

*La Integral de Caminos en la
Formulación de la Teoría Cuántica de
Campos a Temperatura Cero y a
Temperatura Finita*

Lic. Gabriel Abellán

Tutor: Dr. Nelson Bolívar

Trabajo Especial de Maestría



Caracas, 13 de diciembre del año 2018



Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Postgrado en Física

**LA INTEGRAL DE CAMINOS EN LA
FORMULACIÓN DE LA TEORÍA CUÁNTICA
DE CAMPOS A TEMPERATURA CERO Y A
TEMPERATURA FINITA**

Lic. Gabriel Abellán

Dr. Nelson Bolívar, Tutor

Caracas, 13 de diciembre del año 2018

**La Integral de Caminos en la Formulación de la Teoría Cuántica de
Campos a Temperatura Cero y a Temperatura Finita**

Copyright © 2018

Universidad Central de Venezuela
Gabriel Abellán

LA INTEGRAL DE CAMINOS EN LA FORMULACIÓN DE LA
TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS A TEMPERATURA CERO Y A
TEMPERATURA FINITA

Lic. Gabriel Abellán

*Trabajo Especial de Maestría presentado
ante la ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título de
Magister Scientiarium en Física.*

A mi madre, que no pudo ver esto.

Agradecimientos

Gracias primarias... a *papá* y *mamá* por haberme dado un buen cajón de herramientas para enfrentarme a la vida. A *tía Bache* que fue mi madre una y otra vez. Hubiera querido que estuviesen acá para mirar este pequeño paso; en mi fantasía esa alegría es la más pura que existe.

A *Héctor Da Rúos* por todas esas palabras que resonarán en mi recuerdo como las del maestro Obi Wan Kenobi sobre el joven Luke Skywalker.

Gracias a *tía Omaira*, y a mis hermanos *Nelson Jovandaric* y *Mariú*; la sangre nos ha juntado y el amor nos mantiene unidos.

Gracias a mis compañeros de la *Coral de la Facultad de Ciencias* por permitirme trabajar con ustedes y continuar el aprendizaje como músico y ser humano; ustedes son fuente inagotable de sabiduría.

Gracias a los amigos que he podido hacer a lo largo de estos años: a *Isabel Rodrigues*, *Isaac Boada*, *Laura Morales Balza*, *César Alejandro Carrillo*, *César Maldonado*, *María Teresa Jiménez*, *Lorenzo Leal*, *José Antonio López*, *Daniel Macero*. Es por esos momentos compartidos donde le encontramos sentido a las piedras con que tropezamos.

Gracias *Adelis* por brindarme tu compañía; por tu entusiasmo, las alegrías compartidas y todo lo vivido. No hay ni habrá palabras para expresar cuánto te debo.

Gracias a mis *profesores*, a todos. Ellos, queriéndolo o no, me han mostrado el camino.

Gracias a mi *Universidad Central de Venezuela* y a mi hermosa *Facultad de Ciencias*; en tus espacios hallo felicidad aun en las peores circunstancias.

Quiero agradecer profundamente al profesor Dr. *Nelson Bolívar*. Gracias por tu compañerismo, solidaridad y el ánimo en las adversidades. Gracias por tu consejo acertado y las llamadas de atención oportunas. Me alegra que hayamos trabajado juntos y me honra que me consideres tu amigo.

Gracias finalmente a todos los que no he podido mencionar acá y estuvieron presentes ayer y siguen estándolo hoy... *a ti que, sin nombrarte, siempre estás.*



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Comisión de Estudios de
Postgrado



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo de Grado presentado por: **GABRIEL ANTONIO ABELLAN POLEO**, Cédula de identidad N.º **13.518.260**, bajo el título "LA INTEGRAL DE CAMINOS EN LA **FORMULACIÓN DE LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS A TEMPERATURA CERO Y A TEMPERATURA FINITA**", a fin de cumplir con el requisito legal para optar al grado académico de **MAGÍSTER SCIENTIARUM, MENCIÓN FÍSICA**, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día 13 de Diciembre de 2018 a las **08:00** A.M., para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala Guillermo Ruggeri, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

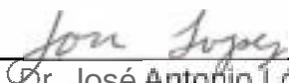
2.- Finalizada la defensa del trabajo, el jurado decidió aprobarlo, por considerar, sin hacerse solidario con las ideas expuestas por el autor, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado

Para dar este veredicto, el jurado estimó que el trabajo examinado es de un excelente nivel de acuerdo con lo esperado en una tesis de magíster, se pudo comprobar que el estudiante completó los objetivos del proyecto en forma satisfactoria.

La integral de caminos como herramienta principal para el estudio de las teorías de campos a temperatura cero y a temperatura finita supone un entendimiento de problemas complejos en diversas áreas de la física. Se abordó el tema de las teorías de campos en el equilibrio utilizando los formalismos de tiempo imaginario y de tiempo real, de manera que este trabajo puede ser utilizado como una introducción pedagógica a este tema. Finalmente se presentó una breve revisión de algunos de los procedimientos para tratar problemas fuera del equilibrio en el contexto del contorno Keldysh principalmente.

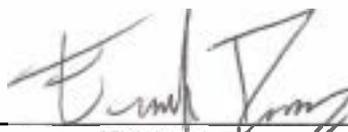
3.- El jurado por unanimidad decidió otorgar la calificación de EXCELENTE al presente trabajo por considerarlo de excepcional calidad para una tesis de maestría, tanto en presentación como en el documento escrito.

En fe de lo cual se levanta la presente ACTA, a los 13 días del mes de **Diciembre** del año **2018**, conforme a lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado, actuó como **Coordinador** del jurado el **Dr. Nelson Bolívar**.



Dr. José Antonio López
C.I. 10.504.342

Universidad Central de Venezuela



Dr. Ernesto Fuenmayor
C.I. 10.336.198

Universidad Central de Venezuela



Dr. Nelson Bolívar
C.I. 13.568.312
Universidad Central de Venezuela
Tutor

JALF/EF/NB.- 13/12/2018

Resumen

La Integral de Caminos en la Formulación de la Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Cero y a Temperatura Finita

Gabriel Abellán

Dr. Nelson Bolívar, Tutor

Universidad Central de Venezuela

En este trabajo se presenta la integral de caminos como herramienta principal para el estudio de las teorías de campos a temperatura cero y a temperatura finita. Se aborda el tema de las teorías de campos en el equilibrio utilizando los formalismos de tiempo imaginario y de tiempo real. Se realizan cálculos en detalle, de manera que este trabajo puede ser utilizado como una introducción pedagógica a este tema. Finalmente se presenta una breve revisión de algunos de los procedimientos para tratar problemas fuera del equilibrio.

Palabras Claves: Teoría Cuántica de Campos, Integrales de Camino, Formalismo de Tiempo Imaginario, Formalismo de Tiempo Real.

Índice General

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Índice General | viii |
| Lista de Figuras | xii |
| Introducción | 1 |
| 1. La Integral de Camino en Mecánica Cuántica | 6 |
| 1.1. Fundamentos | 6 |
| 1.1.1. Operador de Evolución | 7 |
| 1.1.2. Diferentes Marcos para la Mecánica Cuántica | 8 |
| 1.2. La Integral de Caminos | 9 |
| 1.3. Límite Clásico | 15 |
| 1.4. Funcional Generador de las Funciones de Green | 16 |
| 1.4.1. Producto de Operadores Ordenados en Tiempo y la Integral de Caminos | 16 |
| 1.4.2. Fuentes Externas y Funcional Generador | 17 |
| 1.5. Funcional Generador de las Funciones de Green Conectadas | 22 |
| 1.5.1. Funciones de Green Conectadas | 22 |

Índice General

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2. El Oscilador Armónico Usando la Integral de Caminos | 25 |
| 2.1. Oscilador Armónico - Formalismo Canónico | 25 |
| 2.2. Oscilador Armónico - à la Feynman | 27 |
| 2.3. Oscilador Armónico Fermiónico | 29 |
| 2.3.1. Lagrangiano del Oscilador Fermiónico | 30 |
| 2.3.2. Propagador de Feynman | 32 |
| 2.4. Mecánica Cuántica Supersimétrica | 33 |
| 2.4.1. Nociones de Supersimetría en Mecánica Cuántica | 34 |
| 2.4.2. Mecánica Cuántica Supersimétrica y la Integral de Caminos | 36 |
| 3. La Integral de Caminos en Teorías de Campos. Caso $T = 0$. | 39 |
| 3.1. Campo Escalar Real - Teoría Libre ($\lambda = 0$) | 40 |
| 3.2. Funcional Generador de las Funciones de Green Conectadas | 43 |
| 3.2.1. Funcional Conectado <i>vs</i> Funcional no Conectado | 43 |
| 3.3. Campo Escalar Real - Teoría con Interacción | 45 |
| 3.4. Funciones de Green para la teoría $\lambda\phi^4$ | 47 |
| 3.4.1. Diagramática | 48 |
| 3.4.2. Ejemplo: Corrección al Propagador (1 loop) a $T = 0$ | 52 |
| 3.5. Amplitudes de Transición y Temperatura Cero | 53 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4. Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario | 56 |
| 4.1. Formalismo de Tiempo Imaginario - Matsubara | 56 |
| 4.2. Frecuencias de Matsubara | 62 |
| 4.3. Integral de Caminos en Espaciotiempo Euclídeo | 65 |
| 4.4. Ejemplo: Campo Escalar Real Libre | 69 |
| 4.5. Teoría de Perturbaciones y Reglas de Feynman | 71 |
| 4.5.1. Reglas de Feynman a $T \neq 0$ en el Formalismo de Tiempo Imaginario | 72 |
| 4.5.2. Ejemplo: Corrección al Propagador (1 loop) a $T \neq 0$ en el Formalismo de Tiempo Imaginario | 74 |
| 5. Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Real | 77 |
| 5.1. Formalismo de Tiempo Real | 77 |
| 5.2. Propagadores en el Formalismo de Tiempo Real | 82 |
| 5.2.1. Estructura Matricial del Propagador | 85 |
| 5.2.2. Ejemplo: Corrección al Propagador (1 loop) a $T \neq 0$ en el Formalismo de Tiempo Real | 89 |
| 6. Equilibrio o No-equilibrio... ¡He Ahí la Cuestión! | 95 |
| 6.1. Equilibrio | 95 |
| 6.1.1. Potenciales Termodinámicos | 96 |
| 6.1.2. Analogía con una Teoría de Campos | 97 |
| 6.1.3. Equilibrio en el Formalismo de Tiempo Imaginario Vs. Equilibrio en el Formalismo de Tiempo Real | 97 |
| 6.2. No-equilibrio | 99 |
| 6.2.1. No-equilibrio en las Teorías de Campo | 100 |
| 6.2.2. Acción Efectiva 2PI | 101 |

Índice General

| | |
|---------------------------------------------------|------------|
| 6.2.3. Método de la Rotación de Keldysh | 102 |
| Conclusiones | 104 |
| A. Integrales Gaussianas | 112 |
| Bibliografía | 115 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. | Camino Posibles entre Estados Inicial y Final | 11 |
| 1.2. | Prescripción de Feynman | 20 |
| 4.1. | Contorno Tiempo Imaginario | 59 |
| 5.1. | Contorno Tiempo Real | 81 |
| 5.2. | Prescripción Tiempo-Ordenada y Anti Tiempo-Ordenada | 86 |
| 6.1. | Contorno Tiempo Real | 98 |

Introducción

El enfoque convencional para abordar el estudio de la teoría cuántica de campos es hacerlo a temperatura cero ($T = 0$). Bajo este esquema se calculan las secciones eficaces, tiempos de decaimientos y todas las propiedades macroscópicas que son comparadas con la data experimental; la concordancia entre data y predicción es excelente y en algunos casos de una precisión increíble. Todas estas propiedades se calculan usando la teoría de la matriz S . Sin embargo sabemos que el universo no está a temperatura cero (aunque en ciertos casos esto pueda ser una excelente aproximación), de esta manera es conveniente preguntarse cuándo el estudio de las teorías a temperatura finita ($T \neq 0$) es relevante y además cuáles nuevos fenómenos están presentes al considerar los efectos térmicos.

Actualmente hay un creciente interés en la física de los sistemas densos de partículas ultrarelativistas. Los sistemas densos son esencialmente sistemas de muchos cuerpos y se encuentran en diversas áreas de la física: altas energías, física de astropartículas, cosmología, física nuclear, física del plasma y materia condensada.

Cosmología: Se piensa que en las etapas tempranas del universo, éste se comportaba como un plasma caliente termalizado (al menos bajo ciertas condiciones). Esto fue demostrado por los resultados de COBE sobre la radiación cósmica de fondo que muestra el espectro de un cuerpo negro con fluctuaciones del orden de $\delta T/T \sim 10^{-5}$ [1]. Recientemente la sonda WMAP [2] midió la razón fotón-barión en el universo actual

Introducción

lo cual permite calcular la asimetría bariónica (cantidad de partículas y antipartículas) y al compararla con los modelos cosmológicos de nucleosíntesis se observa que son consistentes.

Usando el enfoque de la Teoría cuántica de Campos a Temperatura Finita, puede estudiarse el restablecimiento de una simetría espontáneamente rota [3, 4]. Por ejemplo en la teoría inflacionaria se estudia el restablecimiento de la simetría de calibre de la teoría electrodébil. Estas transiciones de fase son importantes para tratar de comprender la asimetría materia/antimateria (bariogénesis) [5].

Otro tipo de fenómenos que puede ser estudiado en el contexto cosmológico y de astropartículas es calcular las secciones eficaces para las reacciones que tienen lugar en un plasma caliente y determinar así la abundancia de algunas especies.

Altas Energías: Desde el comienzo de la teoría cuántica de campos, ha sido evidente que es de interés extender el formalismo de $T = 0$ para considerar fenómenos a temperatura y densidad finita. A mediados de los años 70 aparecía el concepto de libertad asintótica en Cromodinámica Cuántica (QCD). A temperatura cero y potencial químico cero, el comportamiento de QCD en el régimen de baja energía es caracterizado por el llamado *confinamiento*, es decir el régimen de acoplamiento fuerte entre las partículas que interactúan vía QCD. A medida que la energía aumenta, QCD se caracteriza por el régimen de *libertad asintótica*, es decir las partículas que interactúan vía QCD lo hacen débilmente. La existencia de esta fase exótica en la materia ha sido inferida de colisiones de iones pesados Pb-Pb en los experimentos ATLAS [6], CMS [7] y ALICE [8] en el LHC del CERN. El formalismo de la teoría cuántica de campos a temperatura y densidad finitas es de utilidad al momento de estudiar los mecanismos de transiciones entre estas dos fases de la cromodinámica cuántica.

Astropartículas: Los núcleos de estrellas de neutrones, supernovas, gigantes rojas y enanas blancas, están compuestos fundamentalmente de plasmas densos ($\rho =$

Introducción

$10^6 - 10^{15} \text{ g/cm}^3$). En años recientes ha habido interés en el estudio de la termalización holográfica en plasmas fuertemente acoplados así como aplicaciones de la correspondencia AdS/CFT para obtener propagadores térmicos y estudiar ruido térmico y *quantum quenches* [9].

Materia Condensada: Los métodos desarrollados en teoría cuántica de campos se aplicaron a la mecánica estadística y la materia condensada fuera del equilibrio desde muy temprano [10–12]. Debido a que experimentalmente los fenómenos fuera del equilibrio son más accesibles en el ámbito de las teorías de materia condensada, es natural que haya habido interés en desarrollar herramientas que permitan explicar la gran variedad de fenómenos observados: propiedades de transporte usando la diagramática de Feynman, resonancia de espín y difusión en aleaciones magnéticas diluidas. Las funciones de Green (en la formulación de tiempo real) se han usado para derivar ecuaciones cinéticas en superconductores y estudiar líquidos de Fermi, entre muchas otras aplicaciones [13–15].

El propósito de este trabajo es hacer una presentación pedagógica de la teoría cuántica de campos en la formulación de integrales de caminos (también llamada integral funcional o formulación de Feynman de la teoría cuántica de campos) y Luego estudiar cómo se extiende el formalismo para tratar sistemas a temperatura finita en el equilibrio y fuera del equilibrio.

En el **capítulo 1** se estudiará cómo se formula la mecánica cuántica en términos de integrales de camino. Para ello se realizará una revisión rápida del operador evolución, mostrándose que la integral funcional no es más que una amplitud de transición. Se estudiará el límite clásico de la integral de caminos y finalmente se revisará cómo se obtienen las cantidades importantes a partir de la integral de caminos.

En el **capítulo 2** se considera el ejemplo canónico del oscilador armónico simple. Se revisará la formulación en términos de operadores y posteriormente se hará su cuantización utilizando la integral de caminos. Seguidamente se estudiará el oscilador

Introducción

armónico fermiónico y se calculará su propagador. En la última sección se estudia una formulación supersimétrica para el oscilador armónico simple utilizando la integral funcional.

A partir del **capítulo 3** comienza el estudio de las teorías de campos en la formulación de Feynman. Aquí se revisará la cuantización de una teoría de campos a temperatura cero. Se mostrará con detalles el proceso de cuantización de la teoría libre y se mostrará cómo funciona el método perturbativo para tratar teorías con interacción haciendo énfasis en la teoría escalar $\lambda\phi^4$. Se introducirán los varios funcionales generadores que permiten definir y realizar cálculos sobre una teoría de interés. Finalmente se mostrará cómo se entiende el hecho de estar a temperatura cero en el contexto del formalismo y de esta manera tener herramientas de comparación para los siguientes capítulos.

En el **capítulo 4** se introduce a la teoría de campos la noción de temperatura. Para esto introduce el formalismo de Matsubara (o de tiempo imaginario). En este formalismo se realiza un cambio de variable en la coordenada temporal y de esta forma se pasa a una teoría Euclídea. En este formalismo se estudiará la teoría escalar $\lambda\phi^4$. Una vez presentado el formalismo se compara con el caso $T = 0$ estudiado en el capítulo anterior y se busca caracterizar el surgimiento de este nuevo parámetro T que se llama temperatura. Finalmente se mostrará el funcionamiento de la teoría de perturbaciones para este caso.

Se continúa en el **capítulo 5** con el estudio de formalismo de temperatura finita pero en este caso se introduce el formalismo de Schwinger-Keldysh (o de tiempo real). En este capítulo se muestra la necesidad de cambiar de contorno temporal para poder tratar valores promedios sin perder la dependencia temporal de los campos (como sucede en el formalismo de tiempo imaginario). Se hará énfasis en las diferencias respecto de los formalismos ya estudiados previamente.

Finalmente en el **capítulo 6** se introducirán los conceptos de equilibrio y no-

Introducción

equilibrio y con ello se tratará de clasificar a los formalismos estudiados previamente. Debido a la naturaleza del tema, este capítulo será muy breve. Las teorías fuera del equilibrio aún no son entendidas del todo y no existe un formalismo único y coherente que permita estudiar todos estos fenómenos. Se mencionarán dos de las extensiones más importantes que se hacen al formalismo de tiempo real para poder estudiar sistemas fuera del equilibrio: La acción efectiva 2PI y el método de la rotación de Keldysh.

Con este trabajo se quiere aportar claridad en cuanto a las formulaciones que incluyen efectos estadísticos, en particular en el equilibrio para así poder desarrollar una base conceptual sólida con la cual poder entender posteriormente los procesos en el no-equilibrio. Este proceso de comprensión puede ayudar a realizar posteriormente una formulación precisa de lo que son fenómenos fuera del equilibrio y a su vez llevar al desarrollo de herramientas de cálculo que permitan el abordaje teórico de este tipo de procesos.

Capítulo 1

La Integral de Camino en Mecánica Cuántica

En este capítulo iniciaremos el estudio de la integral de caminos. Para ello estudiaremos la formulación de la mecánica cuántica en términos de esta representación. Se realizará un breve repaso de los elementos del formalismo canónico necesarios y posteriormente se desarrollarán los aspectos más relevantes que nos permitirán en los capítulos siguientes estudiar teorías de sistemas continuos. Para realizar este capítulo se consultó [16–18].

1.1. Fundamentos

La manera tradicional de formular la mecánica cuántica es usando el formalismo de operadores. Esto se realiza de esta manera debido a la relación que puede establecerse con algunas formulaciones de la mecánica clásica. En términos generales puede decirse que el mapa entre las teorías clásicas y cuánticas viene dado por

$$q \longrightarrow \hat{q}, \quad p \longrightarrow \hat{p}, \quad \{ , \}_{PB} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [,] . \quad (1.1)$$

Capítulo 1: La Integral de Camino en Mecánica Cuántica

Es decir las variables canónicas pasan a ser operadores y los corchetes de Poisson pasan a ser conmutadores. De esta forma, por ejemplo el Hamiltoniano clásico $H(q, p)$ se transforma en un operador $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$.

La ecuación de Schrödinger permite determinar la evolución de los estados $|\psi(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.2)$$

y usando la base de posiciones se encuentra que en 1+1 es

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t), \quad (1.3)$$

donde se ha utilizado $\psi(x, t) = \langle x | \psi(t) \rangle$.

1.1.1. Operador de Evolución

Como la ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial para la dinámica de los estados de la teoría, es posible replantearse el problema de la evolución de los estados pensando en un operador $\hat{U}(t_1, t_0)$ que conecte a dos estados en dos tiempos distintos $|\psi(t_0)\rangle$ y $|\psi(t_1)\rangle$ por ejemplo. El operador de evolución actúa de la siguiente manera

$$|\psi(t_1)\rangle = \hat{U}(t_1, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (1.4)$$

Si consideramos esta ecuación con t_1 a un tiempo arbitrario t y se sustituye en (1.2) se llega a la siguiente relación

$$\hat{H} \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} |\psi(t_0)\rangle \quad (1.5)$$

y notamos que de esta forma se llega a una ecuación diferencial para el operador de evolución

$$\hat{H} \hat{U}(t, t_0) = i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t}, \quad (1.6)$$

Capítulo 1: La Integral de Camino en Mecánica Cuántica

es decir el operador de evolución satisface la ecuación de Schrödinger de la teoría. Es posible resolver esta ecuación si el Hamiltoniano \hat{H} no depende explícitamente del tiempo obteniendo

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)\hat{H} \right]. \quad (1.7)$$

Más aún, si se desea preservar la causalidad es necesario imponer que para todo $t < t_0$ el operador de evolución se anule, es decir

$$\hat{U}(t, t_0) = \Theta(t - t_0) \exp \left[-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)\hat{H} \right]. \quad (1.8)$$

Tomando la derivada respecto del tiempo t se obtiene

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \delta(t - t_0) \exp \left[-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)\hat{H} \right] - \frac{i}{\hbar} \Theta(t - t_0) \hat{H} \exp \left[-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)\hat{H} \right], \quad (1.9)$$

y considerando que la delta únicamente aporta para $t = t_0$ se llega al resultado

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \hat{U} = i\hbar \delta(t - t_0). \quad (1.10)$$

Lo que hemos encontrado es que el operador de evolución es la función de Green (o propagador) de la ecuación de Schrödinger.

1.1.2. Diferentes Marcos para la Mecánica Cuántica

En términos de la evolución temporal de los objetos de la teoría, es posible distinguir tres grandes formas de plantear la mecánica cuántica; estas formas se conocen como marcos. A continuación presentamos un resumen

| Objeto \ Marco | Schrödinger | Heisenberg | Interacción |
|----------------|---------------|---------------|-------------|
| $ \psi\rangle$ | evoluciona | no evoluciona | evoluciona |
| \hat{O} | no evoluciona | evoluciona | evoluciona |

Todos los marcos son equivalentes, sin embargo dependiendo del problema a resolver resulta conveniente alguno en específico.

El Operador de Evolución en el Marco de Heisenberg

Hasta ahora hemos trabajado en el marco de Schrödinger. Para indicar esto explícitamente se coloca un subíndice apropiado en los estados $|\psi(t)\rangle_S$ y operadores \hat{O}_S . Dado algún objeto en el marco de Schrödinger, si queremos pasar al marco de Heisenberg es necesario utilizar la siguiente prescripción

$$|\psi\rangle_H = e^{+\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\psi(t)\rangle_S, \quad \hat{O}_H(t) = e^{+\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}. \quad (1.11)$$

Notamos que los estados coinciden para el tiempo inicial $t = 0$, es decir $|\psi(0)\rangle_S = |\psi\rangle_H$. Además es invariante la relación de autovalores para el operador de posición

$$\hat{x}_S |x\rangle_S = x |x\rangle_S \quad \longleftrightarrow \quad \hat{x}_H |x\rangle_H = x |x\rangle_H. \quad (1.12)$$

Esto quiere decir que sin importar el marco utilizado, se obtienen los mismos autovalores (valores de expectación).

Usando estos resultados calculamos la amplitud de transición de ir de un estado $|x_0 t_0\rangle$ a un estado $|x_1 t_1\rangle$. Lo haremos en el marco de Heisenberg. Asumiendo $t_1 > t_0$

$$\begin{aligned} {}_H\langle x_1 t_1 | x_0 t_0 \rangle_H &= {}_S\langle x_1 t_1 | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t_1} e^{+\frac{i}{\hbar}\hat{H}t_0} |x_0 t_0\rangle_S \\ &= {}_S\langle x_1 t_1 | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_1-t_0)} |x_0 t_0\rangle_S \\ &= U(x_1 t_1, x_0 t_0) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Comprobamos que los elementos de matriz del operador de evolución corresponden a las amplitudes de transición entre la base de posiciones en el marco de Heisenberg.

1.2. La Integral de Caminos

Al pasar de la mecánica clásica a la mecánica cuántica hemos visto que se promueve el Hamiltoniano clásico a un operador que depende de los operadores de posición y momento, que son variables canónicas conjugadas. El problema al realizar este paso

Capítulo 1: La Integral de Camino en Mecánica Cuántica

es que las variables canónicas conjugadas no conmutan y por ende aparece una ambigüedad en el orden de los operadores. Existen muchos criterios para resolver este problema: orden Normal, orden de Weyl, etc. Una forma económica de manejar este problema es considerando el operador de evolución en un intervalo muy pequeño.

Sabemos que el operador de evolución es el propagador de la teoría y queremos derivar una representación como integral de caminos. Para esto consideramos

$$\begin{aligned}\psi(x_1, t_1) &= \langle x_1 | \psi(t_1) \rangle \\ &= \langle x_1 | \hat{U}(t_1, t_0) | \psi(t_0) \rangle \\ &= \int dx_0 \langle x_1 | \hat{U}(t_1, t_0) | x_0 \rangle \langle x_0 | \psi(t_0) \rangle \\ &= \int dx_0 U(x_1, t_1, x_0, t_0) \psi(x_0, t_0)\end{aligned}\tag{1.14}$$

Es curioso notar que esta expresión no depende de t_0 , esto se debe a que el propagador conmuta con el Hamiltoniano. Con esta expresión podemos escribir para cualquier tiempo $t_0 \leq t_j \leq t$

$$\psi(x, t) = \int dx_0 dx_j U(x, t, x_j, t_j) U(x_j, t_j, x_0, t_0) \psi(x_0, t_0).\tag{1.15}$$

De esta expresión podemos reconocer que

$$U(x, t, x_0, t_0) = \int dx_j U(x, t, x_j, t_j) U(x_j, t_j, x_0, t_0).\tag{1.16}$$

Vemos que la transición de un punto (x_0, t_0) a (x, t) pasa por los puntos intermedios (x_j, t_j) .

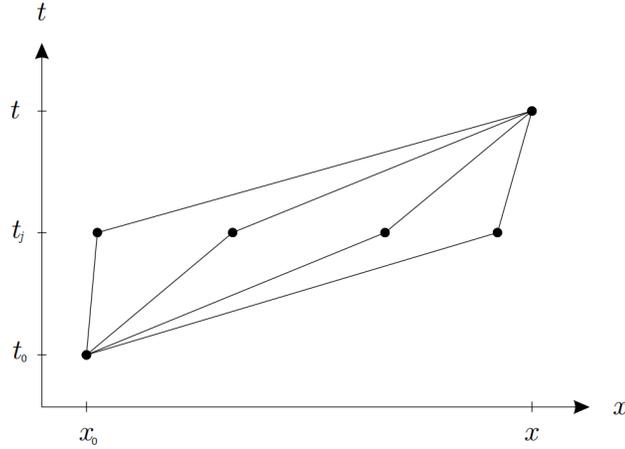


Figura 1.1: Posibles caminos que conectan (x_0, t_0) y (x, t) .

Consideremos ahora un tiempo inicial $t_0 = t_i$ y un tiempo final $t = t_f$ y dividimos el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$ en N segmentos iguales de tamaño ϵ

$$\epsilon = \frac{t_f - t_i}{N}. \quad (1.17)$$

Cada segmento puede parametrizarse por un índice n de forma que $t_n = t_i + n\epsilon$ con $n = 1, 2, \dots, N$ utilizando la condición $t_N = t_f = t_i + N\epsilon$. Resaltamos además que, debido a que se dividió en N segmentos, hay $N - 1$ valores posibles de t_n entre t_i y t_f . Para cada punto intermedio t_i se inserta una relación de clausura

$$\mathbf{1} = \int dx_i |x_i\rangle_H \langle x_i| \quad (1.18)$$

y finalmente se obtiene la expresión (por simplicidad se omite el índice que indica que se está en el marco de Heisenberg)

$$U(x_f, t_f, x_i, t_i) \approx \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \langle x_f, t_f | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_{N-2}, t_{N-2} \rangle \cdots \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle. \quad (1.19)$$

Es importante decir que en esta expresión hay N amplitudes y $N - 1$ integraciones. Este hecho es importante para encontrar el resultado final. Por otra parte este resultado es

Capítulo 1: La Integral de Camino en Mecánica Cuántica

aproximado; al final es necesario tomar el límite cuando el número de segmentos N se hace infinito así como la longitud del intervalo ϵ se hace cero. Esto se considerará más adelante.

