Divulgaciones Matemáticas Vol. 21, No. 1-2 (2020), pp. 41–45

Un teorema sobre $P(\mathbb{N})/fin$

A theorem about $P(\mathbb{N})/fin$

Franklin Galindo (franklingalindo178@gmail.com)
Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia.
Universidad Central de Venezuela.
Colaborardor Visitante del Departamento de Matemáticas
Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas.

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar una demostración original del siguiente teorema: Existe una extensión genérica del modelo de Solovay $L(\mathbb{R})$ donde hay un orden lineal de $P(\mathbb{N})/fin$ que extiende al orden parcial $(P(\mathbb{N})/fin), \leq^{\star})$. Los órdenes lineales de $P(\mathbb{N})/fin$ son importantes porque, entre otras razones, permiten construir conjuntos no medibles.

Palabras y frases clave: orden lineal de $P(\mathbb{N})/fin$, orden parcial del $P(\mathbb{N})/fin$, modelo de Solovay.

Abstract

The objective of this article is to present an original proof of the following theorem: There is a generic extension of the Solovay's model $L(\mathbb{R})$ where there is a linear order of $P(\mathbb{N})/fin$ that extends to the partial order $(P(\mathbb{N})/fin), \leq^{\star})$. Linear orders of $P(\mathbb{N})/fin$ are important because, among other reasons, they allow constructing non-measurable sets.

Key words and phrases: linear order on $P(\mathbb{N})/fin$, partial order on $P(\mathbb{N})/fin$, Solovay's model.

1 Introducción

El objetivo de este artículo es presentar una demostración original del siguiente teorema: *Existe una extensión genérica del modelo de Solovay $L(\mathbb{R})$ donde hay un orden lineal de $P(\mathbb{N})/fin$ que extiende al orden parcial $(P(\mathbb{N})/fin), \leq^{\star})$*. Los órdenes lineales de $P(\mathbb{N})/fin$ son importantes porque, entre otras razones, permiten construir conjuntos no medibles (considerados como subconjuntos del espacio de Cantor $(2^{\aleph_0}, t)$), por ejemplo los "ultraflitters"(ver [1]) . En las definiciones preliminares, la formulación y demostración del teorema, supondremos al lector familiarizado con la teoría axiomática de conjuntos, específicamente con el método de forcing y con la técnica de constructibilidad relativizada, según los textos [2,3]. Agradezco al profesor Carlos Di Prisco por algunas sugerencias que me hizo a los fines de demostrar el teorema que se presenta en este artículo.

Recibido 20/02/2020. Revisado 15/04/2020. Aceptado 09/12/2020.
MSC (2010): Primary 03Exx; Secondary 03E20.
Autor de correspondencia: Franklin Galindo

2 Existe una extensión genérica del modelo de Solovay, $L(\mathbb{R})[G]$, donde hay un orden lineal de $P(\mathbb{N})/fin$ que extiende al orden parcial $(P(\mathbb{N})/fin, \leq^\star)$

Para construir al Modelo de Solovay $L(\mathbb{R})$ necesitamos suponer que existen cardinales inaccesibles y después utilizar dos métodos de construcción de modelos de la teoría de conjuntos: Primero "Forcing"(específicamente, el *Colapso de Lévy*), y luego "Constructibilidad relativizada"(también se puede usar en este segundo caso la técnica de los modelos $HOD(A)$, es decir, la clase de todos los conjuntos hereditariamente definibles con ordinales, con elementos de A, y el propio A). Veamos la construcción de $L(\mathbb{R})$ en tres pasos:

(I) Las principales propiedades del Colapso de Lévy se presentan mediante el siguiente teorema de forcing:

Teorema 2.1. *Sea κ un cardinal regular y $\lambda > \kappa$ un cardinal inaccesible. Entonces existe un orden parcial $(P, <)$ tal que:*

(a) Cualquier α, $\kappa \leq \alpha < \lambda$, tiene cardinal κ en $M[G]$.

(b) Cualquier cardinal $\leq \kappa$ y cualquier cardinal $\geq \lambda$ sigue siendo un cardinal en $M[G]$,

En particular $M[G] \models \lambda = \kappa^+$.

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [2]. El orden parcial $(P, <)$ utilizado, que se denota por $Col(\kappa, < \lambda)$, es el siguiente:

P son todas las funciones cuyo dominio está contenido en $\lambda \times \kappa$ tal que:

(i) $|dom(p)| < \kappa$,

(ii) $p(\alpha, \xi) < \alpha$, para todo $(\alpha, \xi) \in dom(p)$.

El orden parcial de P es: $p < q \leftrightarrow p \supseteq q$.

