmo de la magnitud de una función de transferencia sinusoidal y la otra es el ángulo de fase, ambas se grafican en la escala logarítmica contra la frecuencia.

La representación común de la magnitud logarítmica de  $G(j\omega)$  es  $20 \log|G(j\omega)|$ , en donde la base del logaritmo es 10. Y la unidad que se usa en la representación de la magnitud es el decibel (dB)

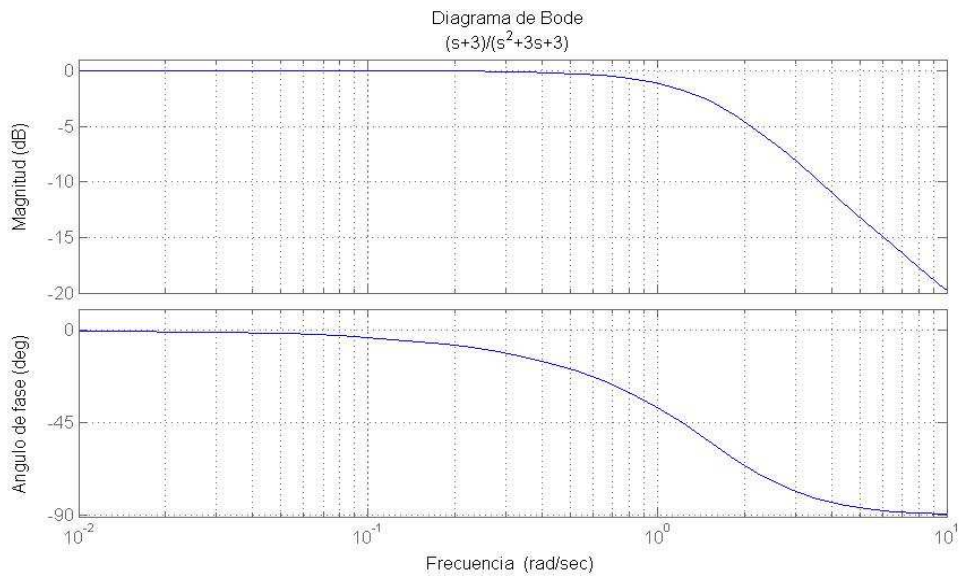


Figura 13: Diagrama de Bode para la función de transferencia  $G_P = \frac{(s+3)}{(s^2+3s+3)}$

La ventaja principal de usar la traza de Bode, es que la multiplicación de magnitudes se convierte en adición. Además cuenta con un método simple para trazar una curva aproximada de magnitud logarítmica.

Este diagrama se complementa con el diagrama de Nyquist y en algunas ocasiones se puede visualizar la información rápidamente ya que el diagrama de bode, no requiere para la realización del mismo la ayuda de herramientas de cálculo o computacionales, como si lo necesita al diagrama del lugar geométrico de las raíces y el diagrama de Nyquist.

Para determinar la estabilidad mediante el diagrama de Bode, se debe analizar el valor de la ganancia en donde la magnitud es menor a 0 dB en el punto de frecuencia en donde el ángulo de fase sea  $\pm 180^\circ$ . Este valor de la ganancia lleva al sistema al límite de estabilidad y un valor por encima de él, hará que el sistema sea inestable.

### ***Margen de Fase y de Ganancia mediante el diagrama de Bode***

El margen de ganancia es determinado empleando el diagrama de fase, para determinar su frecuencia se ubica el punto en donde el ángulo de fase es  $180^\circ$ , luego

a esta frecuencia se va al diagrama de magnitud para determinar el margen de ganancia la cual es la diferencia entre la curva y la línea de 0 dB.

El margen de fase por su parte emplea el diagrama de ganancia, en donde se ubica el punto en el cual la magnitud es 0 dB, a esta frecuencia se va al diagrama de fase para determinar el margen de fase, el cual es la diferencia entre la curva y la línea de 180°. Esto se puede apreciar gráficamente en la figura 14, en donde se representa el margen de fase y de ganancia, para un ejemplo general

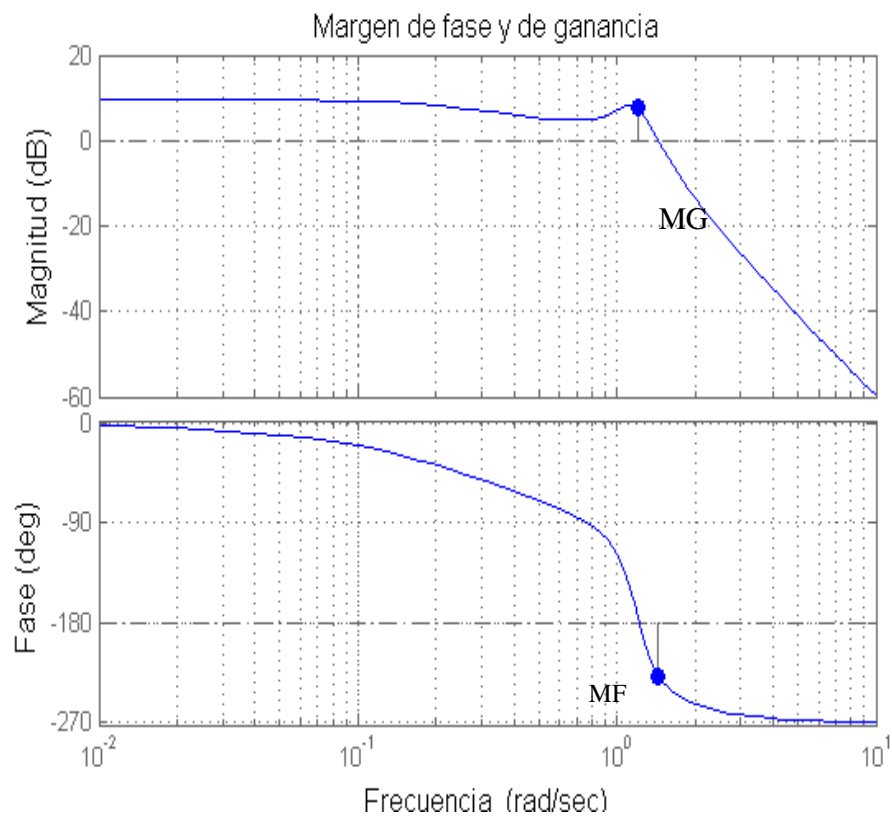


Figura14: Representacion del margen de fase y de ganancia en el diagrama de bode.

## ***ESTRATEGIAS DE DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL***

Existen diversos tipos de estrategias para controlar un sistema en particular, a continuación se describirán cada una de ellas y se detallan sus principales características y aplicaciones.

Las estrategias para sistemas de control lineal e invariante en el tiempo, se pueden clasificar en dos grandes grupos los cuales serian:

- Estrategias de control para sistemas de una variable de entrada y una variable de salida (SISO del ingles single input- single output)
- Estrategias de control para sistemas de control con múltiples variables de entrada y múltiples variables de salida (MIMO del ingles Múltiple input- Múltiple output)

### ***Estrategias de control para sistemas SISO***

Como se ha comentado anteriormente este tipo de sistemas tiene una sola variable a controlar mediante un controlador para establecer una respuesta que satisfaga las especificaciones requeridas ante un tipo de entrada específica:

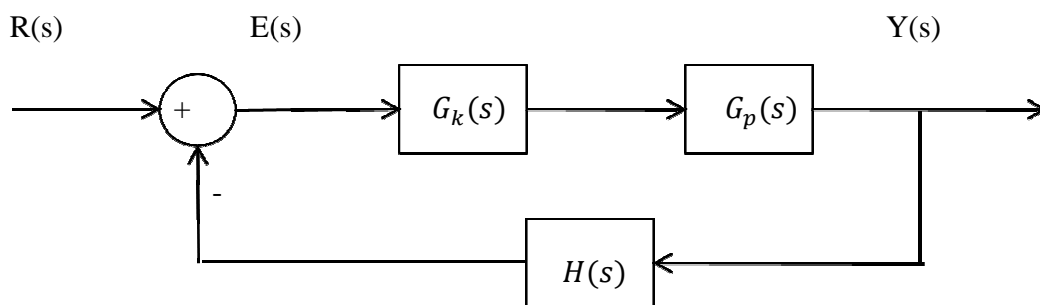


Figura15: Representación en diagrama de bloque de un sistema con realimentación en funciones de transferencia



**Control Proporcional, P**       $G_k = K$

Es la técnica más sencilla empleada para el control, se basa en una ganancia  $K$  que se varía de acuerdo al criterio del diseñador y este se basa en el análisis de la respuesta en el tiempo del sistema al introducir señales de prueba.

Como se ha comentado en el lugar geométrico de las raíces, esta ganancia modifica la ubicación de los polos del sistema, lo que se puede variar el coeficiente de amortiguación y la frecuencia natural del sistema convenientemente para lograr la respuesta transitoria.

Esta estrategia de control se caracteriza porque al aumentar la ganancia se disminuye considerablemente el error en estado estable, pero se obtiene un mayor pico transitorio.

Lo que implica que algunos sistemas es necesario aumentar mucho el valor de la ganancia para obtener un menor error en estado estable, pero esto compromete en gran manera el estado transitorio del sistema.

**Control Proporcional-Integral, PI**       $G_k = K_0 + \frac{K_i}{s}$

La adición del término  $\frac{K_i}{s}$  el cual es un integral puro (Laplace), asigna un polo en el origen de coordenadas del plano de las raíces del sistema, lo que aumenta el tipo del sistema

Esto disminuye el error en estado estable, pero no debe colocarse solo el integrador puro, ya que de lo contrario el sistema se hace más propenso a ser inestable, o no se obtiene la respuesta transitoria que se había previamente calculado.

Para resolver ese problema se le debe agregar un cero lo más cercano posible al polo en el origen, para no afectar la respuesta transitoria. Esto puede apreciarse al realizar el lugar geométrico de las raíces para el sistema antes de agregar el integrador y luego de agregarlo, con el cero y sin él.

Un polo en el origen y un cero lo más cercano posible a este para anular el efecto del polo se denomina control PI ideal:

$$G_k(s) = K_0 + \frac{K_i}{s} = \frac{K_0(s+\alpha)}{s} \quad [34]$$

En donde  $\alpha = K_i/K_0$ , la cual es la relación entre las ganancias del controlador integral y proporcional y es también la ubicación del cero que se le añade al sistema.

**Aplicación:** Regulación de velocidad, en un gobernador de turbina

**Control Proporcional-Derivativo, PD**       $G_k = K_0 + K_d s$

Como se ha mencionado anteriormente la respuesta transitoria de un sistema está condicionada de acuerdo a la selección de los polos en el plano  $s$  que estén dentro del lugar geométrico.

Si un polo en lazo cerrado no está en el lugar geométrico de las raíces, entonces debería rehacerse este lugar geométrico introduciendo un compensador que haga posible que los polos deseados, estén dentro de él.

Por ello un controlador ideal proporcional más derivativo, introduce un cero en el semiplano izquierdo en la función de camino directo, la función principal de este es aumentar la velocidad de la respuesta en estado transitorio, además de mejorar la estabilidad inherente del sistema.

Se denomina controlador ideal ya que el orden del polinomio del denominador debe ser mayor al polinomio del numerador, la explicación de ello puede obtenerse de manera grafica al realizar el lugar geométrico de las raíces y el estudio del error en estado estable.

La función de transformación de esta estrategia de control en la siguiente

$$G_K = K_0 + K_d s = K_0 \left( \frac{s}{\alpha} + 1 \right) \quad [35]$$

En donde en la ecuación [35] el término  $\alpha = K_0/K_d$  representa la relación entre la ganancia del control proporcional con la ganancia derivativa, además de la localización del cero que se desea colocar en el sistema.

De colocarse un cero en un lugar que se encuentre dentro del lugar geométrico sin el compensador, se facilita la determinación de la ganancia correspondiente para obtener la respuesta transitoria y el tiempo de establecimiento requerido por el diseñador.

### ***Efecto de la adición de polos y ceros sobre el lugar geométrico de las raíces***

Antes de continuar con las demás estrategias de control es conveniente describir cual es el efecto sobre el lugar geométrico de las raíces, la adición de polos y ceros.

***Efecto de adición de polos:*** la adición de un polo a la función de transferencia en lazo abierto tiene la función de halar el lugar geométrico hacia la derecha, lo que tiende a disminuir la estabilidad del sistema y disminuir el asentamiento de la respuesta

***Efecto de la adición de ceros:*** la adición de un cero a la función de transformación tiene el efecto de halar el lugar geométrico hacia la izquierda, con lo cual el sistema tiende a ser más estable, y se acelera el asentamiento de la respuesta

***Control Proporcional-Derivativo-Integral. PID***  $G_k = K_0 + \frac{K_i}{s} + K_d s$

Este tipo de estrategia en particular combina las antes expuestas, ya que permite mejorar la respuesta transitoria mediante la acción derivativa y el error en estado estable mediante la acción integral de manera independiente.

La desventaja de esta estrategia es que al modificar una ganancia de cualquier acción, la influencia de la otra acción de control sobre la respuesta varía. Es decir que al mejorar el estado estable al disminuir el error, la velocidad de la respuesta se ve afectada.

Por lo tanto primero debe mejorarse el estado transitorio para posteriormente mejorar el estable, si no se obtienen las especificaciones requeridas en la primera compensación.

Por ello se debe sobrediseñar las especificaciones transitorias, para obtener una respuesta adecuada al momento de disminuir el error, el sobredimensionamiento no debería ser un problema a menos que existan problemas de costos o otros problemas de diseño.

La función de transformación del controlador es la siguiente:

$$G_K = K_0 + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d}{s} \left( s^2 + \frac{K_0}{K_d} s + \frac{K_i}{K_d} \right) = \frac{K(s+\alpha)(s+\beta)}{s} \quad [36]$$

En donde

$\alpha$  = Representa la ubicación del cero del PD

$\beta$  = Representa la ubicación del cero en PI

$K$  = Representa la ganancia para ubicar los polos de interés

Es decir, en esta estrategia de control se le agregan dos polos y un cero en el origen al lugar geométrico de las raíces del sistema.

Para resumir se puede decir, que la estrategia de control PID, es con la cual se puede obtener el comportamiento más delimitado dentro de las especificaciones que el diseñador requiera.

Como desventaja de esta estrategia se puede mencionar que es recomendable emplearla para sistemas con una sola entrada y una sola salida, ya que al ser sistemas MIMO, se pueden presentar complicaciones.

Una manera de sintonizar el sistema de control a partir de cero, aun sin conocer la función de transformación del sistema, es mediante el ya descrito procedimiento de Ziegler-Nichols.

**Compensación en atraso (Lag Compensation).**  $G_k = \frac{K(s+z_c)}{(s+p_c)}$

Esta técnica es empleada para mejorar el estado estable, es decir disminuir el error en estado estable al igual que el PI

En el PI se asigna un polo en el origen, lo que incrementa el tipo de la función de transferencia y es posible que el sistema cambie su estabilidad, por ello se le agrega un cero muy cercano al origen de coordenadas. Esto se llama control activo.