Ahora estudiaremos en detalle una de estas amplitudes y usaremos este resultado para encontrar una expresión cerrada para la amplitud de transición $U(x_f t_f, x_i t_i)$. Consideramos la amplitud genérica $U(x_n t_n, x_{n-1} t_{n-1})$ utilizando la ecuación (1.13)

$$\begin{aligned} U(x_n t_n, x_{n-1} t_{n-1}) &= \langle x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle \\ &= \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_n - t_{n-1})} | x_{n-1} \rangle \\ &\approx \langle x_n | \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \epsilon | x_{n-1} \rangle \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde se utilizó la longitud del intervalo $\Delta t = t_n - t_{n-1} = \epsilon$. Desarrollando esta expresión se obtiene

$$U(x_n t_n, x_{n-1} t_{n-1}) \approx \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(x_n - x_{n-1})} - \frac{i}{\hbar} \epsilon \langle x_n | \hat{H} | x_{n-1} \rangle. \quad (1.21)$$

Para llegar a esta expresión se utilizó la representación de la delta de Dirac. Ahora bien, si queremos avanzar más, es necesario hacer alguna suposición respecto al Hamiltoniano \hat{H} . Consideremos un Hamiltoniano de la forma $\hat{H} = \hat{T}(\hat{p}) + \hat{V}(\hat{x})$, entonces podemos escribir $\langle x_n | \hat{H} | x_{n-1} \rangle = \langle x_n | \hat{T}(\hat{p}) + \hat{V}(\hat{x}) | x_{n-1} \rangle$ y calcular el aporte de cada término por separado.

Veamos el primer término $\langle x_n | \hat{T}(\hat{p}) | x_{n-1} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x_n | \hat{T}(\hat{p}) | x_{n-1} \rangle &= \int dp' dp \langle x_n | p' \rangle \langle p' | \hat{T}(\hat{p}) | p \rangle \langle p | x_{n-1} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(x_n - x_{n-1})} T(p). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Para encontrar esta representación integral se utilizó la relación de clausura en la base de momento. Es importante notar que en la segunda línea el término $T(p)$ ya no es un operador. De manera análoga se estudia el segundo término $\langle x_n | \hat{V}(\hat{x}) | x_{n-1} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x_n | \hat{V}(\hat{x}) | x_{n-1} \rangle &= V(x_{n-1}) \delta(x_n - x_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(x_n - x_{n-1})} V(x_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Capítulo 1: La Integral de Camino en Mecánica Cuántica

Con estos dos términos, se escribe la expresión para la amplitud $\langle x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle$ en un semento $\Delta t = \epsilon$

$$\begin{aligned} U(x_n t_n, x_{n-1} t_{n-1}) &\approx \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar}p(x_n - x_{n-1})} \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar}p(x_n - x_{n-1})} (T(p) + V(x_{n-1})) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar}p(x_n - x_{n-1})} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon H(x_{n-1}, p) \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

En esta expresión el Hamiltoniano ya no es un operador. Además recordamos que hay N amplitudes en la expresión (1.19) del propagador, por lo tanto colocamos una etiqueta al momento p_n para indicar que viene de la amplitud $\langle x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} U(x_n t_n, x_{n-1} t_{n-1}) &\approx \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_n e^{\frac{i}{\hbar}p_n(x_n - x_{n-1})} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon H(x_{n-1}, p_n) \right) \\ &\stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\equiv} \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_n \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [p_n(x_n - x_{n-1}) - \epsilon H(x_{n-1}, p_n)] \right\} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Finalmente al mutiplicar todas las amplitudes y tomar el límite cuando $N \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\begin{aligned} U(x_f t_f, x_i t_i) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \int \prod_{l=1}^N \frac{dp_l}{2\pi\hbar} \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \epsilon \left[p_j \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\epsilon} \right) - H(x_{j-1}, p_j) \right] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt' [p(t') \dot{x}(t') - H(x(t'), p(t'))] \right\}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Esta relación expresa al propagador (la amplitud de transición) como una integral de caminos en el espacio de fases y es un resultado importante debido a que partiendo del Hamiltoniano clásico $H(x, p)$, es posible encontrar la dinámica cuantizada asociada a este sistema estudiando esta expresión. Los símbolos $\mathcal{D}x = \prod dx_k$ y $\mathcal{D}p = \prod dp_l/2\pi\hbar$ son los que permiten realizar la suma sobre todas las trayectorias posibles y cada trayectoria está pesada por el factor exponencial. Notamos además que los puntos final $(x_f t_f) = (x_N t_N)$ e inicial $(x_i t_i) = (x_0 t_0)$ están fijos y en principio son distintos.

Capítulo 1: La Integral de Camino en Mecánica Cuántica

Seguidamente consideramos un Hamiltoniano de la forma $H(x, p) = p^2/2m + V(x)$, de esta manera se puede realizar la integral sobre p en la expresión (1.26). Regresando a la versión discreta de la amplitud de transición, podemos escribir

$$\begin{aligned}
 U(x_f t_f, x_i t_i) &\approx \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \int \prod_{l=1}^N \frac{dp_l}{2\pi\hbar} \\
 &\quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \epsilon \left[p_j \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\epsilon} \right) - \frac{p_j^2}{2m} - V(x_{j-1}) \right] \right\} \\
 &= \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \epsilon V(x_{j-1}) \right\} \\
 &\quad \int \prod_{l=1}^N \frac{dp_l}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \epsilon \left[p_j \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\epsilon} \right) - \frac{p_j^2}{2m} \right] \right\}. \quad (1.27)
 \end{aligned}$$

Notamos que la integral en momento corresponde a N integrales que no están acopladas. Además la integral es una Gaussiana que puede calcularse de manera exacta. Realizando las integraciones en p y tomando el límite nuevamente se obtiene

$$\begin{aligned}
 U(x_f t_f, x_i t_i) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \\
 &\quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \epsilon \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\epsilon} \right)^2 - V(x_{j-1}) \right] \right\}. \quad (1.28)
 \end{aligned}$$

Finalmente, tomando el límite y recordando que también $\epsilon \rightarrow 0$, se consigue el resultado

$$\begin{aligned}
 U(x_f t_f, x_i t_i) &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right) \right\} \\
 &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[x] \right\}. \quad (1.29)
 \end{aligned}$$

Esta es la integral de camino de Feynman para la amplitud de transición en mecánica cuántica. Hemos reconocido en el integrando dentro de la exponencial al Lagrangiano del sistema $L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - V(x)$ y por esto podemos escribir la expresión final en términos de la acción $S[x]$. La constante \mathcal{N} no depende de la dinámica del sistema. La expresión (1.29) corresponde a una integral de camino en el espacio de configuración y nos servirá como punto de inicio para el estudio de las teorías de campo Bosónicas.

1.3. Límite Clásico

En esta sección se establecerá una conexión entre la mecánica clásica y cuántica utilizando la integral de camino como puente entre ambas. Recordamos que la acción se escribe como

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right). \quad (1.30)$$

El principio de Hamilton establece que la acción debe ser estacionaria

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x_{cl} + \delta x, \dot{x}_{cl} + \delta \dot{x}) - \int_{t_i}^{t_f} dt L(x_{cl}, \dot{x}_{cl}) = 0. \quad (1.31)$$

En términos de la integral de camino esta relación puede interpretarse como sigue: una trayectoria cercana a la trayectoria clásica tendrá la misma contribución que ésta a la amplitud de transición. Podría decirse que para cada camino (C_1) que se separa mucho de la trayectoria clásica, hay otro camino (C_2) cuya acción difiere justo en $\pi\hbar$, es decir $S(C_1) = S(C_2) + \pi\hbar$ y de esta forma su contribución a la amplitud de transición es

$$e^{\frac{i}{\hbar}S(C_1)} + e^{\frac{i}{\hbar}S(C_2)} = e^{\frac{i}{\hbar}S(C_1)} + e^{\frac{i}{\hbar}(S(C_1) - \pi\hbar)} = e^{\frac{i}{\hbar}S(C_1)} - e^{\frac{i}{\hbar}S(C_1)} = 0, \quad (1.32)$$

es decir se anulan las contribuciones de ambos caminos. Los aportes más importantes a la amplitud de transición vienen dados por caminos cercanos a la trayectoria clásica. De esta manera, en la representación de integrales de camino, la mecánica cuántica describe fluctuaciones en torno a la trayectoria clásica.

Usando estas observaciones es posible hacer una aproximación semiclásica a la amplitud de transición. Expandimos la acción en torno a la trayectoria clásica

$$\begin{aligned} S[x] &= S_{cl} + \int \frac{\delta L}{\delta x'} \Big|_{cl} \delta x' + \frac{1}{2} \int \delta x' \frac{\delta^2 L}{\delta x' \delta x''} \Big|_{cl} \delta x'' + \dots \\ &= S_{cl} + \delta S + \delta^2 S + \dots \end{aligned} \quad (1.33)$$

En esta expresión es claro que el término δS se anula debido a que se está expandiendo en torno a la trayectoria clásica y $\frac{\delta L}{\delta x'} \Big|_{cl} = 0$. A continuación se sustituye (1.33) en la expresión del propagador (1.29)

$$U(x_f t_f, x_i t_i) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[x] \right\} = \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \delta^2 S \right\} + \dots \quad (1.34)$$

Claramente vemos cómo las correcciones cuánticas se hacen pequeñas al hacer pequeñas las fluctuaciones, $\delta x \rightarrow 0$, y de esta manera sólo queda la contribución clásica. Además notamos que el resultado a segundo orden para la amplitud de transición es exacto siempre que el Lagrangiano dependa cuadráticamente de x y \dot{x} .

1.4. Funcional Generador de las Funciones de Green

En la sección anterior encontramos una representación para la amplitud de transición $\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle$ en términos de una integral de caminos. Desde el punto de vista práctico, el potencial $V(x)$ puede considerarse como una serie de potencias en x de manera que es importante aprender a calcular elementos de matriz del tipo $\langle x_f t_f | x^m | x_i t_i \rangle$.

1.4.1. Producto de Operadores Ordenados en Tiempo y la Integral de Caminos

En la formulación canónica de la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos aparecen elementos de matriz de productos de operadores trabajados en el marco de Heisenberg. Si queremos evaluar $\langle x_f t_f | \hat{A}(t_a) \hat{B}(t_b) | x_i t_i \rangle$ y se asume que ambos operadores son Bosónicos, podemos usar la relación (1.19) para encontrar el resultado. Por ejemplo si $t_a > t_b$

$$\begin{aligned} \langle x_f t_f | \hat{A}(t_a) \hat{B}(t_b) | x_i t_i \rangle &\approx \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \cdots \\ &\cdots \langle x_{a+1} t_{a+1} | \hat{A} | x_a t_a \rangle \cdots \langle x_{b+1} t_{b+1} | \hat{B} | x_b t_b \rangle \cdots \end{aligned} \quad (1.35)$$

y si $t_b > t_a$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle x_f t_f | \hat{A}(t_a) \hat{B}(t_b) | x_i t_i \rangle &\approx \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \cdots \\ &\cdots \langle x_{b+1} t_{b+1} | \hat{B} | x_b t_b \rangle \cdots \langle x_{a+1} t_{a+1} | \hat{A} | x_a t_a \rangle \cdots \end{aligned} \quad (1.36)$$

Capítulo 1: La Integral de Camino en Mecánica Cuántica

Es claro que no importa el orden de los operadores en la representación de la integral de camino; esto era de esperarse debido a que en esta formulación no aparecen operadores. Si se define el producto de operadores Bosónicos ordenados en tiempo

$$T \{ \hat{A}(t_a) \hat{B}(t_b) \} = \hat{A}(t_a) \hat{B}(t_b) \Theta(t_a - t_b) + \hat{B}(t_b) \hat{A}(t_a) \Theta(t_b - t_a) \quad (1.37)$$

podemos expresar el elemento de matriz como

$$\langle x_f t_f | T \{ \hat{A}(t_a) \hat{B}(t_b) \} | x_i t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x A(t_a) B(t_b) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[x] \right\}. \quad (1.38)$$

Este resultado es fácilmente generalizable a cualquier número de operadores. La expresión anterior se asemeja al cálculo del valor medio de $\hat{A}(t_a) \hat{B}(t_b)$ usando como distribución de probabilidades $\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[x] \right\}$. Sabemos que no se trata propiamente de valores medios pero esta analogía servirá para dar el paso siguiente.

1.4.2. Fuentes Externas y Funcional Generador

Existe una manera simple y económica de obtener expresiones de la forma (1.38). La idea es modificar el Lagrangiano acoplado con una fuente $J(t)$ al operador del cual se quiere calcular valores esperados. Esta fuente es meramente auxiliar y en principio no tiene ninguna incidencia en la dinámica final como se verá. Por ejemplo en mecánica cuántica se puede pensar en un oscilador armónico en el estado base $|0\rangle$ que hace una transición a un estado excitado $|n\rangle$ en el tiempo t y luego decae nuevamente al estado base $|0\rangle$ en un tiempo $t' > t$. Este evento es análogo al ocurrido en procesos relativistas donde se crean y destruyen partículas. En este caso se le llama estado de vacío al estado base de la teoría en el cual no hay partículas presentes.

Fue Schwinger quien propuso modificar el Lagrangiano de la siguiente forma

$$L \quad \longrightarrow \quad L + J(t)x(t) \quad (1.39)$$

y con este cambio se modifica la amplitud de transición calculada en (1.29). Denotando $\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle_J$ a la amplitud de transición modificada de esta forma, tenemos

explícitamente la expresión

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle_J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (L + Jx) \right\}. \quad (1.40)$$

Esta expresión se conoce como funcional generador de las funciones de Green por razones que quedarán claras a continuación. Hemos omitido las dependencias temporales explícitas por simplificar la notación. Además resaltamos el hecho de que $Z[0]$ da la amplitud de transición original de la teoría.

Teniendo el funcional generador sólo hay que tomar la derivada funcional respecto a la fuente $J(t)$ en el tiempo donde se desee generar el valor esperado de $x(t)$. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(t_1)} \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle_J &= \frac{\delta}{\delta J(t_1)} \left(\mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (L + J(t)x(t)) \right\} \right) \\ &= \left(\frac{i}{\hbar} \right) \mathcal{N} \int \mathcal{D}x x(t_1) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (L + J(t)x(t)) \right\}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Finalmente se evalúa la derivada funcional en $J(t) = 0$ y de esta forma se obtienen los valores esperados. Notamos que la derivada funcional hace aparecer un factor i/\hbar . Considerando esto se tiene

$$\begin{aligned} \langle x_f t_f | \hat{x}(t_1) | x_i t_i \rangle &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}x x(t_1) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L \right\} \\ &= (-i\hbar) \frac{\delta}{\delta J(t_1)} \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle_J \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

El resultado anterior puede generalizarse a cualquier número de operadores

$$\langle x_f t_f | T \{ \hat{x}(t_1) \cdots \hat{x}(t_n) \} | x_i t_i \rangle = (-i\hbar)^n \frac{\delta^n}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle_J \Big|_{J=0}. \quad (1.43)$$

Usar la fuente auxiliar es una manera conveniente de obtener funciones $x(t_1) \cdots x(t_n)$ en frente de $\exp(\frac{i}{\hbar}S)$, sólo hay que realizar las derivadas al funcional generador y luego evaluar en $J = 0$. La expresión (1.43) puede interpretarse como la amplitud de probabilidad de que una partícula se mueva de $x_i(t_i)$ a $x_f(t_f)$ y pase por las posiciones intermedias $x(t_1), \cdots, x(t_n)$.

Amplitudes de Transición Vacío-Vacío

El último paso para determinar el funcional generador de las funciones de Green consiste en cambiar los estados inicial y final por estados de vacío de la teoría. Es decir, queremos calcular la amplitud de transición para un sistema que en un tiempo inicial remoto, $t_i \rightarrow -\infty$, se encuentra en $|0\rangle$ y que permanece en el estado de vacío para $t_f \rightarrow \infty$ a pesar del efecto ejercido por la fuente $J(t)$. Es decir estamos interesados en la siguiente amplitud de transición

$$\langle 0|0\rangle = \lim_{\substack{t_i \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow \infty}} \int dx_f dx_i \psi_0^*(x_f) \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle \psi_0(x_i), \quad (1.44)$$

donde $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ es la función de onda del estado base. Sin embargo la amplitud $\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle_J$ contiene el aporte de las transiciones a todas las energías. Una forma de lograr que las energías distintas al estado de vacío tengan aporte nulo es realizando el siguiente

Consideremos la amplitud de transición que aparece dentro de la integral e insertamos la relación de clausura en autoestados de energía

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \sum_n \psi_n(x_f) \psi_n^*(x_i) \exp(-iE_n(t_f - t_i)). \quad (1.45)$$

Una forma de lograr que únicamente aporte el estado de vacío es reemplazando el Hamiltoniano $H \rightarrow (1 - i\epsilon)H$, con ϵ pequeño. De esta forma el argumento de la exponencial transforma de manera que

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \sum_n \psi_n(x_f) \psi_n^*(x_i) \exp(-iE_n(t_f - t_i)) \exp(+\epsilon E_n t_i) \exp(-\epsilon E_n t_f), \quad (1.46)$$

y notamos que al tomar los límites para tiempos muy grandes y muy pequeños únicamente queda el aporte del estado de vacío, siempre que tenga energía cero. Si el estado de vacío no tiene energía cero se realiza una redefinición. Todo este procedimiento hace que no sea relevante las condiciones de borde sobre los puntos extremos del contorno o dicho de otra forma, cualquier condición de borde razonable va a resultar en el estado

Capítulo 1: La Integral de Camino en Mecánica Cuántica

de vacío para los estados inicial y final. Una vez realizados los cálculos se debe hacer $\epsilon \rightarrow 0$ de manera de obtener los resultados correctos de la teoría.

Vale la pena señalar que hay otras formas de evitar el aporte de los estados distintos al estado de vacío. Una de ellas consiste en agregar un término de la forma $+i\epsilon x^2$ al Lagrangiano. Otra forma consiste en realizar una rotación de Wick $t_E = it$, de esta manera se pasa a la formulación de tiempo Euclídeo t_E de la cual se hablará más adelante. Lo importante es que todos estos procedimientos son equivalentes en el sentido de que fijan una manera única de realizar la integral temporal de la amplitud de transición. Al evitar los estados de energía distintos al estado de vacío, se hace también un manejo particular de las singularidades, esto se observa en la siguiente figura.

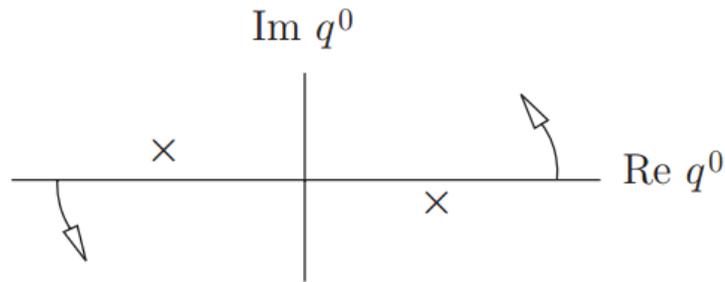


Figura 1.2: Prescripción de Feynman sobre la función de Green.

Es decir, la función de Green puede definirse de muchas formas, dependiendo de cómo se manejen los polos que van a aparecer sobre el contorno temporal. Al realizar alguno de los procedimientos descritos anteriormente, se llega unívocamente a la función de Green (propagador) que se adapta mejor a los procesos estudiados en teoría cuántica de campos y que corresponde a la conocida prescripción de Feynman.

Utilizando los resultados encontrados en esta sección se define el funcional gene-

rador como

$$Z[J] = \langle 0|0 \rangle_J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (L + Jx + i\epsilon x^2) \right\}. \quad (1.47)$$

Este funcional permite calcular valores de expectación de vacío de productos de operadores ordenados en tiempo

$$\begin{aligned} (-i\hbar)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} &= \langle 0 - \infty | T \{ \hat{x}(t_1) \cdots \hat{x}(t_n) \} | 0 + \infty \rangle \\ &= \mathcal{G}(t_1, \cdots, t_n). \end{aligned} \quad (1.48)$$

En el último paso se definió la función de Green de n -puntos $\mathcal{G}(t_1, \cdots, t_n)$. Para el caso de $n = 2$ veremos más adelante que se obtiene el propagador de Feynman para el sistema descrito por el Lagrangiano L .

Finalmente hacemos una mención sobre la constante \mathcal{N} que apareció en el resultado (1.29). Es posible reescribir estos resultados de manera que no aparezca explícitamente

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{N} \int \mathcal{D}x x(t_1) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L \right\}}{\mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L \right\}} &= \frac{\int \mathcal{D}x x(t_1) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L \right\}}{\int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L \right\}} \\ &= (-i\hbar) \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)} \Big|_{J=0} \\ &= \langle x_f t_f | \hat{x}(t_1) | x_i t_i \rangle. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Vemos que la constante \mathcal{N} funciona como normalización para la integral de camino. De esta forma al dividir la ecuación (1.42) por $Z[0]$, hemos encontrado una forma de evitar calcular el valor de \mathcal{N} explícitamente y esto es conveniente debido a que en mecánica cuántica es complicado de realizar y en general imposible en teoría cuántica de campos. El resultado anterior puede generalizarse a cualquier número de operadores, de esta forma la amplitud de transición vacío-vacío se escribe

$$\langle 0 - \infty | T \{ \hat{x}(t_1) \cdots \hat{x}(t_n) \} | 0 + \infty \rangle = (-i\hbar)^n \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0}. \quad (1.50)$$

Otras formas de evadir a la constante \mathcal{N} es simplemente decir $\mathcal{N} \equiv 1$ y se llega a los mismos resultados que si usamos la convención desarrollada en (1.49).

1.5. Funcional Generador de las Funciones de Green Conectadas

En mecánica cuántica es de interés calcular las desviaciones que ocurren respecto a los valores medios, las llamadas fluctuaciones. Es posible obtener las fluctuaciones definiendo un nuevo funcional partiendo del funcional generador de las funciones de Green $Z[J]$, éste es

$$Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} \quad \text{o también} \quad W[J] = -i\hbar \ln Z[J]. \quad (1.51)$$

Este nuevo funcional $W[J]$ es respecto a la acción $S[x]$ como la energía libre de Helmholtz F es a la energía libre U en la mecánica estadística. De hecho más adelante en este trabajo se verá una forma de definir un tipo de acción efectiva con la ayuda de $W[J]$. Este nuevo funcional es útil porque las teorías libres o cuadráticas producen funcionales generadores de la forma $Z[J] \propto e^{(\text{algo})}$ y es posible extraer de allí la forma que tiene $W[J]$. Interesa además que esto sea así para las teorías libres o cuadráticas porque esta es la base del tratamiento perturbativo de las teorías con interacción en el régimen de acoplamiento débil.

1.5.1. Funciones de Green Conectadas

Al operar sobre este nuevo funcional aparecen las funciones de de Green, pero no exactamente las que salen al utilizar el funcional generador. Veamos varios ejemplos.

Derivando una vez

Procedemos a tomar la derivada funcional de $W[J]$ respecto de $J(t)$

$$\left. \frac{\delta W[J(t)]}{\delta J(t_1)} \right|_{J=0} = (-i\hbar) \frac{1}{Z[0]} \left. \frac{\delta Z[J(t)]}{\delta J(t_1)} \right|_{J=0} = \langle \hat{x}(t_1) \rangle. \quad (1.52)$$

Capítulo 1: La Integral de Camino en Mecánica Cuántica

Comprobamos que se recupera la expresión (1.50), es decir se obtiene los valores medios de los grados de libertad $x(t)$. Sin embargo el funcional no aporta información nueva en este caso.

Derivando dos veces

Ahora se deriva dos veces el funcional $W[J]$, se evalúa en $J = 0$ y lo multiplicamos por $-i\hbar$ para obtener

$$\begin{aligned}
 (-i\hbar) \frac{\delta^2 W[J(t)]}{\delta J(t_1) \delta J(t_2)} \Big|_{J=0} &= (-i\hbar)^2 \left[\frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2} \Big|_{J=0} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{1}{Z[0]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J_1} \Big|_{J=0} \right) \left(\frac{1}{Z[0]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J_2} \Big|_{J=0} \right) \right] \\
 &= \langle T(\hat{x}_1 \hat{x}_2) \rangle - \langle \hat{x}_1 \rangle \langle \hat{x}_2 \rangle \\
 &= \langle T[(\hat{x}_1 - \langle \hat{x}_1 \rangle)(\hat{x}_2 - \langle \hat{x}_2 \rangle)] \rangle. \tag{1.53}
 \end{aligned}$$

Hemos simplificado de manera significativa la notación para poner de manifiesto la estructura del resultado. Las cantidades $\langle \dots \rangle$ indican amplitudes de transición y se ha omitido la mención al estado inicial y final. Las dependencias temporales se han indicado con un subíndice, por ejemplo $J(t_1) = J_1$ o $\hat{x}(t_1) = \hat{x}_1$. Notamos por el resultado (1.53) que $W[J]$ sí aporta información distinta a la que aporta $Z[J]$. El funcional $W[J]$ produce funciones de Green de n -puntos a las cuales se les sustrae el aporte de funciones de Green de m -puntos con $m < n$; a estas funciones de Green se les conoce como funciones de Green conectadas y se dicen conectadas porque producen los diagramas de Feynman conectados.

Otro hecho importante relacionado con el resultado anterior es que al observar la última línea notamos que la información de $W[J]$ tiene que ver con las correlaciones (en el sentido del análisis estadístico multivariable) entre los grados de libertad. De esta manera se generaliza este resultado como sigue

$$(-i\hbar)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J_1 \dots \delta J_n} \Big|_{J=0} = \langle T[(\hat{x}_1 - \langle \hat{x}_1 \rangle) \dots (\hat{x}_n - \langle \hat{x}_n \rangle)] \rangle. \tag{1.54}$$

Capítulo 1: La Integral de Camino en Mecánica Cuántica

Desarrollando el producto del lado derecho es posible reescribir todos los términos en función de $Z[J]$.

Encontramos que al usar la integral de caminos de Feynman es posible expresar las amplitudes de transición como una suma sobre trayectorias pesadas por una fase que viene dada en términos de la acción clásica. Añadiendo una fuente auxiliar $J(t)$ y un término de amortiguamiento al Lagrangiano tenemos un funcional con el cual generamos todas las funciones de Green de n -puntos que a su vez corresponden a los valores de expectación de vacío de productos de operadores ordenados en tiempo. Sin embargo vimos que es posible definir un nuevo funcional que tiene la información de las correlaciones entre los grados de libertad y que en el régimen perturbativo nos va a servir para encontrar los diagramas de Feynman conectados que son los que en última instancia producen los valores observables.

Capítulo 2

El Oscilador Armónico Usando la Integral de Caminos

En este capítulo se resolverá el ejemplo clásico para la integral de caminos que es el oscilador armónico. Además extenderemos el formalismo tratado para incluir variables que anticonmutan (fermiónicas) y de esta manera resolveremos el oscilador armónico tanto Bosónico como Fermiónico. Para esto seguiremos el desarrollo realizado en [19–22].

2.1. Oscilador Armónico - Formalismo Canónico

El oscilador armónico unidimensional puede interpretarse como una teoría de campos en $0 + 1$ dimensiones. Si partimos del Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2, \quad (2.1)$$

donde m es la masa del oscilador y ω su frecuencia, es posible reescalar este Lagrangiano $\phi(t) = \sqrt{m}x(t)$ de manera que trabajaremos con

$$L = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\omega^2\phi^2. \quad (2.2)$$

Capítulo 2: El Oscilador Armónico Usando la Integral de Caminos

Esta redefinición hace que el término cinético tenga un coeficiente adimensional, lo cual es estándar en teoría de campos.

Teniendo el Lagrangiano calculamos el Hamiltoniano correspondiente a esta teoría. Para ello se determina primero el momento canónico conjugado $\pi(t) = \partial L / \partial \dot{\phi} = \dot{\phi}(t)$. De esta manera el Hamiltoniano clásico es

$$H(\phi, \pi) = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\omega^2\phi^2. \quad (2.3)$$

Como se mencionó en el capítulo anterior (1.1), el proceso canónico de cuantización involucra promover las variables canónicas conjugadas a operadores y reinterpretar su corchete de Poisson como un conmutador; es decir $[\hat{\phi}, \hat{\pi}] = i\hbar$.

Sin embargo el oscilador armónico se resuelve de forma más eficiente introduciendo operadores de creación y destrucción, \hat{a}^\dagger y \hat{a} respectivamente. La relación entre las variables canónicas y los operadores de creación y destrucción es

$$\hat{\phi} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad , \quad \hat{\pi} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) . \quad (2.4)$$

Estos nuevos operadores satisfacen la relación de conmutación $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Usando estos operadores y su relación de conmutación se obtiene el siguiente Hamiltoniano

$$\hat{H}_B = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) . \quad (2.5)$$

Este Hamiltoniano, así como el (2.3), es Hermítico. El operador $\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{N}_B$ se interpreta como un operador número y cuenta el número de cuantos (con energía ω) que se encuentran en el estado $|n\rangle$. La evolución de estos operadores viene dada por la ecuación de Heisenberg

$$i \frac{d\hat{a}}{dt} = [\hat{a}, \hat{H}_B] = \omega \hat{a} , \quad (2.6)$$

cuya solución es

$$\hat{a}(t) = \hat{a}_0 e^{-i\omega t} . \quad (2.7)$$

Capítulo 2: El Oscilador Armónico Usando la Integral de Caminos

Sustituyendo en (2.4) encontramos una representación explícita de las variables canónicas en términos de los operadores de creación y destrucción

$$\hat{\phi}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left(\hat{a}_0^\dagger e^{-i\omega t} + \hat{a}_0 e^{i\omega t} \right) , \quad \hat{\pi}(t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \left(\hat{a}_0^\dagger e^{-i\omega t} - \hat{a}_0 e^{i\omega t} \right) . \quad (2.8)$$

Notamos que esta expresión es totalmente análoga a una expansión en modos de Fourier. En este caso únicamente hay un modo sin embargo esto puede generalizarse a campos con muchos modos.