(II) *Constructibilidad relativizada* $L(A)$: Sea A un conjunto cualquiera. Definimos el modelo $L(A)$ por inducción transfinita sobre los ordinales de la siguiente manera (ver [2]):

(Definiciones previas: Un conjunto X es *transitivo* si y sólo si para todo z se tiene que $z \in X \to z \subseteq X$. Dado un conjunto B, la *clausura transitiva* de B es el menor conjunto (respecto a $\subseteq$) transitivo que contiene a B, y se denotará por $Cl(B)$.)

$$L_0(A) = Cl(\{A\})$$

$$L_{\alpha+1}(A) = \{X \subseteq L_\alpha(A) : X \text{ es definible con parámetros en la estructura } (L_\alpha(A), \in)\}$$

$$L_\lambda(A) = \bigcup_{\beta \in \lambda} L_\beta(A)\ , \quad \lambda \text{ límite}$$

$$L(A) = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha(A).$$

Es importante resaltar que la definición presentada de $L(A)$ se puede formalizar en ZFC. Se cumple que $L(A)$ es un modelo transitivo de ZF que contiene a todos los ordinales y, además, es el menor modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales y a A.

(III) Sea M un modelo transitivo de ZFC (M puede ser V, L, o un conjunto numerable). Sean λ un cardinal inaccesible en M y $M[G]$ la extensión genérica que se obtiene aplicando el Colapso de Lévy: $Col(\aleph_0, < \lambda)$. Sean $\mathbb{R}$ en $M[G]$ y $L(\mathbb{R})$ en $M[G]$. $L(\mathbb{R})$ es el Modelo de Solovay, y la manera como se construyó es una de las formas que se utiliza para hacerlo (hay otras, por ejemplo usando $HOD(A)$ en vez de $L(A)$, como ya se dijo, ver [2]).

Se cumple que $L(\mathbb{R})$ es un modelo de ZF (el Axioma de elección es falso en $L(\mathbb{R})$), más el Principio de elecciones dependientes (DC), más todo conjunto de reales es medible Lebesgue y tiene la propiedad de Baire, más todo subconjunto no numerable de reales contiene un subconjunto perfecto. Ver [2] para las definiciones y la demostración de este teorema.

Veamos ahora el siguiente resultado sobre $L(\mathbb{R})$ y $(P(\mathbb{N})/fin, \leq^\star)$. Donde $P(\mathbb{N})/fin$ es el conjunto cociente determinado por la relación de equivalencia en $P(\mathbb{N})$ definida así: $x \sim y$ si y sólo si $x \bigtriangleup y$ es finito (es decir, x es equivalente a y si ellos son casi iguales). Y $\leq^\star$ es el siguiente orden parcial: $[A] \leq^\star [B]$ si y sólo si $A - B$ es finito ($A \subseteq^\star B$).

Teorema 2.2. *Existe una extensión genérica de $L(\mathbb{R})$, $L(\mathbb{R})[G]$, donde hay un orden lineal de $P(\mathbb{N})/fin$ que extiende a $\leq^\star$.*

Demostración. Sea el orden parcial $(P(\mathbb{N})/fin, \leq^\star)$ definido en $L(\mathbb{R})$. Sea el orden parcial $(P, \leq)$, donde P es el conjunto de todos los órdenes lineales finitos que son una extensión de algún orden parcial finito del orden parcial $(P(\mathbb{N})/fin, \leq^\star)$, es decir, cada elemento $K \in P$ es un orden lineal finito que es una extensión de un orden parcial finito $K' = \leq^\star \restriction X$, donde X es un subconjunto finito de $P(\mathbb{N})/fin$ (X es el universo de K'). Vale la pena resaltar que el universo de cada orden lineal finito que pertenece a P también es un suconjunto finito de $P(\mathbb{N})/fin$, donde

$$K_1 \leq K_2 \Longleftrightarrow K_1 \supseteq K_2.$$

Sean $G \subseteq P$ un P-genérico sobre $L(\mathbb{R})$ y $\bigcup G \in L(\mathbb{R})[G]$. Se probará que el conjunto de pares $\bigcup G$ es un orden lineal de $P(\mathbb{N})/fin$ que extiende a $\leq^\star$, es decir, se debe probar que $\bigcup G$ tiene las propiedades de reflexidad, antisimetría, transitividad y tricotomía, y además que extiende a $\leq^\star$. (En algunos casos se usarán argumentos de densidad).

(I) $\bigcup G$ cumple con la propiedad de reflexividad: En efecto $([A], [A]) \in \bigcup G$, para toda $[A] \in P(\mathbb{N})/fin$. Pues para cada $[A] \in P(\mathbb{N})/fin$ el conjunto $S_{[A]}$,

$$S_{[A]} = \{U \in P : ([A], [A]) \in U\},$$

pertenece a $L(\mathbb{R})$ y es denso.