En el compensador en atraso, se coloca el polo cercano al origen y el cero a la izquierda de este, a esto se le llama control pasivo, la ventaja de esto es que la ganancia del controlador permanece aproximadamente igual a la seleccionada antes de realizar la compensación, en donde se seleccionan los polos dominantes del sistema.

La selección del polo y del cero deben estar muy cerca el uno del otro ya que la mejora que se realiza en estado estable es la relación que existe entre el cero y el polo, por lo tanto mientras más cerca estén (siempre y cuando el cero este al lado izquierdo del polo), será poca la contribución angular de ellos en el lugar geométrico de las raíces.

En el análisis de la respuesta en frecuencia, se puede decir que proporciona una atenuación en el rango de frecuencias, también se le conoce como un filtro de paso-bajo y una de las funciones principales es la de incrementar el margen de fase del sistema con pocas alteraciones en el estado transitorio.

La función de transformación del controlador es:

$$G_K = K_c \beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \quad [37]$$

Con  $\beta > 1$ , para asegurar que el cero quede al lado izquierdo del polo

**Compensador en adelanto (lead compensation)**  $G_k = \frac{K(s+z_c)}{(s+p_c)}$

Un control PD activo, puede aproximarse con un compensador en adelanto que es de tipo pasivo, es decir, un control pasivo significa que no puede colocarse un solo cero, por lo tanto debe hacerse acompañado con un polo.

Ahora si se coloca este polo muy alejado del eje de coordenada, la contribución angular es aproximada a cero, por lo que se podría considerar que se coloca un cero solamente.

La ventaja de este control sobre el PD, es que no requiere de una fuente de poder adicional y que reduce el ruido en el sistema, como desventaja se tiene que el polo no disminuye las trayectorias del lugar geométrico de las raíces, mientras que el polo del PD si lo hace.

Se visualiza mediante el análisis de la respuesta en frecuencia, ya que también tiene como finalidad compensar el atraso de fase excesivo asociado a los componentes del sistema fijo y reducir el porcentaje del máximo pico, para aumentar la velocidad de la respuesta.

La función de transformación es muy parecida a la utilizada en el compensador en atraso:

$$G_k = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = \frac{K_c(s+\frac{1}{T})}{(s+\frac{1}{\alpha T})} \quad [38]$$

Con  $0 < \alpha < 1$ , para asegurar que el polo quede al lado izquierdo del cero

### ***Compensador en atraso-adelanto (lag-lead compensator)***

$$G_k = \frac{K(s+z_a)(s+z_b)}{(s+p_a)(s+p_b)}$$

De igual manera como se realiza en el controlador PID, en este compensador (lag-lead) mejora el estado transitorio y el estado estable del sistema.

Primero se diseña el compensador en adelanto para mejorar la respuesta transitoria, para posteriormente evaluar el error en estado estable y finalmente diseñar el compensador por atraso.

Otra manera de diseñar este controlador es mediante el análisis de la respuesta en frecuencia del sistema. En este se diseña primero el compensador en atraso para frecuencias bajas, se estabiliza el sistema y se mejorar el estado estable, luego se diseña el compensador en adelanto para satisfacer el margen de fase requerido:

$$G_k = G_{lead}G_{lag} = \left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\gamma T_2}}\right) \quad [39]$$

Donde  $\gamma > 1$ . El primer término representa el compensador en adelanto y el segundo termino el compensador en adelanto

### ***Estrategias de control para sistemas MIMO***

Estos sistemas tienen múltiples entradas y múltiples salidas, las cuales pueden ser todas controladas, las estrategias para sistemas SISO no son recomendables a emplear en MIMO debido a que podrían entrar en conflicto las acciones de control para cada variables por separado.

Por ejemplo, si se desea controlar el flujo y la temperatura de salida de un fluido en un reactor químico mediante la regulación de una válvula de entrada de agua de enfriamiento y otra del fluido a reaccionar.

Si el sistema determina que el flujo es mayor al indicado, comienza a cerrar parcialmente la válvula de alimentación del fluido, como consecuencia la temperatura del sistema comienza a disminuir, lo que influye en la válvula del agua de enfriamiento, para que se mantenga la misma temperatura.

Un mejor ejemplo, sería el control del flujo y de la temperatura de un fluido en un intercambiador de calor, en donde estas sean las variables dependientes de la apertura de una válvula, en algún momento es posible que se requiera un flujo mayor y por lo tanto se abra la válvula de alimentación, pero si al mismo tiempo la temperatura excede la requerida, se tenderá cerrar esta misma válvula, lo que representa una contradicción.

### ***Realimentación de variables de estado***

Una manera de realizar el control de un sistema MIMO es mediante la realimentación de variables de estado ya que como se ha comentado anteriormente se puede representar varias salidas y varias entradas de forma matricial y también se pueden considerar condiciones iniciales en el sistema.

Existen dos métodos empleados para la realimentación de variables:

1. Realimentación mediante la asignación de polos
2. Realimentación mediante control óptimo

La realimentación de variables de estado de forma general tiene como ventaja la asignación de los polos de la función de transformación del sistema, lo que significa que sin importar la ubicación de los polos en lazo abierto, (incluyendo raíces positivas) el sistema se puede comportar de manera conveniente al ubicar los polos en lazo cerrado.

Esto se logra realimentando las variables de estado del sistema y añadir al sistema una matriz de ganancia  $K$  (ver figura 16) la cual modifica la matriz del sistema para modificar los autovalores de la misma y por lo tanto las raíces de la ecuación característica.



Es en la determinación de esta matriz de ganancia en donde se aplican los métodos anteriormente comentados ya que la asignación de polos parte de conocer previamente los polos y por medio de procedimiento algebraicos determinar la matriz ( por ejemplo al igualar la ecuación característica deseada con la del sistema realimentado) y el control óptimo parte de un criterio de optimización que depende del diseñador y por medio de la ecuación de Riccati o la ecuación de Liapunov se determinan estos coeficientes de realimentación (posteriormente se desarrollara el método de Riccati)

En algunos casos muchos autores consultados agregan una ganancia que va a multiplicar la diferencia entre esta realimentación y la referencia (set point), la cual hace de control proporcional y permite una vez ubicados los polos convenientemente, se puede realizar el lugar geométrico y seleccionar la ganancia de acuerdo a la respuesta que se desee (esto aplica solo para sistemas de primer orden en donde se deben seleccionar los polos para una repuesta en particular)

En la figura [16] se puede apreciar que las variables de estado representan las flechas con superficie, mientras que los escalares representan las líneas en flecha. Se puede apreciar que las variables de estado al multiplicarse por la matriz de ganancias, modifican sus valores, lo que reasigna convenientemente los polos del sistema:

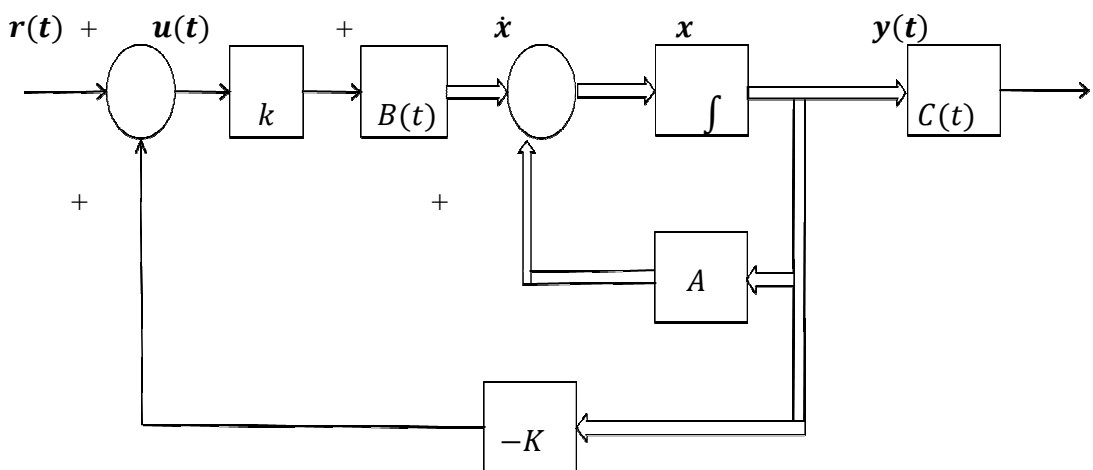


Figura 16: Representación de realimentación en diagrama de bloques de realimentación de variables de estado

Las ecuaciones del sistema en variables de estado al realimentar quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bk(r - K) = (A - BkK)x + Bkr \\ y &= Cx\end{aligned}\quad [40]$$

En donde  $r$  es el punto de referencia y  $K$  es la matriz de coeficientes de realimentación, generalmente en muchos libros consultados en la bibliografía la ganancia  $K$  se asume como uno y se busca exactamente los polos cuya respuesta satisfagan las especificaciones.

Por ello para el desarrollo de las siguientes ecuaciones se considerara esta ganancia como 1, si se desea conocer más sobre esta ganancia y sus ventajas se sugieren consultar la bibliografía <sup>5</sup>

Una de las aplicaciones más importantes de la realimentación de variables de estado es que permite convertir un sistema que es inestable en uno el cual es estable. Esto debido a la ubicación de los polos en el semiplano izquierdo de acuerdo a lo que se desee del sistema.

Se ha realizado como anexo una realimentación de variables a un péndulo invertido que está sobre un carrito, la idea es equilibrar este péndulo ante pequeñas perturbaciones del ángulo mediante el movimiento horizontal del carrito. Es fácil notar que este sistema es inestable, por lo tanto se invita a revisarlo en el Anexo 12.

Para realizar la realimentación de variables de estado se deben tomar en cuenta dos aspectos muy importantes como lo son la controlabilidad y la observabilidad del sistema.

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo, si se puede llevar de cualquier estado inicial  $x(t_0)$  a cualquier otro estado, mediante un vector de entrada sin restricciones en un tiempo finito, esto quiere decir que todas las variables de estado cambian ante una entrada cualquiera.

Ahora, se dice que un sistema es observable en el tiempo, si con el sistema en el estado  $x(t_0)$  es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito, es decir que mediante la respuesta observada en un intervalo de tiempo, se pueden determinar las variables de estado.

Existen unas maneras de determinar estas dos condiciones del sistema y es mediante las respectivas matrices de controlabilidad y observabilidad del sistema, a las cuales se les hace referencia<sup>7</sup>

Para generar la matriz de ganancia se realiza también un procedimiento algebraico, en donde se igualan las ecuaciones características de los sistemas, uno es el del sistema deseado y otra contiene de manera algebraica las ganancias de las matrices pues provienen del determinante de una matriz escrita de forma general. Este procedimiento se puede encontrar en la bibliografía<sup>7</sup>

Al realimentar las variables de estado mediante el procedimiento de asignación de polos se puede asegurar la respuesta transitoria deseada de un sistema ya que mediante las ganancias se reubican los polos del sistema como anteriormente se ha mencionado. Aun así el error en estado estable puede ser grande al aplicar el teorema del valor final. Por lo tanto es necesario para disminuir este error aplicar una acción integral, la cual se aplica según la siguiente figura:

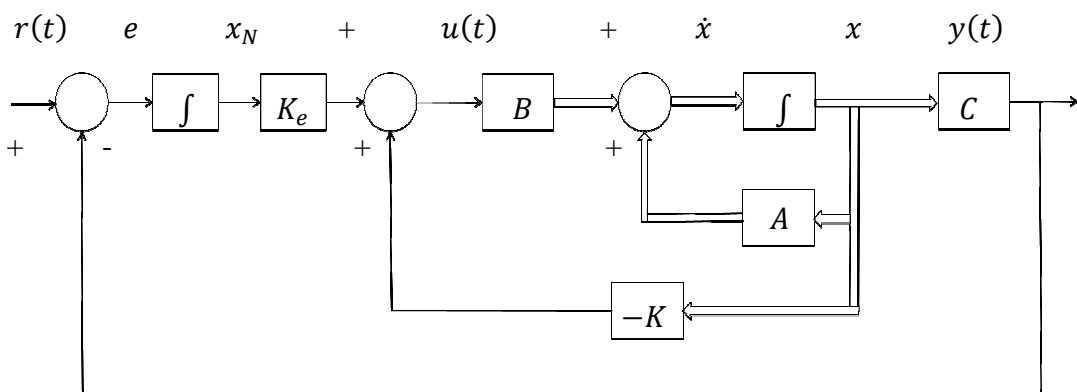


Figura 17: Diagrama de realimentación de variables de estado con una acción integral para el error en estado estable (en donde se asume la ganancia  $k$  igual a 1)

En la figura 17, se realimenta la salida del proceso, que produce un error  $e$ , el cual es conocido como el error en estado estable, este error es alimentado a la planta a través de un integrador, este integrador incrementa el tipo del sistema por lo tanto reduce el error previo a cero.

Una variable de estado adicional se ha agregado,  $x_N$  a la salida del integrador. Esto es

$$\dot{x}_N = r - Cx \quad [41]$$

Por lo tanto se tiene:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad [42]$$

$$\dot{x}_N = -Cx + r \quad [43]$$

$$y = Cx \quad [44]$$

Por lo que empleando la notación matricial, las ecuaciones anteriores pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad [45]$$

$$y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_N \end{bmatrix} \quad [46]$$

Ahora como:

$$u = -Kx + K_e x_N = -[K \quad K_e] \begin{bmatrix} x \\ x_N \end{bmatrix} \quad [47]$$

Sustituyendo [47] en [45] se obtiene finalmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BK) & BK_e \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad [48]$$

$$y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_N \end{bmatrix} \quad [49]$$

Como se ha mencionado esta representación posee un orden mayor y se puede utilizar la ecuación característica asociada a la ecuación [48], para diseñar  $K$  y  $K_E$  para obtener la respuesta transitoria deseada

La consecuencia de esto es que al aumentar el tipo del sistema, se debe agregar tantos polos como para que las ecuaciones características con la respuesta transitoria deseada sea del mismo grado, que la ecuación característica proveniente de [48].

Por lo tanto estos polos tendrán efecto en la respuesta transitoria del problema, así que estos deben seleccionarse alejando al menos 4 o 5 veces de los polos dominantes del sistema.

Esta distancia no debe ser extremadamente grande, debido a que al realizar las respectivas operaciones con estos polos alejados, el inverso de este número puede acarrear errores de cálculo debido a los decimales que deben manejarse.

En el anexo 2 se muestra el procedimiento algebraico desarrollado en el trascurso del trabajo especial de grado, para lograr la determinación de las ganancias integral y de realimentación a partir de los coeficientes de las matrices del sistema y de la ecuación característica deseada.

Para el análisis de estabilidad de estos sistemas representados en variables de estado se emplea el análisis de estabilidad mediante el método de Liapunov.

#### ***Análisis de estabilidad mediante Liapunov***

Para realizar el análisis de estabilidad de sistemas con múltiples variables y mediante el uso de las ecuaciones de estado, se puede emplear el segundo método de Liapunov, el cual también es empleado para el análisis de estabilidad de sistemas no lineales.

El primer método de Liapunov emplea las soluciones de la ecuación diferencial del sistema, lo que en algunas ocasiones es difícil determinar, mientras que el segundo método emplea una función que modele la energía del sistema.