2.2. Oscilador Armónico - à la Feynman

Ahora se resolverá el problema del oscilador armónico utilizando integrales de camino. Consideramos el Lagrangiano dado en (2.2) y se escribe la acción

$$S[\phi, J] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 \phi^2 + J\phi + \frac{i}{2} \epsilon \phi^2 \right) . \quad (2.9)$$

Esta es la acción extendida que va en el argumento de la exponencial del funcional generador. Escribimos el término de amortiguamiento con un factor de 1/2 para que se adapte a la forma del Lagrangiano de la teoría; esto no afecta los resultados porque al final se debe hacer $\epsilon \rightarrow 0$, como ya hemos dicho en el capítulo anterior. Además hemos evitado escribir la dependencia temporal explícita; haremos esto siempre que no haya posibilidad de equivoco. Ahora, considerando la acción (2.9) podemos integrar por partes el primer término y reagrupar con los otros términos cuadráticos para obtener

$$S[\phi, J] = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\frac{1}{2} \phi \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 - i\epsilon \right) \phi - J\phi \right] = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt (\phi D\phi - J\phi) . \quad (2.10)$$

Como los términos de borde se anulan al hacer variaciones de la acción, es posible despreciarlos. Resaltamos que la acción queda expresada como una forma cuadrática en ϕ . Para poder realizar las operaciones posteriores es conveniente pasar al espacio de Fourier. La acción en el espacio de Fourier se puede escribir como

$$S[\phi, J] = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} [\phi(\omega)(\omega^2 - \omega_0^2 + i\epsilon)\phi(-\omega) + J(\omega)\phi(-\omega) + J(-\omega)\phi(\omega)] , \quad (2.11)$$

Capítulo 2: El Oscilador Armónico Usando la Integral de Caminos

donde hemos usado las transformaciones

$$\phi(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \phi(\omega), \quad J(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} J(\omega). \quad (2.12)$$

Notamos además que en (2.11) se escribió convenientemente el acople a la fuente de manera simétrica en ω .

Una vez escrita la acción, el siguiente paso es escribir el funcional generador. Utilizando la acción encontrada se tiene que el funcional generador es

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \int \frac{d\omega}{2\pi} [\phi(\omega)(\omega^2 - \omega_0^2 + i\epsilon)\phi(-\omega) + J(\omega)\phi(-\omega) + J(-\omega)\phi(\omega)] \right\}. \quad (2.13)$$

Esta integral de caminos es cuadrática en ϕ y por lo tanto no es más que una integral Gaussiana. Utilizando el cambio

$$\tilde{\phi}(\omega) = \phi(\omega) + J(\omega) \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\epsilon} J(-\omega), \quad (2.14)$$

se obtiene el siguiente resultado

$$Z[J] = \mathcal{N} \exp \left(-\frac{i}{2\hbar} \int \frac{d\omega}{2\pi} J(\omega) \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\epsilon} J(-\omega) \right). \quad (2.15)$$

y al invertir la transformada de Fourier se tiene

$$Z[J] = \mathcal{N} \exp \left(-\frac{i}{2\hbar} \int dt dt' J(t) G_F(t-t') J(t') \right). \quad (2.16)$$

Es importante ver que en esta expresión ya no hay integral de caminos y además se ha escrito el funcional generador en la forma (1.51) de manera que es posible leer directamente de (2.16) el funcional generador de las funciones de Green conectadas $W[J]$. Esto es

$$W[J] = -\frac{1}{2} \int dt dt' J(t) G_F(t-t') J(t'). \quad (2.17)$$

con $G_F(t-t')$ el propagador de Feynman que viene dado por la expresión

$$G_F(t-t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\epsilon}, \quad G_F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\epsilon}. \quad (2.18)$$

Capítulo 2: El Oscilador Armónico Usando la Integral de Caminos

En el propagador de Feynman vemos que si $\epsilon = 0$, hay unas singularidades que caen sobre el eje real (que es el contorno de integración). Precisamente la prescripción de Feynman es la manera correcta de realizar esta integración y que es consistente con el cálculo de las funciones de Green de n -puntos como ya se mencionó en el capítulo anterior. Para verificar que $G_F(t - t')$ es la función de Green, basta con comprobar la identidad $-\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 - i\epsilon\right) G_F(t - t') = \delta(t - t')$. Mencionamos además que al realizar el cambio (2.14) la medida no cambia $\mathcal{D}\tilde{\phi} = \mathcal{D}\phi$ debido a que es simplemente una traslación.

2.3. Oscilador Armónico Fermiónico

Queremos tratar brevemente, y por hacer más completo este capítulo, algunos aspectos del oscilador armónico cuando el grado de libertad descrito es una variable de Grassmann. Si observamos el Hamiltoniano para el oscilador Bosónico (2.5), es posible proponer por analogía el siguiente Hamiltoniano para el oscilador Fermiónico (haciendo $\hbar = 1$)

$$\hat{H}_F = \frac{\omega_0}{2} (\hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{b} \hat{b}^\dagger), \quad (2.19)$$

donde \hat{b}^\dagger y \hat{b} son, respectivamente, operadores de creación y destrucción Fermiónicos. Esto quiere decir que satisfacen relaciones de anticonmutación

$$\{\hat{b}^\dagger, \hat{b}\} = \{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1. \quad (2.20)$$

Usando esta relación, el Hamiltoniano (2.19) se reescribe como

$$\hat{H}_F = \omega_0 \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{1}{2} \right). \quad (2.21)$$

El término $\hat{b}^\dagger \hat{b} = \hat{N}_F$ es el operador número para Fermiones y a diferencia del caso Bosónico sólo tiene autovalores 0 y 1.

2.3.1. Lagrangiano del Oscilador Fermiónico

A diferencia del caso Bosónico, el oscilador Fermiónico no tiene análogo clásico. El uso de variables de Grassmann hace inevitable un tratamiento tipo operador de estas cantidades como veremos a continuación.

Se propone el siguiente Lagrangiano ($\hbar = 1$) para el oscilador Fermiónico

$$L = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \psi \right) - \frac{\omega_0}{2} [\bar{\psi}, \psi], \quad (2.22)$$

con ψ , $\bar{\psi}$ variables de Grassmann independientes. Este Lagrangiano está en correspondencia con el Hamiltoniano (2.19), como veremos a continuación. Utilizando la identidad $\frac{d}{dt}(\bar{\psi}\psi) = \dot{\bar{\psi}}\psi + \bar{\psi}\dot{\psi}$, es posible reescribir el Lagrangiano (2.22) en la forma

$$L = i\bar{\psi}\dot{\psi} - \frac{\omega_0}{2} [\bar{\psi}, \psi], \quad (2.23)$$

en donde se desprecia la derivada total porque no aporta a la dinámica. Una vez que se tiene el Lagrangiano se calcula el momento conjugado de cada variable para luego hacer la transformación de Legendre y obtener el Hamiltoniano. Realizando explícitamente el cálculo para π_ψ se tiene que

$$\pi_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \left[\frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \psi \right) - \frac{\omega_0}{2} [\bar{\psi}, \psi] \right] = \frac{i}{2} \left(-\bar{\psi} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\psi}} \right) = -\frac{i}{2} \bar{\psi}. \quad (2.24)$$

Para realizar el cálculo se utilizó la derivada Fermiónica por la derecha. Además el signo menos aparece debido al carácter Fermiónico de la derivada (ver apéndice A). Siguiendo un procedimiento similar se calcula el otro momento conjugado y se obtiene $\pi_{\bar{\psi}} = -\frac{i}{2} \psi$. Usando estas relaciones calculamos el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= \dot{\psi} \pi_\psi + \dot{\bar{\psi}} \pi_{\bar{\psi}} - L = \dot{\psi} \left(-\frac{i}{2} \bar{\psi} \right) + \dot{\bar{\psi}} \left(-\frac{i}{2} \psi \right) - \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}} \psi \right) + \frac{\omega_0}{2} [\bar{\psi}, \psi] \\ &= \frac{\omega_0}{2} [\bar{\psi}, \psi], \end{aligned} \quad (2.25)$$

y haciendo la identificación $\psi \equiv \hat{b}$ y $\bar{\psi} \equiv \hat{b}^\dagger$ se recupera el Hamiltoniano (2.19) como ya se había indicado. Vemos entonces que el Lagrangiano propuesto funciona. Por otra parte notamos el carácter de operadores que tienen las variables de Grassmann

Capítulo 2: El Oscilador Armónico Usando la Integral de Caminos

aun cuando las estamos tratando clásicamente (clásico en el sentido de que no son operadores).

Hemos encontrado una analogía entre los operadores Fermiónicos de creación y destrucción y las variables de Grassmann que definen al Lagrangiano para el oscilador armónico Fermiónico. Siendo consistentes con esto se debe concluir que

$$\begin{aligned} \psi &\equiv \hat{b} & \longrightarrow & \psi^\dagger \equiv \hat{b}^\dagger = \bar{\psi} \\ \bar{\psi} &\equiv \hat{b}^\dagger & \longrightarrow & \bar{\psi}^\dagger \equiv (\hat{b}^\dagger)^\dagger = \psi. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por otra parte es deseable que el operador número Fermiónico sea Hermítico al igual que lo es el operador número Bosónico, para esto debe cumplirse $\hat{N}_F^\dagger = \hat{N}_F$ y esto obliga a que se satisfaga $\overline{\bar{\psi}\psi} = \bar{\psi}\psi$. Esto inspira una operación llamada conjugación de Grassmann donde, dadas dos variables Fermiónicas η y χ , se cumple

$$\overline{\eta\chi} = \bar{\eta}\bar{\chi}, \quad (2.27)$$

por lo tanto vemos que las variables ψ , $\bar{\psi}$ son conjugadas una de la otra (conjugadas a la manera de Grassmann). Usando estas definiciones es fácil demostrar que el Lagrangiano es real en el sentido $\bar{L} = L$.

Una vez que se tiene el Lagrangiano se puede construir el funcional generador para el oscilador armónico Fermiónico

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) - \frac{\omega_0}{2} [\bar{\psi}, \psi] + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right] \right\}, \quad (2.28)$$

y tomando derivadas funcionales de esta expresión se obtienen las funciones de Green. La derivada funcional que usaremos es la derivada funcional de Grassmann izquierda

$$\frac{\delta F[\psi(t)]}{\delta\psi(t')} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} \left(F[\psi(t) + \alpha\delta(t-t')] - F[\psi(t)] \right), \quad (2.29)$$

donde α es una variable de Grassmann. La posición de α define la dirección en la cual actúa la derivada. Dado el carácter anticonmutativo se puede pensar en α^{-1} simplemente como $\frac{\partial}{\partial\alpha}$. Además notamos que si el funcional es polinómico, el límite es redundante debido a que $\alpha^2 = 0$ y la mayor potencia de α en la expansión del funcional es lineal.

2.3.2. Propagador de Feynman

El Lagrangiano (2.22) posee una estructura matricial subyacente que pondremos de manifiesto para calcular el propagador de Feynman de la teoría. Consideremos el arreglo

$$\Psi \equiv \begin{bmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{bmatrix}, \quad \Psi^\dagger = \begin{bmatrix} \psi^\dagger & \bar{\psi}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\psi} & \psi \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Definimos también la operación $\bar{\Psi}$

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \sigma_3 = \begin{bmatrix} \bar{\psi} & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\psi} & -\psi \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

donde σ_3 es la matriz de Pauli diagonal. Con estos nuevos objetos se verifica que

$$\bar{\Psi}\Psi = \begin{bmatrix} \bar{\psi} & -\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{bmatrix} = \bar{\psi}\psi - \psi\bar{\psi}, \quad (2.32)$$

$$i\bar{\Psi}\sigma_3 \frac{d}{dt}\Psi = i \begin{bmatrix} \bar{\psi} & -\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\bar{\psi}} \end{bmatrix} = i(\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi), \quad (2.33)$$

y por lo tanto es posible reescribir el Lagrangiano (2.22)

$$L = \frac{i}{2} (\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) - \frac{\omega_0}{2} [\bar{\psi}, \psi] = \frac{i}{2} \bar{\Psi}\sigma_3 \frac{d}{dt}\Psi - \frac{\omega_0}{2} \bar{\Psi}\Psi. \quad (2.34)$$

Es interesante ver como este Lagrangeano tiene una estructura análoga al Lagrangeano de Dirac. Si consideramos ahora las fuentes podemos ver que

$$\bar{\Psi}\Theta = \begin{bmatrix} \bar{\psi} & -\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \bar{\eta} \end{bmatrix} = \bar{\psi}\eta - \psi\bar{\eta} = \bar{\eta}\psi - \eta\bar{\psi} = \begin{bmatrix} \bar{\eta} & -\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{bmatrix} = \bar{\Theta}\Psi. \quad (2.35)$$

Se ha utilizado el carácter anticonmutativo de las variables de Grassmann. Dada esta relación podemos aprovechar su simetría y escribir el término de acople a las fuentes como $\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta = \frac{1}{2}(\bar{\Psi}\Theta + \bar{\Theta}\Psi)$.

Usando estos resultados se reescribe el funcional generador dado en (2.28)

$$\begin{aligned} Z[\Theta, \bar{\Theta}] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\bar{\Psi} \left(i\sigma_3 \frac{d}{dt}\Psi - \omega_0 \mathbf{1} \right) \Psi + \bar{\Psi}\Theta + \bar{\Theta}\Psi \right] \right\} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\bar{\Psi} D \Psi + \bar{\Psi}\Theta + \bar{\Theta}\Psi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde resaltamos el carácter matricial del operador dentro de la exponencial

$$D \equiv i\sigma_3 \frac{d}{dt} \Psi - \omega_0 \mathbb{1} = \begin{bmatrix} i\left(\frac{d}{dt}\right) - \omega_0 & 0 \\ 0 & -i\left(\frac{d}{dt}\right) - \omega_0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

La ventaja de tener escrito el funcional generador de esta forma es que se tiene una forma cuadrática y la integral vuelve a ser Gaussiana, aunque en este caso Gaussiana tipo Grassmann. Si realizamos el cambio de variables $\Psi = \chi - D^{-1}\Theta$, cuyo Jacobiano es 1, es posible realizar la integración obteniendo

$$Z[\Theta, \bar{\Theta}] = \mathcal{N} \exp \left(-\frac{i}{2\hbar} \int dt dt' \bar{\Theta}(t) G_F(t-t') \Theta(t') \right), \quad (2.38)$$

con $G_F(t-t')$ la función de Green de Feynman (o propagador) que satisface la relación formal $D G_F = 1$. Usando la prescripción de Feynman se encuentra que

$$G_F(t-t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\sigma_3\omega - \omega_0\mathbb{1} + i\epsilon\mathbb{1}} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\sigma_3\omega - \omega_0\mathbb{1}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\epsilon} e^{-i\omega(t-t')}, \quad (2.39)$$

donde resaltamos el hecho de que al final debe hacerse $\epsilon \rightarrow 0$. Para llegar a esta relación se utilizó la identidad $(\sigma_3\omega + \omega_0\mathbb{1})(\sigma_3\omega - \omega_0\mathbb{1}) = (\omega^2 - \omega_0^2)\mathbb{1}$.

Una vez que se tiene el funcional generador en principio se podrá calcular cualquier función de Green de n -puntos que se quiera tomando la derivada funcional apropiada. Más aun, dada la expresión (2.38) es posible escribir el funcional generador de las funciones de Green conectadas de la misma manera que se realizó para el caso Bosónico. Esto es

$$W[J] = -\frac{1}{2} \int dt dt' \bar{\Theta}(t) G_F(t-t') \Theta(t'). \quad (2.40)$$

Teniendo estas expresiones a la mano es posible calcular cualquier amplitud de transición en el régimen perturbativo de la teoría.

2.4. Mecánica Cuántica Supersimétrica

Las teorías que involucran supersimetría intercambian grados de libertad Bosónicos y Fermiónicos. Es posible construir un modelo supersimétrico sencillo usando como

bloques elementales los osciladores armónicos Bosónicos y Fermiónicos estudiados en las secciones anteriores. Sin embargo, en esta sección no se pretende hacer un estudio exhaustivo del tema, sino más bien brindar un ejemplo en el que pueda aplicarse el tema principal que nos concierne que es la integral de caminos.

2.4.1. Nociones de Supersimetría en Mecánica Cuántica

Empecemos construyendo un Hamiltoniano para la teoría supersimétrica. Utilizando las expresiones (2.5) y (2.21) se propone el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{H}_B + \hat{H}_F = \omega_0 (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}) = \omega_0 (\hat{N}_B + \hat{N}_F). \quad (2.41)$$

Utilizamos los autoestados de \hat{H}_B y \hat{H}_F , $|n_B\rangle$ y $|n_F\rangle$ respectivamente, para generar los autoestados de \hat{H} que se denotarán $|n_B\rangle \otimes |n_F\rangle \equiv |n_B, n_F\rangle$. Además los autovalores para los estados Bosónicos son $n_B = 0, 1, 2, \dots$, y para los estados Fermiónicos $n_F = 0, 1$. Con estas definiciones se comprueba la acción de \hat{H} sobre los estados $|n_B, n_F\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{H} |n_B, n_F\rangle &= \omega_0 (\hat{N}_B + \hat{N}_F) |n_B\rangle \otimes |n_F\rangle \\ &= \omega_0 (\hat{N}_B |n_B\rangle \otimes |n_F\rangle + |n_B\rangle \otimes \hat{N}_F |n_F\rangle) \\ &= \omega_0 (n_B + n_F) |n_B, n_F\rangle \\ &= E_{n_B, n_F} |n_B, n_F\rangle. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Es claro que el estado base viene dado por los autovalores $n_B = n_F = 0$ y además es único. Sin embargo notamos que cualquier otro estado esta doblemente degenerado. Esto se ve fácilmente considerando los autovalores de los estados $|n_B, 1\rangle$ y $|n_B + 1, 0\rangle$, específicamente $E_{n_B, 1} = E_{n_B + 1, 0} = \omega_0 (n_B + 1)$.

Consideremos ahora los siguientes operadores que mezclan tanto operadores Bosónicos como Fermiónicos

$$\hat{Q} = \hat{a}^\dagger \hat{b}, \quad \hat{Q}^\dagger = \hat{b}^\dagger \hat{a}. \quad (2.43)$$

Capítulo 2: El Oscilador Armónico Usando la Integral de Caminos

Estos operadores conmutan con el Hamiltoniano (2.41) y por lo tanto son una cantidad (carga) conservada de la teoría. Por otra parte, el Hamiltoniano mismo puede escribirse en términos de estas cantidades. Para verlo se calcula el siguiente anticonmutador

$$\begin{aligned}
 \{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} &= \hat{Q}\hat{Q}^\dagger + \hat{Q}^\dagger\hat{Q} \\
 &= \hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{b} \\
 &= \hat{a}^\dagger\hat{a}(1 - \hat{b}^\dagger\hat{b}) + \hat{b}^\dagger\hat{b}(1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \\
 &= \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b} \\
 &= \frac{1}{\omega_0}\hat{H}, \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

donde se utilizó que los operadores Bosónicos y Fermiónicos conmutan entre sí, por ejemplo $\hat{a}\hat{b} = \hat{b}\hat{a}$. Si unimos el hecho de que los operadores \hat{Q} y \hat{Q}^\dagger conmutan con el Hamiltoniano \hat{H} , se concluye que estas tres cantidades forman un álgebra de la forma

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0, \quad [\hat{Q}^\dagger, \hat{H}] = 0, \quad \{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} = \frac{1}{\omega_0}\hat{H}. \tag{2.45}$$

Una consecuencia inmediata del álgebra supersimétrica es que si el estado de vacío es invariante, entonces el valor de expectación de vacío del Hamiltoniano es nulo. Para ver que esto es así, primero notamos que $\hat{a}|0,0\rangle = \hat{a}|0\rangle \otimes |0\rangle = 0$ y de igual manera se tiene $\hat{b}|0,0\rangle = |0\rangle \otimes \hat{b}|0\rangle = 0$. Por lo tanto los operadores \hat{Q} y \hat{Q}^\dagger satisfacen $\hat{Q}|0,0\rangle = \hat{Q}^\dagger|0,0\rangle = 0$. Podemos ahora demostrar que el valor de expectación de vacío del Hamiltoniano es nulo

$$\begin{aligned}
 \langle 0,0|\hat{H}|0,0\rangle &= \omega_0\langle 0,0|\hat{Q}\hat{Q}^\dagger + \hat{Q}^\dagger\hat{Q}|0,0\rangle \\
 &= \langle 0,0|\hat{Q}\hat{Q}^\dagger|0,0\rangle + \langle 0,0|\hat{Q}^\dagger\hat{Q}|0,0\rangle \\
 &= 0. \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

Esta relación es cierta siempre que se satisfaga que $\hat{Q}|0,0\rangle = \hat{Q}^\dagger|0,0\rangle = 0$. Es importante ver que cada término en la expresión anterior es de la forma $\langle 0,0|\hat{Q}^\dagger\hat{Q}|0,0\rangle = |\hat{Q}|0,0\rangle|^2 \geq 0$, es decir cada término es semidefinido positivo de manera que el Hamiltoniano supersimétrico (2.41) es también semidefinido positivo. Esta es una característica típica de las teorías que poseen supersimetría.

Capítulo 2: El Oscilador Armónico Usando la Integral de Caminos

A continuación queremos estudiar la acción de los operadores \hat{Q} y \hat{Q}^\dagger sobre los estados $|n_B, n_F\rangle$. Para esto consideramos un estado general

$$|n_B, n_F\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^{n_B}}{\sqrt{n_B!}} (\hat{b}^\dagger)^{n_F} |0, 0\rangle, \quad (2.47)$$

donde se ha elegido una normalización apropiada según el carácter Bosónico y Fermiónico del operador de creación. Además recordamos que $n_B = 0, 1, 2, \dots$ y $n_F = 0, 1$. De esta manera usando las definiciones (2.43) encontramos que

$$\hat{Q} |n_B, n_F\rangle = \begin{cases} \sqrt{n_B + 1} |n_B + 1, n_F - 1\rangle, & \text{si } n_F \neq 0, \\ 0, & \text{si } n_F = 0, \end{cases} \quad (2.48)$$

$$\hat{Q}^\dagger |n_B, n_F\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n_B}} |n_B - 1, n_F + 1\rangle, & \text{si } n_B \neq 0 \text{ o } n_F \neq 1, \\ 0, & \text{si } n_B = 0 \text{ o } n_F = 1. \end{cases} \quad (2.49)$$

De esta manera vemos que el efecto de los operadores \hat{Q} y \hat{Q}^\dagger es el de intercambiar grados de libertad Bosónicos y Fermiónicos.

2.4.2. Mecánica Cuántica Supersimétrica y la Integral de Caminos

En esta sección se estudiará una teoría supersimétrica un poco más general. Se considera un Lagrangiano de la forma

$$L = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} f^2(\phi) + i\bar{\psi}\dot{\psi} - f'(\phi)\bar{\psi}\psi. \quad (2.50)$$

Este Lagrangiano consta de dos grados de libertad, ϕ que es Bosónico y ψ que es Fermiónico; L es un Lagrangiano clásico en el sentido de que no contiene operadores. Además la cantidad $f(\phi)$ es una función del grado de libertad Bosónico. Si se hace $f(\phi) = \omega_0\phi$ tenemos el oscilador armónico supersimétrico

$$L = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 \phi^2 + i\bar{\psi}\dot{\psi} - \omega_0 \bar{\psi}\psi, \quad (2.51)$$

donde vemos que esta expresión contiene los Lagrangianos vistos en (2.2) y (2.23).

Capítulo 2: El Oscilador Armónico Usando la Integral de Caminos

Teniendo el Lagrangiano de la teoría (2.50) se escribe el funcional generador Z (con $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int dt L\right) \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\left[i \int dt \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}f^2(\phi)\right)\right] \times \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp\left[i \int dt (i\bar{\psi}\dot{\psi} - f'(\phi)\bar{\psi}\psi)\right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

La parte Fermiónica puede escribirse como $i\bar{\psi}\dot{\psi} - f'(\phi)\bar{\psi}\psi = \bar{\psi} \left(i\frac{d}{dt} - f'(\phi)\right) \psi$; es decir, es cuadrática en ψ de manera que podemos integrar

$$Z = \tilde{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi \det\left(i\frac{d}{dt} - f'(\phi)\right) \exp\left[i \int dt \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}f^2(\phi)\right)\right]. \quad (2.53)$$

El determinante que se obtiene como resultado de la integración en la variable Fermiónica contiene a la variable ϕ . En principio la integral en la variable Bosónica no es cuadrática. Sin embargo existe una transformación que simplifica el problema como veremos a continuación.

Mapa de Nicolai

Consideremos la siguiente redefinición de la variable Bosónica $\rho = i\dot{\phi} - f(x)$ al diferenciar vemos que el Jacobiano de esta transformación es

$$\mathcal{D}\rho = i \left(\frac{d}{dt} - f'(\phi)\right) \mathcal{D}\phi \quad \longrightarrow \quad J = \left[\det\left(i\frac{d}{dt} - f'(\phi)\right)\right]^{-1}, \quad (2.54)$$

es decir el Jacobiano es el inverso del determinante que está en la ecuación (2.53).

En lo que sigue se asumirá que $f(\phi)$ es un monomio de potencia impar $f(\phi) \sim \phi^{2n+1}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$. De esta forma consideramos la siguiente integral

$$\begin{aligned} \int dt \rho^2 &= \int dt (i\dot{\phi} - f(x))^2 \\ &= \int dt \left[-\dot{\phi}^2 + f^2(\phi)\right] - 2ig \int d\phi \phi^{2n+1}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Capítulo 2: El Oscilador Armónico Usando la Integral de Caminos

Al realizar la última integral vemos que se anula debido a la potencia impar del integrando y por lo tanto el resultado es

$$\int dt [\dot{\phi}^2 - f^2(\phi)] = - \int dt \rho^2. \quad (2.56)$$

Finalmente sustituyendo (2.54 y 2.55) en (2.53) se obtiene

$$Z = \tilde{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\rho \exp \left[-\frac{i}{2} \int dt \rho^2 \right]. \quad (2.57)$$

Hemos encontrado el hecho notable de que una teoría supersimétrica puede ser redefinida de manera que tenga la forma de una teoría Bosónica libre. El mapa de Nicolai puede extenderse a teorías de campos en más dimensiones.

En este capítulo estudiamos el oscilador armónico, que es el ejemplo clásico para la integral de caminos en mecánica cuántica y vimos cómo se aplica el formalismo desarrollado en el capítulo 1. Además se revisó un ejemplo menos trivial como lo es el oscilador armónico Fermiónico y posteriormente una teoría supersimétrica que mezcla los grados de libertad Bosónico y Fermiónico. En el capítulo siguiente se extenderá el formalismo de la integral de caminos a las teorías de campos, haciendo uso de los conceptos aquí desarrollados.

Capítulo 3

La Integral de Caminos en Teorías de Campos. Caso $T = 0$.

Hasta ahora se ha discutido la integral de caminos en teorías de un grado de libertad, teorías en 0+1 dimensiones. La extensión a varios grados de libertad es relativamente sencilla al menos formalmente. Vamos a hacer uso extenso de las analogías con el caso de 0+1 dimensiones (mecánica cuántica) para así ir directo a los puntos importantes en nuestra discusión.

La extensión del formalismo al caso continuo puede realizarse como un caso límite al caso de varios grados de libertad [17, 18, 23]. De esta forma podemos denotar $\phi(x)$ un grado de libertad continuo, es decir un campo, donde x denota las coordenadas espacio-temporales en $d = D + 1$ dimensiones; tradicionalmente se considera 3 + 1 dimensiones aunque muchos modelos con otra dimensionalidad son muy útiles. El funcional generador de las funciones de Green es este caso

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^d x (\mathcal{L} + J\phi) \right\}, \quad (3.1)$$

donde \mathcal{L} denota una densidad Lagrangiana que contiene la teoría física a ser estudiada y J es una fuente que se acopla al campo ϕ de manera auxiliar y así generar las funciones de Green mediante un proceso similar al realizado en el capítulo 1 y que acá revisaremos para el caso de campos.

Un aspecto importante a mencionar es que la medida de integración $\mathcal{D}\phi$ tiene un comportamiento divergente en el límite continuo. Puede decirse entonces que en un sentido matemático estricto, la integral de caminos no existe para campos. Sin embargo si \mathcal{N} absorbe la parte divergente, pueden obtenerse las funciones de Green debido a que en este cálculo se cancelan estos términos divergentes. Si bien este hecho pareciera un argumento negativo en contra de la formulación a la Feynman de la teoría cuántica de campos, puede verse de la extensa literatura y del enorme uso de esta herramienta en la investigación avanzada que su aprendizaje forma parte de las herramientas básicas de la física teórica.

3.1. Campo Escalar Real - Teoría Libre ($\lambda = 0$)

La mejor manera de entrar rápidamente al uso de las integrales de camino en la teoría cuántica de campos, es mediante un ejemplo. De esta forma podremos hacer uso de los conceptos y herramientas desarrollados en los capítulos anteriores.

El campo escalar real describe a una partícula de espín cero. Empezamos el estudio del campo escalar real escribiendo su Lagrangiano

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (3.2)$$

Dado que el potencial $V = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ es un polinomio de orden $n > 2$, se dice que este Lagrangiano corresponde a una teoría con interacción. Consideramos que $\lambda > 0$ para garantizar que la teoría esté acotada por debajo y sea estable. Por otra parte m es el valor de la masa asociada a las partículas descritas por este campo en el caso de la teoría libre ($\lambda = 0$); sabemos que la presencia de interacciones modifica el valor de la masa de las partículas descritas por el campo. El término cuártico nos dice que la teoría posee autointeracciones.

A continuación se calcula el funcional generador $Z_0[J]$ para la teoría libre, $\lambda = 0$.

Sustituyendo (3.2) en la expresión (3.1) se obtiene

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi \right) \right\} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi \left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \phi - J\phi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En la segunda línea se realizó una integración por partes y se despreció el término de borde asumiendo, como es usual, que los campos se anulan en el borde. La ventaja de expresar el funcional generador de esta forma es que aparece explícitamente una forma cuadrática en los campos y de esta manera puede realizarse una integración Gaussiana, aunque en este caso una integración funcional. Para realizar la integral resulta útil discretizar el argumento que aparece en la expresión anterior de la siguiente manera

$$-\frac{1}{2} \phi \left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \phi - J\phi \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} \vec{\phi} \cdot A \cdot \vec{\phi} - \vec{J} \cdot \vec{\phi}, \quad (3.4)$$

donde se ha discretizado el campo formando un arreglo $\vec{\phi}$ y el operador diferencial pasa a ser una matriz A . Repetimos que no es necesario realizar esto explícitamente, simplemente es un recurso para entender lo que debemos hacer. Una vez hecho esto se hace la transformación $\vec{\varphi} = \vec{\phi} + A^{-1} \cdot \vec{J}$ y al calcular las integrales Gaussianas se tiene que

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \frac{\mathcal{N}}{[\det(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)]^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y) \right\} \\ &= Z_0[0] \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y) \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

En este resultado se observa que la función de Green de Feynman $D_F(x-y) = A^{-1}$ es aquella que satisface la relación $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$ que en el caso continuo corresponde a $-(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 - i\epsilon) D_F(x-y) = \delta^4(x-y)$ y recordamos que al final de los cálculos se debe tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Para encontrar la función de Green conviene hacer la transformada de Fourier y resolver. Al hacer esto se obtiene

$$D_F(x-y) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.6)$$

En esta expresión las componentes del momento k^μ son independientes y por lo tanto no están ligadas a la condición $k^2 = m^2$, de manera que se está describiendo la propagación de partículas virtuales (se dice que las partículas virtuales no están *on-shell*).

Capítulo 3: La Integral de Caminos en Teorías de Campos. Caso $T = 0$.

Además, si recordamos la interpretación de la función de Green como amplitud de transición de cierto proceso, podemos decir que la expresión anterior nos da la amplitud de transición de crear una partícula de masa m en el punto x y destruirla en el punto y . Con esta interpretación puede verse que $D_F(x - y)$ posee una resonancia precisamente en $k^2 = m^2$.

Es posible realizar la integración temporal del propagador (3.6) y encontrar una expresión para $D_F(x - y)$. Para esto se realiza una integración en el plano complejo y se utiliza la prescripción de Feynman como vía de evitar las singularidades en el contorno de integración. Al realizar la integración se obtiene

$$D_F(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2i\omega_k} \left[e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \Theta(t) + e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \Theta(-t) \right], \quad (3.7)$$

con $\omega_k = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ y donde se ha hecho $y = 0$ por simplicidad; es decir esta expresión describe la amplitud para que una perturbación del campo se propague desde el origen hasta el punto x .

Una vez que se construye el funcional generador $Z[J]$ se pueden obtener las funciones Green de n -puntos de la misma forma que se encontró en (1.50). Por ejemplo para la teoría libre (3.3) y usando el resultado (3.5) puede comprobarse que

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = \frac{(-i)}{Z_0[J]} \left. \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = 0, \quad (3.8)$$

$$\langle 0 | T(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)) | 0 \rangle = \frac{(-i)^2}{Z_0[J]} \left. \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \right|_{J=0} = \mathcal{G}_0(x, y). \quad (3.9)$$

Vemos que se obtiene el propagador de Feynman como la función de Green de 2-puntos, es decir $\mathcal{G}_0(x, y) = iD_F(x - y)$. Esto se debe a que las contribuciones de (3.8) son nulas. Cualquier función de Green puede obtenerse utilizando este procedimiento.

Antes de continuar, es importante decir que en la expresión (3.3) están presentes varias de las características de la integral de caminos que ya se han estudiado en los capítulos 1 y 2 de este trabajo. En particular notamos el carácter oscilatorio de la integral. Para solucionar esto es necesario usar algunos de los recursos ya estudiados:

la prescripción de Feynman o el paso al tiempo Euclídeo (también conocido como rotación de Wick).

3.2. Funcional Generador de las Funciones de Green Conectadas

Es posible definir un nuevo funcional $W[J]$ de manera análoga a como se hizo en el capítulo 1. Considerando que al realizar la integral de camino de la teoría libre queda una expresión de la forma $Z_0[J] = Z_0[0] e^{iW[J]}$, se tiene que

$$\begin{aligned} W[J] &= -i \ln \left(\frac{Z_0[J]}{Z_0[0]} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y), \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde se utilizó el resultado (3.5). De la forma que tiene esta expresión se ve que es posible obtener a partir de él la función de Green de Feynman.

3.2.1. Funcional Conectado vs Funcional no Conectado

Para entender las diferencias entre $Z[J]$ y $W[J]$ realizamos un estudio breve del contenido de ambas. Dada la forma $Z_0[J] = Z_0[0] e^{iW[J]}$ se realiza una expansión

$$\begin{aligned} \frac{Z_0[J]}{Z_0[0]} &= e^{iW[J]} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} W^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n), \end{aligned} \quad (3.11)$$

de manera que se obtienen las funciones de Green de la teoría libre $\mathcal{G}_0(x_1, \dots, x_n)$ tomando derivadas funcionales respecto de $J(x)$. Es decir

$$\mathcal{G}_0(x_1, \dots, x_n) = \frac{(-i)^n}{Z_0[0]} \frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (3.12)$$

Utilizando la expresión (3.10) calculamos para el caso $n = 2$

$$\begin{aligned} \frac{(-i)^2}{Z_0[0]} \frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta}{\delta J(x)} e^{iW[J]} &= iD_F(x-y) e^{iW[J]} + \\ &+ \left(\int d^4x_1 D_F(x-x_1) J(x_1) \right) \\ &\quad \left(\int d^4x_1 D_F(y-x_1) J(x_1) \right) e^{iW[J]}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Al evaluar en $J = 0$ se llega al resultado $\mathcal{G}_0(x_1, x_2) = iD_F(x_1 - x_2)$ como se indicó en la ecuación (3.9).

Si se observan los cálculos anteriores queda claro que $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) = 0$ siempre que n es impar. Ahora bien, evaluando para $n = 4$ se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(x_1, x_2, x_3, x_4) &= - [D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) \\ &+ D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) \\ &+ D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3)]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Notamos que $\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ es la suma de todas las permutaciones posibles realizadas con funciones de 2-puntos. Retomando la interpretación como amplitudes de transición puede decirse que $\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ describe la amplitud de transición para el proceso de crear-destruir partículas en los puntos (x_1, x_2, x_3, x_4) . El resultado anterior nos dice que esto pasa únicamente en pares que no están correlacionados. Por ejemplo el primer término $D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4)$ dice que una partícula se crea en x_2 y se destruye en x_1 y otra partícula se crea en x_4 y se destruye en x_3 ; sin embargo ambas partículas no interaccionan, ambos procesos ocurren de forma independiente. De esta forma los otros términos dan las otras posibles formas de conectar cuatro puntos haciendo grupos de dos puntos. Es por esta razón que $\mathcal{G}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ se llama desconectada.

Esta forma de expresar las funciones de Green de n -puntos como todos los productos posibles de funciones de Green de 2-puntos es un resultado general y se conoce como teorema de Wick y es una herramienta esencial para el cálculo de las funciones de Green en teoría cuántica de campos.

A continuación consideramos las funciones de Green generadas por el funcional $W[J]$, definidas por la expresión

$$G(x_1, \dots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} iW[J] \Big|_{J=0}. \quad (3.15)$$

En la ecuación (3.10) vemos que $W[J]$ es cuadrático en $J(x)$ de manera que cualquier derivada con $n > 2$ se anula. Usando la expresión anterior se comprueba que

$$G(x, y) = iD_F(x - y) = \mathcal{G}(x, y), \quad (3.16)$$

y no existe ninguna otra función de Green del tipo $G(x_1, \dots, x_n)$ definida en (3.15). Estas funciones de Green se conocen como conectadas porque todos los n -puntos involucrados están correlacionados. Lo quiere decir el resultado anterior es que en una teoría libre la única función de Green conectada es el propagador: la función de Green de 2-puntos. Además al relacionar (3.14) y (3.15) se comprueba que las funciones de Green $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)$ pueden obtenerse de las funciones de Green conectadas $G(x_1, \dots, x_n)$. Las funciones de Green conectadas son los bloques fundamentales para construir las otras cantidades.

3.3. Campo Escalar Real - Teoría con Interacción

Cuando la teoría posee términos de interacción es posible realizar un tratamiento perturbativo, al menos en el régimen de acoplamiento débil. Para entender el procedimiento estándar establecemos la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi\right) &= \exp\left(-\frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) \exp\left(J\phi\right) \\ &= \left[1 + \left(-\frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{\lambda}{4!}\phi^4\right)^2 + \cdots\right] \exp\left(J\phi\right) \\ &= \left[1 + \left(-\frac{\lambda}{4!}\frac{\partial^4}{\partial J^4}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{\lambda}{4!}\frac{\partial^4}{\partial J^4}\right)^2 + \cdots\right] \exp\left(J\phi\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\lambda}{4!}\frac{\partial^4}{\partial J^4}\right) \exp\left(J\phi\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Capítulo 3: La Integral de Caminos en Teorías de Campos. Caso $T = 0$.

Lo que hemos encontrado es que es posible generar una expansión de la teoría con interacción, tomando derivadas respecto al término que contiene la fuente J . Utilizando un resultado análogo al anterior pero en términos de funcionales, se obtiene que para el campo escalar real podemos escribir el funcional generador de la teoría con interacción como

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right) \right\} \\
 &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4 \right\} \exp \left\{ i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi \right) \right\} \\
 &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right\} \\
 &\quad \exp \left\{ i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi \right) \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right\} Z_0[J]. \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Este resultado nos dice que podemos tener un desarrollo perturbativo de la teoría tomando derivadas respecto de la teoría libre. La forma que tiene esta derivada dependerá de la interacción; la teoría $\lambda\phi^4$ indica que debemos derivar funcionalmente cuatro veces al funcional generador de la teoría libre, por cada orden en el acoplamiento λ . Este resultado es notable.

En resumen, vemos que el término de interacción en el Lagrangiano puede reescribirse

$$\mathcal{L}_I(\phi(x)) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}_I \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right), \tag{3.19}$$

y esto vale para cualquier término de interacción. La expansión perturbativa de la teoría consiste en una doble expansión: se expande en λ según la precisión deseada y se expande en $J(x)$ dependiendo del proceso que se quiera estudiar.

Es importante mencionar que los términos de interacción se eligen de manera que puedan modelar el fenómeno a estudiar y deben satisfacer los requerimientos de ser un escalar de Lorentz y además que el Hamiltoniano asociado a la teoría esté

acotado por debajo para que la energía pueda tener un mínimo y así sea estable bajo perturbaciones. Además muchas veces es deseable que la teoría sea renormalizable, este hecho limita el grado de la máxima potencia (de los campos) que puede aparecer en el potencial V del Lagrangiano. En el caso de la teoría $\lambda\phi^4$ en $d = 4$ dimensiones, la teoría es renormalizable. No se profundizará en los aspectos de renormalización en este trabajo.

3.4. Funciones de Green para la teoría $\lambda\phi^4$

Veamos con cierto detalle cómo se obtienen las funciones de Green para la teoría con interacciones y determinar cuáles son las modificaciones respecto a la teoría libre. Partiendo de la expresión (3.18) hacemos una expansión a orden $\mathcal{O}(\lambda)$

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= Z_0[J] + Z_1[J] \\
 &= \left(1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right) Z_0[J] \\
 &= Z_0[J] - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \frac{\delta^4 Z_0[J]}{\delta J^4(x)} \\
 &= Z_0[J] - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left[3(iD_F(0))^2 + 6iD_F(0) \left(\int d^4y D_F(x-y)J(y) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int d^4y D_F(x-y)J(y) \right)^4 \right] Z_0[J]. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Es evidente que al hacer $\lambda = 0$ se recupera la teoría libre $Z_0[J]$. Se observa que aparecen unos factores de la forma $D_F(0) = D_F(x-x)$ al hacer las derivadas funcionales; estos factores pueden interpretarse como correlaciones que empiezan y terminan en el mismo punto. Resaltamos también que todos los términos contienen una potencia de primer orden en λ . Ahora que se tiene el funcional generador para la teoría con interacción a orden $\mathcal{O}(\lambda)$ es posible encontrar las funciones de Green no conectadas de la teoría $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)$.

Vamos a calcular la función de Green de 2-puntos $\mathcal{G}(x_1, x_2)$, para ello utilizamos

la ecuación (3.12). Al efectuar el cálculo se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x_1, x_2) &= \frac{(-i)^2}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} \\ &= iD_F(x_1 - x_2) \\ &\quad - \frac{i\lambda}{4!} (6 \cdot 2) \int d^4x iD_F(x_1 - x) iD_F(x - x) iD_F(x - x_2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

El primer término es la función de Green (3.16) de la teoría libre $\mathcal{G}_0(x_1, x_2)$. El segundo término representa una corrección a orden $\mathcal{O}(\lambda)$. Extendiendo este procedimiento es posible generar correcciones de orden superior a todas las funciones de Green.

3.4.1. Diagramática

Existe un recurso nemotécnico para escribir los términos de la expansión tanto del funcional generador como de las funciones de Green. Este recurso fue ideado por Feynman (al parecer Stückelberg ya había expuesto esta idea en una conferencia varios años antes que Feynman [24]; se dice que Gell-Mann, para fastidiar a Feynman, llamaba a los diagramas de Feynman, *diagramas de Stückelberg*) como una manera rápida de encontrar la forma de los términos que aparecen en la expansión perturbativa de la teoría.

Consideremos el funcional generador $Z[J]$. A cada elemento puede asignársele un elemento gráfico de la manera siguiente

$$iD_F(x - y) = \text{—————}, \quad (3.22)$$

$$i \int d^4x J(x) = \text{○—————}, \quad (3.23)$$

$$-i\lambda \int d^4x = \text{●}. \quad (3.24)$$

Usando esta representación para escribir el término $Z_1[J]$ en (3.20) se obtiene

$$Z_1[J] = \frac{1}{4!} \left(3 \text{○—●—○} + 6 \text{○—●—○} + \text{○—●—○} \right) \exp\left(\frac{1}{2} \text{○—○}\right). \quad (3.25)$$

Capítulo 3: La Integral de Caminos en Teorías de Campos. Caso $T = 0$.

Se entiende que cada fuente y cada vértice tiene su coordenada de manera que se está integrando sobre todas las coordenadas involucradas. Si vemos el primer término notamos que no contiene fuentes; a este tipo de diagramas se les conoce como diagramas de vacío. Cuando eventualmente se evalúa en $J = 0$, se anulan todos los diagramas que contienen al menos una fuente, es por esto que los diagramas de vacío corresponden a bucles (*loops*) sin líneas externas.

Para la discusión que sigue se asume que se normaliza la integral de caminos de la teoría libre, de forma que se tenga $Z_0[0] = 1$. Al considerar la teoría con interacciones el vacío cambia y se pierde esta normalización. Esto puede verse claramente a partir de (3.20)

$$Z[0] = 1 - \frac{i\lambda}{8} \int d^4x (iD_F(0))^2 \neq 1. \quad (3.26)$$

La corrección al vacío está relacionado con los llamados diagramas de vacío que se acaban de discutir.

Hemos visto que el vacío de la teoría libre se modifica al considerar interacciones. Sin embargo, todos los demás procesos que ocurren (como procesos de scattering) son descritos con referencia al vacío de manera que es conveniente restar las contribuciones de vacío de todas las expresiones calculadas. Para ello se define el funcional $\tilde{Z}[J] = \frac{Z[J]}{Z[0]}$; con esta redefinición se eliminan las contribuciones de vacío o equivalentemente todos los procesos con valores cuya referencia es el valor de vacío. Esto es análogo a mover la referencia al calcular la energía potencial de un sistema. Una manera sencilla de verificar que se sustraen los valores de vacío es mediante el nuevo funcional $\tilde{W}[J]$ asociado al nuevo $\tilde{Z}[J]$

$$i\tilde{W}[J] = \ln \tilde{Z}[J] = \ln Z[J] - \ln Z[0]. \quad (3.27)$$

Es claro que con esta normalización se eliminan las contribuciones de vacío.

Sabemos que para encontrar las funciones de Green es necesario derivar al funcional generador respecto de las corrientes. Este procedimiento de derivación respecto

de $J(x)$ se representa en la forma diagramática de la siguiente manera

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} = x \text{ ————— } . \quad (3.28)$$

Se observa que en el punto espacio temporal respecto al cual se escribe la derivada $\frac{\delta}{\delta J(x)}$ es importante debido a que el propagador resultante queda evaluado en este punto.

A continuación calculamos algunas funciones de Green y para esto utilizamos el funcional $\tilde{W}[J]$. Utilizando (3.25), la cancelación de los diagramas de vacío y recordando además que se ha normalizado $Z_0[0] = 1$ se obtiene que

$$\begin{aligned} i\tilde{W}[J] &= \ln Z_0[J] + \ln(1 + Z_1[J]) \approx \ln Z_0[J] + Z_1[J] \\ &= \frac{1}{2} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4!} \left(6 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \right) , \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde se ha utilizado la aproximación $\ln(1 + x) \approx x$. Recordamos además que esta expresión es a primer orden en λ lo cual puede verse porque sólo aparece un vértice (\bullet). Tomando dos y cuatro derivadas funcionales encontramos las funciones de Green conectadas $G(x_1, x_2)$ y $G(x_1, x_2, x_3, x_4)$ respectivamente

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= iD_F(x_1 - x_2) - \frac{i\lambda}{2} \int d^4x iD_F(x_1 - x) iD_F(x - x) iD_F(x - x_2) \\ &= \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} , \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -i\lambda \int d^4x iD_F(x_1 - x) iD_F(x_2 - x) iD_F(x_3 - x) iD_F(x_4 - x) \\ &= \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Vemos que los diagramas de las funciones de Green ya no poseen puntos abiertos debido a que estos corresponden a corrientes y en las funciones de Green todas las corrientes son nulas. Notamos también la aparición de ciertos factores que preceden a los diagramas; cada factor puede encontrarse de forma precisa utilizando argumentos combinatorios. No se mirará en detalle el cálculo de estos factores. Teniendo las

Capítulo 3: La Integral de Caminos en Teorías de Campos. Caso $T = 0$.

expresiones analíticas con sus respectivos diagramas hace evidente la correspondencia entre ambos y por lo tanto su gran utilidad.

Finalmente citamos las reglas de Feynman para la teoría $\lambda\phi^4$. Las reglas de Feynman permiten calcular cualquier función de Green conectada, estas son:

1. Dibujar todos los diagramas topológicamente distintos para cada orden elegido $\mathcal{O}(\lambda^n)$ y el número de coordenadas externas (correspondientes a las partículas involucradas).
2. Se asigna un propagador $iD_F(x - x')$ a cada línea que conecta los puntos x y x' .
3. Cada vértice aporta un factor $-i\lambda$ que conecta 4 líneas que corresponden a la interacción $\lambda\phi^4$. En general los vértices conectan n líneas para una interacción del tipo $\lambda\phi^n$.
4. Se integra sobre cada punto interno.
5. Se determina el factor de simetría.

Realizando una transformación de Fourier es posible reexpresar estas reglas en el espacio de momento. Los cambios a las reglas son los siguiente

2. A cada línea se asigna un propagador $iD_F(k) = i/(k^2 - m^2 + i\epsilon)$.
3. Cada vértice aporta un factor de $-i\lambda$.
4. Se fijan los momentos de las líneas externas y se impone la conservación del momento en cada vértice.
5. Se integra sobre todo momento k que no esté fijo con $\int d^4k/(2\pi)^4$.

En general son más sencillas de aplicar las reglas en el espacio de momento. Las reglas de Feynman permiten escribir cualquier función de Green conectada, en el régimen perturbativo, para un proceso específico y al orden $\mathcal{O}(\lambda^n)$ deseado sin tener que ir al desarrollo partiendo del funcional generador.

3.4.2. Ejemplo: Corrección al Propagador (1 loop) a $T = 0$

En esta sección se calculará con un poco más de detalle la corrección del propagador debido a la presencia de un término de interacción, como aparece en la expresión (3.21); como ya hemos visto se trabajará con la teoría $\lambda\phi^4$. El Lagrangiano está dado por (3.2) y la acción viene dada por la expresión

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right). \quad (3.32)$$

El desarrollo de este ejemplo nos servirá como punto de comparación al estudiar los formalismos a temperatura finita en los capítulos siguientes.

En este capítulo vimos la forma que tiene el vértice de esta teoría para el caso $T = 0$. Recordamos entonces que el vértice viene dado por el factor

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \times \\ \diagdown \end{array} = -i\lambda, \quad (3.33)$$

Usando la forma del vértice se escriben los diagramas y a través de las reglas de Feynman se escriben las integrales que es necesario resolver. Aplicando las reglas de Feynman en el espacio de momento, se llega a la versión equivalente a la ecuación (3.21)

$$D(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[1 + \frac{i\lambda}{2} \frac{D_F(0)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (3.34)$$

Recordamos que la diferencia entre el propagador y la función de Green de dos puntos es un factor i . Además hemos escrito $D_F(x-x) = D_F(0)$. Asumiendo que el desarrollo

perturbativo es válido, es posible escribir formalmente

$$\begin{aligned}
 D(p) &= \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[1 + \frac{\frac{i\lambda}{2} D_F(0)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \\
 &\simeq \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[1 - \frac{\frac{i\lambda}{2} D_F(0)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]^{-1} \\
 &= \frac{1}{p^2 - m^2 - \frac{i\lambda}{2} D_F(0) + i\epsilon}.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Al comparar esta expresión con el propagador de la teoría libre se observa que el efecto de la interacción sobre el propagador es la de modificar el valor de la masa de las partículas $m^2 \rightarrow m^2 + \Delta m^2$.

A continuación se realiza la integración de la parte temporal para la corrección Δm^2 de la masa. Utilizando la ecuación (3.7) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \Delta m^2 &= \frac{(i\lambda)}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &= \frac{(i\lambda)}{2} \left[\frac{1}{2i} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\vec{q}}} \right] \\
 &= \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\vec{q}}},
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

con $\omega_{\vec{q}} = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}$. Esta expresión es real, lo cual es bueno para poder tener partículas estables. Sin embargo la integral espacial diverge. Este problema se resuelve aplicando métodos de renormalización y usando contratérminos para modificar el Lagrangiano original. En este trabajo no se estudiará los procedimientos de renormalización.

3.5. Amplitudes de Transición y Temperatura Cero

Hemos visto que la integral de caminos es una representación para la amplitud de transición de cierto estado inicial a un estado final. En el desarrollo que hemos realizado se consideró que el estado inicial es el estado base (de vacío) de cierta teoría y esta configuración inicial se tiene para un $t \rightarrow -\infty$, es decir el estado inicial es $|0 - \infty\rangle$. Por otra parte el estado final vuelve a ser el estado base pero se alcanza

cuando $t \rightarrow +\infty$, es decir $|0 + \infty\rangle$. Hemos visto también que en general el operador evolución $\hat{U}(t_1, t_0)$ conecta dos estados de la forma $|f t_1\rangle = \hat{U}(t_1, t_0) |i t_0\rangle$. Se define la matriz \hat{S} (o matriz de scattering) al siguiente caso particular del operador de evolución

$$\hat{S} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{U}(t, -t). \quad (3.37)$$

Es decir que en la representación de la integral de caminos que hemos realizado está involucrada la matriz \hat{S} .

Existe un resultado muy importante conocido como fórmula de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ). Este resultado garantiza que para cierto proceso que quiera calcularse sólo es necesario determinar la función de Green conectada apropiada y esta función de Green está relacionada directamente con la amplitud de transición de ese proceso. De esta forma es posible calcular los elementos de la matriz \hat{S} que se desee con la precisión deseada.

La amplitud de transición a tiempos remotos (pasados y futuros) y el hecho de que los estados inicial y final sean el de vacío, implican que no hay fluctuaciones térmicas en las amplitudes calculadas. Para que haya fluctuaciones térmicas es necesario que haya al menos dos estados iniciales o finales (o ambos) y claramente esto no ocurre para el formalismo estándar de la teoría cuántica de campos. Además, operacionalmente se hallan promedios térmicos calculando trazas al operador de evolución y hemos visto que el cálculo de $Z[J]$ no involucra trazas sino más bien una cuidadosa configuración del estado inicial y final en el estado de vacío. En los casos donde es de interés calcular promedios térmicos no es posible considerar la integración temporal que aparece en la acción desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Es necesario entonces una extensión consistente al formalismo desarrollado para tratar los casos en los cuales existe temperatura finita.

En este capítulo se ha explorado la extensión de la formulación de la integral de caminos al tratamiento de teorías de campos relativistas. Hemos visto cómo se calculan los distintos tipos de funciones de Green, no conectadas y conectadas, partiendo de los funcionales $Z[J]$ y $W[J]$ respectivamente. Además se estudió la técnica diagramática

Capítulo 3: La Integral de Caminos en Teorías de Campos. Caso $T = 0$.

desarrollada por Feynman para poder encontrar, de una forma relativamente sencilla, cualquier función de Green que se quiera calcular, dependiendo del proceso que sea de interés y de la precisión deseada. Por último se argumentó que el formalismo tratado corresponde a una teoría a temperatura cero, $T = 0$, debido principalmente a que las amplitudes de transición se consideran entre estados de vacío. En los capítulos siguientes se extenderá este formalismo al tratamiento de sistemas a temperatura finita.

Capítulo 4

Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

Se comenzará este capítulo con un repaso del comportamiento de los sistemas cuánticos en el equilibrio termodinámico [19, 25–27]. Para ello se introducirá primero el formalismo de tiempo imaginario (también llamado de Matsubara) en términos de operadores y posteriormente su forma en integrales de camino [28].

4.1. Formalismo de Tiempo Imaginario - Matsubara

Un sistema en equilibrio térmico se caracteriza calculando valores medios sobre un ensamble apropiado; los más conocidos son el microcanónico, canónico y gran canónico. Una forma directa de calcular estos valores medios es definiendo la matriz densidad del sistema

$$\hat{\rho}(\beta) = e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}, \quad (4.1)$$

donde $\beta = \frac{1}{T}$ y T es la temperatura del sistema y se asume que se utilizan unidades donde la constante de Boltzmann tiene valor $k = 1$. El Hamiltoniano \mathcal{H} tiene la forma apropiada según el ensamble en el cual se trabaje. Por ejemplo en el gran canónico tiene la forma de $\mathcal{H} = H - \mu N$, con μ el potencial químico. En el ensamble

canónico $\mathcal{H} = H$. En este resumen trabajaremos con un ensamble genérico; se deberá elegir uno en particular dependiendo del problema a resolver. Es claro que la matriz densidad es análoga a los exponentes de Boltzmann y contienen la información sobre las probabilidades de los estados térmicos del sistema.

Teniendo la matriz densidad es posible definir la función de partición del sistema de la forma siguiente

$$Z(\beta) = \text{Tr}[\rho(\beta)] = \text{Tr} \left[e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}} \right]. \quad (4.2)$$

Vemos que es necesario calcular la traza de la matriz densidad lo cual corresponde a sumar sobre todos los valores de expectación de la matriz densidad sobre una base completa. Teniendo la función de partición se calculan los valores medios para un observable \hat{A} y correlaciones de pares de observables \hat{A}, \hat{B} de la manera usual

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\text{Tr} [\rho(\beta) \hat{A}]}{Z(\beta)} = \frac{\text{Tr} [e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}} \hat{A}]}{\text{Tr} [e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}]}, \quad (4.3)$$

$$\langle \hat{A}\hat{B} \rangle = \frac{\text{Tr} [\rho(\beta) \hat{A} \hat{B}]}{Z(\beta)} = \frac{\text{Tr} [e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}} \hat{A} \hat{B}]}{\text{Tr} [e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}]}. \quad (4.4)$$

Se ha suprimido la dependencia de las coordenadas de los operadores para simplificar la notación.

Recordamos que dado un operador \hat{A} en el marco de Schrödinger, se define el operador $\hat{A}_H(t)$ en el marco de Heisenberg de la siguiente manera

$$\hat{A}_H(t) = e^{+i\hat{\mathcal{H}}t} \hat{A} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}. \quad (4.5)$$

Usando esta relación se encuentra que las correlaciones de operadores (observables) en el marco de Heisenberg pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}_H(t) \hat{B}_H(t') \rangle &= \frac{\text{Tr} [\rho(\beta) \hat{A}_H(t) \hat{B}_H(t')]}{Z(\beta)} = \frac{\text{Tr} [e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}} \hat{A}_H(t) e^{+\beta\hat{\mathcal{H}}} e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}} \hat{B}_H(t')]}{\text{Tr} [e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}] } \\ &= \frac{\text{Tr} [e^{i\hat{\mathcal{H}}(t+i\beta)} \hat{A} e^{-i\hat{\mathcal{H}}(t+i\beta)} e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}} \hat{B}_H(t')]}{\text{Tr} [e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}] } = \frac{\text{Tr} [\hat{A}_H(t+i\beta) e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}} \hat{B}_H(t')]}{\text{Tr} [e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}] } \\ &= \langle \hat{B}_H(t') \hat{A}_H(t+i\beta) \rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Capítulo 4: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

Para llegar a este resultado se utilizó la ecuación (4.5) y la propiedad cíclica de la traza. La expresión (4.6) se conoce como relación de Kubo-Martin-Schwinger (KMS). En particular para correlaciones del mismo operador se satisface $\langle \hat{A}_H(t) \hat{A}_H(t') \rangle = \langle \hat{A}_H(t') \hat{A}_H(t+i\beta) \rangle$. Este resultado es general para operadores Bosónicos y Fermiónicos.