Para que un sistema sea estable la energía del sistema debe tender a cero cuando el tiempo se hace infinito, por lo tanto en este método se crea una función de energía positiva, en la cual la derivada de esta, este definida como una función negativa.

Esto se puede observa por ejemplo en un sistema vibratorio, en donde su estabilidad es cuando su energía total es decreciente.

Esta función se gráfica conjuntamente con las variables de estado, es decir se debe graficar una variable en cada eje para observar su comportamiento, y debe apreciarse que la gráfica resultante se acerque a uno de los ejes de coordenadas o en a una zona que según el método de Liapunov se puede considerar estable<sup>7</sup>

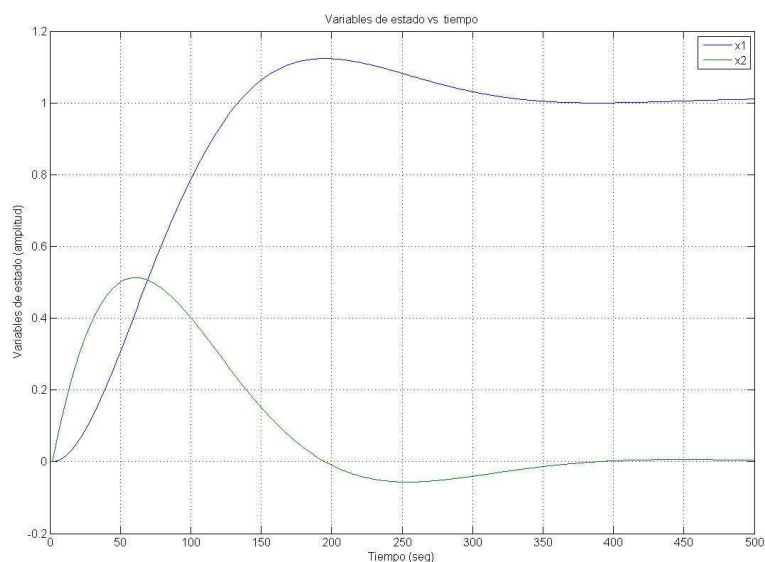


Figura 18: Representación de variables de estado contra el tiempo

En la figura 18 se puede apreciar la representación gráfica de las variables de estado para un sistema masa-resorte-amortiguador, ante una señal de entrada de tipo escalón, la variable  $X_1$  Representa la posición de la masa, mientras que la variable  $X_2$  representa la velocidad de la masa.

En la figura 19 se puede observar la estabilidad del sistema mediante la representación de las dos variables de estado, en el eje de las abscisas se tiene a  $X_1$  y en el eje de las ordenadas a  $X_2$ :

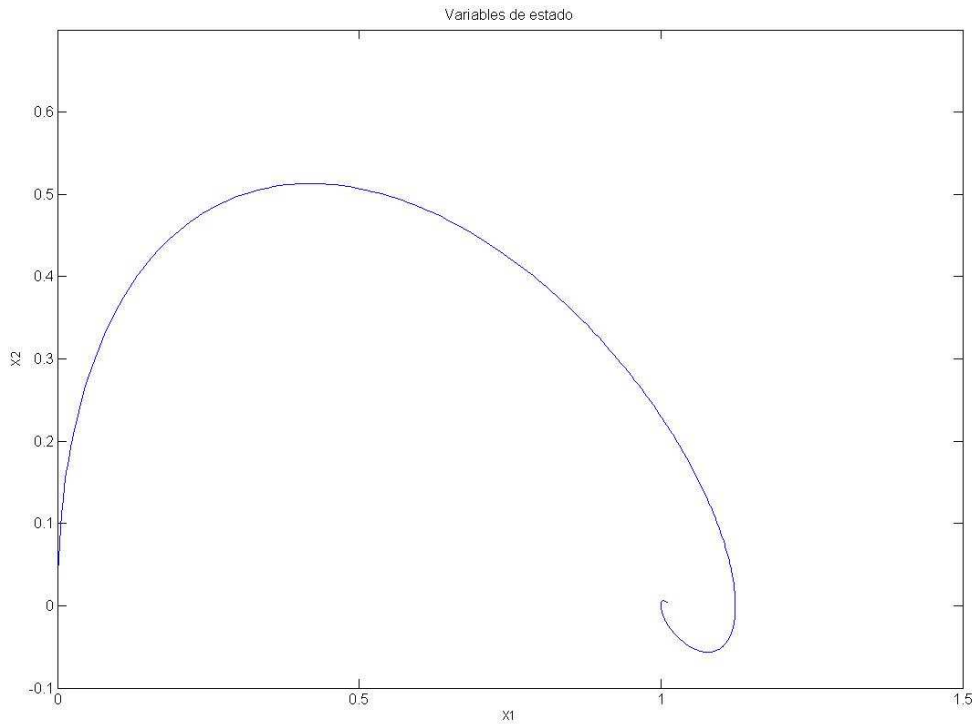


Figura 19: Representación de las variables de estado de un sistema MKC

### ***Procedimientos para la determinación de los coeficientes de la matriz de realimentación K***

#### ***Asignación de polos***

Este procedimiento consiste en igualar la ecuación característica del sistema deseado, con la matriz de realimentación y de esta manera determinar sus coeficientes.

Cabe destacar que para sistemas de orden superior a dos este procedimiento se hace cada vez más engorroso si no se emplea asistencia de las herramientas computacionales.

A grosso modo para la determinación de los coeficientes de realimentación se realiza el siguiente procedimiento algebraico (para más detalle de este procedimiento se sugiere consultar la bibliografía<sup>6</sup>

La matriz de realimentación resultante del sistema es de la forma

$$A_r = (A - B K) \quad [50]$$

Ahora como es conocido los autovalores de la matriz de realimentación representan los polos del sistema en lazo cerrado, por lo tanto si se determina la ecuación característica del sistema realimentado se puede asignar los polos convenientemente

La expresión  $\det(sI - (A - BK))$ , (en donde I representa la matriz identidad) permite determinar la ecuación característica del sistema, la cual está en función de los coeficientes de realimentación que serán determinados por igualación de coeficientes.

Si suponemos una matriz A, expresada en variables de fase, y un vector B columna de la siguiente manera

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ Con } K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \quad [51]$$

La matriz de realimentación se expresa de la forma

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) \end{bmatrix} \quad [52]$$

La cual por medio del determinante, presenta la siguiente ecuación característica:

$$\det(sI - A_r) = s^3 + (a_2 + k_3)s^2 + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1) = 0 \quad [53]$$



Ahora si se tiene una ecuación característica que haya sido determinada en base a los polos deseados:

$$s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0 = 0 \quad [54]$$

Por igualación de estas ecuaciones se determina los coeficientes de realimentación ya que de forma general:

$$d_i = a_i + k_{i+1} \quad [55]$$

### ***Control Óptimo.***

El control óptimo se basa en el rendimiento de un criterio matemático específico de naturaleza integral el cual es minimizado, por ejemplo la energía del sistema y la empleada para el control, entre otros.

Este sistema de control se basa en el criterio del diseñador, el cual basándose en su experiencia deberá decidir las variables más importantes dentro del sistema y por lo tanto considerar más peso a estas variables.

Este tipo de control se podría hacer semejante a los gustos de cada persona, es decir cuando se desea comprar un vehículo, cada persona busca una característica que se adapte a su necesidad y a su disponibilidad, es decir suponiendo que el costo sea irrelevante, la persona puede elegir entre vehículos todo terreno o vehículos que alcancen grandes velocidades o simplemente el que sea más rentable.

Esto quiere decir que cada persona buscará las características que satisfagan sus necesidades, y para el caso de control se busca menor costo, facilidad de operación y mantenimiento.

La ecuación que rige el control óptimo es la siguiente:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^t Q x + u^t R u) dt \quad [56]$$

La cual representa una característica específica a minimizar, tal como se muestra en la bibliografía<sup>14</sup>. Esta ecuación como es ya manejado emplea, el vector de

variables de estado  $x$  y el vector de entrada  $u$ , y se introduce por lo tanto dos matrices que representan la ponderación correspondiente al criterio de diseñador.

La matriz  $Q$  debe ser una matriz diagonal y es la encargada de la ponderación a las variables de estado, también es conocida como la matriz de rendimiento.

Por otro lado la matriz  $R$  debe ser una matriz diagonal y se encarga de la ponderación de las entradas, (es decir, se le da más importancia a una entrada en particular, que a otras en el caso de sistemas MIMO) esta matriz es denominada matriz de costos.

Ahora de forma general incrementar relativamente los  $r_j$  (elementos de la diagonal de la matriz  $R$ ) con respecto a los  $q_i$  (elementos de la matriz  $Q$ ), incrementa la ponderación del control y tiene el efecto de reducir las entradas a expensas de la respuesta.

Ahora bien como ambas matrices  $Q$  y  $R$ , son diagonales al realizar la operación de forma general con el vector de variables de estado y con el vector de entrada, se observa cierta forma particular en la ecuación, la cual es denominada forma cuadrática:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n q_i x_i^2 + \sum_{j=0}^n r_j u_j^2 \right) dt \quad [57]$$

En donde  $x^t Q x = \sum_{i=0}^n q_i x_i^2$  y se denomina forma cuadrática del rendimiento

Y  $u^t R u = \sum_{j=0}^n r_j u_j^2$ , la cual se denomina forma cuadrática del costo del control.

Si se realimentan las variables mediante  $u = -Kx$ , se obtiene la siguiente forma:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^t (Q + K^T R K) x dt \quad [58]$$

Haciendo referencia a la bibliografía consultada\*, existe una forma de determinar la solución a esta ecuación y es mediante el uso de una matriz  $P$ , la cual está definida como una matriz simétrica y positiva (es decir, todos los elementos deben ser positivos), considerando que los polos en lazo cerrado deben ser estables. (Es decir, se parte de la característica deseada el cual es un sistema estable).

Esta matriz  $P$  es tal que

$$\frac{\partial}{\partial t}(x^T P x) = -x^T (Q + K^T R K) \quad [59]$$

Entonces existen dos métodos para determinar estos valores y por lo tanto hallar los coeficientes de realimentación de las variables de estado.

Directamente de la ecuación [59] se obtiene, al desarrollar la ecuación de Liapanov para determinar la solución de los valores de la matriz  $P$  en función de los coeficientes de realimentación.

$$(A - B K)^T P + P(A - B K) = -Q - K^T R K \quad [60]$$

A partir de la ecuación anterior se determinan las ecuaciones escalares de los elementos de la matriz  $P$  y a partir de la evaluación de

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} = 0 \quad [61]$$

Se determinan los coeficientes de realimentación (la ecuación [61] es producto de la consideración que la característica matemática específica  $J$  debe hacerse lo más mínima posible)

La otra forma de determinar los coeficientes de realimentación es mediante la ecuación de Riccati, la cual permite determinar los valores de la matriz  $P$  y posteriormente los coeficientes de realimentación.

También es conocido como la teoría del regulador óptimo en donde a partir de una señal de entrada óptima se puede determinar los coeficientes.<sup>14</sup>

$$K = R^{-1}B^T P \quad [62]$$

Y la matriz P es obtenida mediante la ecuación de Riccati de la forma

$$P A + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad [63]$$

De esta manera se obtiene de forma directa los valores de la matriz P, al resolver las ecuaciones escalares del sistema, y finalmente mediante la ecuación [62] se obtienen los coeficientes de realimentación.

### ***Realimentación de variables en sistemas MIMO, por medio de función de transformación***

Al realizar la realimentación de un sistema que posee múltiples variables tanto manipuladas o como controlables, se presenta la duda de cuál variable se debe realimentar para formar un lazo o el número de lazos necesarios para controlar el sistema de manera eficiente.

Se puede mencionar que las variables en un sistema MIMO, en su mayoría presentan cierta dependencia entre sí, que inclusive al permanecer el lazo abierto se puede notar el cambio.

Por ejemplo en la ducha, al buscar la temperatura deseada se abre o cierra convenientemente las válvulas de agua fría o caliente para buscar la temperatura deseada, pero esto afecta también el caudal de agua de salida, ahora si se dejara una válvula en una posición fija y la otra se variara, podría observarse como cambia tanto la temperatura como el caudal de salida.

En este ejemplo se podría comentar que la relación de cambio entre las salidas varía de acuerdo a la variable manipulable que se cambia.

A esta relación se le denomina ganancia de lazo abierto y se representa mediante la siguiente expresión:

$$K_{ij} = \frac{\Delta c_i}{\Delta m_j} \text{ Evaluado en } m_i = \text{constante} \quad [64]$$

La expresión anterior está expresada para un sistema de 2x2 (dos entradas y dos salidas), en donde  $m$  representa la entrada del sistema y  $c$  representa la salida, evaluado dejando una variable constante.

Si de forma experimental para cada par de variable controlada y variable manipulada, se cerraran un lazo a la vez y se analizaran por separado, la ganancia en lazo cerrado sería el cambio de la variable controlada entre las manipulables cuando todas las demás variables controlables permanecen constantes.

La expresión de esto es

$$K'_{ij} = \frac{\Delta c_i}{\Delta m_j} \text{ Evaluado en } c_j = \text{constante} \quad [65]$$

Ahora las ganancias relativas las cuales miden la interacción (Bristol 1966) es la relación entre las ganancias en lazo abierto y las ganancias en lazo cerrado:

$$\mu_{ij} = \frac{K_{ij}}{K'_{ij}} \quad [66]$$

Para realizar los lazos de forma correcta, tal que se minimicen las interacciones entre las variables del proceso, se deben seleccionar aquellos pares cuya ganancia relativa esté lo más cercano a la unidad.

### ***Desacoplamiento en sistemas MIMO.***

Como se comentaba en el punto anterior, los sistemas MIMO tienen relaciones internas que son características de cada proceso en donde al modificar una variable independiente se modifican las variables dependientes.

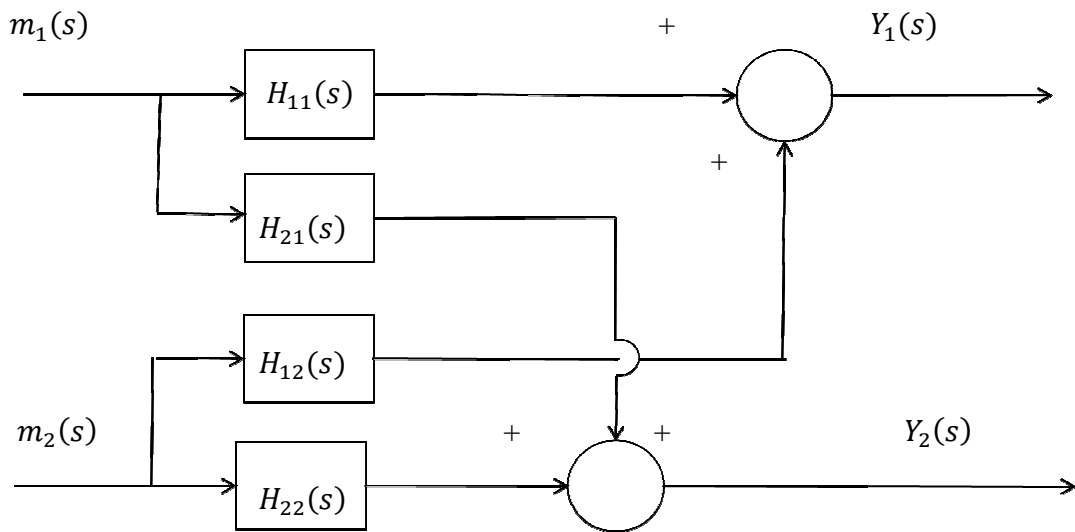


Figura 20: Diagrama de bloque de proceso con interacción entre las variables independientes sistema de 2x2

Estas interacciones son propias del sistema por lo tanto no pueden separarse directamente desde el modelado del proceso.

Para controlar este tipo de sistema es necesaria conocer como es la interacción de estas variables al realizar el lazo cerrado para el control, existen tantas combinaciones posibles de realizar entre un sistema como  $N!$ , siendo  $N$  el número de variables dependientes al igual que las variables independientes.

Es decir en la figura mostrada se puede cerrar el lazo  $m_1(s)$  con  $Y_1(s)$  o hacer  $m_1(s)$  con  $Y_2(s)$ , de igual manera con  $m_2(s)$ , es decir no se sabe con exactitud cual lazo debe cerrarse para obtener la menor interacción posible entre las variables a controlar.

La manera de determinar cuál es el lazo de mayor conveniencia para evitar la mayor interacción es mediante el uso de las ganancias relativas.

Al determinar todas las ganancias del sistema, se deben seleccionar los lazos cuyas ganancias hayan resultado ser mayores (las ganancias varían entre 0 y 1 cuando existen interacciones entre ellas). Esto no asegura que no exista interacción pero que si sea mínima en el proceso

Una vez se tienen definidos los lazos cerrados del proceso se emplea un desacoplador cuya función es cancelar la interacción entre ellos.

Esta función de transformación del desacoplador se obtiene suponiendo que no habrá variación en la salida del otro lazo, cuando se modifique la variable manipulable en el lazo de estudio.

En la figura 21 se puede apreciar un sistema de control para un sistema MIMO en donde se ha seleccionado los lazos cerrados de acuerdo a lo anteriormente explicado, las funciones de los controles  $G_{k1}$  y  $G_{k2}$ , representan el controlador del lazo el cual puede ser cualquier estrategia anteriormente comentada y las funciones  $G_{h,1}$  y  $G_{h,2}$  representan las función de transformación de los instrumentos de medición.

En la figura 2, el desacoplador para el primer lazo, que suponemos es  $m_1(s)$  con  $Y_1(s)$  será de la forma:

$$D_1(s) = -\frac{H_{12}(s)}{H_{11}(s)} \quad [67]$$

$$D_2(s) = -\frac{H_{21}(s)}{H_{22}(s)} \quad [68]$$

Estas expresiones se obtienen mediante el algebra de bloque al analizar figura que a continuación se muestra:

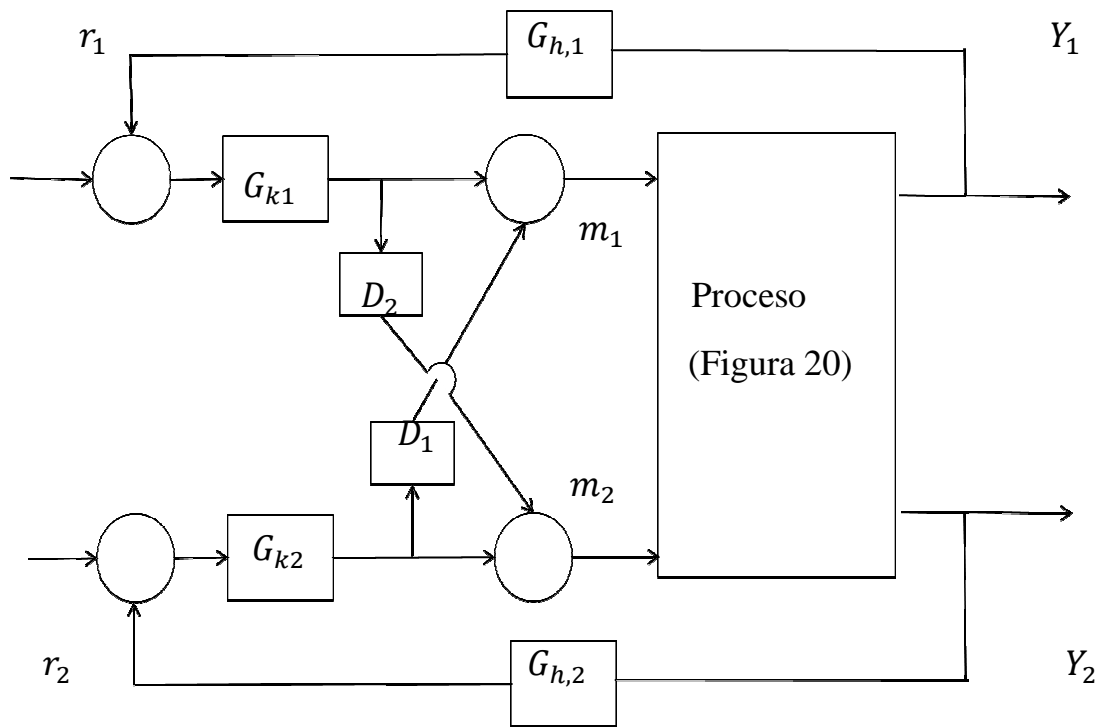


Figura 21: Representación de diagrama de control para sistema MIMO, con desacoplamiento.

### ***LINEALIZACIÓN DE ECUACIONES***

Es un procedimiento matemático que es empleado de forma general para el estudio de problemas no solo de control si no en general.

La mayoría de los procesos como se han mencionado anteriormente no son de tipo lineales, por lo tanto el comportamiento no podría considerarse como predecible y por lo tanto controlable.

Se puede decir, que una ecuación es lineal si consiste en la suma de términos los cuales contiene, no más de una variable o una derivada de primer orden como máximo.



La función del proceso de linealización es aproximar sistemas no lineales con ecuaciones diferenciales lineales, las cuales pueden ser analizados mediante las transformadas de Laplace.

El procedimiento consiste en aproximar una función no lineal mediante una recta tomando en cuenta un punto base y obtener la pendiente de la curva que pasa por ese punto.

La desventaja de este método es que la diferencia entre el punto base y el de estudio debe estar en un rango que determina la naturaleza de la ecuación no lineal, ya que de existir una gran diferencia la aproximación tendría un error muy grande.<sup>13</sup>

Para el control de procesos por lo general el punto base es el estado estable deseado, por lo tanto los puntos de estudio son las variaciones que se tengan alrededor de ese punto producto de señales de perturbación.

Como por ejemplo para funciones con dos variables se tiene:

$$f(x_1(t), x_2(t)) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\delta f}{\delta x_1} (x(t) - \bar{x}_1) + \frac{\delta f}{\delta x_2} (x(t) - \bar{x}_2) \quad [69]$$

En donde  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  representan el punto base.

### ***PROCEDIMIENTO POSIBLE A SEGUIR PARA EL DISEÑO DE UN CONTROLADOR.***

El siguiente procedimiento es el que cualquier diseñador de sistemas de control debería seguir, para obtener los resultados deseados. A continuación se presentarán una serie de preguntas las cuales deberán ser contestadas para lograr el objetivo deseado.

Los siguientes puntos mencionados solo son un posible procedimiento, no son una norma para el diseño de sistemas de control:

#### A) Definir el objetivo de control

El elemento central de cualquier configuración de control es el proceso o planta que se desea controlar, la primera pregunta que el diseñador debe hacerse es

*¿Cuáles son los objetivos operacionales a los cuales se quieren alcanzar, mediante el uso del sistema de control?*

Para responder esta pregunta, la cual determina el objetivo de control, se deben considerar los siguientes puntos.

- Asegurar la estabilidad del proceso
- Suprimir la influencia de perturbación externa
- Optimizar el rendimiento económico de la planta
- Combinación de las anteriores

Al principio los objetivos de control son definidos cualitativamente, luego son cuantificados, usualmente en términos de las variables de salida.

#### B) Seleccionar las variables y los puntos de medición de las mismas

Cualquiera que sea el objetivo de control, se necesita alguna manera de monitorear el rendimiento del proceso, esto se hace mediante la medición de ciertas variables del proceso (temperatura, presión, concentración, caudal, entre otras), las cuales emplean sensores adecuados para cada variable que posteriormente se interpretan.

En este punto, la pregunta es la siguiente

*¿Qué variables deben ser medidas para monitorear el rendimiento operacional de la planta?*

Es evidente que se quisiera monitorear directamente las variables que representan los objetivos de control, lo cual se realiza cuando es posible. A estas mediciones se les denominan mediciones primarias.

En algunos casos ocurre que los objetivos de control no son cantidades medibles, es decir son salidas que no pueden medirse, en estos casos se deben medir otras variables en donde esta medición sea fácil y confiable para inferir posteriormente las variables deseadas, se les denominan mediciones secundarias.

La tercera clase de mediciones que pueden hacerse para monitorear el comportamiento del proceso, es medir las perturbaciones antes de que se introduzcan y afecten el sistema.

Esto trae consigo una ventaja en comparación a las anteriores, que se permite inferir el comportamiento posible del proceso y realizar acciones mediante el controlador para remediarlas y que estas no afecten considerablemente el sistema.

#### C) Seleccionar las variables a manipular

Una vez que se tiene los objetivos de control especificados y las variables a medir, la siguiente pregunta está relacionada a como se puede afectar el proceso.

*¿Cuáles son las variables manipuladas para controlar el sistema?*

Usualmente en el proceso se tiene un número disponible de variables de entradas que pueden ser ajustadas libremente. Cuáles de ellas se seleccionan como variable manipulable es un punto crucial, ya que la elección afectara la calidad de las acciones de control a tomar.

#### D) Seleccionar la configuración de control

La configuración de control es la estructura en la cual la información es usada para conectar las variables medidas disponibles a las variables manipuladas.

*¿Cuál es la mejor configuración para controlar la situación en el proceso?*

Dependiendo del número de salidas y de entradas manipuladas se tenga en el sistema, se puede distinguir la configuración de acuerdo a si el sistema es SISO o MIMO. La mayoría de los procesos son de tipo MIMO,

Se puede mencionar como anteriormente se comento que existen las siguientes configuraciones de control para sistemas SISO

- Realimentación
- Inferencia (mediciones secundarias con las cuales se pueda estimar la salida)
- Alimentación en adelanto (feedforward)

#### E) Diseño del Controlador

En cualquier configuración, el controlador es el elemento activo que recibe la información desde las mediciones y toma las acciones apropiadas de control para ajustar las variables manipulables.

*¿Cómo es la información recibida a través de los medidores, utilizada para ajustar los valores de las variables manipuladas?*

Para responder esto, se necesita tener el conocimiento de la ley de control del controlador, la cual es aplicada automáticamente por el controlador, con los ajustes que el diseñador considere necesario

## CAPITULO III

### METODOLOGÍA APLICADA

#### Diagrama de Flujo

Para lograr el objetivo principal de este trabajo de grado se puede considerar el siguiente diagrama de flujo:

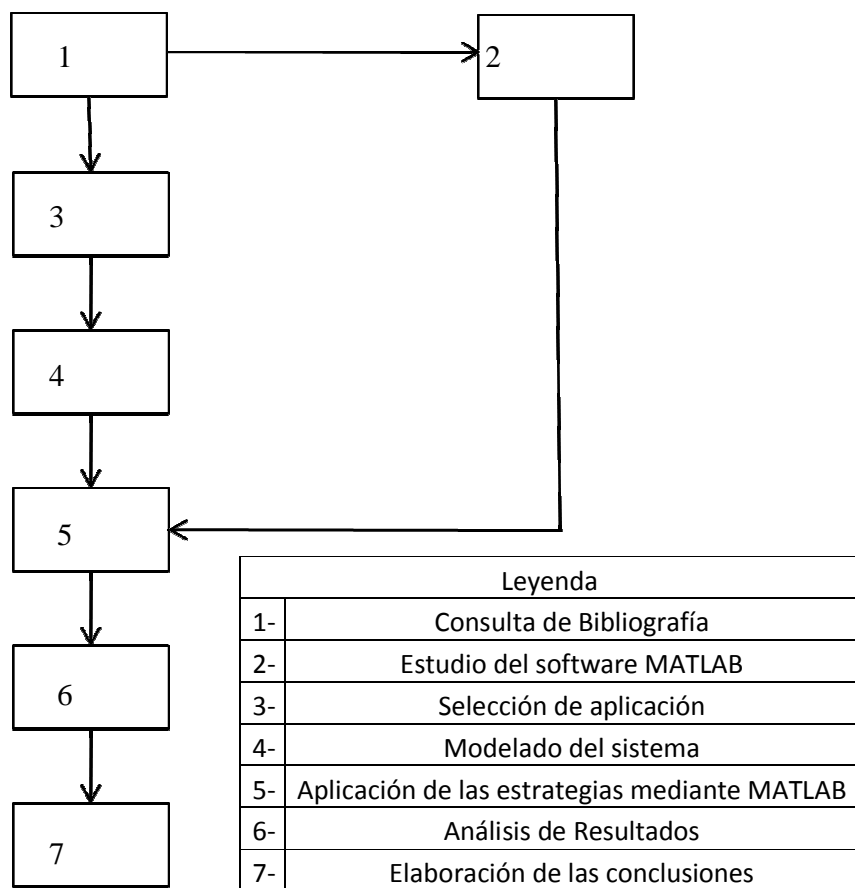


Figura 22: diagrama de flujo de la metodología empleada.

Por otra parte cada punto mostrado en el diagrama de flujo puede desglosarse de la siguiente manera:

#### 1- Consulta de Bibliografía

En este punto se consulta en libros, papers, trabajos de grado y páginas de internet, todo lo referente a sistemas de control que traten puntos como análisis de sistemas de control, modelado de sistema, estrategias de control, análisis de control, entre otras, con la finalidad de formar el marco teórico, en donde se consulta a varios autores sobre el mismo tópico en particular para tener una idea general y obtener un mayor provecho.

Cabe destacar la importancia de consultar los libros y textos de redacción y presentación de trabajos, los cuales fueron necesarios para la realización de ese trabajo especial de grado.

#### 2- Estudio del software MATLAB

Fue imprescindible el conocimiento adecuado de las herramientas que posee el software para la realización de este trabajo de grado, el mismo posee un conjunto de comandos que facilitan el análisis del sistema, como por ejemplo la realización del diagrama de Nichols para el estudio de la estabilidad del sistema o el diagrama de Bode para el estudio de la respuesta en frecuencia del sistema. Cada diagrama se puede obtener mediante un comando correspondiente de manera sencilla.

Por lo que fue necesario adquirir los siguientes conocimientos para el correcto empleo del Software:

- a- Introducción de los datos (forma Matricial).
- b- Operaciones con matrices y vectores.
- c- Comandos para obtener la función de transformación y la representación en variables de estado.
- d- Cambio de sistemas de representación ( de función de transformación a variables de estado y viceversa).
- e- Comando para la configuración del sistema (serie, retroalimentación).