A continuación consideremos que el Hamiltoniano del sistema H puede escribirse como un término correspondiente al sistema libre (H_0) más un término de interacción (H'), es decir $H = H_0 + H'$. Usando esta consideración el Hamiltoniano para el ensamble se expresa de la forma siguiente

$$\mathcal{H} = H = H_0 + H', \quad \text{canónico}; \quad (4.7)$$

$$\mathcal{H} = H - \mu N = H_0 - \mu N + H' = \mathcal{H}_0 + H', \quad \text{gran canónico}. \quad (4.8)$$

Para estudiar el sistema con interacción se plantea el siguiente *ansatz* y de esta manera obtener información del sector de interacción del Hamiltoniano. En este caso decimos que la matriz densidad es

$$\hat{\rho}(\beta) = e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}} = e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}_0} \hat{S}(\beta) \quad \longrightarrow \quad \hat{S}(\beta) = e^{+\beta \hat{\mathcal{H}}_0} e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}, \quad (4.9)$$

donde se ha factorizado por conveniencia la matriz densidad $\hat{\rho}(\beta)$ aunque es obvio que no se conoce la forma de $\hat{S}(\beta)$.

Para determinar cómo evoluciona el nuevo operador $\hat{S}(\beta)$ notamos que la matriz densidad libre y de interacción satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\partial \hat{\rho}_0(\tau)}{\partial \tau} = -\hat{\mathcal{H}}_0 \hat{\rho}_0(\tau), \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}(\tau)}{\partial \tau} = -\hat{\mathcal{H}} \hat{\rho}(\tau) = -(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{H}') \hat{\rho}(\tau), \quad (4.11)$$

con $0 \leq \tau \leq \beta$. Usando estas ecuaciones para el nuevo operador $\hat{S}(\tau) = \hat{\rho}_0^{-1}(\tau) \hat{\rho}(\tau)$ se

determina que satisface la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \hat{\rho}_0^{-1}}{\partial \tau} \hat{\rho} + \hat{\rho}_0^{-1} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \tau} \\
 &= -\hat{\rho}_0^{-1} \hat{H}' \hat{\rho} \\
 &= -\hat{\rho}_0^{-1} \hat{H}' \hat{\rho}_0 \hat{\rho}_0^{-1} \hat{\rho} \\
 &= -\hat{H}'_I \hat{S}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

En el último paso se ha realizado una analogía con el marco de interacción pero en este caso se usa la matriz densidad de la teoría libre $\hat{H}'_I = \hat{\rho}_0^{-1} \hat{H}' \hat{\rho}_0 = e^{+\tau \hat{H}_0} \hat{H}' e^{-\tau \hat{H}_0}$. Esta transformación define un marco de interacción modificado del tipo $\hat{A}_I = e^{+\tau \hat{H}_0} \hat{A} e^{-\tau \hat{H}_0}$. Debemos notar que este tipo de transformaciones no son necesariamente unitarias si τ es real. Sin embargo si τ toma valores imaginarios, la transformación sí es unitaria.

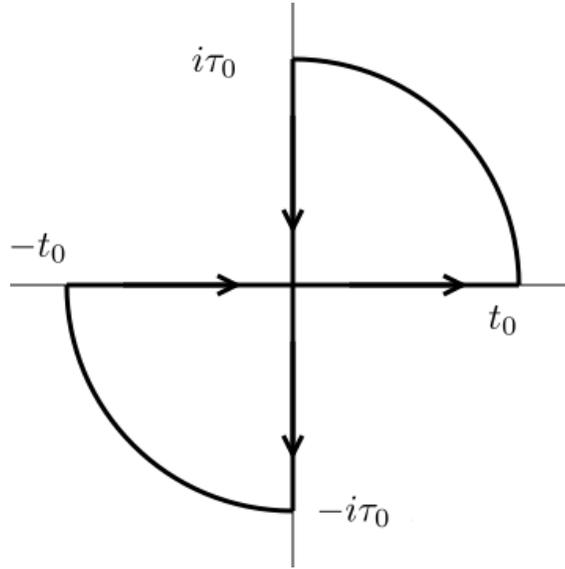


Figura 4.1: Contorno Formalismo Tiempo Imaginario.

Es importante ver también que la matriz densidad (4.9) funciona como un operador evolución pero con un “tiempo” parametrizado en la forma $t = -i\tau$ que recorre los valores $(0, \beta)$ en el eje imaginario negativo. Es por esto que este formalismo se conoce como de tiempo imaginario.

Capítulo 4: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

Ahora bien, la ecuación (4.12) para el operador $\hat{S}(\tau)$ puede integrarse formalmente y se obtiene

$$\hat{S}(\beta) = \mathcal{T}_\tau \left(e^{-\int_0^\beta d\tau \hat{H}'_I(\tau)} \right). \quad (4.13)$$

Esta expresión es completamente análoga a la que se encuentra para la matriz S en los textos de teoría cuántica de campos a $T = 0$. El símbolo \mathcal{T}_τ es el operador tiempo ordenado y el subíndice τ resalta que los tiempos deben tomarse en este contorno especial donde el tiempo toma valores imaginarios. El operador satisface las propiedades usuales

$$\hat{S}(\tau_2, \tau_1) = \mathcal{T}_\tau \left(e^{-\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \hat{H}'_I(\tau)} \right), \quad \text{con } \tau_2 > \tau_1; \quad (4.14)$$

$$\hat{S}(\tau) = \hat{S}(\tau, 0); \quad (4.15)$$

$$\hat{S}^{-1}(\tau) = \hat{S}(0, \tau); \quad (4.16)$$

$$\hat{S}(\tau_3, \tau_2) \hat{S}(\tau_2, \tau_1) = \hat{S}(\tau_3, \tau_1), \quad \text{con } \tau_3 > \tau_2 > \tau_1. \quad (4.17)$$

Como puede verse, son relaciones totalmente análogas a las encontradas en los textos de teoría cuántica de campos a $T = 0$.

El operador $\hat{S}(\tau)$ es análogo al funcional generador Z del cual se habló el capítulo anterior y permite calcular las funciones de Green del sistema utilizando un desarrollo perturbativo conocido expansión de Dyson de la cual, a su vez, se pueden inferir las reglas de Feynman para la teoría en cuestión. Todos estos son los procedimientos estándar que se estudian al realizar la cuantización canónica de las teorías de campo.

Así como en la ecuación (4.12) se utilizó un marco de interacción modificado con operadores sobre el ensamble, de la misma manera puede modificarse el marco de Heisenberg mostrado en la ecuación (4.5) para adaptarlo a teorías con temperatura finita en el equilibrio. Si $\hat{\phi}$ y $\hat{\phi}^\dagger$ son operadores en el marco de Schrödinger se tiene que el marco de Heisenberg térmico viene dado por

$$\hat{\phi}_H(\tau) = e^{+\tau\hat{\mathcal{H}}} \hat{\phi} e^{-\tau\hat{\mathcal{H}}}, \quad (4.18)$$

$$\hat{\phi}_H^\dagger(\tau') = e^{+\tau'\hat{\mathcal{H}}} \hat{\phi}^\dagger e^{-\tau'\hat{\mathcal{H}}} \neq (\hat{\phi}_H(\tau'))^\dagger. \quad (4.19)$$

Capítulo 4: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

En estas expresiones únicamente colocamos la dependencia con τ para no sobrecargar la notación. El ordenamiento en τ se define de la siguiente manera

$$\mathcal{T}_\tau(\hat{\phi}_H(\tau) \hat{\phi}_H^\dagger(\tau')) = \Theta(\tau - \tau') \hat{\phi}_H(\tau) \hat{\phi}_H^\dagger(\tau') \pm \Theta(\tau' - \tau) \hat{\phi}_H^\dagger(\tau') \hat{\phi}_H(\tau). \quad (4.20)$$

El signo $+$ o $-$ corresponde a operadores Bosónicos o Fermiónicos respectivamente. Finalmente escribimos la relación entre los marcos de Heisenberg e interacción

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_H(\tau) &= e^{+\tau\hat{H}} \hat{\phi} e^{-\tau\hat{H}} \\ &= e^{+\tau\hat{H}} e^{-\tau\hat{H}_0} \hat{\phi}_I(\tau) e^{+\tau\hat{H}_0} e^{-\tau\hat{H}} \\ &= \hat{S}^{-1}(\tau) \hat{\phi}_I(\tau) \hat{S}(\tau). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para llegar a esta expresión utilizamos las ecuaciones (4.9) y (4.18). Usando estos resultados se escribe la función de Green de dos puntos a $T \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta(\tau, \tau') &= \langle \mathcal{T}_\tau(\hat{\phi}_H(\tau) \hat{\phi}_H^\dagger(\tau')) \rangle_\beta \\ &= \frac{\text{Tr} \left[e^{-\beta\hat{H}} \mathcal{T}_\tau \left(\hat{S}^{-1}(\tau) \hat{\phi}_I(\tau) \hat{S}(\tau) \hat{S}^{-1}(\tau') \hat{\phi}_I^\dagger(\tau') \hat{S}(\tau') \right) \right]}{\text{Tr} \left[e^{-\beta\hat{H}} \right]} \\ &= \frac{\text{Tr} \left[e^{-\beta\hat{H}_0} \hat{S}(\beta) \mathcal{T}_\tau \left(\hat{S}^{-1}(\tau) \hat{\phi}_I(\tau) \hat{S}(\tau) \hat{S}^{-1}(\tau') \hat{\phi}_I^\dagger(\tau') \hat{S}(\tau') \right) \right]}{\text{Tr} \left[e^{-\beta\hat{H}_0} \hat{S}(\beta) \right]} \\ &= \frac{\text{Tr} \left[e^{-\beta\hat{H}_0} \mathcal{T}_\tau \left(\hat{\phi}_I(\tau) \hat{\phi}_I^\dagger(\tau') \hat{S}(\beta) \right) \right]}{\text{Tr} \left[e^{-\beta\hat{H}_0} \hat{S}(\beta) \right]} \\ &= \frac{\langle \mathcal{T}_\tau \left(\hat{\phi}_I(\tau) \hat{\phi}_I^\dagger(\tau') \hat{S}(\beta) \right) \rangle_{\beta,0}}{\langle \hat{S}(\beta) \rangle_{\beta,0}}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde recordamos que $0 \leq \tau, \tau' \leq \beta$. Este resultado expresa el promedio de los operadores respecto al ensamble sin interacción. Para derivar este resultado se utilizó el hecho de que $\hat{S}(\beta)$ puede entrar en el τ -ordenamiento porque β es el valor más grande en el intervalo; además, dentro del operador el orden no importa y por esto ocurren las cancelaciones.

4.2. Frecuencias de Matsubara

Usando el formalismo estudiado hasta ahora, es posible hacer algunas precisiones sobre la forma del propagador para una teoría a temperatura finita. De la sección anterior recordamos que

$$\mathcal{G}_\beta(\tau, \tau') = \frac{\text{Tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} \mathcal{T}_\tau \left(\hat{\phi}_H(\tau) \hat{\phi}_H^\dagger(\tau') \right) \right]}{\text{Tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} \right]}, \quad (4.23)$$

donde resaltamos que los operadores están expresados en el marco de Heisenberg. Es conveniente estudiar el producto τ -ordenado que aparece en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\tau \left(\hat{\phi}_H(\tau) \hat{\phi}_H^\dagger(\tau') \right) &= \mathcal{T}_\tau \left(e^{+\tau \hat{H}} \phi e^{-\tau \hat{H}} e^{+\tau' \hat{H}} \phi^\dagger e^{-\tau' \hat{H}} \right) \\ &= \mathcal{T}_\tau \left(e^{+(\tau-\tau') \hat{H}} \phi e^{-(\tau-\tau') \hat{H}} \phi^\dagger \right) \\ &= \mathcal{T}_\tau \left(\hat{\phi}_H(\tau - \tau') \hat{\phi}_H^\dagger(0) \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

Recordamos que dentro del operador τ -ordenado puede variarse el orden. Además se utilizó el hecho de que en los marcos modificados la representación de Heisenberg y Schrödinger coinciden para $\tau = 0$, de la misma forma que ocurre a $T = 0$. Utilizando los resultados (4.23-4.24) se encuentra la siguiente relación

$$\mathcal{G}_\beta(\tau, \tau') = \mathcal{G}_\beta(\tau - \tau', 0). \quad (4.25)$$

La función de Green de dos puntos a T finita y en el equilibrio depende únicamente de la diferencia de los puntos. Este es un hecho característico de los procesos en el equilibrio.

A continuación se quiere encontrar una relación entre las funciones de Green que

involucre los puntos extremos del rango de τ : $0 < \tau < \beta$. Para ello se evalúa

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_\beta(0, \tau) &= \langle \mathcal{T}_\tau (\hat{\phi}_H(0) \hat{\phi}_H^\dagger(\tau)) \rangle \\
 &= \frac{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}} \mathcal{T}_\tau (\hat{\phi}_H(0) \hat{\phi}_H^\dagger(\tau))] }{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}] } \\
 &= \frac{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}} (\Theta(0 - \tau) \hat{\phi}_H(0) \hat{\phi}_H^\dagger(\tau) \pm \Theta(\tau - 0) \hat{\phi}_H^\dagger(\tau) \hat{\phi}_H(0))] }{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}] } \\
 &= \pm \langle \hat{\phi}_H^\dagger(\tau) \hat{\phi}_H(0) \rangle, \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

donde el signo $+$ o $-$ corresponde a Bosones o Fermiones respectivamente. Para llegar a este resultado se utilizó que $\tau > 0$ de manera que únicamente contribuye el segundo término del operador τ -ordenado en (4.20). Ahora calculamos $\langle \hat{\phi}_H^\dagger(\tau) \hat{\phi}_H(0) \rangle$ utilizando la definición

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\phi}_H^\dagger(\tau) \hat{\phi}_H(0) \rangle &= \frac{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}} \hat{\phi}_H^\dagger(\tau) \hat{\phi}_H(0)]}{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}] } \\
 &= \frac{\text{Tr} [\hat{\phi}_H^\dagger(\tau) e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}} e^{+\beta \hat{\mathcal{H}}} \hat{\phi}_H(0) e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}] }{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}] } \\
 &= \frac{\text{Tr} [\hat{\phi}_H^\dagger(\tau) e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}} \hat{\phi}_H(\beta)]}{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}] } \\
 &= \frac{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}} \hat{\phi}_H(\beta) \hat{\phi}_H^\dagger(\tau)]}{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}] } \\
 &= \mathcal{G}_\beta(\beta, \tau). \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

Se utilizó la propiedad cíclica de la traza para este cálculo. Ahora, utilizando los resultados (4.26-4.27) se encuentra que

$$\mathcal{G}_\beta(0, \tau) = \pm \mathcal{G}_\beta(\beta, \tau). \tag{4.28}$$

Nuevamente el signo $+$ ($-$) corresponde a Bosones (Fermiones). Este resultado nos dice que la función de Green a temperatura finita debe ser periódica (antiperiódica) en τ . Esto es una consecuencia directa del hecho de que los valores de expectación térmicos se calculan calculando la traza lo cual obliga a fijar condiciones de borde apropiadas

Capítulo 4: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

sobre los campos involucrados. Como hemos visto, si los campos son Bosónicos se utilizan condiciones periódicas; si los campos son Fermiónicos se utilizan condiciones de borde antiperiódicas.

Para estudiar el espectro de los modos discretos que se obtienen por la condición de (anti)periodicidad, pasamos al espacio de frecuencias $\mathcal{G}_\beta(\omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau)$. En general todos los modos $\omega_n = n\pi/\beta$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, están permitidos. Sin embargo veremos a continuación que hay una distribución de los modos dependiendo del carácter Bosónico o Fermiónico de los operadores involucrados. Empecemos con la expresión en el espacio de frecuencias

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_\beta(\omega_n) &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau) \\
 &= \pm \frac{1}{2} \int_{-\beta}^0 d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau + \beta) + \frac{1}{2} \int_0^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau) \\
 &= \pm \frac{1}{2} \int_0^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n(\tau-\beta)} \mathcal{G}_\beta(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau) \\
 &= \frac{1}{2} (1 \pm e^{-i\omega_n\beta}) \int_0^{+\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_\beta(\tau). \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

Vemos que la condición de periodicidad es no trivial como ya se había mencionado. Recordando que $\omega_n = n\pi/\beta$ se reescribe el factor que acompaña a la integral $(1 \pm e^{-i\omega_n\beta}) = (1 \pm e^{-in\pi}) = [1 \pm (-1)^n]$ y se obtiene

$$\frac{1}{2} [1 \pm (-1)^n] = \begin{cases} \text{Bosones} & \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par o cero,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \\ \text{Fermiones} & \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par o cero,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \end{cases} \tag{4.30}$$

Es decir los Bosones y Fermiones particionan el espectro de frecuencias de manera que finalmente se tiene que

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2n\pi}{\beta} & \text{para Bosones,} \\ \frac{(2n+1)\pi}{\beta} & \text{para Fermiones,} \end{cases} \tag{4.31}$$

con $n \in \mathbb{Z}$. A este conjunto de frecuencias se le conoce como frecuencias de Matsubara.

4.3. Integral de Caminos en Espaciotiempo Euclídeo

En el capítulo anterior se argumentó que la teoría cuántica de campos que se deriva de calcular con el funcional generador $Z[J]$ (o $W[J]$) produce resultados a temperatura $T = 0$. Recordamos que el funcional generador se obtuvo al considerar una expresión del tipo

$$Z[J] = \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \lim_{t_f \rightarrow +\infty} \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x (\mathcal{L} + J\phi)\right\}. \quad (4.32)$$

Este límite no es trivial. Existe un resultado conocido como teorema de Gell-Mann-Low que garantiza que el límite existe y que además da exactamente las amplitudes de transición vacío-vacío. En este límite se demuestra que las propiedades físicas del sistema son independientes de las condiciones iniciales y finales de los campos. De esta forma, y como ya se vio en los capítulos anteriores, $Z[J]$ genera las funciones de Green (conectadas) de la teoría y de esta forma las amplitudes de transición vía el resultado LSZ.

Se ha trabajado hasta ahora la teoría cuántica de campos en un espaciotiempo de Minkowski. Esto ha sido así motivado por la naturaleza del problema tratado anteriormente. Sin embargo consideremos que necesitamos evaluar la amplitud de transición para un estado en cierta condición inicial y que luego se regrese al mismo estado como condición final. Es claro que esta amplitud de transición tiene la estructura de una traza. Por otra parte como las condiciones inicial y final son la misma, posee la estructura de condiciones periódicas. Repitiendo los pasos realizados para las amplitudes de transición pero tomando en consideración los puntos anteriores se llega a

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}(x_1) | \hat{\phi}(x_0) \rangle &= \langle \hat{\phi}_1 | e^{-i\hat{H}(t_1-t_0)} | \hat{\phi}_0 \rangle \\ &= \mathcal{N}' \int_{PBC} \mathcal{D}\phi \exp\left\{i \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3x \mathcal{L}\right\} \\ &= \mathcal{N}' \int_{PBC} \mathcal{D}\phi \exp\{iS\}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

Capítulo 4: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

donde se ha considerado que $\phi(\vec{x}_1, t_1) = \phi(\vec{x}_0, t_0)$ y de allí sale la indicación *PBC* que denota condiciones de borde periódicas.

En este punto se procede a realizar una rotación de Wick o paso al tiempo Euclídeo. Este procedimiento consiste en hacer el siguiente cambio $t = -i\tau$, es decir una rotación de $-\pi/2$ donde el tiempo pareciera correr en el eje imaginario. Como veremos, este reemplazo tiene consecuencias en todas las cantidades dinámicas de la teoría. La motivación para ir al tiempo Euclídeo puede además verse de una analogía entre el operador evolución en mecánica cuántica y la función de partición de la mecánica estadística

$$\exp\left(-it\frac{H}{\hbar}\right) = \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{it}{\hbar} = \frac{1}{kT} = \beta, \quad (4.34)$$

donde k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura del sistema. Notamos también que de momento se han restablecido todas las constantes (aunque es sólo para fijar ideas), luego se regresará a las unidades naturales que son más cómodas. Usando esta identificación se ve que $t = -i\frac{\hbar}{kT} = -i\tau$, es decir el tiempo Euclídeo depende inversamente de la temperatura $\tau \equiv \beta$.

Como se mencionó anteriormente el formalismo de tiempo Euclídeo afecta las cantidades dinámicas de la teoría. Por ejemplo el elemento de línea, el elemento de volumen del espacio tiempo y el módulo cuadrado de la cuadriposición se modifican de la siguiente manera

$$dx^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 = -(d\tau^2 + d\vec{x}^2) = -dx_E^2, \quad (4.35)$$

$$d^4x = -id\tau d^3x = -id^4x_E. \quad (4.36)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se transforma la acción. Para ser específico consi-

deremos la acción extendida para el campo escalar real

$$\begin{aligned}
 iS[\phi, J] &= i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right] \\
 &= - \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial_\tau \phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - J\phi \right] \\
 &= - \int d^4x_E (\mathcal{L}_E - J\phi) \\
 &= -S_E[\phi, J].
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Para llegar a este resultado se utilizó que $\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi = -[(\partial_\tau \phi)^2 + (\nabla \phi)^2]$. Además se definió el Lagrangiano Euclídeo y la acción Euclídea (extendida)

$$\mathcal{L}_E(\phi) = \frac{1}{2} (\partial_\tau \phi)^2 + V(\phi) = \frac{1}{2} (\partial_\tau \phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \tag{4.38}$$

$$S_E[\phi, J] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d^3x (\mathcal{L}_E - J\phi). \tag{4.39}$$

Notamos que el potencial del Lagrangeano Euclídeo se define incluyendo el término del gradiente del campo ϕ ; esto es convencional en aplicaciones del formalismo a la teoría de campos estadística.

Por conveniencia se resumen los resultados más importantes para hacer la transformación al tiempo Euclídeo (rotación de Wick)

$$x_E = (\vec{x}, x_4) = (\vec{x}, \tau), \quad \text{con} \quad \tau = x_4 = ix^0 = it. \tag{4.40}$$

$$k_E = (\vec{k}, k_4), \quad \text{con} \quad k_4 = -ik^0. \tag{4.41}$$

$$d^4x_E = id^4x, \quad dx_E^2 = -dx^2, \quad \text{y} \quad d^4k_E = -id^4k, \quad dk_E^2 = -dk^2. \tag{4.42}$$

$$\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi = -(\partial_E \phi)^2, \quad \text{y} \quad \square = \partial^\mu \partial_\mu = -\square_E. \tag{4.43}$$

Una nota técnica importante tiene que ver con las fases $k^\mu x_\mu$ de las ondas planas. Puede verse que al transformar al tiempo Euclídeo se tiene

$$\begin{aligned}
 kx &= k^\mu x_\mu = k^0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x} = (ik_4)(-ix_4) - \vec{k} \cdot \vec{x} \\
 &= k_4 x_4 - \vec{k} \cdot \vec{x} \neq k_E x_E.
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

La consecuencia de esto es que la rotación de Wick no cambia la dirección de propagación de las ondas planas. Sin embargo, como la expresión (4.44) aparece frecuentemente

Capítulo 4: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

bajo una integración sobre d^3k , puede hacerse el cambio $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ y el resultado no cambia. De esta manera, únicamente cuando la expresión kx aparece bajo una integral de Fourier puede hacerse el reemplazo $kx = k_E x_E$ cuando sea conveniente.

Una vez discutida la transformación al tiempo Euclídeo, retomamos la revisión de la amplitud de transición (4.33). Se comprueba que al pasar al tiempo Euclídeo se tiene

$$\begin{aligned}
 Z[J]_E &= \text{Tr} \exp(-\tau \hat{H}) = \langle \hat{\phi} | e^{-\tau \hat{H}} | \hat{\phi} \rangle \\
 &= \mathcal{N}' \int_{PBC} \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d^3x (\mathcal{L}_E - J\phi)\right\} \\
 &= \mathcal{N}' \int_{PBC} \mathcal{D}\phi \exp\{-S_E\} .
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

En esta expresión se ha identificado $t_1 - t_0 = -i\tau$ y se transformaron las cantidades apropiadamente realizando la rotación de Wick. Es oportuno realizar varias observaciones. La primera es el parecido notable que tiene esta expresión con la función de partición que aparece en la mecánica estadística. De hecho, como se explica en (4.2), en mecánica estadística puede definirse la función de partición como $Z(\beta) = \text{Tr} \hat{\rho}(\beta)$ donde $\hat{\rho}(\beta) = e^{-\beta \hat{H}}$ es la matriz densidad del sistema. La segunda observación importante es que se ha comenzado con una teoría en $d = 3 + 1$ dimensiones y al realizar la transformación tenemos una teoría en $d = 4$ dimensiones todas espaciales, la dependencia temporal se ha eliminado. Esto quiere decir que la física que se está modelando vía esta transformación no evoluciona, está en equilibrio. Este resultado es completamente general y dice que una teoría de campos relativista en $D + 1$ dimensiones Minkowski transforma a una teoría de campos estadística en $D + 1$ dimensiones Euclídeas ($D + 1$ dimensiones espaciales). Este aspecto caracteriza al formalismo de tiempo imaginario o de Matsubara.

Otra observación importante que se deriva de (4.45) es que al hacer $\tau_0 \rightarrow -\infty$ y $\tau_1 \rightarrow +\infty$ se llega a que la amplitud de transición es del tipo vacío-vacío pero esta vez relacionada a una teoría estadística en $D + 1$ dimensiones Euclídeas; es decir se tiene una teoría de campos estadística a $T = 0$. Este hecho puede entenderse recordando la

Capítulo 4: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

equivalencia $\tau \equiv \beta$, de manera que si $\tau \rightarrow \infty$ entonces $\beta \rightarrow \infty$ y por lo tanto $T \rightarrow 0$. Si por el contrario se mantiene τ finito por ejemplo haciendo $\tau_0 = 0$ y $\tau_1 = \beta$, se escribe

$$\begin{aligned} Z[J]_\beta &= \mathcal{N}' \int_{PBC} \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x (\mathcal{L}_E - J\phi)\right\} \\ &= \mathcal{N}' \int_{PBC} \mathcal{D}\phi \exp\{-S_E\}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

y por lo tanto se llega a una teoría de campos estadística a temperatura finita. En esta teoría recordamos que los campos satisfacen condiciones de borde periódicas en tiempo imaginario $\phi(\tau, \vec{x}) = \phi(\tau + \beta, \vec{x})$ (mencionamos por completitud que si los campos son Fermiónicos se debe satisfacer condiciones de borde antiperiódicas). De estas observaciones se desprende otro hecho notable y es que una teoría cuántica de campos en $d = D + 1$ dimensiones Minkowski, a temperatura finita T y en el equilibrio es equivalente a una teoría cuántica de campos en un espacio Euclídeo en $D + 1$ dimensiones pero con una de sus dimensiones enrolladas, compactificada. Es decir el espaciotiempo Euclídeo se enrolla en un cilindro con perímetro $\beta = 1/T$.

4.4. Ejemplo: Campo Escalar Real Libre

Para el campo escalar real libre el funcional generador (o la función de partición) es

$$\begin{aligned} Z_0[J]_\beta &= \int_{PBC} \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(\frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 - J\phi\right)\right\} \\ Z_0[0]_\beta &= \int_{PBC} \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2} \sum_{n, \vec{k}} \phi(-\vec{k}) (\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2) \phi(\vec{k})\right\}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

donde $\omega_n = 2\pi n/\beta$ con $n = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$ y se utilizaron las siguientes expresiones

$$\phi(\tau, \vec{x}) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n, \vec{k}} e^{-i\omega_n\tau + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi_n(\vec{k}) \quad (4.48)$$

$$\int d\tau d^3x e^{-i\omega_n\tau - i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \beta V \delta_{\vec{k}, 0} \delta_{\omega_n, 0}. \quad (4.49)$$

Capítulo 4: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

Como el argumento de la exponencial en (4.47) está en forma cuadrática es posible realizar una integración Gaussiana. Al hacerlo se obtiene

$$Z_0[0]_\beta = \frac{N}{\sqrt{\det[\beta^2(\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2)]}}, \quad (4.50)$$

y por lo tanto el funcional generador $W_0[0]_\beta$ es

$$\begin{aligned} W_0[0]_\beta &= -\ln Z_0[0]_\beta = \frac{1}{2} \sum_{n, \vec{k}} \ln [\beta^2(\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2)] + \text{const.} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n, \vec{k}} \ln [\beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)] + \text{const.}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde se definió la cantidad $\omega^2 = \vec{k}^2 + m^2$. Para llegar a la ecuación anterior se utilizó el resultado $\ln \det A = \text{Tr} \ln A$. Seguidamente se procede a sumar la parte relacionada con n [29]. Para ello se usan las relaciones

$$\ln[\beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)] = \ln[1 + (2\pi n)^2] + \int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n)^2}, \quad (4.52)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + (\theta/2\pi)^2} = \frac{2\pi^2}{\theta} \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1}\right). \quad (4.53)$$

Al aplicar estas relaciones a (4.51) se obtiene (omitiendo términos constantes)

$$\begin{aligned} -\ln Z_0[0]_\beta &= \frac{1}{2} \sum_{n, \vec{k}} \ln [\beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n, \vec{k}} \int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \int_1^{\beta^2 \omega^2} d\theta^2 \sum_n \frac{1}{\theta^2 + (2\pi n)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \int_1^{\beta^2 \omega^2} d\theta^2 \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \left[\beta\omega + 2 \ln(1 - e^{-\beta\omega^2}) \right]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Finalmente al tomar el límite termodinámico $\sum_{\vec{k}} \rightarrow V \int d^3\mathbf{k}/(2\pi)^3$ se encuentra la energía libre de Helmholtz $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$

$$F = \frac{V}{\beta} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} \beta\omega + \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \right]. \quad (4.55)$$

Capítulo 4: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

Una vez calculada la energía libre (que vemos por (4.51) es una cantidad análoga al funcional W), es posible calcular otras cantidades termodinámicas como la energía y la presión. Eliminando la contribución de punto cero de estas cantidades se obtiene

$$F = \frac{V}{\beta} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega}), \quad (4.56)$$

$$E = \frac{\partial}{\partial\beta}(-\beta F) = V \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (4.57)$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{1}{\beta} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega}). \quad (4.58)$$

Reconocemos en estas ecuaciones la distribución de Bose-Einstein para el número de ocupación de estados Bosónicos. Las relaciones encontradas representan valores macroscópicos para un gas de partículas escalares.

4.5. Teoría de Perturbaciones y Reglas de Feynman

Ya hemos visto que para Lagrangianos que poseen términos más allá del cuadrático, no puede realizarse la integración funcional de forma exacta y por lo tanto es necesario desarrollar técnicas perturbativas de manera que se pueda calcular al menos en el régimen de acoplamiento débil.

Consideremos la teoría $\lambda\phi^4$ está vez a temperatura finita, $T \neq 0$ definida por el siguiente Lagrangiano (4.38) que acá repetimos

$$\mathcal{L}(\phi) \longrightarrow \mathcal{L}_E(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (4.59)$$

Este Lagrangiano es análogo al estudiado en el capítulo anterior, pero está vez hemos hecho una rotación de Wick y pasamos al formalismo de tiempo imaginario.

Para proceder a desarrollar la teoría de perturbaciones para el formalismo de tiempo imaginario, procedemos primero a encontrar el propagador. Para esto consideramos la acción en (4.47). Al integrar por partes y usar la periodicidad del campo ϕ

se tiene

$$S_E = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi, \quad (4.60)$$

de manera que el funcional generador es

$$Z_0[J]_\beta = \int_{PBC} \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} \phi \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi - J\phi \right] \right\}. \quad (4.61)$$

Este funcional es Gaussiano y puede integrarse en la forma usual. Puede verse también que, a diferencia del caso a $T = 0$, el comportamiento oscilatorio ya no está y la convergencia está garantizada. Usando la versión funcional de la integral Gaussiana, es decir $\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \phi A \phi + \int J\phi \right\} = \mathcal{N} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int J A^{-1} J \right\}$ se encuentra que el propagador (que corresponde a A^{-1}) es

$$\mathcal{G}_\beta(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_\beta(\omega_n, \vec{k}) e^{-i(\omega_n \tau - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad \text{con} \quad (4.62)$$

$$\mathcal{G}_\beta(\omega_n, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2}. \quad (4.63)$$

El propagador satisface la ecuación $(-\square_E + m^2)\mathcal{G}_\beta(\tau, \vec{x}) = \delta(\tau)\delta^3(x)$. Se comprueba además que es invariante bajo traslaciones en las coordenadas (τ, \vec{x}) , lo cual implica la conservación de la energía y el momentum como es sabido de aplicar el teorema de Noether. Un aspecto que vale la pena destacar en este punto y que ya fue mencionado en el capítulo anterior es que al hacer la rotación de Wick, el propagador ya no tiene singularidades sobre el contorno temporal y de esta forma no es necesaria la prescripción de Feynman porque la integración está bien definida.

4.5.1. Reglas de Feynman a $T \neq 0$ en el Formalismo de Tiempo Imaginario

Una vez calculado el propagador se ve que todas las deducciones realizadas en el capítulo anterior pueden adaptarse a este. Es decir los cálculos a temperatura finita son formalmente análogos a los realizados a temperatura cero. Esto queda reflejado en las reglas de Feynman para teorías cuánticas de campo a temperatura finita en el

Capítulo 4: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

equilibrio (usando el formalismo de tiempo imaginario o de Matsubara). En el espacio de momento las reglas de feynman son

1. Dibujar todos los diagramas conectados diferentes que contribuyen a cierto proceso y al orden $\mathcal{O}(\lambda^n)$ deseado.
2. Se asigna un propagador $\mathcal{G}_\beta(\omega_n, \vec{k})$ a cada línea interna.
3. Se asigna un factor $-\lambda$ a cada vértice.
4. Se integra sobre todo momento interno usando $\frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$.
5. Se determina el factor de simetría.

A manera de ejemplo consideramos la contribución a primer orden en λ . Vemos que en este caso hay un solo diagrama y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 F_1 = -\ln Z_1[0]_\beta &= - \text{diagrama} \\
 &= -\frac{(-\lambda)}{8} V\beta \left[\frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2} \right]^2 \\
 &= \frac{\lambda}{8} V\beta \left[\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \right]^2 + (\text{término a } T = 0). \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

Este resultado representa la corrección a la energía libre (funcional generador). Típicamente se debe tomar algún límite (alta o baja temperatura) para lograr evaluar la integral. Vemos además que nuevamente aparece el número de ocupación para estados Bosónicos. De manera análoga pueden obtenerse expresiones para cualquier función de Green que se requiera y que esté a temperatura finita y en el equilibrio; sólo hay que seguir las reglas de Feynman y calcular.

4.5.2. Ejemplo: Corrección al Propagador (1 loop) a $T \neq 0$ en el Formalismo de Tiempo Imaginario

En esta sección veremos cómo se modifica el propagador debido a la presencia de un término de interacción [28, 30], de la misma manera como se realizó en el capítulo anterior. Se trabajará con la teoría $\lambda\phi^4$ para un campo escalar real.

En la sección anterior quedó establecido que en el caso a T finita el vértice viene dado por el factor

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} = -\lambda . \quad (4.65)$$

De esta manera se observa que la corrección al propagador a primer orden en λ viene dada por el diagrama a 1-loop

$$\begin{array}{c} \text{loop} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} . \quad (4.66)$$

Al igual que en el caso a $T = 0$ visto en el capítulo anterior, el efecto de la corrección puede verse como una modificación en el parámetro de la masa. Esta corrección se expresa de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Delta m^2 &= \left(\frac{\lambda}{2}\right) \left[\frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\frac{4n^2\pi^2}{\beta^2} + \mathbf{k}^2 + m^2} \right] \\ &= \frac{\lambda}{2\beta} \left(\frac{\beta^2}{4\pi^2}\right) \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{n^2 + \left(\frac{\beta\omega_{\mathbf{k}}}{2\pi}\right)^2}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde se ha definido $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Recordamos además que n recorre los números enteros. A continuación se intercambia el orden de la sumatoria y la integral, de esta manera puede realizarse la suma utilizando la siguiente identidad

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a), \quad \text{para } a > 0 \quad (4.68)$$

Capítulo 4: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

y se verifica que $a = \frac{\beta\omega_k}{2\pi}$ es positivo. Sustituyendo esta relación en la ecuación (4.67) encontramos que

$$\Delta m^2 = \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k} \coth\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right). \quad (4.69)$$

Utilizando la identidad $\coth(x) = 1 + 2n_B(2x)$ como en (4.53), con $n_B(x) = (e^x - 1)^{-1}$ la distribución de Bose-Einstein, es posible reexpresar esta relación de una forma en la que puede interpretarse de manera más sencilla. Al sustituir la identidad vemos que la corrección a la masa queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Delta m^2 &= \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k} + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k} \left(\frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1} \right) \\ &= \Delta m_0^2 + \Delta m_T^2. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Se observa que la corrección a la masa consiste en dos términos. El primero, Δm_0^2 , es claramente independiente de la temperatura T y de hecho es la contribución encontrada en el capítulo anterior (3.36). El segundo término Δm_T^2 es la corrección debida a la temperatura. Otro hecho que podemos ver es que la contribución térmica no diverge en el ultravioleta (aunque no puede evaluarse la integral en forma cerrada); de esta manera se conserva el comportamiento ultravioleta que tenía la teoría a $T = 0$. En el caso en que la masa puede considerarse pequeña en relación al momento, puede encontrarse una aproximación en el límite de alta temperatura

$$\Delta m_T^2 = \frac{\lambda T^2}{24} + O\left(\frac{m}{T}\right). \quad (4.71)$$

Esta contribución es análoga a la que presenta una partícula moviéndose en un medio.

En este capítulo hemos encontrado varios resultados importantes. Se ha visto que una teoría cuántica de campos en el equilibrio termodinámico puede obtenerse a partir de una rotación de Wick y el paso a la formulación de tiempo Euclídeo. De esta forma encontramos que una teoría en $d = D + 1$ dimensiones Minkowski corresponde a una teoría en $D + 1$ dimensiones Euclídea pero con una dimensión compactificada; de esta manera queda una teoría con D dimensiones espaciales que modela un sistema en el equilibrio termodinámico. Al realizar la compactificación se estudiaron los efectos de

Capítulo 4: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Imaginario

tomar el límite de perímetro infinito o de mantenerlo finito y así se comprobó que una teoría de campos a $T \neq 0$ puede verse como la consecuencia de dos factores: a) el efecto de tamaño finito en una de sus dimensiones y b) pedir que los campos satisfagan condiciones de borde periódicas en los extremos de la dimensión compacta.

La formulación de tiempo imaginario, o de Matsubara, no es la única para tratar problemas a temperatura finita. Sin embargo es ideal para tratar problemas en el equilibrio debido a que desde el inicio la dependencia temporal t de los campos se ha suprimido para realizar la dependencia de los campos con la temperatura T . Ahora bien hay procesos y sistemas donde es de interés preservar la dependencia temporal y aun así contemplar también la dependencia con la temperatura; por ejemplo la evolución de los sistemas en una transición de fase. Existe un formalismo alterno llamado formalismo de tiempo real o de contorno cerrado que permite considerar estas situaciones y que estudiaremos en el próximo capítulo.

Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Real

En este capítulo se abordará el estudio de una formulación alternativa a los problemas con temperatura finita. En esta formulación el tiempo es real de manera que en principio pueden tratarse aspectos dinámicos de los sistemas estudiados. Existen varias realizaciones del formalismo de tiempo real que dan resultados equivalentes, al menos en el equilibrio. En este trabajo sólo se estudiará el formalismo de camino cerrado (o también conocido como formalismo *in-in*) [19, 31, 32]. Sin embargo mencionamos que no es la única forma de abordar el problema. Por ejemplo existe otra formulación conocida como dinámica de termocampos que no será tratada en este trabajo. Por la revisión que se ha hecho, creemos que el formalismo de camino cerrado tiene mayor alcance y además unifica los aspectos de equilibrio y no equilibrio.

5.1. Formalismo de Tiempo Real

Consideremos un sistema en un estado mixto descrito por una matriz densidad $\hat{\rho}$. Además se asume que el sistema está en contacto con otro sistema que llamamos entorno y no necesariamente están en el equilibrio térmico. En general la matriz densidad

del sistema es

$$\hat{\rho}(t) = \sum_n p_n |\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t)|, \quad (5.1)$$

donde p_n describe las probabilidades de hallar al sistema en el estado $|\psi_n(t)\rangle$. Por simplicidad se ha asumido que los estados del sistema son discretos, la extensión a estados continuos es directa. Dado que p_n es una probabilidad se satisface $\sum_n p_n = 1$. La matriz densidad satisface la ecuación de Liouville cuántica

$$i\frac{\partial\hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]. \quad (5.2)$$

Para llegar a esta ecuación se consideró que p_n es independiente del tiempo. Si bien es una restricción, permite no hacer ninguna suposición sobre el entorno que rodea al sistema bajo estudio lo cual puede entenderse como una hipótesis adiabática. De igual forma, en el análisis de sistemas físicos fundamentales ocurre frecuentemente que los sistemas evolucionan adiabáticamente de manera que esta hipótesis es de interés.

Los valores medios de operadores, en el marco de Schrödinger, pueden calcularse de la forma usual

$$\langle\hat{A}\rangle(t) = \text{Tr}[\hat{\rho}(t)\hat{A}] = \sum_n p_n \langle\psi_n(t)|\hat{A}|\psi_n(t)\rangle. \quad (5.3)$$

Es claro que los valores medios adquieren dependencia temporal debido a que la matriz densidad en general depende del tiempo.

Se analizará con mayor detalle la matriz densidad de forma que se pueda obtener una expresión para la ecuación (5.3). Si el Hamiltoniano del sistema es independiente del tiempo, la ecuación (5.2) tiene como solución $\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t} \hat{\rho}(0) e^{+i\hat{H}t}$. Además, si $[\hat{H}, \hat{\rho}(0)] = 0$, la matriz densidad es constante en el tiempo y por lo tanto describe un sistema en el equilibrio. Esto ocurre por ejemplo si los estados $|\psi_n(t)\rangle$ son estacionarios. Por otra parte, usando la relación (5.3) y haciendo $\hat{A} = \mathbf{1}$ se obtiene

$$\langle\hat{\mathbf{1}}\rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}(t)] = \sum_n p_n. \quad (5.4)$$

Capítulo 5: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Real

De esta relación puede inferirse que si las probabilidades siguen una distribución de boltzmann, la matriz densidad también será independiente del tiempo y por lo tanto el sistema descrito está en el equilibrio. Por supuesto que esto ya lo sabemos, sólo estamos verificando la consistencia del formalismo.

Ahora bien, en general el sistema no tiene que estar en el equilibrio y el Hamiltoniano puede tener una dependencia explícita con el tiempo, de manera que la matriz densidad se escribe utilizando el operador evolución

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, 0) \hat{\rho}(0) \hat{U}(0, t), \quad (5.5)$$

donde el operador evolución satisface

$$i \frac{\partial \hat{U}(t, t')}{\partial t} = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t') \quad \longrightarrow \quad \hat{U}(t, t') = \mathcal{T} \left(e^{-i \int_{t'}^t dt'' \hat{H}(t'')} \right), \quad (5.6)$$

con $\mathcal{T}(\dots)$ el operador tiempo ordenado y donde el operador evolución satisface $\hat{U}(t, t) = \mathbf{1}$. Además se satisfacen relaciones análogas a las (4.14-4.17)

$$\hat{U}^{-1}(t_2, t_1) = \hat{U}^\dagger(t_2, t_1) = \hat{U}(t_1, t_2), \quad (5.7)$$

$$\hat{U}(t_3, t_2) \hat{U}(t_2, t_1) = \hat{U}(t_3, t_1). \quad (5.8)$$

El operador de evolución $\hat{U}(t_2, t_1)$ es el análogo en la formulación en tiempo real al operador $\hat{S}(\tau_2, \tau_1)$ en la formulación de tiempo imaginario.

Consideremos que el sistema evoluciona según el siguiente Hamiltoniano

$$\hat{H}(t) = \begin{cases} \hat{H}_i, & \text{para } \text{Re}[t] \leq 0; \\ \hat{\mathcal{H}}(t), & \text{para } \text{Re}[t] \geq 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Debido a que \hat{H}_i no depende del tiempo para $\text{Re}[t] \leq 0$, se puede asumir que la matriz densidad en este rango es independiente del tiempo y por lo tanto el sistema está en equilibrio. De esta forma puede escribirse

$$\hat{\rho}(0) = \frac{e^{-\beta \hat{H}_i}}{\text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}_i}]}, \quad (5.10)$$

para algún Hamiltoniano \hat{H}_i independiente del tiempo. El significado físico de (5.9-5.10) es que para $t \leq 0$ se ha preparado el sistema en un estado de equilibrio con temperatura β y se deja evolucionar al sistema con un Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}(t)$ que puede ser dependiente del tiempo. Es claro que si se tiene $\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{H}_i$, el sistema evoluciona en el equilibrio pero en general no ocurrirá esto.

Como se ha supuesto que para $\text{Re}[t] \leq 0$ el sistema está en equilibrio (y el Hamiltoniano es independiente del tiempo) se tiene que el operador de evolución es de la forma $\hat{U}(t, t') = e^{-i\hat{H}_i(t-t')}$ de manera que la ecuación (5.10)

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(0) &= \frac{e^{-\beta\hat{H}_i} \mathbb{1}}{\text{Tr}[e^{-\beta\hat{H}_i}]} = \frac{e^{-\beta\hat{H}_i} \hat{U}(T, 0) \hat{U}(0, T)}{\text{Tr}[e^{-\beta\hat{H}_i}]} = \frac{e^{-\beta\hat{H}_i} e^{-i\hat{H}_i T} e^{+i\hat{H}_i T}}{\text{Tr}[e^{-\beta\hat{H}_i}]} \\ &= \frac{e^{-i(T-i\beta)\hat{H}_i} e^{+i\hat{H}_i T}}{\text{Tr}[e^{-\beta\hat{H}_i}]} = \frac{\hat{U}(T - i\beta, T)}{\text{Tr}[\hat{U}(T - i\beta, T)]}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde se utilizaron las propiedades (5.7,5.8) del operador de evolución. En esta expresión T es un valor temporal tal que $T < 0$. De esta forma la matriz densidad (5.5) queda expresada de la forma siguiente

$$\hat{\rho}(t) = \frac{\hat{U}(t, 0) \hat{U}(T - i\beta, T) \hat{U}(0, t)}{\text{Tr}[\hat{U}(T - i\beta, T)]}. \quad (5.12)$$

Recordamos que esta expresión es la matriz densidad para un sistema en equilibrio.

Una vez que se tiene la matriz densidad pueden calcularse los valores medios de los observables. Por ejemplo, utilizando la propiedad cíclica de la traza y las propiedades de operador de evolución, puede verse que para un operador \hat{A} se cumple

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle(t) &= \text{Tr}[\hat{\rho}(t) \hat{A}] \\ &= \frac{\text{Tr}[\hat{U}(t, 0) \hat{U}(T - i\beta, T) \hat{U}(0, t) \hat{A}]}{\text{Tr}[\hat{U}(T - i\beta, T)]} \\ &= \frac{\text{Tr}[\hat{U}(T - i\beta, T) \hat{U}(T, t) \hat{A} \hat{U}(t, T)]}{\text{Tr}[\hat{U}(T - i\beta, T)]}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Es importante recordar que para $T < 0$ los operadores $\hat{U}(T - i\beta, T)$ y $\hat{U}(T, 0)$ conmutan.

Capítulo 5: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Real

Finalmente, considerando $T' > 0$ y utilizando la propiedad (5.8) se puede reescribir la ecuación (5.13) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \langle A \rangle(t) &= \frac{\text{Tr}[\hat{U}(T - i\beta, T) \hat{U}(T, T') \hat{U}(T', T) \hat{U}(T, t) \hat{A} \hat{U}(t, T)]}{\text{Tr}[\hat{U}(T - i\beta, T)]} \\ &= \frac{\text{Tr}[\hat{U}(T - i\beta, T) \hat{U}(T, T') \hat{U}(T', t) \hat{A} \hat{U}(t, T)]}{\text{Tr}[\hat{U}(T - i\beta, T) \hat{U}(T, T') \hat{U}(T', T)]}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Observando la estructura de esta expresión puede derivarse una interpretación. El sistema evoluciona de un tiempo negativo T hasta un tiempo t donde actúa el operador \hat{A} . Luego el sistema evoluciona desde t hasta un tiempo T' para posteriormente regresar al tiempo T y finalmente bajar por el tiempo imaginario $T - i\beta$. Podemos observarlo en la siguiente figura

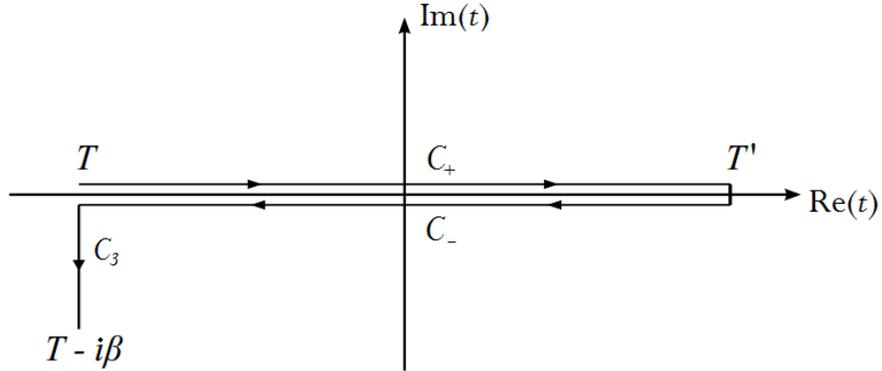


Figura 5.1: Contorno Formalismo Tiempo Real

Se han separado los caminos de ida y vuelta C_+ y C_- respectivamente únicamente para poder visualizarlos; al momento de calcular no existe tal separación y ambos caminos están sobre el eje real. Posteriormente se considerarán los límites $T \rightarrow -\infty$ y $T' \rightarrow +\infty$.

La expresión del valor medio (5.14) sugiere un funcional generador que viene dado por la expresión

$$Z[J_c] = \text{Tr}[\hat{U}_{J_c}(T - i\beta, T) \hat{U}_{J_c}(T, T') \hat{U}_{J_c}(T', T)], \quad (5.15)$$

el subíndice J_c indica que se insertan fuentes a lo largo del contorno de manera de generar las funciones de Green usando el procedimiento usual. Sin embargo en este caso las fuentes pueden estar tanto en el contorno C_+ como en C_- . Es claro que si el Hamiltoniano no cambia en el tiempo se obtiene $\hat{U}_{J_c}(T, T') \hat{U}_{J_c}(T', T) = 1$ trivialmente y de esta manera se recupera el formalismo de tiempo imaginario estudiado en el capítulo anterior. Ahora bien, también es posible considerar Hamiltonianos dependientes del tiempo, en cuyo caso no se cumple la condición mencionada anteriormente y de esta manera se puede estudiar un sistema fuera del equilibrio.

5.2. Propagadores en el Formalismo de Tiempo Real

Dada la expresión (5.15) puede darse una representación en integrales de camino al funcional generador. Tratemos específicamente el caso del campo escalar real. El funcional generador en este caso es

$$Z[J_c] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[i \int_c dt \int d^3x (\mathcal{L} + J_c \phi)\right], \quad (5.16)$$

donde hemos colocado el subíndice para indicar que estamos considerando el contorno dado por la figura (6.1). Además $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2$. El campo ϕ debe satisfacer condiciones de periodicidad como ya se ha discutido $\phi(\vec{x}, \beta) = \phi(\vec{x}, 0)$.

Al tomar derivadas respecto a J_c es posible generar las funciones de Green. Lo nuevo es que ahora los campos viven en sectores distintos del contorno, es decir C_+ , C_- o C_3 . Tenemos como ya sabemos

$$\begin{aligned} G_c(t-t') &= iD_c(t-t') = \langle T_c[\phi(t)\phi(t')] \rangle \\ &= \Theta_c(t-t') \langle \phi(t)\phi(t') \rangle + \Theta_c(t'-t) \langle \phi(t')\phi(t) \rangle \\ &= \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{1}{Z[J_c]} \frac{\delta^2 Z[J_c]}{\delta J_c(t) \delta J_c(t')} \Big|_{J_c=0}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

en esta expresión sólo se coloca la dependencia temporal por simplicidad de notación pero todas las expresiones dependen de las coordenadas espaciales como corresponde.

Capítulo 5: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Real

La función $D_c(t-t')$ corresponde al propagador y es análogo al propagador de Feynman en el formalismo a $T = 0$. Los tiempos t y t' son tiempos que pueden localizarse en cualquier parte del contorno. En el formalismo de tiempo real de contorno cerrado todo tiempo en el contorno de vuelta $t_- \in C_-$ es posterior a cualquier tiempo en el camino de ida $t_+ \in C_+$; es decir siempre se satisface $t_- > t_+$. Es claro que la función theta de Heaviside $\Theta_c(t-t')$ debe definirse apropiadamente sobre el contorno de la manera siguiente

$$\Theta_c(t-t') = \begin{cases} \Theta(t-t'), & t, t' \text{ sobre } C_+, \\ \Theta(t'-t), & t, t' \text{ sobre } C_-, \\ 0, & t \text{ sobre } C_+, t' \text{ sobre } C_-, \\ 1, & t' \text{ sobre } C_+, t \text{ sobre } C_-, \end{cases} \quad (5.18)$$

con esta definición de la theta de Heaviside la función delta de Dirac sobre el contorno viene dada por

$$\delta_c(t-t') = \frac{d\Theta_c(t-t')}{dt} = \begin{cases} \delta(t-t'), & t, t' \text{ sobre } C_+, \\ -\delta(t'-t), & t, t' \text{ sobre } C_-, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (5.19)$$

No hemos considerado la posibilidad de que el tiempo esté evaluado sobre el segmento C_3 . Esto se debe a que no aporta información distinta a la encontrada en el capítulo anterior. Además, en el caso en que se toma el límite $T \rightarrow +\infty$ en (5.15) se tiene que los contornos C_\pm y C_3 se desacoplan; es decir no están correlacionados. De esta forma puede separarse el problema general en dos partes: a) una primera parte correspondiente a la evolución sobre el eje real (lo cual lleva a un problema dinámico a temperatura finita) y b) una segunda parte relacionada con la evolución sobre el segmento imaginario (lo cual lleva el problema en equilibrio a temperatura finita).

El funcional generador (5.16) puede integrarse en la forma como se han tratado los problemas en los capítulos anteriores y se obtiene

$$Z[J_c] = Z_0[0] \exp\left[-\frac{i}{2} \int_c dt dt' \int d^3x d^3y J_c(\vec{x}, t) D_c(\vec{x} - \vec{y}, t - t') J_c(\vec{y}, t')\right], \quad (5.20)$$

Capítulo 5: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Real

donde el propagador satisface la ecuación

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)D_c(\vec{x} - \vec{y}, t - t') = -\delta^3(x - y)\delta_c(t - t'). \quad (5.21)$$

Para resolver esta ecuación conviene transformar Fourier la parte espacial. Al hacer esto y utilizar la condición KMS de periodicidad $\langle \phi(t)\phi(t') \rangle = \langle \phi(t')\phi(t + i\beta) \rangle$ se obtiene

$$D_c(t - t', \omega_{\vec{k}}) = \frac{n_B(\omega_{\vec{k}})}{2i\omega_{\vec{k}}} \left[\Theta_c(t - t') \left(e^{\beta\omega_{\vec{k}}} e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t')} + e^{+i\omega_{\vec{k}}(t-t')} \right) + \Theta_c(t' - t) \left(e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t')} + e^{\beta\omega_{\vec{k}}} e^{+i\omega_{\vec{k}}(t-t')} \right) \right], \quad (5.22)$$

con $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. La función $n_B(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}$ es la distribución de Bose-Einstein. Notamos que el propagador (5.22) es una función par en la parte temporal. Podemos ver también que al tomar el límite $\beta \rightarrow +\infty$ se recupera el propagador de Feynman a $T = 0$. Finalmente si t' se elige en el segmento C_3 del contorno se cumple

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} D_c(t - T + is) \longrightarrow 0. \quad (5.23)$$

Este es el resultado que demuestra que los segmentos C_\pm y C_3 no están correlacionados. De esta manera la contribución del segmento C_3 factoriza en la integral de camino y puede absorberse en un factor dependiente de la temperatura pero que no incide en los aspectos dinámicos del problema. Sin embargo es importante decir que este límite puede realizarse siempre que la dependencia temporal sea respecto a la diferencia $t - t'$. Esto ocurre en los problemas que están en el equilibrio o en problemas con soluciones estacionarias. En problemas fuera del equilibrio, la solución no es invariante bajo traslaciones temporales y el límite (5.23) necesita ser tratado cuidadosamente.

Hemos visto que puede omitirse el aporte del segmento C_3 siempre que se trate de problemas estacionarios. Asumiendo esto se tiene que la integración en contorno temporal describe un camino cerrado de ida y vuelta que puede escribirse como

$$\int_c dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_+ - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_-. \quad (5.24)$$

El primer término corresponde a los tiempos en C_+ y el segundo término a los tiempos en C_- . De esta manera pueden calcularse los valores medios de la teoría.

5.2.1. Estructura Matricial del Propagador

Debido a la naturaleza del contorno en el formalismo de tiempo real, el propagador tiene una estructura más compleja que la encontrada en los capítulos anteriores. Esto se debe a que es posible tener correlaciones entre los distintos segmentos del contorno. De esta manera se tienen cuatro propagadores, dependiendo del contorno donde se ubiquen los tiempos t y t' .

Para escribir explícitamente los propagadores se utilizan las expresiones (5.22) y (5.18), obteniendo

$$D_{++}(t-t', \omega_{\vec{k}}) = \frac{1}{2i\omega_{\vec{k}}} \left[\left(\Theta(t-t') + n_B(\omega_{\vec{k}}) \right) e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t')} + \left(\Theta(t'-t) + n_B(\omega_{\vec{k}}) \right) e^{i\omega_{\vec{k}}(t-t')} \right], \quad (5.25)$$

$$D_{--}(t-t', \omega_{\vec{k}}) = \frac{1}{2i\omega_{\vec{k}}} \left[\left(\Theta(t'-t) + n_B(\omega_{\vec{k}}) \right) e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t')} + \left(\Theta(t-t') + n_B(\omega_{\vec{k}}) \right) e^{i\omega_{\vec{k}}(t-t')} \right], \quad (5.26)$$

$$D_{+-}(t-t', \omega_{\vec{k}}) = \frac{1}{2i\omega_{\vec{k}}} \left[n_B(\omega_{\vec{k}}) e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t')} + \left(1 + n_B(\omega_{\vec{k}}) \right) e^{i\omega_{\vec{k}}(t-t')} \right], \quad (5.27)$$

$$D_{-+}(t-t', \omega_{\vec{k}}) = \frac{1}{2i\omega_{\vec{k}}} \left[\left(1 + n_B(\omega_{\vec{k}}) \right) e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t')} + n_B(\omega_{\vec{k}}) e^{i\omega_{\vec{k}}(t-t')} \right], \quad (5.28)$$

donde los subíndices en estas expresiones indican la pertenencia a una de las ramas del contorno (+ de ida, - de vuelta). Por ejemplo $D_{+-}(t-t', \omega_{\vec{k}})$ es el propagador cuyos tiempos están en $t \in C_+$ y $t' \in C_-$.