- f- Introducción de señales para los sistemas de control.
- g- Gráficas y presentaciones de los diagramas típicos como Nichols, Bode, Nyquist y la respuesta de los sistemas.

En los anexos se pueden apreciar la gran variedad de comandos que fueron necesarios para la realización de este trabajo.

### 3- Selección de la ilustración.

Para la selección de la ilustración que represente de forma sencilla y permita la comparación de las estrategias de control, se tomaron en cuenta los siguientes criterios:

- a- Proceso de reacción común y general.
- b- Facilidad para su modelado.
- c- Consideración de idealización.
- d- Representado en variados textos.
- e- Sistema de múltiples variables.

De forma general podría decirse que se considera un proceso, que contenga múltiples variables para la comparación de los métodos de control clásico, como los son el control proporcional, el control derivativo, el control integral o combinaciones de ellos contra las estrategias de control moderno como lo es la realimentación de variables de estado.

Ahora para realizar el estudio de las comparaciones del control clásico se puede utilizar la teoría de desacopladores para independizar cada variable controlada con respecto a las variables manipuladas.

Posteriormente en el modelado del sistema se describirá con más detalle todas las consideraciones que se toman en cuenta.

### 4- Modelado del sistema.

El modelado matemático del sistema permite, conocer que variables influyen dentro del sistema y como puede mejorarse el comportamiento y rendimiento del mismo en búsqueda de obtener mayor beneficio.

Para la ilustración seleccionada se considera el modelado mediante las ecuaciones diferenciales fundamentales como lo son por ejemplo la ecuación de continuidad y el balance de masa.

Posteriormente se detallara las mismas y las consideraciones realizadas para lograr el objetivo principal del trabajo especial de grado.

Ahora muchas de las ecuaciones fundamentales de los diversos procesos son ecuaciones no lineales, por lo tanto deben linealizarse y realizar el estudio conforme a este método, es decir, buscar un punto sobre el cual se realizara el estudio y las pequeñas variaciones alrededor de este.

Para el caso de la ilustración se considera el punto de estudio, el estado estable deseado del proceso, y se estudiaran las pequeñas variaciones que puedan ocurrir sobre este punto.

#### 5- Aplicación de las estrategias mediante MATLAB.

Mediante los comando adecuados (presentados en los anexos), se puede aplicar todas las estrategias de control a la ilustración seleccionada.

Este software presenta una gran ventaja para el cálculo de las respuestas, según la señal de entrada que se desee estudiar, puesto que con solo variar una línea en la programación, se puede obtener la respuesta fácilmente.

Cabe destacar que el software también posee una aplicación que permite graficar en diagrama de bloque el sistema, y obtener la respuesta de igual manera, esto tiene la ventaja de no requerir los códigos de programación, solo colocar el bloque que simule la función de transformación necesaria.

#### 6- Análisis de Resultados

Posteriormente a la obtención de las gráficas de respuesta, de todas las estrategias de control aplicadas a la ilustración, se procede al análisis y la



comparación de cada una de ellas, teniendo como criterios para la comparación el error en estado estable, el tiempo de levantamiento y el máximo pico transitorio.

También se considera el rendimiento de estas estrategias clásicas para los sistemas multivariados, en comparación con las estrategias de control moderno, como lo es las variables de estado.

## 7- Conclusiones

Finalmente basándose en el análisis previo, se concluye conforme a los objetivos planteados inicialmente.

### ***JUSTIFICACIÓN DE LA METODOLOGÍA EMPLEADA***

Se ha seleccionado un proceso más no un servomecanismo ya que existe la posibilidad de realizar mayores configuraciones de control, debido al mayor número de variables que se deben manejar, además de que en la industria venezolana, la mayoría de los productos se obtienen por medio de procesos químicos o físicos según sea el caso.

Como anexo 12 se muestra un servomecanismo, el cual no ha sido el tema principal del estudio del trabajo especial de grado, ya que no se le pueden aplicar las estrategias clásicas de control tan fácilmente y por lo tanto se dificulta el logro de los objetivos planteados. Sin embargo se ha estudiado a manera de ejemplo del uso y ventajas de la realimentación de variables de estado.

Las ecuaciones del modelado para los servomecanismos se basan en variables físicas como la posición, velocidad, velocidad angular, intensidades de corriente, etc.

Estas ecuaciones pueden ser determinadas al conocer la naturaleza del movimiento, y este a su vez se determina a partir del diseño inicial del servomecanismo.

El área de control de servomecanismos es aprovechada para las máquinas de herramientas en donde se requiera precisión, rendimiento y velocidad en la producción.

En algunos procesos complejos, como por ejemplo un reactor químico seguido de un intercambiador de calor, en donde se desee controlar el caudal y la temperatura de un fluido, mediante un refrigerante y las válvulas de admisión de los reactivos. Es complicado relacionar de manera independiente las variables medibles a las de referencia por medio de expresiones matemáticas.

Por lo tanto para estos sistemas se debe hacer la investigación por medio de métodos de identificación empíricos como los anteriores mencionados, debido a que al modificar una variable manipulable se afectan otras variables controladas, es decir, existe cierto grado de dependencia dentro del sistema sobre las variables a controlar.

Como por ejemplo, al regular la temperatura deseada en la ducha, mediante la apertura de las válvulas que corresponde al agua caliente y al agua fría, si se deseara mantener un caudal fijo de agua, pero la temperatura es inferior a la deseada, se abre ligeramente la válvula del agua caliente, lo que representa un cambio en el caudal. Ahora como se desea mantener el caudal fijo, se deberá cerrar ligeramente la válvula del agua fría.

Estos métodos de identificación permiten realizar el control del conjunto, lo que representa una ventaja para el mantenimiento, el registro de datos y el costo, en comparación con el control de cada proceso por separado en el caso de plantas o procesos complejos.

El interés de muchas empresas de producción está dirigido a los procesos en donde a partir de una materia prima se pueda obtener un producto final, como por ejemplo las industrias de alimentos, la industria petroquímica, la industria farmacéutica, entre otras.

En estas plantas de producción existen múltiples procesos en donde se puede agrupar, de manera conveniente algunos conjuntos dentro de ella, para el control y la obtención de los resultados deseados.

Al ser esta investigación de tipo teórica, la comparación se realiza mediante la aplicación a un ejemplo de un proceso, a éste se le considera de dificultad media y muy ilustrativo para el buen entendimiento de los controladores a los cuales será sometido.

Para utilizar de manera correcta el software, es necesario el conocimiento de la programación del mismo para la introducción correcta de datos del sistema a estudiar, así como también los datos para las variables a manipular.

Se ha seleccionado este software debido a la capacidad de cálculo que posee, ya que a partir de una matriz de datos se puede realizar un sinnúmero de operaciones que facilitan el entendimiento de la ilustración, así como también este software posee comandos y herramientas que permiten estudiar los gráficos para la estabilidad, la ubicación de las raíces en una función de transformación, la obtención de la matriz de ganancia en la realimentación de variables de estado, entre muchos otros que serán detallados en los anexos.

Previo a la aplicación propuesta, es necesario tener un conocimiento claro de las estrategias de control, así como también de los métodos de análisis de estabilidad y de respuesta. Por ello fue necesario la revisión de la bibliografía, en donde se pudo obtener detalles de cada punto necesario para la investigación, a muchos de ellos se le hace referencia en el marco teórico.

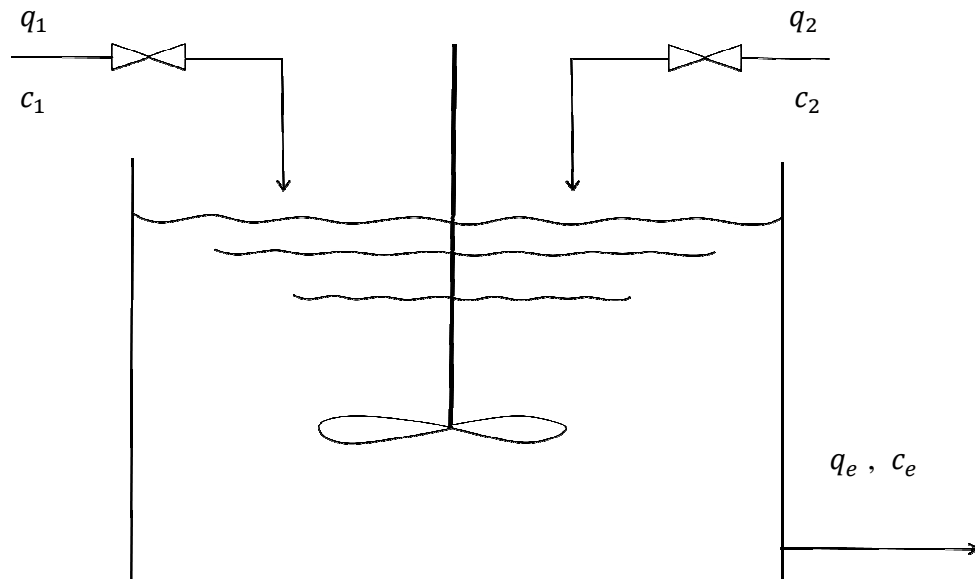


Figura 23: Esquema general del tanque de reacción con mezclador (donde  $q_e$  representan los caudales y  $c_i$  la propiedad intensiva)

Como aplicación de las estrategias de control se ha seleccionado un tanque de reacción (como el mostrado en la fig. 23), en donde se consideran algunas idealizaciones como mezclado homogéneo y aislamiento térmico, tomando en cuenta que es un tanque de tipo atmosférico, aunque de acuerdo a la propiedad intensiva que se desee estudiar esta condición puede variar sin afectar las ecuaciones que rigen el modelado del sistema, como por ejemplo el estudio y el control de la temperatura de una sustancia cuya reacción sea exotérmica.

El proceso es el siguiente; se tiene un tanque al cual afluyen dos flujos del mismo fluido, los cuales presentan una propiedad intensiva (temperatura, concentración, densidad, entre otras), la cual conjuntamente con el caudal de salida del tanque se desea controlar.

Se han seleccionado como variables a manipular los caudales de entrada, mediante dos válvulas reguladoras, es decir, el controlador manipulará la posición

del obturador en cada válvula o del elemento actuador que restringirá el paso del fluido.

Como se ha mencionado anteriormente las variables a controlar serán el caudal de salida del tanque y la propiedad intensiva que se desee, una de las suposiciones que se realiza en el sistema es que esta propiedad intensidad puede medirse en cualquier instante de tiempo de manera continua, para de esta manera realizar las acciones correspondientes al ocurrir variaciones en la misma.

Como se está tomando este ejercicio para la aplicación y la correcta ilustración de los sistemas de control, se puede modelar el sistema mediante la ecuación de diferenciales correspondientes (posteriormente se describirán de manera detallada).

Una vez se tiene el modelado del sistema además del análisis de las variables a manipular y a controlar como se comento en el marco teórico, se procede al análisis y estudio de las estrategias de control por medio del software, en donde se realizará el siguiente procedimiento

- a- Estudio de la estabilidad del sistema en lazo abierto para función de transformación.
- b- Aplicación del control proporcional.
- c- Aplicación del control derivativo.
- d- Aplicación del control integral.
- e- Aplicación del control proporcional-derivativo-integral.
- f- Estudio mediante las variables de estado.
- g- Realimentación de las variables de estado.
- h- Realimentación de las variables de estado más un control integral

Para montar la aplicación en el programa se requieren de valores numéricos, puesto que MATLAB no utiliza variables algebraicas, por lo tanto se toman como valores de referencia los utilizados en la bibliografía<sup>15</sup>

Posteriormente a la aplicación de cada estrategia de control se procede al análisis de las repuestas y a la comparación de las mismas.

### ***MODELADO DE LA ILUSTRACION (TANQUE DE REACCIÓN O TANQUE DE MEZCLADO)***

La ilustración es un tanque de mezclado, en donde afluyen dos caudales los cuales poseen una propiedad intensiva (la misma para ambos caudales), estos caudales se mezclan en el tanque de forma homogénea, resultando de ello un caudal de salida con la misma propiedad intensiva a controlar.

El software MATLAB, no utiliza variables algebraicas, por lo tanto debe seleccionarse variables numéricas, por ello se ha seleccionado como propiedad intensiva para este caso en particular la concentración de la solución, ejemplo de ello es la concentración del sal en agua o cualquier otro compuesto químico diluido en agua.

Empleando el procedimiento descrito en el marco teórico sobre el diseño de controladores, se selecciona el caudal y la concentración de salida ya que además de ser las únicas salidas disponibles para la controlabilidad total del sistema, esta propiedad puede medirse fácilmente mediante los instrumentos adecuados.

En la figura 23 se muestra la representación del sistema a modelar, el cual se realiza mediante las siguientes ecuaciones de balance de masas, considerando un mezclado perfecto, volumen, densidad y concentraciones constantes.

$$q_1 + q_2 - q_e(t) = \frac{dV(t)}{dt} \quad [69]$$

$$c_1 q_1 + c_2 q_2 - c_e(t) q_e(t) = \frac{d}{dt} [c(t) V(t)] \quad [70]$$

Donde  $V(t)$  es el volumen de fluido en el tanque,  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_e$  son los caudales de entrada y salida del tanque y finalmente  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_e$  la concentración de los flujos.

### ***Determinación de la función de transformación del proceso***

Ahora estas ecuaciones [69] y [70] debe ser linealizadas y luego transformarse mediante Laplace para poder emplear la teoría de control, por lo tanto mediante el procedimiento descrito en el marco teórico, para ecuaciones diferenciales se tiene:

$$Q_e(S) \approx Q_1(s) + Q_2(s) \quad [71]$$

$$C_e(S) \approx \frac{K_{c,1}}{\tau s + 1} Q_1(s) + \frac{K_{c,2}}{\tau s + 1} Q_2(s) \quad [72]$$

Donde

$$\tau = \frac{V}{q_e} \quad [73]$$

$$K_{c,1} = \frac{c_1 - \bar{c}_e}{\bar{q}_e} \quad [74]$$

$$K_{c,2} = \frac{c_2 - \bar{c}_e}{\bar{q}_e} \quad [75]$$

Las ecuaciones [73], [74] y [75], son resultados de la linealización de las ecuaciones diferenciales en donde los puntos de estudio  $\bar{q}_e$ ,  $\bar{c}_e$  representan los puntos alrededor de los cuales se realizaran las pequeñas variaciones, se toman como los puntos de trabajo o los puntos deseados en el estado estable.<sup>13</sup>

El rango de operación en donde se puede tomar esta linealización, está determinada por medio de la evaluación de la distancia que existe entre la curva debido a la ecuación diferencial y a la línea recta, esta distancia debe pequeña, en muchas ocasiones no puede predecirse esta región con facilidad y por lo tanto debe realizarse la comprobación del modelo de forma manual .

El Diagrama de bloque partiendo de un sistema de 2x2, para el proceso será el siguiente

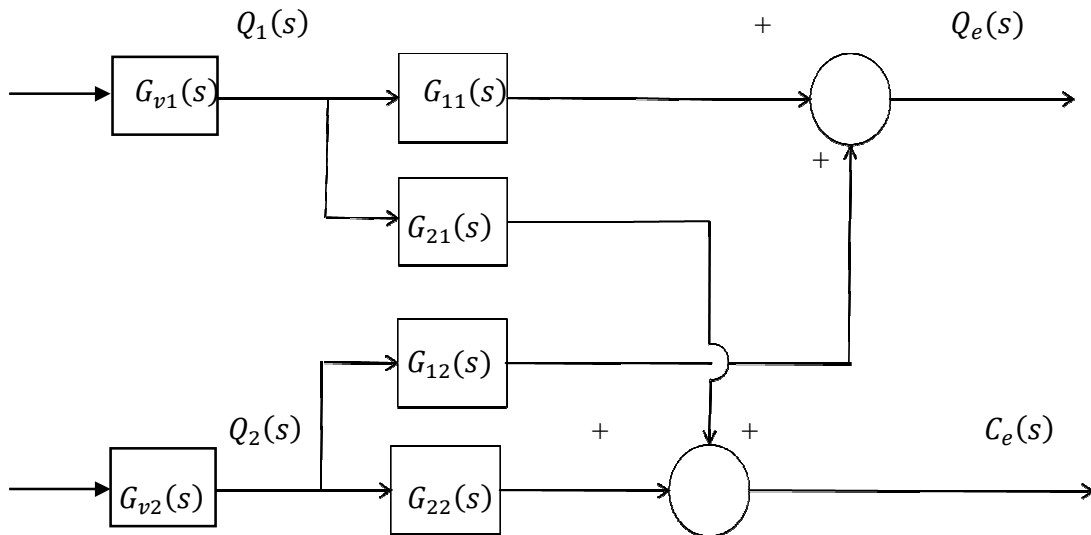


Figura 24: diagrama de bloques para el proceso

De donde mediante ecuaciones diferenciales resultantes [71] y [72], se puede observar lo siguiente

$$G_{11}(s) = 1$$

$$G_{12}(s) = 1$$

$$G_{21}(s) = \frac{K_{c,1}}{\tau s + 1}$$

$$G_{22}(s) = \frac{K_{c,2}}{\tau s + 1}$$

Las funciones  $G_{v1}(s)$  y  $G_{v2}(s)$ , corresponden a las válvulas que regulan el caudal de los fluidos, se considera como idealización para simplificar la complejidad de la ilustración que estas funciones tiene un valor de 1, lo cual no influirá en el desarrollo de las ecuaciones.



Para calcular estas constantes de las válvulas puede revisarse la bibliografía <sup>13</sup> En donde se hace referencia a la función de transformación dependiendo de las características de las válvulas (equipotencial o lineal), la cual a su vez depende del coeficiente de flujo de la válvula.

Ahora como el sistema es multivariable, puesto que posee dos variables de entrada o manipulables y dos salidas o controladas, se debe realizar el desacoplamiento del sistema.

Las variables para esta aplicación interactúan dentro del sistema como puede observarse, ya que al variar uno de los caudales de las entradas directamente se estará afectando las características de las salidas.

Por lo tanto el uso de los desacopladores asegura que mediante la realimentación de los lazos correctos, se pueden controlar por separado.

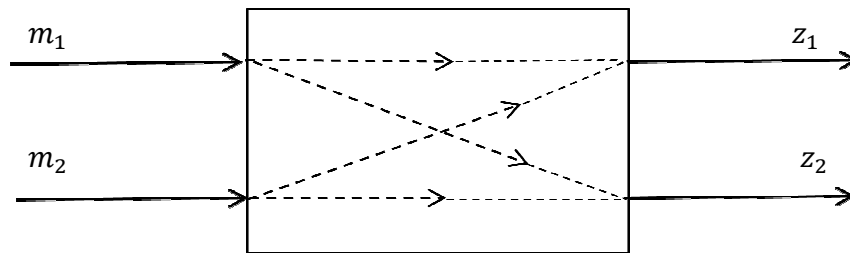


Figura 25: Representación de la interacción de las variables en un sistema de 2 x 2

De forma general, se podría decir que en un proceso multivariable, siempre existirán relaciones entre las variables que influirán en las acciones de control, por lo tanto mediante el uso del desacoplador se disminuye esta interacción facilitando el control del sistema.

También es necesario determinar que variable se debe realimentar para lograr los lazos necesarios que también disminuyan la interacción entre las variables, por ello como se ha mencionado en el capítulo anterior que es necesario el uso de las ganancias relativas.

Para el caso particular de esta aplicación mediante el uso de la definición de las ganancias relativas en el marco teórico (ecuación [66]), mediante la agrupación de términos y simplificación se obtienen las siguientes expresiones:

$$\mu_{q,1} = \frac{q_1}{q_1+q_2} \quad [76]$$

$$\mu_{q,2} = \frac{q_2}{q_1+q_2} \quad [77]$$

$$\mu_{c,1} = \frac{q_2}{q_1+q_2} \quad [78]$$

$$\mu_{c,2} = \frac{q_1}{q_1+q_2} \quad [79]$$

Puede apreciarse que de acuerdo a la relación de los caudales de entrada, se seleccionaran los lazos de acuerdo a las ganancias más cercanas a la unidad.

Se limita al estudio de la configuración del sistema a realimentación, para no aumentar la complejidad del trabajo de grado y al estudio de las estrategias de control en profundidad.

Cabe destacar que para la aplicación es mejor esta configuración, puesto que se considera que existe una mezcla de los fluidos y por lo tanto la propiedad intensiva depende de la mezcla y del proceso en si

Para la aplicación se considera que  $q_1 > q_2$ , por lo tanto las ganancias más cercanas a unidad serán:  $\mu_{q,1}$  y  $\mu_{c,2}$  lo que implica que los lazos serán:

$$q_e \longrightarrow q_1$$

$$c_e \longrightarrow q_2$$

Es decir que con el caudal uno se podrá realizar el lazo con el caudal de salida, y con el caudal dos se realizan el lazo para el control de la concentración.

Luego de analizar el diagrama de bloque puede notarse entonces, mediante las ecuaciones [67] y [68], que los desacopladores se obtienen de la siguiente manera:

$$D_1(s) = -\frac{G_{12}(s)G_{v2}(s)}{G_{11}(s)G_{v1}(s)} = -1$$

$$D_2(s) = -\frac{G_{21}(s)G_{v1}(s)}{G_{22}(s)G_{v2}(s)} = -\frac{K_{c,1}}{K_{c,2}}$$

El diagrama de bloque del proceso será el siguiente, el cual incluye los desacopladores y su ubicación

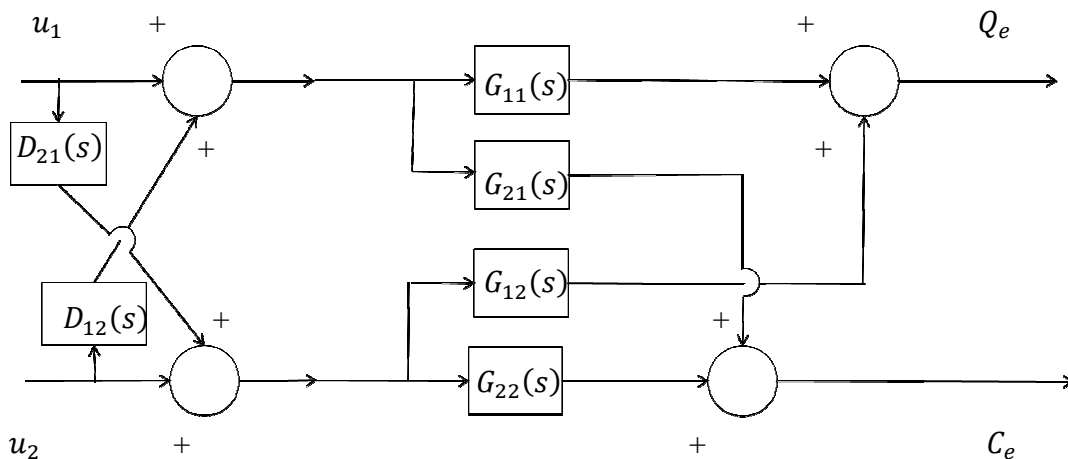


Figura 26: Representación en diagrama de bloque para el proceso

En la figura anterior, puede observarse que los desacopladores se colocan antes del proceso como tal, las entradas  $u_1$  y  $u_2$ , representan las salidas de los controladores, que ejercen efecto sobre el correspondiente lazo como se ha explicado anteriormente.

Por lo tanto, mediante el uso de estos desacopladores y realizando los lazos correspondientes se puede estudiar por separado cada lazo, lo que es el objeto principal para el estudio de las estrategias de control.

De forma general el esquema del control será como el mostrado en la figura 27, en donde a partir de la medición de las variables a controlar se toman decisiones en el controlador, en el cual se configura el punto de trabajo. Y actuara sobre las válvulas al presentarse variaciones en las variables controladas.

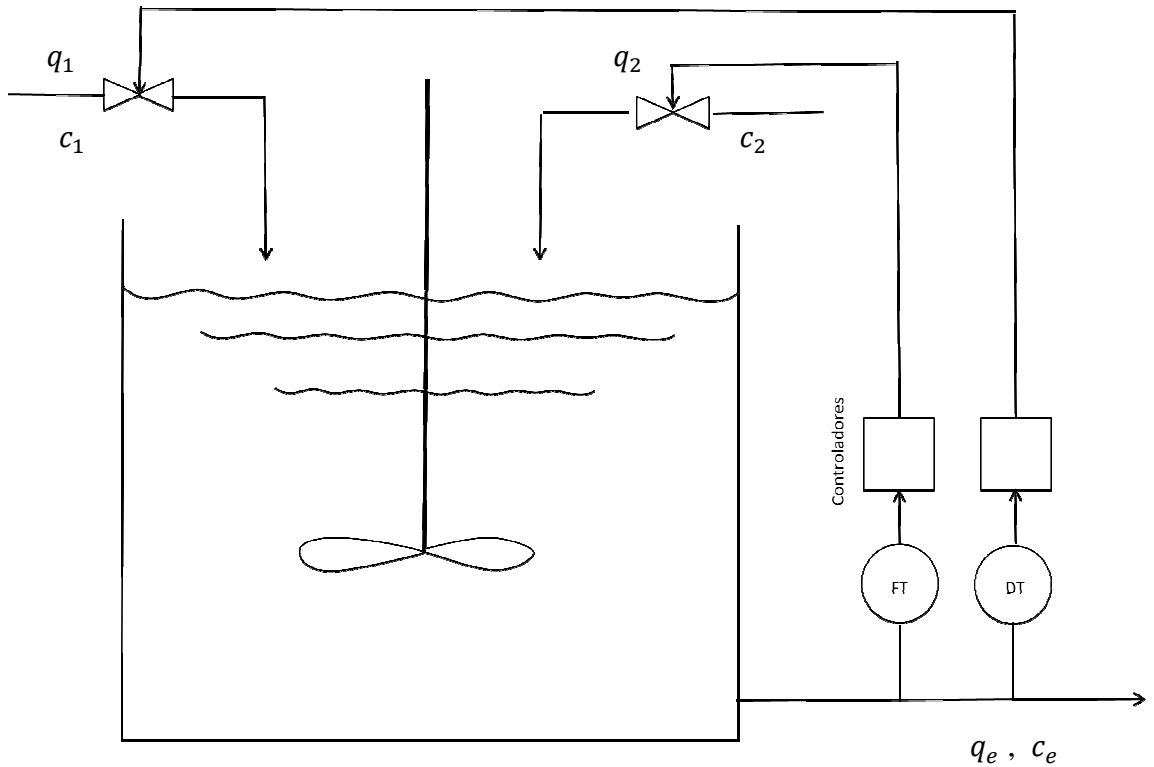


Figura 27: Configuración de control en realimentación para un tanque de mezclado

Ahora para reducir el sistema se debe realizar las operaciones correspondientes mediante el uso del álgebra de bloque, para comprobar el efecto del desacoplador y así obtener de manera independiente las funciones de transformación.

Estas expresiones resultan las siguientes:

$$\frac{Q_e(s)}{u_1} = G_{11}(s) - \frac{G_{12}(s)K_{c,1}}{K_{c,2}} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 - \bar{c}_e} \quad [80]$$

$$\frac{c_e(s)}{u_2} = \frac{G_{11}(s)(K_{c,2} - K_{c,1})}{(\tau s + 1)(G_{11}(s))} = \frac{c_2 - c_1}{\bar{q}_e (\tau s + 1)} \quad [81]$$

### ***Representación mediante variables de estado***

Ahora mediante las variables de estado se puede representar el sistema de forma matricial y expresar los resultados deseados conforme a las variables de estado que sean convenientes.

Partiendo de las ecuaciones diferenciales del modelo (ecuaciones [69] y [70]) se puede considerar que el caudal de salida del tanque depende de la altura del fluido dentro del tanque, fácilmente se puede determinar:

$$q_e = k * \sqrt{h(t)} \quad [82]$$

En donde  $k = 2A_s * g$ , que considera el área de la tubería de salida del tanque y el efecto de la gravedad.

La ecuación anterior puede expresarse también en términos del volumen del tanque ya que se considera que el área transversal del mismo permanece constante, esto es:

$$q_e = k * \sqrt{\frac{V(t)}{A_{tanque}}} \quad [83]$$

Para facilitar el planteamiento de las ecuaciones de estado se utilizan las variables de desviación.

Una variable de desviación, es la diferencia que existe entre el valor de la variable o señal y el valor en el punto de operación, en otras palabras, la variable de desviación es la desviación de una variable respecto a su valor de operación:

Para el caso en particular se tiene que las variables de desviación, son las siguientes:

$$q_1(t) = \bar{q}_1 + \theta_1(t) \quad [84]$$

$$q_2(t) = \bar{q}_2 + \theta_2(t) \quad [85]$$

$$V(t) = \bar{V} + \varepsilon_1 \quad [86]$$

$$c(t) = \bar{c}_e + \varepsilon_2 \quad [87]$$

En donde  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{V}$  y  $\bar{c}_e$ . Representan las condiciones en estado estable de los caudales de entrada, de volumen del tanque y de concentración (o propiedad intensiva) respectivamente, en los cuales se está cumpliendo las condiciones de operación requeridas.

Considerando como  $\theta_1(t), \theta_2(t), \varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , las variaciones alrededor de los puntos de trabajo, estas deben ser seleccionadas de igual manera al proceso de linealización anterior descrito.