Vemos que el propagador en el formalismo de tiempo real, consiste en cuatro propagadores relacionados con la ubicación de los tiempos en el contorno.

$$D_c(t-t', \omega_{\vec{k}}) = \begin{bmatrix} D_{++}(t-t', \omega_{\vec{k}}) & D_{+-}(t-t', \omega_{\vec{k}}) \\ D_{-+}(t-t', \omega_{\vec{k}}) & D_{--}(t-t', \omega_{\vec{k}}) \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Este hecho sugiere la definición de campos y corrientes auxiliares que también se distinguen por su ubicación en el contorno. De esta manera se escribe

$$\phi_a = \begin{bmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{bmatrix}, \quad J_a = \begin{bmatrix} J_+ \\ J_- \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

donde el subíndice $a = \{+, -\}$ denota la pertenencia al contorno C_+ o C_- .

En la ecuación (5.24) vimos que el camino de vuelta C_- está caracterizado por un signo negativo en la integración temporal (lo cual está relacionado con el ordenamiento anticronológico en el formalismo canónico). Esta característica puede ser incluida fácilmente en la expresión para el funcional generador (5.20) y de esta forma dar una expresión que utilice el arreglo matricial del propagador (5.29). Si se considera una métrica en este espacio de caminos con la forma diagonal $(+1, -1)$, el funcional generador (5.20) correspondiente a la acción $S = \int d^4x [\mathcal{L}(\phi_+, J_+) - \mathcal{L}(\phi_-, J_-)]$ se expresa de la siguiente manera

$$Z[J_+, J_-] = Z_0[0] \exp\left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^a(x) D_{ab}(x, y) J^b(y)\right]. \quad (5.31)$$

Es importante resaltar que, expresada en esta forma, la integración temporal se realiza en la forma usual $-\infty \leq t \leq +\infty$, debido la duplicación de los grados de libertad en el espacio de caminos con métrica $\text{diag}(+1, -1)$. Utilizando la forma (5.31) del funcional generador se calculan las funciones de Green de 2-puntos de la siguiente forma

$$G_{ab}(x, y) = \frac{(-i)^2}{Z[0]} \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J^a(x) \delta J^b(y)} \right|_{J=0} = iD_{ab}(x, y), \quad (5.32)$$

donde $iD_{ab}(x, y)$ debe entenderse en el sentido de (5.29). La estructura de esta función de Green es muy diferente a la del formalismo a $T = 0$ o a la del formalismo de tiempo imaginario. Notamos que G_{++} corresponde a una función tiempo ordenada usual mientras que G_{--} corresponde a una función anti-tiempo ordenada (5.2). Aún quedan las funciones G_{+-} y G_{-+} que son completamente características de esta formulación.

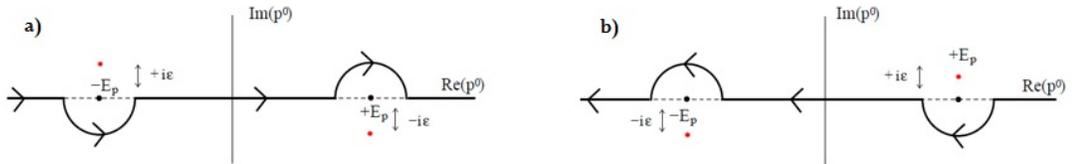


Figura 5.2: a) Polos tiempo ordenado. b) Polos anti-tiempo ordenado

Capítulo 5: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Real

Siguiendo a [19], es posible tomar la transformada de Fourier para calcular explícitamente los propagadores de la teoría escalar libre en el espacio de momento y que serán útiles en el desarrollo perturbativo de una teoría con interacción. Los escribimos directamente

$$D_{++}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2i\pi n_B(|k^0|) \delta(k^2 - m^2), \quad (5.33)$$

$$D_{--}(k) = -\frac{1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} - 2i\pi n_B(|k^0|) \delta(k^2 - m^2), \quad (5.34)$$

$$D_{+-}(k) = -2i\pi [\Theta(-k^0) + n_B(|k^0|)] \delta(k^2 - m^2), \quad (5.35)$$

$$D_{-+}(k) = -2i\pi [\Theta(k^0) + n_B(|k^0|)] \delta(k^2 - m^2). \quad (5.36)$$

Recordamos que $k^0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = \pm\omega_{\vec{k}}$. Notamos que los propagadores D_{++} y D_{--} están formados por el propagador a $T = 0$ y una parte que depende de la temperatura. Además la parte que depende de la temperatura tiene la misma forma en todos los propagadores. El término independiente de T en los propagadores corresponde al intercambio de una partícula virtual, de la misma forma que ocurre en el formalismo a $T = 0$. Por otra parte el término que depende de T en los propagadores es una contribución *on-shell*; es decir que se tiene una distribución de partículas reales que participan de los procesos de emisión y absorción en conjunto con las partículas virtuales. Otro aspecto que se observa en las relaciones (5.33-5.36) es que no todos los propagadores son independientes y se encuentra el siguiente vínculo

$$D_{++} + D_{--} = D_{+-} + D_{-+}, \quad (5.37)$$

es decir, sólo hay tres componentes independientes del propagador D_{ab} .

Hemos visto que el término que depende de la temperatura en los propagadores (5.33-5.36) corresponde a una contribución *on-shell* y de esta forma las propiedades ultravioletas de la teoría no se ven modificadas. Aunque en este trabajo no se tocarán aspectos relacionados con renormalización, puede decirse que los contratérminos que aparecen a $T = 0$ serán suficientes para renormalizar estas teorías a T finita. Sin embargo el sector infrarrojo sí presentará drásticas modificaciones que no serán objeto

de estudio en este trabajo. Un argumento físico para comprender por qué el sector ultravioleta no se ve modificado es que la contribución térmica viene dada por una distribución que para una temperatura fija se manifiesta a alta energía como una distribución de Boltzmann que suprime estos modos, previniendo así la modificación del sector ultravioleta de la teoría a $T = 0$.

La forma en que se presentan los propagadores (5.33-5.36) sobre el contorno en el formalismo de tiempo real, a veces no es la más apropiada. Sin embargo usando combinaciones de estos propagadores se construyen los propagadores que aparecen usualmente en la literatura cuando se trata de sistemas estadísticos. Estos son: propagador retardado D_R , propagador avanzado D_A y el propagador correlacionado D_C . Estos propagadores se escriben en términos de los anteriores de la siguiente forma

$$D_R = D_{++} - D_{+-} = D_{-+} - D_{--}, \quad (5.38)$$

$$D_A = D_{++} - D_{-+} = D_{+-} - D_{--}, \quad (5.39)$$

$$D_C = D_{++} + D_{--} = D_{+-} + D_{-+}. \quad (5.40)$$

Como estos propagadores son una combinación de los anteriores, se puede encontrar una transformación que permita obtenerlos directamente. Considerando las siguientes matrices

$$D = \begin{bmatrix} D_{++} & D_{+-} \\ D_{-+} & D_{--} \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & D_A \\ D_R & D_C \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

se comprueban las siguientes relaciones

$$\hat{D} = Q D Q^{-1}, \quad D = Q^{-1} \hat{D} Q. \quad (5.43)$$

Notamos que la matriz Q es unitaria $Q^{-1} = Q^\dagger$. Además vemos que una vez que se tienen los propagadores sobre el contorno (matriz D), se obtienen estos propagadores realizando el cambio de base (5.42).

A continuación, utilizando las relaciones (5.43), se escriben los propagadores en la nueva base

$$D_R = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon k^0} = \frac{1}{(k^0 + i\epsilon/2)^2 - \omega_k^2}, \quad (5.44)$$

$$D_A = \frac{1}{k^2 - m^2 - i\epsilon k^0} = \frac{1}{(k^0 - i\epsilon/2)^2 - \omega_k^2}, \quad (5.45)$$

$$D_C = -2i\pi \left(1 + 2n_B(|k^0|)\right) \delta(k^2 - m^2). \quad (5.46)$$

Vemos que los propagadores avanzado y retardado no dependen de la temperatura; toda la información sobre el promedio estadístico cae en el propagador correlacionado.

5.2.2. Ejemplo: Corrección al Propagador (1 loop) a $T \neq 0$ en el Formalismo de Tiempo Real

En esta sección veremos cómo se modifica el propagador debido a la presencia de un término de interacción; se trabajará con la teoría $\lambda\phi^4$. Como ya hemos mencionado, en el formalismo de tiempo real la acción se escribe de la forma siguiente

$$S = \int d^4x [\mathcal{L}(\phi_+) - \mathcal{L}(\phi_-)], \quad (5.47)$$

con el Lagrangiano $\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ y recordando que los subíndices $\{+, -\}$ indican que la cantidad respectiva pertenece a la rama del contorno de ida o de vuelta respectivamente.

En el capítulo 3 vimos la forma que tiene el vértice de esta teoría para el caso $T = 0$. En el caso a T finita tenemos el mismo vértice para la rama de ida pero hay una contribución para la rama de vuelta; notamos que lo único que cambia respecto al caso de ida es el signo. De esta manera tenemos dos vértices (según la rama que se considere)

$$\begin{array}{c} \text{X} \\ \bullet \end{array} = -i\lambda, \quad (5.48)$$

$$\begin{array}{c} \text{X} \\ \bullet \end{array} = +i\lambda. \quad (5.49)$$

Capítulo 5: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Real

Cada uno de estos vértices está asociado con ϕ_+ y ϕ_- respectivamente. Notamos que la constante de acople es la misma para ambos, la única diferencia es el signo. Con estos vértices es posible calcular la corrección al propagador, que corresponde a la llamada autoenergía.

En el capítulo 3 se calculó cómo se modifica el propagador en presencia del término de interacción. Recordamos que, según la ecuación (3.35) el propagador modificado es

$$D(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 - \frac{i\lambda}{2}D_F(0) + i\epsilon}. \quad (5.50)$$

Vemos que este caso corresponde a nuestro propagador en el camino C_+ . Para conseguir el análogo a esta expresión en el camino C_- , simplemente se realizan las siguientes transformaciones en la deducción original

$$\frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \longrightarrow -\frac{1}{q^2 - m^2 - i\epsilon}, \quad \lambda \longrightarrow -\lambda, \quad (5.51)$$

y de esta forma se obtiene la expresión para el propagador en la rama C_- a $T = 0$

$$D(p) = -\frac{1}{p^2 - m^2 - \frac{i\lambda}{2}D_F(0) - i\epsilon}. \quad (5.52)$$

Notamos dos características fundamentales que aparecen. La primera es el signo negativo global que aparece. La segunda es que la corrección a la masa es exactamente igual a la que aparece en la expresión (5.50); esto se mostrará explícitamente más abajo.

Para calcular la corrección al propagador a temperatura finita en el formalismo de tiempo real, se utiliza el método diagramático con la salvedad de que ahora es necesario tomar en cuenta el aporte del camino de vuelta C_- . Sabiendo que los procesos físicos ocurren todos en el camino C_+ , veamos cómo el formalismo de tiempo real a temperatura finita modifica los resultados encontrados en los capítulos anteriores.

Queremos calcular la corrección al propagador que ocurre al considerar ambos caminos. Esta corrección se obtiene al considerar los dos vértices (5.48,5.49). En términos diagramáticos, estamos interesados en calcular lo siguiente

$$\text{---} \textcircled{\text{X}} \text{---} = \text{---} + \text{---} \times \text{---} + \text{---} \times \text{---}. \quad (5.53)$$

Capítulo 5: Teoría Cuántica de Campos a Temperatura Finita - Tiempo Real

La expresión analítica equivalente a esta igualdad diagramática es

$$D_{++}^{(1)} = D_{++} + D_{++}\Pi_{++}D_{++} + D_{+-}\Pi_{--}D_{-+}. \quad (5.54)$$

El primer término es el propagador de la teoría libre. El segundo término corresponde al vértice (5.48) y se han añadido las líneas externas. El tercer término es similar al segundo pero se utilizó el vértice (5.49); notamos como debido a los propagadores libres D_{+-} y D_{-+} podemos conectar este vértice con el proceso en el cual se está interesado. Esta es una característica única del formalismo de tiempo real.

Consideremos en primer lugar la corrección debida a ϕ_+ (sobre la rama de ida)

$$\text{---}\times\text{---} = \text{---}\circ\text{---}. \quad (5.55)$$

Utilizando las técnicas diagramáticas de manera análoga al desarrollo de la expresión (3.35) , se escribe la integral para este proceso

$$\begin{aligned} \Delta m_+^2 &= \frac{(i\lambda)}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D_{++}(q) \\ &= \frac{(i\lambda)}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} - 2i\pi n_B(|q^0|) \delta(q^2 - m^2) \right] \\ &= \Delta m_0^2 + \Delta m_T^2. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Puede distinguirse claramente la contribución debido a la temperatura en la expresión anterior. A continuación se simplifica cada uno de los términos

$$\Delta m_0^2 = \frac{(i\lambda)}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\vec{q}}}, \quad (5.57)$$

$$\Delta m_T^2 = -\frac{(i\lambda)}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} 2i\pi n_B(|q^0|) \delta(q^2 - m^2) = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{n_B(\omega_{\vec{q}})}{\omega_{\vec{q}}}. \quad (5.58)$$

Para obtener el término Δm_0^2 se usó el método de los residuos para evaluar integral temporal (de la misma forma que se hizo en el capítulo 3), mientras que en el término Δm_T^2 se usó las propiedades de la delta de Dirac. Sustituyendo las expresiones

encontradas anteriormente en la ecuación (5.56) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \Delta m_+^2 &= \Delta m_0^2 + \Delta m_T^2 \\
 &= \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{\omega_{\vec{q}}} + 2 \frac{n_B(\omega_{\vec{q}})}{\omega_{\vec{q}}} \right] \\
 &= \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\vec{q}}} \coth\left(\frac{\beta\omega_{\vec{q}}}{2}\right). \tag{5.59}
 \end{aligned}$$

Recordamos que $n_B(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ es la función de Bose-Einstein. Para llegar al último paso se utilizó la identidad $\cosh(x) = 1 + 2n_B(2x)$.

Una vez calculada la contribución debida a ϕ_+ se debe calcular el aporte del campo ϕ_- o dicho de otra forma, el aporte debido al camino de vuelta en el contorno. En forma diagramática

$$\text{---} \times \text{---} = \text{---} \circ \text{---} . \tag{5.60}$$

Escribimos la contribución a la autoenergía correspondiente a este diagrama

$$\begin{aligned}
 \Delta m_-^2 &= \frac{(i\lambda)}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D_{--}(q) \\
 &= \frac{(i\lambda)}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{q^2 - m^2 - i\epsilon} - 2i\pi n_B(|q^0|) \delta(q^2 - m^2) \right] \tag{5.61}
 \end{aligned}$$

Al observar el término independiente de T , notamos que la prescripción de Feynman aparece con el signo opuesto al caso $T = 0$, lo cual quiere decir que al realizar la integración se esquivan los polos en forma opuesta a la usual (en concordancia con el sentido anticronológico del camino C_-). De esta forma se comprueba que

$$\frac{(i\lambda)}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{q^2 - m^2 - i\epsilon} \right] = \frac{(i\lambda)}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \right], \tag{5.62}$$

y por lo tanto se obtiene el resultado notable

$$\Delta m_-^2 = \Delta m_+^2. \tag{5.63}$$

Es importante destacar que este resultado se obtiene debido a que en la rama de vuelta C_- los polos se evitan en la forma opuesta a la prescripción de Feynman, y de esta

forma al evaluar los residuos el signo se cancela con el que aparece explícito en el propagador D_{--} .

Utilizando estos resultados y recordando que los términos Δm_+^2 y Δm_-^2 corresponden a la contribución a un loop sin las líneas externas (diagramas amputados), es decir $\Delta m_+^2 = \Pi_{++}$ y $\Delta m_-^2 = -\Pi_{--}$ (con el signo dado por el resultado (5.52)), se obtiene

$$\begin{aligned} D_{++}^{(1)} &= D_{++} + D_{++}\Pi_{++}D_{++} + D_{+-}\Pi_{--}D_{-+} \\ &= D_{++} + \Delta m_+^2 \left[(D_{++})^2 - D_{+-}D_{-+} \right]. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Recordamos que esta expresión está dada en el espacio de momento. Vemos que el tercer término contiene la contribución hecha por el camino C_- . Cada uno de los términos se escribe explícitamente utilizando las expresiones (5.33-5.36). Calculando explícitamente el primer término dentro del corchete de (5.64), se obtienen

$$\begin{aligned} (D_{++}(k))^2 &= \left[\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2i\pi n_B(|k^0|) \delta(k^2 - m^2) \right]^2 \\ &= \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} - 2 \frac{2i\pi n_B(|k^0|) \delta(k^2 - m^2)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &\quad + \left[2i\pi n_B(|k^0|) \delta(k^2 - m^2) \right]^2. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Notamos la presencia de un término con un producto de deltas de Dirac evaluadas en el mismo punto. Estos productos son singulares y causan problemas al formalismo; en la literatura se conocen como *pinch singularities* y es necesario evitarlas. Para el segundo término el resultado es

$$\begin{aligned} D_{+-}(k)D_{-+}(k) &= (-2i\pi)^2 [\delta(k^2 - m^2)]^2 \\ &\quad \left[\Theta(-k^0) + n_B(|k^0|) \right] \left[\Theta(k^0) + n_B(|k^0|) \right] \\ &= \left[2i\pi \delta(k^2 - m^2) \right]^2 \left[n_B(|k^0|) + (n_B(|k^0|))^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Para obtener este resultado se utilizaron las propiedades de la theta de Heaviside $\Theta(-x)\Theta(x) = 0$ y $\Theta(-x) + \Theta(x) = 1$. Sustituyendo (5.65,5.66) en el corchete de la

ecuación (5.64) encontramos que

$$(D_{++})^2 - D_{+-}D_{-+} = \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} + 4\pi n_B(|k^0|) \delta(k^2 - m^2) \left[\pi \delta(k^2 - m^2) - \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (5.67)$$

Se comprueba que se ha cancelado el término singular que aparece en (5.65) sin embargo aún queda uno de estos términos debido al resultado (5.66). Una forma de darle sentido a esta expresión es regularizando la delta de Dirac. Para esto se utiliza la expresión

$$\delta(x) \sim \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad \text{para } \epsilon \rightarrow 0. \quad (5.68)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (5.67) se encuentra

$$\begin{aligned} (D_{++})^2 - D_{+-}D_{-+} &\sim \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \\ &+ 4 n_B(|k^0|) \frac{\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \left[\frac{\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} - i \frac{k^2 - m^2 - i\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \right] \\ &= \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \\ &+ 4 n_B(|k^0|) \frac{\epsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \left[-i \frac{k^2 - m^2}{(k^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \right] \\ &\stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} + 2i\pi n_B(|k^0|) \delta'(k^2 - m^2), \end{aligned} \quad (5.69)$$

donde hemos utilizado la derivada de la delta regularizada (5.68)

$$\delta'_\epsilon(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{2\epsilon x}{(x^2 + \epsilon^2)^2}, \quad \text{con } x = k^2 - m^2. \quad (5.70)$$

La cancelación de las singularidades en (5.69) es una característica general del formalismo, al menos en el equilibrio [32]. Vemos además que tratar con campos distintos para cada rama del contorno es necesario para evitar estas patologías y poder darle sentido al desarrollo perturbativo.

Capítulo 6

Equilibrio o No-equilibrio... ¡He Ahí la Cuestión!

Es este último capítulo se tratará de ubicar a los formalismos estudiados previamente en el contexto de teorías de muchos cuerpos en el equilibrio o fuera de él [25, 29–31]. Se tratará de realizar analogías con lo que se conoce de sistemas sencillos en mecánica estadística y para así comprender cuál es el lugar de las teorías de campos estudiadas dentro de estos modelos.

6.1. Equilibrio

Lo que se quiere decir al hablar de equilibrio o no-equilibrio en sistemas estadísticos, es algo que sin duda requiere ser abordado. Aunque pareciera que la comunidad conoce plenamente las diferencias entre estos dos conceptos, existe muy poca documentación precisa que permita poder adentrarse en el tema sin riesgo de sufrir confusiones.

La primera aproximación para la comprensión de un sistema en equilibrio, es la de aislar al sistema. Esto se consigue colocando al sistema dentro de unas “paredes” de manera que no pueda haber intercambio de ninguna cantidad con el entorno: energía, partículas, etc. El proceso de medición crea perturbaciones en los sistemas aislados,

Capítulo 6: Equilibrio o No-equilibrio... ¡He Ahí la Cuestión!

estas perturbaciones se manifiestan por estados transitorios que decaerán hasta desaparecer. El tiempo de decaimiento de los estados transitorios depende del sistema bajo estudio.

Los sistemas en equilibrio pueden ser caracterizados utilizando cantidades fundamentales que se conservan, por ejemplo la energía, el número de partículas (en sistemas no relativistas), la cantidad de movimiento o el momento angular. Además puede haber dependencia con el volumen del sistema. Como un ejemplo recordemos que en un gas dentro de un contenedor si damos el número de partículas N , el volumen del sistema V y la energía E entonces conocemos el estado de equilibrio del sistema. Es decir que para otro sistema parecido al anterior, si logramos configurarlo con estos mismos valores, entonces veremos las mismas propiedades macroscópicas an ambos sistemas.

La forma más simple de decir que un sistema está en equilibrio es colocándolo en contacto con un reservorio; este reservorio puede tener una temperatura T fija o un potencial químico fijo. Estos son los ejemplos clásicos. Si la temperatura está fija, entonces ocurren fluctuaciones de energía y si el potencial químico está fijo hay fluctuaciones en el número de partículas.

6.1.1. Potenciales Termodinámicos

Dependiendo de cuál cantidad se mantenga fija y de las características del sistema, hay un potencial apropiado.

- Si el sistema está aislado y la energía es constante, entonces conviene usar la entropía para describir al sistema.
- Si el sistema permite el intercambio únicamente de energía, entonces la temperatura está fija y el potencial termodinámico apropiado es la energía libre de Helmholtz.

- Si además de energía el sistema puede intercambiar partículas, entonces están fijas la temperatura y el potencial químico y por lo tanto el potencial termodinámico apropiado es el potencial de Landau (o gran potencial).

Estos potenciales permiten establecer unos principios extremales similares a minimizar la energía interna la única diferencia es que los potenciales tienen incluidos los vínculos a los cuales está sometido el sistema.

6.1.2. Analogía con una Teoría de Campos

Recordamos que una teoría de campos viene definida o por el funcional generador o por el funcional generador de las funciones de Green conectadas. Este formalismo es completamente análogo a la función de partición y la energía libre de Helmholtz en mecánica estadística; en esto el formalismo de la integral de caminos sirve de principio guía.

A $T = 0$ una teoría de campos se centra en estudiar procesos relacionados con el estado de vacío. Por otra parte, a $T \neq 0$ en el equilibrio, se tiene una distribución sobre estados excitados térmicamente y se busca establecer valores medios de cantidades observables que se expresa mediante la matriz densidad

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{Z_0}, \quad Z_0 = \text{Tr} e^{-\beta\hat{H}}, \quad (6.1)$$

que recordamos es completamente análoga a la distribución de Boltzmann.

6.1.3. Equilibrio en el Formalismo de Tiempo Imaginario Vs. Equilibrio en el Formalismo de Tiempo Real

Se estudió en los capítulos anteriores que en el formalismo de tiempo imaginario, la integral de caminos se realiza en un contorno que recorre el eje imaginario desde un tiempo t hasta $t - i\beta$ y asigna condiciones de borde apropiadas sobre los campos

Capítulo 6: Equilibrio o No-equilibrio... ¡He Ahí la Cuestión!

(periódicas en el caso de Bosones, anti-periódicas en el caso de Fermiones). En este formalismo no aparece el tiempo, de manera que no puede estudiar procesos donde hay evolución de las cantidades involucradas. Si se desea obtener el resultado final en términos del tiempo, es necesario realizar una continuación analítica de la expresión final, lo cual puede ser complicado la mayor parte de las veces.

El caso del formalismos de tiempo real, también llamado de Schwinger-Keldysh, se obtienen los propagadores usando la condición de Kubo-Martin-Schwinger lo cual permite tener una teoría en el equilibrio; esto quiere decir, fundamentalmente, que se posee una distribución independiente del tiempo para los estados térmicos de las partículas: una distribución de Bose-Einstein o una distribución de Fermi-Dirac.

Una consecuencia fundamental del formalismo en el equilibrio es que las funciones de Green (funciones de correlación) poseen invariancia bajo traslaciones temporales. De esta manera puede colocarse la matriz densidad del estado inicial en cualquier instante t_i , en particular $t_i \rightarrow -\infty$.

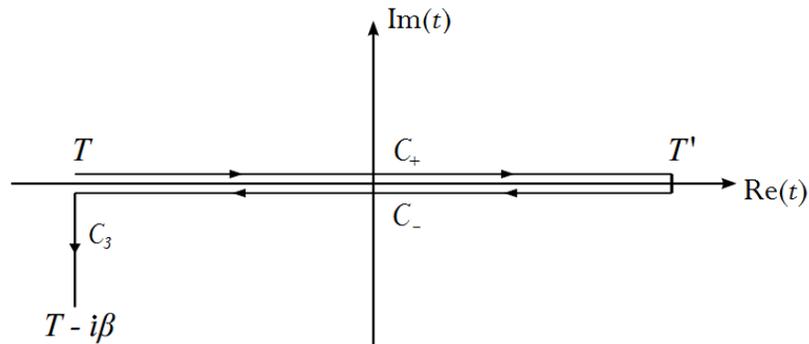


Figura 6.1: Contorno Formalismo Tiempo Real

Al hacer esto se consigue factorizar (descorrelacionar) el segmento C_3 de los segmentos C_{\pm} . Es decir los valores de los campos sobre C_{\pm} no se ven afectados por C_3 .

6.2. No-equilibrio

La idea de sistemas fuera del equilibrio involucra aspectos dinámicos en la descripción de los procesos. El problema fundamental de una teoría fuera del equilibrio es el de encontrar la evolución temporal de los valores de expectación (promedios) calculados; para una teoría en el equilibrio, estos valores de expectación no dependen del tiempo. Las teorías fuera del equilibrio involucran una gran cantidad de fenómenos y configuraciones y aún se está trabajando para lograr un formalismo unificado que permita analizar la gran variedad de fenómenos que están bajo la etiqueta de física fuera del equilibrio o del no-equilibrio.

Históricamente, la mecánica estadística del no equilibrio se construyó sobre las ideas de Boltzmann donde hay N partículas esféricas en una caja cerrada aislada, que evolucionan en el tiempo de acuerdo a las leyes de Newton. A partir de esta dinámica se produce el comportamiento irreversible de los que podemos extraer todas las propiedades dinámicas del sistema: viscosidades, conductividades térmicas, velocidad del sonido, etc. Existe, sin embargo, otra forma de ver el problema y corresponde a la visión de Langevin, donde el sistema de interés es insertado en un baño de otras partículas. A la mirada del físico ortodoxo el enfoque de Boltzmann luce más fundamental. Sin embargo, el atractivo que posee el paradigma de Boltzmann se topa con problemas que aún hoy no están resueltos, ya que conduce a las difíciles cuestiones planteadas por la teoría ergódica y la posibilidad de que sistemas aislados fuera del equilibrio puedan ir hasta el equilibrio. El paradigma de Langevin es aparentemente menos universal. Sin embargo en la descripción estocástica de Langevin existen parámetros que están relacionados a las fluctuaciones de equilibrio. Para determinar estos parámetros se debe desarrollar una teoría microscópica que incluya los grados de libertad del fluido de fondo.

6.2.1. No-equilibrio en las Teorías de Campo

No podemos dar una visión completa de este problema en este trabajo; tan sólo dar unas pocas indicaciones que sirvan de guía.

Para incluir en una teoría de campos aspectos de procesos fuera del equilibrio, conviene utilizar el formalismo de tiempo real. Esta afirmación resulta casi obvia dado que el formalismo de tiempo imaginario excluye, por construcción, cualquier aspecto dinámico del problema a tratar. Es necesario además especificar el estado inicial del sistema; esto se realiza dando la matriz densidad del sistema en el tiempo inicial t_0 . Sin embargo, para que sea un problema fuera del equilibrio, la matriz densidad inicial debe ser distinta a la dada por la distribución de Boltzmann (6.1); si así fuera tendríamos el formalismo tratado en el capítulo 5. Como la matriz densidad del estado fuera del equilibrio no corresponde a la distribución de Boltzmann, se tiene que no hay noción de temperatura ni de ningún otro parámetro de los que se habla cuando se estudian sistemas en el equilibrio.

Los tipos de problemas que típicamente se encuentra en la literatura son

- Un campo acoplado con un baño térmico. Este baño térmico es descrito por una teoría de campos en el equilibrio. Se estudian los aspectos dinámicos del proceso de termalización.
- Un sistema aislado que consta de un campo descrito inicialmente por una matriz densidad fuera del equilibrio (es decir diferente a la distribución de Boltzmann). Nuevamente el interés es estudiar la evolución del campo bajo estas condiciones en la ruta hacia el equilibrio.

A continuación mencionaremos dos de las técnicas más importantes para tratar problemas fuera del equilibrio.