La representación de las ecuaciones diferenciales [69] y [70], en términos del volumen del tanque serán de la siguiente manera:

$$q_1 + q_2 - k \sqrt{\frac{V(t)}{A_t}} = \frac{dV(t)}{dt} \quad [88]$$

$$c_1 q_1 + c_2 q_2 - c_e(t) k \sqrt{\frac{V(t)}{A_t}} = \frac{d}{dt} [c(t) V(t)] \quad [89]$$

Al realizar el procedimiento de linealización empleando las variables de desviación, se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}_1 \approx \theta_1(t) + \theta_2(t) - \frac{k}{2\bar{V}} \sqrt{\frac{\bar{V}}{A_t}} \varepsilon_1(t) \quad [90]$$

$$\dot{\varepsilon}_2(t)\bar{V} + \dot{\varepsilon}_1(t)\bar{c}_e \approx c_1\theta_1(t) + c_2\theta_2(t) - \bar{c}_e \frac{k}{2\bar{V}} \sqrt{\frac{\bar{V}}{A_t}} \varepsilon_1(t) - k \sqrt{\frac{\bar{V}}{A_t}} \varepsilon_2(t) \quad [91]$$

Sustituyendo la ecuación [83] para independizar las ecuaciones del área del tanque se tiene:

$$\dot{\varepsilon}_1 \approx \theta_1(t) + \theta_2(t) - \frac{1}{2} \frac{\bar{q}_e}{\bar{V}} \varepsilon_1(t) \quad [92]$$

$$\dot{\varepsilon}_2(t)\bar{V} + \dot{\varepsilon}_1(t)\bar{c}_e \approx c_1\theta_1(t) + c_2\theta_2(t) - \frac{1}{2} \bar{c}_e \frac{\bar{q}_e}{\bar{V}} \varepsilon_1(t) - \bar{q}_e \varepsilon_2(t) \quad [93]$$

Como se considera que la variación del nivel del tanque es cero, se elimina el término  $\dot{\varepsilon}_1$ , y además se introduce la relación  $\frac{\bar{V}}{q_e} = \beta$ , la cual se podría entender como el tiempo de llenado del tanque.

Por lo tanto el sistema en variables de estado para el proceso, es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\beta} & 0 \\ 0 & -1/\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(c_1 - \bar{c}_e)} & \frac{1}{\bar{V}} \\ \frac{(c_2 - \bar{c}_e)}{\bar{V}} & \frac{1}{\bar{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad [94]$$

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad [95]$$

Se puede observar que a pesar de que la primera variable de estado es la desviación del volumen, mediante el primer termino de la matriz C, la señal de salida se transforma directamente en caudal.

## ***APLICACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DE CONTROL AL MODELO DE LA PLANTA***

Se aplica las estrategias detalladas en el marco teórico al modelo representado anteriormente, de configuración en serie tanto para las estrategias clásicas de control (P, PI, PD, PID), como para la estrategia de control moderno como lo es la realimentación de variables de estado.

Se emplean las ecuaciones [80] y [81] para las estrategias clásicas y las ecuaciones [94] y [95] para la realimentación de variables de estado, como se ha demostrado.

Las señales de entrada son de tipo escalón con un valor de 0.1 por encima del punto de trabajo, las demás tipos de entrada no se utilizan ya que para el caso del estudio de los procesos las entradas son generalmente de tipo escalón.

Para el empleo del software se emplean las siguientes constantes, las cuales provienen de un ejercicio planteado en la bibliografía<sup>15</sup>.

$q_1 = 0.015 \frac{m^3}{s}$	Caudal de trabajo del flujo 1
$q_2 = 0.005 \frac{m^3}{s}$	Caudal de trabajo del flujo 2
$q_e = 0.02 \frac{m^3}{s}$	Caudal de salida del tanque
$c_1 = 1 \frac{Kmol}{m^3}$	Concentración del flujo 1
$c_2 = 1.25 \frac{Kmol}{m^3}$	Concentración del flujo 2
$c_e = 1.25 \frac{Kmol}{m^3}$	Concentración a la salida del tanque luego del mezclado
$V_{tanque} = 1 m^3$	Volumen del tanque deseado



Estos valores son necesarios para el software, pues como se ha mencionado MATLAB no emplea variables algebraicas, por lo tanto se emplean estos obtenidos a partir de la ilustración ampliamente desarrollada durante todo el texto <sup>15</sup>.

La demostración de la estabilidad de este modelo es sencilla, para la ecuación de concentración solo existe un polo el cual siempre se encuentra en el semiplano izquierdo de las raíces, y la ecuación de caudal no posee polos lo que limita la aplicación de algunas estrategias de control, pero no afecta la estabilidad de esta variable.

La estrategia de control de alimentación en adelante (feedforward) se realiza para disminuir el efecto que tengan las perturbaciones al sistema, sin necesidad de esperar que esta perturbación afecte el proceso en sí.

Por lo tanto esta estrategia se realiza una vez conocida las formas de las funciones de transformación que participan en el sistema, y se convierte en una relación sencilla de aplicar.

Esta estrategia se detalla con más detenimiento en la bibliografía<sup>14</sup>, y no es estudiada por medio del software, ya que resulta innecesario para la comparación con las demás estrategias de control.

El estudio de las perturbaciones dentro del sistema puede estudiarse empleando la definición de superposición que es consecuencia de la linealización del sistema.

A continuación se describirán el procedimiento y los comentarios sobre las estrategias de control que se aplican al modelo del tanque de mezclado.

### ***Control proporcional***

Esta estrategia consiste en variar la ganancia del sistema de control, y es aplicada posteriormente en combinación con las demás estrategias, ya que como se ha mencionado permite la ubicación convenientemente de las raíces en lazo cerrado.

La ubicación de la raíces determina el comportamiento de la respuesta ante una señal de entrada al modelo, para lograr los objetivos de este trabajo, se buscan las raíces que produzcan la mejor relación entre el máximo pico transitorio y el tiempo de establecimiento.

Se busca que el porcentaje de máximo pico este entre un rango del 10% y el 30%, obteniendo el menor tiempo de establecimiento posible, esto se aplica para todas las estrategias aquí estudiadas.

El criterio de selección de las raíces para todas las estrategias se hace en base a lo requerido por el procedimiento para lograr el objetivo de este y en base a la posibilidad de construcción del sistema de control, en donde se deben considerar puntos como el costo de los instrumentos, de los controladores, la instalación y mantenimiento del mismo.

Como estos puntos no son tratados en el trabajo especial de grado, no se consideran de tanta importancia, la selección de la raíces en la realimentación, por lo tanto el criterio de comparación se basa en la respuesta, la adaptabilidad del método, y la flexibilidad para la selección de las raíces que ofrece.

Esta estrategia se aplica individualmente a cada lazo de control, (de acuerdo a lo comentado en el desacoplamiento del sistema), permitiendo la selección de las raíces de manera independiente.

Cabe destacar que esta estrategia de control para la ecuación de transformación del caudal [80] no puede aplicarse, ya que esta ecuación no presenta ningún polo y por lo tanto la aplicación de esta ganancia solo será un factor amplificador o atenuador.

### ***Control Integral***

La finalidad de esta estrategias, es la de disminuir el error en estado estable aunque aumentar el tipo de la ecuación característica.

Para la aplicación de esta estrategia es necesario la adición de un cero, como se ha descrito en el capítulo anterior, según la teoría se debe colocar lo más cercano posible al cero en el origen que se está agregando para no alterar los polos dominantes del sistema cuando es de orden superior a dos.

Para el caso del lazo de concentración ( $q_2 \rightarrow c_e$ ), la ecuación posee un solo polo ubicado en  $s = -0.02$ , por lo tanto ubicar un cero aun más cercano al origen, no afecta el comportamiento del sistema el cual sigue siendo de primer orden, solo se afecta el estado estable.

Por lo tanto se selecciona un cero más alejado de la raíz del sistema hacia la izquierda, para lograr un lugar geométrico que permita la selección de raíces imaginarias por medio de la ganancia (control proporcional) y por lo tanto el sistema tenga un comportamiento subamortiguado lo que influye sobre la respuesta transitoria sin perjudicar el error en estado estable.

En el caso del lazo del caudal ( $q_1 \rightarrow q_e$ ), al ser la ecuación obtenida por medio de la linealización un valor constante, se agrega un cero en cualquier lugar del semiplano izquierdo.

Esto permite el comportamiento de este lazo como si fuera un sistema de primer orden, que se caracteriza por la disminución del error en estado estable.

Esta estrategia es la más empleada en el control de procesos ya que además de mejorar el error en estado estable es sencilla para la aplicación.

### ***Control derivativo***

La finalidad de esta estrategia es mejorar la respuesta transitoria del sistema, en donde la especificación que se busca mejorar es el tiempo de establecimiento.

Para la aplicación se debe seleccionar un cero, el cual modifica el lugar geométrico de las raíces. Como se comenta en el capítulo anterior esta estrategia solo agrega un cero al sistema, sin la adición de un polo.

Por lo tanto para el caso del lazo de concentración no se aumenta el orden del sistema, por lo que solo se mejora el tiempo de establecimiento del sistema.

Para el lazo de caudal no es posible aplicar esta estrategia ya que en la ecuación de transformación en lazo cerrado no debe existir más ceros que polos y debido a que la ecuación de caudal es una constante no tiene sentido aplicar esta estrategia.

### ***Control proporcional derivativo e integral***

Por medio de esta estrategia, es posible modificar tanto el estado estable del sistema como la respuesta transitoria ya que se aumenta el tipo del sistema y el grado de la ecuación característica.

Para ambos lazos de control, primero se selecciona la ubicación del cero de la parte derivativa con algo de sobredimensionamiento ya que al seleccionar el cero para la parte integral, el comportamiento transitorio se ve modificado.

Luego se selecciona la ganancia que permita obtener las raíces que cumplan con el rango para el máximo pico transitorio y el tiempo de establecimiento como se ha mencionado anteriormente.

### ***Control por atraso***

De igual manera que el control integral, este controlador mejora el error en estado estable, además de proporcionar un atraso en el diagrama de fase del sistema.

Generalmente este controlador se diseña mediante el estudio de la respuesta en frecuencia al realizar el diagrama de Bode y analizar el comportamiento tanto de magnitud como el del fase, y a partir de allí determinar desde qué punto se desea realizar el atraso de fase

Para el proceso en estudio, de manera lógica se considera que no deberían existir entradas de tipo sinusoidales ya que se trata de regular las variables alrededor de un punto de operación

Por lo tanto a partir de diagrama de bode se toma un punto cercano a la frecuencia cero para colocarle el polo y el cero necesario.

De igual manera que para el control proporcional, esta estrategia se realiza en ambas ecuaciones de transformación.

### ***Control por adelanto***

El control por adelanto es semejante al control PD, en donde se modifica la respuesta transitoria del sistema, además de realizar un adelanto en la fase en el diagrama del sistema.

De igual manera al control por atraso, los puntos a analizar son cercanos a frecuencia cero.

Este controlador posee una característica semejante al control PD, este control por adelanto no se puede realizar en la ecuación de caudal, ya que el sistema se convierte en inestable.

### ***Control en adelanto y atraso***

Este tipo de controlador mejora tanto la respuesta transitoria y la estacionaria de ambas ecuaciones de transformación, además mediante el estudio en frecuencias es posible determinar los puntos en los cuales se desea variar un área específica de la gráfica de fase del ángulo en el diagrama de Bode del sistema.

### ***Control mediante la realimentación de variables de estado***

Este tipo de control mejora tanto la respuesta transitoria como la estacionaria, con la ventaja que permite ubicar los polos convenientemente y además mediante el control óptimo permite establecer un criterio para disminuir ya sean los costos o la energía empleada y a su vez maximizar el rendimiento.

Para el estudio de esta estrategia de control, se emplearan ambos métodos para la determinación de la matriz de coeficientes de realimentación, así como también se le agregará un controlador integral para asegurar la disminución del estado estable.

Para el método de asignación de polos se parte de la ubicación de los polos de manera deseada, considerando que se buscan respuestas que presenten condiciones aceptables para el modelo.

Para determinar estos coeficientes por medio de la asignación de polos se emplea el software mediante el comando “`place`”, el cual permite teniendo como parámetros iniciales la matriz A y B del modelo en variables de estado y un vector P el cual posee la ubicación de los polos deseados, la determinación directa de los coeficientes.

Se considera para la aplicación los polos deseados son reales puros y negativos y para la determinación de la ganancia integral se emplea la metodología empleada en el anexo 2, donde por medio de despejes algebraicos se determina la ganancia correspondiente.

En el empleo de este método para la determinación de la ganancia integral se debe agregar uno o dos polos de acuerdo sea el caso, ahora estos polos no deberían interferir con la respuesta deseada, por lo tanto se selecciona de acuerdo al criterio de los polos dominantes a una distancia de al menos cinco veces la distancia real de los polos dominantes (es decir, los nuevos polos son reales con cinco veces la parte real de los polos dominantes)

Por otra parte mediante el control óptimo se permite determinar los coeficientes de realimentación, basándose en la matriz Q de rendimiento y la matriz R de costo, para esto se emplea, las ecuaciones resultantes por medio de la ecuación de Riccati como se demuestra en el anexo 3.

En este anexo se puede observar como a partir de la forma general de las matrices se determinan ecuaciones hasta cierto punto algebraicas que pueden ser fácilmente programables en una hoja de cálculo, para introducirle los valores de las matrices Q y R, y así determinar los valores de la matriz P, finalmente mediante la

ecuación [62] descrita en el marco teórico, se determinan los coeficientes de realimentación

Por lo tanto se realizan cuatro combinaciones de los valores de las matrices Q y R, para observar el comportamiento a groso modo de la respuesta al asignar estos números. Para este trabajo especial de grado, no se es necesario el análisis de estos valores, por lo tanto no se hará tanto énfasis en la selección de los mismos.

Las combinaciones para estos valores tendrán un número por encima del otro, es decir, una combinación posible será.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En donde se considera una variable mayor que la otra tanto para las entradas como para las variables de estado.

## CAPITULO IV

### RESULTADOS

Los datos obtenidos a partir de las simulaciones se encuentran a continuación mediante la tabla [3], en donde se representan las especificaciones más relevantes de acuerdo a la variable que se desea controlar.

Tabla [3]: Especificación relevantes en las variables de estudio

Concentración				Caudal			
Estrategia	Mp ( $\frac{Kmol}{m^3}$ )	Tp (seg)	Ts (seg)	Estrategia	Mp ( $\frac{m^3}{seg}$ )	Tp (seg)	Ts (seg)
P	1,000	3,080	1,503	PI	1,000	1,500	0,173
PI	1,200	1,590	0,603	PID	1,000	1,740	0,435
PD	1,000	5,790	0,098	Lag	1,000	1,110	0,009
PID	1,110	0,900	0,395	Lag-Lead	1,000	6,380	1,580
Lag	1,051	0,388	0,172	Asignación de polos	1,220	1,930	0,657
Lead	1,000	3,440	0,861	Control Optimo por medio de Riccati			
Lag-Lead	1,100	0,765	0,245	1er caso	1,350	6,710	3,061
Asignación de polos	1,050	3,360	1,985	2do caso	1,280	6,720	2,975
Control Optimo por medio de Riccati				3er caso	1,070	11,300	3,120
1er caso	1,060	14,500	9,742	4to caso	1,320	6,470	2,962
2do caso	1,060	12,400	7,560				
3er caso	1,070	8,000	6,930				
4to caso	1,320	11,500	7,507				

Tabla[4]: Casos estudiados para el control optimo, para las matices de ponderación por medio de la ecuación de Riccati

Caso	q1	q2	r1	r2
1	1	2	2	1
2	1	2	1	2
3	2	1	1	2
4	2	1	2	1



$$\text{De acuerdo a } Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} ; \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

En el caso de la realimentación de variables, como se hizo mención en la metodología los casos de las variaciones de los valores de las matrices Q y R, son los presentados en la tabla [4].