6.2.2. Acción Efectiva 2PI

Existen técnicas creadas (o adaptadas) para estudiar los sistemas fuera del equilibrio. Son importantes aquellas basadas en acciones efectivas; en particular la técnica de *acciones efectivas n partículas irreducibles* nPI. En las teorías de campo estándar se utiliza el formalismo 1PI; la técnica nPI generaliza este procedimiento. En particular ha sido útil la técnica 2PI [33] que modifica la transformada de Legendre que sirve para definir la teoría efectiva. Recordemos que en el formalismo 1PI se define el funcional de la acción efectiva como

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x) \phi_c(x) , \quad (6.2)$$

donde $W[J]$ es el funcional generador de las funciones de Green conectadas y $\phi_c(x)$ se conoce como el campo clásico y se define $\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi_c(x)$. Utilizando el funcional de la acción efectiva es posible demostrar que para una teoría con interacción se tiene

$$\Gamma^{(2)}|_{\phi_c} = \left. \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \delta \phi_c(x_2)} \right|_{\phi_c} = \Gamma_0^{(2)} + \Sigma = D_F^{-1} + \Sigma . \quad (6.3)$$

La cantidad $\Gamma^{(2)}$ es la segunda derivada del funcional de la acción efectiva de la teoría con interacción mientras que $\Gamma_0^{(2)}$ es la segunda derivada del funcional de la acción efectiva de la teoría libre y Σ representa las correcciones cuánticas. La ventaja fundamental de $\Gamma^{(2)}$ es que es la inversa del propagador de la teoría con interacción *a cualquier orden en teoría de perturbación*. De esta manera se satisface formalmente

$$\begin{aligned} D(D_F^{-1} + \Sigma) = 1 &\longrightarrow D = \frac{1}{D_F^{-1} + \Sigma} \\ &= \frac{1}{D_F^{-1}} + \frac{1}{D_F^{-1}} \Sigma \frac{1}{D_F^{-1}} + \frac{1}{D_F^{-1}} \Sigma \frac{1}{D_F^{-1}} \Sigma \frac{1}{D_F^{-1}} + \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

Esta ecuación no es más que la expresión formal de la relación (3.35). Por otra parte, en el formalismo 2PI se añade una fuente bilocal $R(x, y)$ al funcional generador

$$Z[J, R] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \left[S[\phi] + \int d^4x J(x) \phi(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) R(x, y) \phi(y) \right] \right\} , \quad (6.5)$$

y se calcula la acción efectiva 2PI

$$\Gamma[\phi_c, D] = W[J] - \int d^4x J(x) \phi_c(x) - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y R(x, y) [iD(x, y) + \phi_c(x)\phi_c(y)] . \quad (6.6)$$

Utilizando esta acción efectiva se puede calcular el propagador para la teoría con interacción y en conjunto con el formalismo de tiempo real (con su contorno C_{\pm}), permite una formulación de problemas fuera del equilibrio.

6.2.3. Método de la Rotación de Keldysh

Como ya se ha mencionado antes, no es posible usar los métodos estándar de la matriz S para estudiar procesos fuera del equilibrio debido a que no se conoce cuál será el estado de salida del sistema y por esto resulta imposible calcular una amplitud de transición. Por esto es que se consideran valores de expectación de operadores lo cual lleva naturalmente a plantear la idea del contorno cerrado. La evaluación de los campos en cada rama del contorno produce naturalmente una duplicación de los grados de libertad que pueden ser asociados con el sistema de interés y el entorno en el cual está inmerso [34].

Consideremos una teoría escalar $\lambda\phi^4$ de un campo ϕ y otro campo que modela al medio (baño térmico o *background*) y que denotaremos χ . Para lograr una teoría de perturbaciones que se comporte bien, es necesario que haya una separación de escalas temporales, lo cual puede conseguirse si el acoplamiento entre los campos es suficientemente débil. Esto se traduce en que los tiempos característicos de los procesos son mucho más pequeños que las masas efectivas de las partículas (medidas en unidades convenientes) y el sistema puede tratarse como un gas ideal.

Recordemos que el campo ϕ toma valores según la rama del contorno en la que está. Utilizando la matriz de transformación Q (5.42) que se usó para definir los propagadores físicos, es posible introducir unos campos y corrientes nuevas ϕ_a y J_a , con

$a = \{cl, q\}$, de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \phi_q \\ \phi_{cl} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} J_q \\ J_{cl} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_+ \\ J_- \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

donde el subíndice indica (convencionalmente) un campo “clásico” ϕ_{cl} y otro “cuántico” ϕ_q . Haciendo estas transformaciones y simplificando se encuentra que el funcional generador para una teoría sin *background* puede escribirse así

$$\begin{aligned} Z[J_{cl}, J_q, \rho(0)] &= \mathcal{F} \left[\frac{\delta}{\delta J_{cl}}, \frac{\delta}{\delta J_q} \right] \int \mathcal{D}\phi_{cl} \mathcal{D}\phi_q \exp(iJ_q\phi_{cl}) \\ &\quad \exp \left\{ i \left[-\phi_{cl}(\partial^\mu \partial_\mu - m^2) - \frac{\lambda}{3!} \phi_{cl}^3 + J_{cl} \right] \phi_q \right\}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Puede notarse que la integración en ϕ_q puede hacerse para este funcional. Esta integración produce la delta $\delta[-\phi_{cl}(\partial^\mu \partial_\mu - m^2) - \frac{\lambda}{3!} \phi_{cl}^3 + J_{cl}]$ lo cual fuerza la ecuación clásica de movimiento para ϕ_{cl} . Por esto se le da el nombre de campo clásico.

Este funcional transformado produce un propagador distinto que describe procesos $\phi_{cl} \longrightarrow \phi_q$ y $\phi_q \longrightarrow \phi_{cl}$. Además se observa que hay un vértice de 4 líneas $\phi_{cl}^3 \phi_q$: tres de ellas con ϕ_{cl} y una con ϕ_q . Este nuevo vértice se conoce en la literatura como vértice estadístico clásico. Si se acopla el sistema a un campo que sirva de *background*, se sigue el mismo procedimiento y se obtienen vértices efectivos.

Este método fue desarrollado para estudiar procesos de termalización de sistemas que están lejos del equilibrio y acoplados con un *background*. Por lo discutido se ve que deja por fuera información del campo ϕ_q ; esta información fue dejada en las aproximaciones necesarias para llegar a (6.8) y pueden ser necesarias para obtener resultados donde las fluctuaciones sean importantes.

Conclusiones

En este trabajo hemos realizado una presentación sucinta a la integral de caminos como formalismo unificador en las teorías de campos tanto a temperatura cero ($T = 0$) como a temperatura finita ($T \neq 0$). Aunque los análisis realizados corresponden principalmente a procesos en el equilibrio, se mostró algunas alternativas a fin de extender el formalismo en caso de querer estudiar procesos fuera del equilibrio.

En el **capítulo 1**, luego de hacer un breve repaso de mecánica cuántica en el formalismo canónico, se realizó una construcción de la integral de caminos. Se mostró que ésta no es más que la amplitud de transición para procesos de un estado inicial a otro final. De esta interpretación simple, pueden calcularse las cantidades de una teoría. Posteriormente se vio que la imagen que da la representación de integrales de caminos es que las fluctuaciones cuánticas del sistema corresponden a caminos distintos a aquel que extremiza la acción; el límite clásico corresponde a la solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

A continuación se definió el funcional generador de las funciones de Green $Z[J]$ y se vio que derivando funcionalmente n veces esta cantidad se obtienen las funciones de Green de n -puntos; estas funciones de Green se conocen también como funciones de correlación cuando se mira el formalismo como una teoría estadística de muchos cuerpos. El funcional generador pone de relieve que la integral de Feynman pesa (en el sentido estadístico) todos los caminos posibles usando como análogo de la distribución

Conclusiones

la exponencial de la acción clásica. Este resultado es notable. Cuando los estados inicial y final se hacen tender a tiempos remotos ($t_i \rightarrow -\infty$ y $t_f \rightarrow +\infty$) se observa que la amplitud de transición que define a la integral de caminos corresponde a transiciones vacío-vacío. Este resultado es importante, ya que es la forma en la que se entiende la teoría cuántica de campos en su formulación estándar: es una teoría cuyos procesos inician y terminan en el estado de vacío del sistema. Existe otro funcional, que es el de las funciones de Green conectadas $W[J]$. Las funciones de Green conectadas concentran la información relevante a cierto orden en cada proceso estudiado y la técnica diagramática descansa en la expansión de $W[J]$. La relación que existe entre los funcionales $Z[J]$ y $W[J]$ es análoga a la que existe entre la función de partición y la energía libre de Helmholtz en sistema estadístico.

En el **capítulo 2** se estudió el oscilador armónico debido a que es uno de los ejemplos más importantes de toda la física. En primer lugar se hizo una revisión del oscilador armónico utilizando el formalismo canónico con operadores de creación y destrucción. Luego se construyó el funcional $Z[J]$ para el oscilador armónico y se simplificó su forma; los cálculos se realizaron con detalle porque el tipo de manipulación encontrada en este capítulo servirá de ejemplo para lo que se hará posteriormente en las teorías de campos. Seguidamente se extrajo el funcional $W[J]$ de la expresión obtenida para $Z[J]$ (si la simplificación se pudo realizar, este paso es trivial) y de aquí se obtuvo el propagador de Feynman que es la cantidad con la cual se hace teoría de perturbaciones. Esta forma de llegar al propagador sirve de modelo para todas las teorías que se estudiaron en los capítulos siguientes.

A manera de ejemplo se consideró el oscilador Fermiónico. Se repasó su formulación en el formalismo canónico y se construyó un Lagrangiano que permitiera el estudio de este sistema en el marco de la integral funcional. Utilizando estos resultados se construyó el funcional $Z[J]$ para este sistema; se definió para este fin las convenciones necesarias para poder tratar con variables que anti-conmutan (Grassmann). Al reescribir el Lagrangiano convenientemente se observa que puede ponerse

Conclusiones

en una forma análoga al Lagrangiano de Dirac para un electrón. Escrito de esta forma se realizó la integral funcional e inmediatamente se extrajo el funcional $W[J]$ y el propagador. Finalmente se concluye con una formulación supersimétrica para el oscilador armónico simple mostrando que usando el mapa de Nicolai permite escribir la teoría supersimétrica en una teoría Bosónica libre.

Luego de que en los dos primeros capítulos se estudiaran sistemas discretos, en el **capítulo 3** se estudió la formulación de la integral de caminos para sistemas continuos, es decir campos. Haciendo uso de lo aprendido en los capítulos anteriores se procede a definir la integral funcional para campos e ilustrar su uso en la teoría de un campo escalar real. Se mostró con suficiente detalle los pasos necesarios para calcular los funcionales $Z[J]$ y $W[J]$ y así obtener el propagador de Feynman de la teoría. Utilizando estos resultados se abordó el desarrollo perturbativo de las teorías y se mostró cómo obtener las distintas funciones de Green a cualquier orden deseado haciendo uso del teorema de Wick. Esto mismo se repitió al considerar la teoría $\lambda\phi^4$, donde se estudió con detalle el proceso de expansión de la teoría en términos de la constante de acople λ . Seguidamente se consideramos la interpretación en Diagramas de Feynman para cada término del desarrollo perturbativo para el propagador y la función de Green de 4-puntos culminando en la extracción de las reglas de Feynman que permiten escribir cualquier término de la expansión a partir del diagrama del proceso. Finalmente se mostró que el hecho de considerar que la integración temporal se realiza en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ está relacionado con los procesos de transición vacío-vacío (ya visto en el capítulo 1) y por lo tanto esta formulación de la teoría cuántica de campos corresponde a tener el sistema a temperatura cero ($T = 0$).

A partir del **capítulo 4** empezamos a estudiar sistemas a temperatura finita. En este capítulo vimos el formalismo de tiempo imaginario (o de Matsubara). Se comenzó definiendo la matriz densidad y estudiando en el formalismo canónico la manera de realizar promedios de operadores sobre el ensamble. Se demostró además la condición de Kubo-Martin-Schwinger la cual permite relacionar promedios de operadores reali-

Conclusiones

zando una traslación temporal. Pudo verse que en el formalismo canónico es posible interpretar a la matriz densidad como un operador de evolución parametrizado por un tiempo que recorre el eje imaginario en un intervalo finito; esto puede lograrse mediante una rotación de Wick. De esta forma los formalismos a temperatura cero en mecánica cuántica y a temperatura finita se unifican. A continuación se mostró que a consecuencia de esta evolución en un tiempo imaginario finito, el espacio recíproco es discreto y aparecen las conocidas frecuencias de Matsubara. Se pudo demostrar que para calcular valores de expectación de operadores es necesario fijar condiciones de borde periódicas; esto se debe a que los valores de expectación están relacionados con cálculos de trazas. Como consecuencia de esto se obtiene que operadores que conmutan (Bosónicos) tienen frecuencias de Matsubara pares mientras que operadores que anti-conmutan (Fermiónicos) tienen frecuencias de Matsubara impares.

Seguidamente se encontró la representación en términos de la integral funcional para el formalismo de tiempo imaginario usando la rotación de Wick. De esta forma las dependencias temporales desaparecen y la “evolución” ocurre parametrizada por una cantidad que tiene unidades inversas a la temperatura. El mecanismo de la rotación induce un cambio en la integral funcional. A las teorías tratadas de esta forma se les llama teorías de campo Eucídeas debido a la manera en como cambia la métrica de Minkowski. Un resultado importante que se encontró es que al tomar el límite $\beta \rightarrow +\infty$ se tiene que la temperatura va a cero, $T \rightarrow 0$; por otra parte, del cambio $t = -i\tau$ se ve que la integración temporal recorre necesariamente un intervalo infinito. De esta manera se ve que los efectos térmicos en el formalismo de tiempo imaginario aparecen como un efecto de tamaño finito en el contorno temporal. Este resultado nos ha resultado esclarecedor.

Finalmente se calculó el funcional $Z[J]$ y el propagador para la teoría del campo escalar real $\lambda\phi^4$, extrayendo las reglas de Feynman que sirven para hacer teoría de perturbaciones como ya hemos mencionado y calcular la corrección al propagador a 1-loop. Vimos que la corrección a la masa de las partículas descritas por el campo

Conclusiones

recibe correcciones térmicas que pueden distinguirse claramente en la expresión final. Además el comportamiento ultravioleta de la teoría no se ve modificado debido a que los modos de alta energía son suprimidos por la distribución térmica.

En el **capítulo 5** se estudió una segunda manera de incluir temperatura en sistemas continuos: el formalismo de tiempo real (o de Schwinger-Keldysh). En este formalismo no se realiza el procedimiento de rotación de Wick y por lo tanto se mantiene la dependencia temporal de la teoría. Esto permite poder estudiar la evolución de los sistemas en los problemas y de esta forma este formalismo constituye un candidato a poder describir procesos fuera del equilibrio. Se discutió en primer lugar la forma de escribir los promedios de operadores para así motivar la construcción de un contorno de integración en el tiempo. Este contorno es necesariamente uno que tiene una rama de ida y otra de vuelta; esto debe ser así para poder calcular trazas que representen a los valores medios. Se pudo comprobar de esta forma que si se parte de un Hamiltoniano independiente del tiempo, la matriz densidad también es independiente del tiempo y por lo tanto el planteamiento del contorno en el formalismo de tiempo real termina siendo equivalente al formalismo de tiempo imaginario revisado en el capítulo anterior.

La necesidad de un contorno de ida vuelta hace que los propagadores de la teoría tengan una estructura más complicada. Es posible no sólo correlacionar puntos en la rama de ida (como en el formalismo *in-out* a $T = 0$) sino que se puede correlacionar en la rama de vuelta o también tener correlaciones que mezclan puntos de ambas ramas. Los propagadores serán un conjunto de funciones que dependerá de la rama del contorno en la cual caigan los puntos. Un hecho importante que se mencionó es que si el sistema a estudiar está en el equilibrio, y por lo tanto el sistema no tiene un origen en el tiempo determinado, la rama imaginaria del contorno se desacopla del resto y no interviene en los cálculos.

Finalmente se indicaron unas transformaciones que relacionan a los propagadores

Conclusiones

encontrados con los propagadores que aparecen normalmente en la literatura: retardado, avanzado y aparece uno nuevo conocido como propagador correlacionado o de Keldysh. Con estos propagadores se estudió el problema de la corrección de la masa de la teoría escalar $\lambda\phi^4$ a 1-loop mostrando el uso de este contorno en un ejemplo concreto. La aparición de la rama de vuelta hace presente un nuevo vértice que tiene contribuciones en los cálculos y de hecho permite la cancelación de singularidades en la teoría a todos los órdenes en teoría de perturbaciones. El resultado correspondiente a la corrección de la masa coincide con el encontrado en el capítulo anterior.

El **capítulo 6** trata de hacer una breve revisión de los conceptos de equilibrio y no-equilibrio en las teorías estadísticas. Esto nos sirve de conclusión y a la vez plantea preguntas que pueden abordarse en trabajos siguientes. Se empezó mencionando la necesidad de una pocas variables emergentes, macroscópicas que describen el comportamiento global del sistema en el equilibrio. Además recordamos el uso de los potenciales termodinámicos como conceptos que permiten caracterizar el equilibrio de sistemas bajo ciertas restricciones. Esto es importante porque en la teoría de campos, el formalismo de la integral funcional permite hacer una analogía con la mecánica estadística de sistemas discretos

$$Z = \sum_s \exp\left(-\frac{1}{T}E_s\right), \quad Z = \int \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi]) .$$

De hecho, el proceso de rotación de Wick hace un mapeo de una teoría Lorentz en $D+1$ dimensiones espacio-temporales a una teoría Euclídea en $D+1$ dimensiones espaciales como ya se mencionó; si además al obtener la teoría Euclídea se compactifica una de las dimensiones se tiene una teoría con temperatura finita. Al igual que hay analogías con la función de partición, el formalismo de la integral de caminos permite también definir una cantidad análoga a la energía libre para campos.

En el equilibrio los sistemas vienen descritos por una matriz densidad que es independiente del tiempo. Esto produce teorías cuyos propagadores (esencialmente correlaciones entre dos puntos) dependen de la diferencia entre los puntos involucra-

Conclusiones

dos $D(x - y)$. Esta característica es compartida por los sistemas estacionarios; estos sistemas están fuera del equilibrio pero aun así tienen esta invariancia traslacional.

La dinámica del no-equilibrio es en general bastante complicada de describir. Existen dificultades operacionales debido a que el formalismo de los procesos fuera del equilibrio no está completo aun. También existen dificultades matemáticas reflejadas en el carácter no lineal de los problemas tratados, lo que se traduce en que las escalas características de los procesos están solapadas y no resulta simple poder aislar los procesos de interés. Aunque hay sistemas particulares donde es posible una descripción simple, es necesario trabajar en la construcción de modelos que permitan entender los mecanismos de los procesos fuera del equilibrio. Ejemplos de estos modelos son el caso de un entorno que se encuentra en un estado cercano al equilibrio (térmico) y que únicamente se ve perturbado débilmente por el sistema que nos interesa. Los problemas se simplifican considerablemente cuando existe una clara separación de las escalas de tiempo entre el sistema y el entorno, por ejemplo si el sistema evoluciona lentamente en comparación con el tiempo de respuesta típico del entorno a las perturbaciones locales. En estos casos es posible considerar el ambiente en un estado de equilibrio local, descrito por un conjunto de variables macroscópicas (como su temperatura), y utilizarlo para calcular su efecto sobre la dinámica del sistema. Esto conduce en promedio a la disipación de la energía del sistema en el entorno, lo que perturba adiabáticamente a este último para que vuelva rápidamente a un (nuevo) estado de equilibrio. Además, las fluctuaciones aleatorias en el entorno térmico también conducirán a fluctuaciones aleatorias en el sistema, cuya amplitud está intrínsecamente relacionada con la fuerza de los efectos disipativos. Esto se conoce genéricamente como el teorema de fluctuación-disipación, que toma una forma simple en las condiciones adiabáticas y de cuasi-equilibrio dadas anteriormente, pero que también se puede extenderse a escenarios de no-equilibrio más generales.

En la discusión de los sistemas fuera del equilibrio se mencionaron dos enfoques; ambos utilizan el formalismo de tiempo real como fundamento. En el formalismo de

Conclusiones

la acción efectiva 2PI, se construye una nueva acción efectiva y de allí unas nuevas ecuaciones de movimiento que contienen información relevante para tratar problemas fuera del equilibrio. En el formalismo de la rotación de Keldysh se tiene un baño térmico acoplado con el sistema de interés. Si el acople entre estos sistemas es suficientemente débil puede generarse una teoría efectiva que permita estudiar la evolución del sistema bajo la influencia del baño térmico y su eventual termalización. Cabe preguntarse si ambos sistemas pueden unificarse ya que parecieran que abordan aspectos complementarios del problema; esto es algo que pudiera ser sometido a estudio en una investigación futura.

Como recomendación para un estudio futuro, y de cara a tratar de entender los fenómenos del no-equilibrio parece necesario hacer una revisión de la teoría de procesos estocásticos. Decimos esto porque los fenómenos del equilibrio están caracterizados por distribuciones estadísticamente estables mientras que los sistemas fuera del equilibrio están caracterizados por distribuciones que evolucionan o bien hacia la estabilidad (termalización) o simplemente permanecen cambiando. La teoría de los procesos estocásticos ha hecho muchos avances que podrían aprovecharse en el estudio de los sistemas continuos. Hacer esto, en conjunto con la revisión de los intentos realizados hasta ahora de abordar fenómenos fuera del equilibrio (como los mencionados en el párrafo anterior) puede arrojar resultados favorables en la comprensión y extensión de las ideas y herramientas en el estudio de sistemas en el no-equilibrio.

Integrales Gaussianas

Para evaluar las integrales de camino resulta útil disponer de ciertas identidades que facilitan la obtención de los resultados. Algunas de estas identidades corresponden a la llamada integración Gaussiana.

La identidad básica es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{2\pi} . \quad (\text{A.1})$$

A partir de esta identidad se encuentran variantes que resultan de suma utilidad.

La Gaussiana escalada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} . \quad (\text{A.2})$$

Pensada como variable aleatoria, es posible calcular los momentos. Claramente, sólo son no nulos los momentos pares

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} x^{2n} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a^n} (2n-1)!! , \quad \text{para } n \geq 1 , \quad (\text{A.3})$$

con $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$.

Apéndice A: Integrales Gaussianas

Resulta conveniente acoplar la variable aleatoria x con una “corriente” J . Al hacer esto se obtienen las siguientes variantes de la integral Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2+Jx} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{J^2/2a}, \quad (\text{A.4})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2+iJx} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-J^2/2a}, \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\frac{1}{2}iax^2+iJx} = \left(\frac{2\pi i}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-iJ^2/2a}. \quad (\text{A.6})$$

La generalización a N dimensiones es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \cdots dx_N e^{-\frac{1}{2}x \cdot A \cdot x + J \cdot x} = \left(\frac{(2\pi)^N}{\det[A]}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}J \cdot A^{-1} \cdot J}, \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \cdots dx_N e^{\frac{i}{2}x \cdot A \cdot x + iJ \cdot x} = \left(\frac{(2\pi i)^N}{\det[A]}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{2}J \cdot A^{-1} \cdot J}. \quad (\text{A.8})$$

Estas identidades se demuestran fácilmente pasando a una base donde el operador A sea diagonal.

A continuación se muestra la identidad fundamental de la teoría cuántica de campos en el régimen perturbativo

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}\phi \cdot K \cdot \phi - V(\phi) + J \cdot \phi} = e^{-V(\delta/\delta J)} e^{\frac{1}{2}J \cdot K^{-1} \cdot J} \quad (\text{A.9})$$

Usualmente la cantidad $-\frac{1}{2}\phi \cdot K \cdot \phi - V(\phi) + J \cdot \phi$ es una representación de la acción extendida que describe la teoría (es la acción extendida debido a la presencia de la corriente). En el resultado anterior (y los que siguen) se han omitido factores que no aportan a los resultados finales en los cálculos en teoría cuántica de campos. La cantidad $V(\phi)$ es el potencial que describe las interacciones y contiene los términos de orden mayor al segundo en el Lagrangiano del sistema.

Apéndice A: Integrales Gaussianas

Algunas variantes a la identidad fundamental son

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}\phi \cdot K \cdot \phi + J \cdot \phi} = e^{\frac{1}{2}J \cdot K^{-1} \cdot J} , \quad (\text{A.10})$$

$$\int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2}\phi \cdot K \cdot \phi + iJ \cdot \phi} = e^{-\frac{i}{2}J \cdot K^{-1} \cdot J} , \quad (\text{A.11})$$

$$\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^d x [\frac{1}{2}\phi(x)K\phi(x) + J(x)\phi(x)]} = e^{i \int d^d x [-\frac{1}{2}J(x)K^{-1}J(x)]} , \quad (\text{A.12})$$

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^d x [\frac{1}{2}\phi(x)K\phi(x) + J(x)\phi(x)]} = e^{\int d^d x [\frac{1}{2}J(x)K^{-1}J(x)]} . \quad (\text{A.13})$$

Finalmente para K Hermítico con ϕ un campo complejo, se tiene

$$\int \mathcal{D}\phi^\dagger \mathcal{D}\phi e^{-\phi^\dagger \cdot K \cdot \phi + J^\dagger \cdot \phi + \phi^\dagger \cdot J} = e^{J^\dagger \cdot K^{-1} \cdot J} . \quad (\text{A.14})$$

Como ya se ha mencionado se han omitido los factores; salvo casos especiales, como al tratar con invariancias, este procedimiento es perfectamente válido.

Bibliografía

- [1] J. C. Mather *et al.*, “A Preliminary measurement of the Cosmic Microwave Background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite,” *Astrophys. J.*, vol. 354, pp. L37–L40, 1990.
- [2] D. N. Spergel *et al.*, “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology,” *Astrophys. J. Suppl.*, vol. 170, p. 377, 2007.
- [3] C. W. Bernard, “Feynman rules for gauge theories at finite temperature,” *Phys. Rev. D*, vol. 9, pp. 3312–3320, Jun 1974.
- [4] L. Dolan and R. Jackiw, “Symmetry Behavior at Finite Temperature,” *Phys. Rev.*, vol. D9, pp. 3320–3341, 1974.
- [5] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, and M. E. Shaposhnikov, “On the Anomalous Electroweak Baryon Number Nonconservation in the Early Universe,” *Phys. Lett.*, vol. B155, p. 36, 1985.
- [6] G. Aad and B. Acharya, “Observation of a centrality-dependent dijet asymmetry in lead-lead collisions at $\sqrt{s_{NN}}=2.76$ tev with the atlas detector at the lhc,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 105, p. N/A, 12 2010.

Bibliografia

- [7] S. Chatrchyan *et al.*, “Observation and studies of jet quenching in PbPb collisions at nucleon-nucleon center-of-mass energy = 2.76 TeV,” *Phys. Rev.*, vol. C84, p. 024906, 2011.
- [8] K. Aamodt *et al.*, “Suppression of Charged Particle Production at Large Transverse Momentum in Central Pb-Pb Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV,” *Phys. Lett.*, vol. B696, pp. 30–39, 2011.
- [9] A. Nunez and A. O. Starinets, “AdS / CFT correspondence, quasinormal modes, and thermal correlators in N=4 SYM,” *Phys. Rev.*, vol. D67, p. 124013, 2003.
- [10] J. S. Schwinger, “Brownian motion of a quantum oscillator,” *J. Math. Phys.*, vol. 2, pp. 407–432, 1961.
- [11] L. V. Keldysh, “Diagram technique for nonequilibrium processes,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 47, pp. 1515–1527, 1964. [Sov. Phys. JETP20,1018(1965)].
- [12] L. P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*. Benjamin, New York, 1962.
- [13] J. Rammer and H. Smith, “Quantum field-theoretical methods in transport theory of metals,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 58, pp. 323–359, 1986.
- [14] F. Konschelle, “Transport equations for superconductors in the presence of spin interaction,” *Eur. Phys. J.*, vol. B87, p. 119, 2014.
- [15] M. Babadi, E. Demler, and M. Knap, “Far-from-equilibrium field theory of many-body quantum spin systems: Prethermalization and relaxation of spin spiral states in three dimensions,” *Phys. Rev.*, vol. X5, no. 4, p. 041005, 2015.
- [16] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill, 1965.
- [17] H. Kleinert, “Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets,” 2004.

Bibliografia

- [18] A. K. Das, *Field Theory: A Path Integral Approach*. New York: World Scientific, 2006.
- [19] A. K. Das, *Finite Temperature Field Theory*. New York: World Scientific, 1997.
- [20] A. K. Das, “Supersymmetry and Finite Temperature,” *Physica*, vol. A158, pp. 1–21, 1989.
- [21] A. Khare, “Supersymmetry in quantum mechanics,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 744, pp. 133–165, 2005. [,133(2004)].
- [22] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, “Supersymmetry and quantum mechanics,” *Phys. Rept.*, vol. 251, pp. 267–385, 1995.
- [23] U. Mosel, *Path Integrals in Field Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [24] R. P. Feynman, “The theory of positrons,” *Phys. Rev.*, vol. 76, pp. 749–759, Sep 1949.
- [25] M. L. Bellac, *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, 2011.
- [26] A. J. Niemi and G. W. Semenoff, “Thermodynamic Calculations in Relativistic Finite Temperature Quantum Field Theories,” *Nucl. Phys.*, vol. B230, pp. 181–221, 1984.
- [27] A. J. Niemi and G. W. Semenoff, “Finite Temperature Quantum Field Theory in Minkowski Space,” *Annals Phys.*, vol. 152, p. 105, 1984.
- [28] M. Laine and A. Vuorinen, “Basics of Thermal Field Theory,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 925, pp. pp.1–281, 2016.
- [29] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite-temperature field theory: Principles and applications*. Cambridge University Press, 2011.

Bibliografia

- [30] P. V. Landshoff, “Introduction to equilibrium thermal field theory,” in *Particles and fields. Proceedings, 9th Jorge Andre Swieca Summer School, Campos do Jordao, Brazil, February 16-28, 1997*, 1998.
- [31] K.-c. Chou, Z.-b. Su, B.-l. Hao, and L. Yu, “Equilibrium and Nonequilibrium Formalisms Made Unified,” *Phys. Rept.*, vol. 118, p. 1, 1985.
- [32] N. P. Landsman and C. G. van Weert, “Real and Imaginary Time Field Theory at Finite Temperature and Density,” *Phys. Rept.*, vol. 145, p. 141, 1987.
- [33] J. Berges, “Introduction to nonequilibrium quantum field theory,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 739, pp. 3–62, 2005. [,3(2004)].
- [34] A. Kamenev, *Field Theory of Non-Equilibrium Systems*. Cambridge University Press, 2011.