En la tabla [3] se muestra el máximo pico de respuesta normalizado ya que como se ha mencionado anteriormente la entrada en tipo escalón se ha disminuido a un valor de 0.1 en las unidades correspondientes a cada señal de entrada.

De igual manera se ha determinado el tiempo de establecimiento y el de levantamiento a partir de las gráficas obtenidas en la simulación con esta entrada.

Como limitación se puede comentar que para la realimentación de variables de estado para ambos métodos, el Software no permite la variación independiente de las señales de entrada, debido a la adición de la acción integral, por lo tanto para evaluar el efecto debe emplearse la propiedad de superposición característica de los sistemas lineales.

En la mayoría de las estrategias de control se ha seleccionado la ganancia de acuerdo a la mejor relación entre el máximo pico y el tiempo de establecimiento, como es conocido estos requerimientos son proporcionados por medio de la necesidad del proceso, los cuales generalmente son proporcionados por el encargado de la planta o por criterio del diseñador.

A continuación se realiza una tabla comparativa de las estrategias de control empleadas en este trabajo de grado, en donde se hace énfasis en las características de cada una

*Tabla comparativa de las estrategias de control estudiadas*

<i>Estrategia</i>	<i>Función</i>	<i>Ecuación implicada</i>	<i>Característica</i>
(P)	Asignar raíces en realimentación	$G_c = K$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Está implícita en las demás estrategias de control, y se emplea para asignar las raíces en lazo cerrado.</li> <li>- Poco empleada de forma individual</li> </ul>
(PI)	Mejorar el estado estable	$G_c = K \frac{(s + z_c)}{s}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Incrementa el tipo del sistema.</li> <li>- Disminuye el error en estado estable hasta llevarlo a cero.</li> <li>- El cero <math>-z_c</math> debe colocarse lo más cercano al origen de coordenadas</li> <li>- Empleada para todos los procesos.</li> </ul>
(Compensación en atraso, [Lag])	Mejora el estado estable	$G_c = K \frac{s + z_c}{s + p_c}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Disminuye el error en estado estable no necesariamente se hace cero</li> <li>- Generalmente diseñado por medio del análisis en frecuencia</li> <li>- El polo <math>-p_c</math> debe ser pequeño y negativo (o variar de acuerdo a criterio)</li> <li>-El cero <math>-z_c</math> debe encontrarse siempre al lado izquierdo del polo <math>-p_c</math></li> </ul>
(PD)	Mejora la respuesta transitoria	$G_c = K (s + z_c)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>-El cero es seleccionado para colocar condiciones de diseño en el lugar geométrico</li> <li>-Innecesario para procesos</li> </ul>
(Compensación en adelanto [Lead])	Mejora la respuesta transitoria	$G_c = \left( K \frac{s + z_c}{s + p_c} \right)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Generalmente diseñado a partir del análisis en frecuencia</li> </ul>

			<ul style="list-style-type: none"> <li>- El cero <math>-z_c</math> y el polo <math>-p_c</math>, son seleccionados para colocar condiciones deseadas en el lugar geométrico</li> <li>- El polo debe ser más negativo que el cero</li> </ul>
(PID)	Mejora el estado estable y la respuesta transitoria	$G_c = \left( K \frac{(s+z_{int})(s+z_{der})}{s} \right)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El cero de la acción integral (<math>-z_{int}</math>) y el polo en el origen, mejoran el estado estable</li> <li>- El cero de la acción derivativa (<math>-z_{der}</math>) mejora la respuesta en frecuencia</li> <li>- El cero <math>-z_{int}</math>, debe ser lo más posible cercano al origen</li> <li>- El cero <math>-z_{der}</math>, debe seleccionarse para colocar condiciones de diseño en el lugar geométrico</li> <li>- Se recomienda seleccionar primeramente la acción derivativa para posteriormente la integral</li> <li>- Independientemente de la primera acción diseñada, la segunda acción modificará la primera</li> <li>- Ambos ceros deben seleccionarse con sobredimensionamiento</li> <li>- Se pueden emplear métodos empíricos para la selección de raíces (Cohen-Coon)</li> </ul>
(Compensación en adelanto y atraso) [Lag-lead])	Mejora el estado estable y la respuesta transitoria	$G_c = K \frac{(s+z_{lag})(s+z_{lead})}{(s+p_{lag})(s+p_{lead})}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Generalmente diseñado en el análisis en frecuencia</li> <li>- La función del <math>-z_{lag}</math>, al igual que en PID conjuntamente con <math>-p_c</math>, tiene la función de mejorar el estado estable,</li> </ul>

			<p>sin necesariamente hacer el error cero</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- La función del <math>-p_{lead}</math>, al igual que en PID conjuntamente con el <math>-p_{lag}</math>, tiene la función de mejorar la respuesta transitoria</li> <li>- El polo del lag es pequeño y negativo, y su cero debe estar a izquierda del polo</li> <li>- En el Lead, el cero y el polo se seleccionan convenientemente para obtener las características de diseño necesarias</li> <li>- En el lead el polo debe estar al lado derecho del cero</li> </ul>
Asignación de polo (realimentación de variables)	Mejora el estado estable y la respuesta transitoria	$u = -kx ;$ $k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \dots & k_{1n} \\ k_{21} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ k_{j1} & \dots & k_{jn} \end{bmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Permite la estabilización de sistemas inestables mediante otras estrategias</li> <li>- Asigna los polos en los lugares deseados</li> <li>- Permite la representación de las variables de estado para evaluar su comportamiento</li> </ul>
Control optimo	Mejora el estado estable y la respuesta transitoria	$u = -kx ;$ $k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \dots & k_{1n} \\ k_{21} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ k_{j1} & \dots & k_{jn} \end{bmatrix}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Método para la ubicación de los polos en base al criterio del diseñador</li> <li>- Permite la disminución de una característica matemática impuesta (optimizar)</li> </ul>

## *ANALISIS DE RESULTADOS*

De manera general puede decirse que los resultados como eran de esperarse dependen principalmente de las raíces de la ecuación característica, esto quiere decir que al considerar un problema real se debe considerar primordialmente la selección de ganancia de acuerdo a las especificaciones necesarias, además se debe incluir en el estudio el costo del equipo de instalación, el cual permitirá manejar el número de variables adecuadas.

Los resultados demuestran que cada estrategia presenta características propias y que en el mejor de los casos las mejores respuestas se obtienen haciendo combinaciones de éstas.

La aplicación del proceso es muy ilustrativa para el uso de las estrategias de control, tanto las clásicas como las modernas, ya que mediante el uso adecuado de los desacopladores y de variables de estado, puede simularse y analizar la respuesta del proceso y de esta manera mejorar el rendimiento convenientemente.

Como se ha descrito en capítulos anteriores el manejo correcto de cada concepto es imprescindible para el uso correcto de cada estrategia de control, cabe destacar que debe hacerse especial énfasis al control moderno.

Estas estrategias de control moderno, facilitan el manejo de dos o más variables simultáneamente lo que representa una gran ventaja con respecto al uso de desacopladores, que como se ha mencionado anteriormente luego de dos variables se debe emplear una matriz de desacoplado.

Los datos obtenidos luego de la simulación son producto de un modelado matemático correcto de la planta (tanto en funciones de transformación como en variables de estado), como puede observarse la planta es estable y puede manejarse dentro de un rango de especificaciones deseado.

Ahora es notable que al menos en el tiempo de establecimiento para algunas estrategias se obtiene un valor pequeño, mientras que para otras se obtiene uno grande, esto depende de la selección de los polos que según las estrategias se ubican en diferentes posiciones buscando las condiciones de trabajo deseables.

En el caso de las estrategias modernas de control, se puede notar que estos datos (tabla [3]) difieren un poco de las estrategias clásicas, esto debido a que se seleccionaron diferentes raíces y diferentes coeficientes de ponderación (método de Riccati) en comparación con las estrategias clásicas.

En el caso de asignación de polos se buscó, al igual que en las estrategias clásicas de control, que se obtuviera el menor tiempo de establecimiento posible con un máximo pico transitorio lo más cercano posible al 20%, lo que influye en la posición de las raíces de la ecuación característica

Ahora también se puede apreciar que las estrategias modernas son herramientas complejas, que facilitan el control de sistemas MIMO y que se requiere del manejo adecuado de los términos y de las constantes requeridas por medio del criterio del diseñador de control, es decir, se requiere de un mayor estudio y experiencia en estas estrategias para su correcto uso en el área de procesos.

No se realizó un estudio exhaustivo en las estrategias control moderno, empleando más cambios en las matrices de ponderación o en la ubicación de los polos para la asignación de polos, debido a que no es el objetivo principal de este trabajo de grado, por lo tanto sólo se muestra como una herramienta que tiene mayor complejidad y provee otro camino para lograr las especificaciones ideales.

De manera particular se puede decir, que la acción determinante para los procesos es la integral, ya que debe emplearse tanto en las estrategias modernas como en las clásicas, para disminuir el error y asegurar los valores del proceso, ya que en

ocasiones es imprescindible la precisión de las variables, como por ejemplo en la industria farmacéutica en donde debe controlarse con alta precisión la mezcla o el uso de materiales y demás compuestos.

Cabe destacar que al aplicar el compensador en atraso (Lag) se está utilizando una acción integral, la cual solo difiere en la ubicación del polo, pero si este polo se ubica muy cercano al origen de coordenadas se puede obtener errores muy pequeños en el estado estable.

Por otra parte la acción derivativa no es de vital importancia para el uso en procesos ya que con esta se modifica solo el estado transitorio y para los procesos los que más interés tiene es el estado estable, pero es importancia para los servomecanismos en donde sí es necesario modificar convenientemente el estado transitorio, para lograr menor tiempo de establecimiento o menores picos de respuesta.

Los datos de la simulación se ven influenciados por algunas propiedades físicas del sistema que no se están considerando en este estudio, como los son las inercias, el tiempo de mezclado, el tiempo de apertura y cierre de válvulas, entre otros. Los cuales sí tendrán un efecto el montaje real de un sistema de control.

## ***CONCLUSIONES***

En base al objetivo principal de este trabajo especial de grado, pudo lograrse una comparación de las estrategias de control aplicadas a un proceso empleando el software MATLAB.

Se logró conocer a fondo los códigos de programación del software para el área de control, en puntos claves como la introducción de variables, la manipulación de datos, la obtención de gráficas de análisis, la introducción de señales al sistema estudiado y la obtención de gráficos de respuestas de la planta para su posterior análisis.

Los datos numéricos obtenidos para cada estrategia se podrían considerar que no son los únicos posibles para cada estrategia, ya que estos dependen de la posición de las raíces de la ecuación característica del sistema. Lo que implica que es posible obtener los mismos resultados con diferentes estrategias al seleccionar convenientemente los polos del controlador.

Cada estrategia de control tiene un posible rango de respuestas que pueden analizarse, por ejemplo mediante el lugar geométrico de las raíces, por lo tanto podría considerarse que existen cierta flexibilidad para cada estrategia de control para una misma planta.

Se modeló correctamente un proceso de un sistema de mezclado, empleando funciones de transformación y variables de estado, convenientemente de acuerdo a la estrategia de control a emplear.

Se puede considerar que se logró aplicar, plantear y analizar cada estrategia de control de manera correcta, así como también los métodos para la identificación de funciones de transformación y los métodos de análisis de sistemas de control para



determinar las características más relevantes de cada una de ellas y su importancia dentro del proceso de diseño de un controlador para una planta.

Mediante el uso de desacopladores se logró estudiar por separado cada variable involucrada en el sistema, y por otro lado se logro el conocimiento necesario para modelar la planta por medio de las variables de estado.

La acción de control determinante para los procesos es la integral, pues asegura el cumplimiento correcto de las variables involucradas en el estado estable y garantizar precisión.

Se logró estudiar y analizar por medio de las estrategias de control moderno la aplicación (el tanque de mezclado), considerando términos importantes como lo son los coeficientes de realimentación de variables y las matrices de ponderación.

Se pudo determinar expresiones algebraicas para corroborar los datos obtenidos por el software, en donde mediante la sustitución de variables o constantes de manera conveniente se puede lograr los mismos resultados obtenidos por la herramienta computacional

Se demostró la importancia de la realimentación de variables de estado para lograr la estabilidad de sistemas normalmente inestables, como lo fue mediante la ilustración del péndulo invertido

Es imprescindible el manejo correcto de cada concepto empleado en las estrategias de control para la correcta aplicación de las mismas, así como también es importante la formación de un criterio para el diseño del sistema de control para una determinada aplicación.

## ***RECOMENDACIONES***

En caso de continuar con este proyecto sobre el estudio de las estrategias de control se recomienda lo que a continuación se describe:

Tener una aplicación real en donde se pueda evaluar condiciones para la selección de la ganancia en base a criterios físicos como económicos y evaluar el rendimiento de cada estrategia de control de forma independiente.

Considerando una aplicación real se podría partir de los métodos experimentales para la obtención de las funciones de transformación, en donde se puedan establecer diferencias con respecto a la instalación de equipos de medición y de obtención de datos.

De realizar el modelo matemático de forma teórica, se sugiere realizar un estudio de las funciones de transformación de los medidores y de elementos finales de control, para evaluar la influencia de estos sobre la respuesta del sistema.

Hacer mayor énfasis en la selección de los coeficientes en las matrices de ponderación para la determinación de los coeficientes de realimentación por control óptimo, en donde se puedan establecer características o relaciones entre los coeficientes y establecer alguna forma de correspondencia con las respuestas obtenidas por medio de simulaciones.

## ***BIBLIOGRAFIA***

- 1- Fuller. A.T, (Diciembre-1963), directions of research in control, *AUTOMATICA*, vol 1, pág 289-296.
- 2- Hernández. S, (2008), Cibernética, ciencia del gobierno civil o del control de las máquinas, *BOTICA*, número 3, pág. 4-5.
- 3- Lewis. P y Yang. C, (1999), *Sistemas de control en ingeniería*, Prentice hall.
- 4- Macfarlane. A.G.J, (Julio-1972), A survey of some recent results in linear multivariable feedback theory, *AUTOMATICA*, vol 8, pág 455-492.
- 5- Melsa. J y Schultz D, (1969), *Linear Control Systems*, Mc Graw Hill.
- 6- Nyse. N, (2000), *Control systems engineering*, John Wiley & Sons, 3er Edición.
- 7- Ogata. K, (1998), *Ingeniería de control moderna*, Prentice hall, 3er Edición.
- 8- Ogata. K, (1999), *Problemas de ingeniería de control utilizando MATLAB*, Prentice hall.
- 9- Olle. Elgerd, (1967), *Control Systems Theory*, Mc Graw Hill
- 10- Rohrs. C y Melsa. J, (1994), *Sistemas de control Lineal*, Mc Graw Hill.
- 11- Roca Vila. R, (1981), *Vibraciones mecánicas*, Limusa
- 12-Stephanopoulos. G, (1984), *Chemical Process Control: an introduction to theory and practice*, Prentice hall
- 13- Smith. C y Corripio. A, (1997), *Principles and Practice of automatic process control*, John Wiley & Sons, 2 da edición
- 14- Van de Vegte. John, (1990), *Feedback control systems*, Prentice hall, 2 da edición
- 15- Kwakernak H (1971), *Linear optimal control systems*, John Wiley & Sons