Prueba de la densidad: Sea $K \in P$, entonces existe un conjunto finito $Z \subseteq P(\mathbb{N})/fin$ tal que K es una extensión lineal de $\leq^\star \restriction Z$. Hay que probar que existe un $Q \leq K$ tal que $Q \in S_{[A]}$. Si $[A] \in Z$, entonces $([A], [A]) \in \leq^\star \restriction Z$, porque $\leq^\star \restriction Z$ es un orden parcial, y por lo tanto $([A], [A]) \in K$, pues K es una extensión lineal de $\leq^\star \restriction Z$. En este caso el Q buscado es el mismo K. Si $[A] \notin Z$, entonces consideramos $Z' = Z \cup \{[A]\}$ y $W = \leq^\star \restriction Z'$. Tomemos $K \cup W$, el cual es un orden parcial finito con respecto a Z'. Sea K' un orden lineal finito que es una extensión de $K \cup W$. Se cumple que $K' \in P$, pues K' es un orden lineal que extiende a $W = \leq^\star \restriction Z'$. Como W es un orden parcial, el par $([A], [A]) \in W$. Por lo tanto $([A], [A]) \in K'$. Entonces, como por la construcción de K' se cumple que $K' \supseteq K$, es decir, $K' \leq K$, se conluye que el Q buscado es K'. En consecuencia, $S_{[A]}$ es denso. Como $S_{[A]}$ es denso y G es P-genérico sobre $L(\mathbb{R})$, se infiere que $S_{[A]} \cap G \neq \emptyset$, es decir, $([A], [A]) \in \bigcup G$.

(II) $\bigcup G$ cumple con la propiedad de antisimetría: Sean $([A],[B]) \in \bigcup G$ y $([B],[A]) \in \bigcup G$. Entonces existe $K_1 \in G$ y $K_2 \in G$ tal que $([A],[B]) \in K_1$ y $([A],[B]) \in K_2$. En consecuencia, como G es un filtro, existe un $K_3 \in G$ tal que $K_3 \leq K_1$ y $K_3 \leq K_2$, es decir, $K_3 \supseteq K_1$ y $K_3 \supseteq K_2$. Por lo tanto $([A],[B]) \in K_3$ y $([B],[A]) \in K_3$, y como K_3 es antisimétrico se concluye que $[A] = [B]$.

(III) $\bigcup G$ tiene la propiedad de transitividad: Sean $([A],[B]) \in \bigcup G$ y $([B],[D]) \in \bigcup G$, entonces existe $K_1 \in G$ y $K_2 \in G$ tal que $([A],[B]) \in K_1$ y $([B],[D]) \in K_2$. En consecuencia, como G es un filtro, existe un $K_3 \in G$ tal que $K_3 \leq K_1$ y $K_3 \leq K_2$, es decir, $K_3 \supseteq K_1$ y $K_3 \supseteq K_2$. Por lo tanto $([A],[B]) \in K_3$ y $([B],[D]) \in K_3$, y como K_3 es transitivo (es un orden lineal) se concluye que $([A],[D]) \in K_3$. Luego, $([A],[D]) \in \bigcup G$.

(IV) $\bigcup G$ satisface la propiedad de tricotomía: Sean $[A],[B] \in P(\mathbb{N})/fin$ tal que $[A] \neq [B]$. Se debe probar que $([A],[B]) \in \bigcup G$ o $([B],[A]) \in \bigcup G$. Sea T el siguiente conjunto,

$$T = \{U \in P : ([A],[B]) \in U \ o \ ([B],[A]) \in U\}.$$

Se cumple que, $T \in L(\mathbb{R})$. Se probará que T es denso. Sea $K \in P$, entonces existe un conjunto finito $Z \subseteq P(\mathbb{N})/fin$ tal que K es una extensión lineal de $\leq^\star \restriction Z$. Hay que probar que existe un $Q \leq K$ tal que $Q \in T$. Si $([A],[B]) \in K$ o $([B],[A]) \in K$, entonces el Q buscado es el mismo K. Si $([A],[B]) \notin K$ y $([B],[A]) \notin K$, entonces pueden ocurrir alguno de los siguientes tres casos:

Caso 1: $([A] \notin Z$ y $[B] \in Z)$.
Consideramos $Z' = Z \cup \{[A]\}$ y $W = \leq^\star \restriction Z'$. Sea $K \cup W$, el cual es un orden parcial finito con respecto a Z'. Sea K' un orden lineal finito que es una extensión de $K \cup W$. $K' \in P$ por razones análogas a las expresadas en la prueba de la propiedad de reflexividad. Como K' es un orden lineal, se cumple que $([A],[B]) \in K'$ o $([B],[A]) \in K'$. En consecuencia $K' \in T$ y $K' \supseteq K$, es decir, K' es el Q buscado.

Caso 2: $([B] \notin Z$ y $[A] \in Z)$.
Consideramos $Z' = Z \cup \{[B]\}$ y tomamos $W = \leq^\star \restriction Z'$. Luego aplicamos un razonamiento análogo al Caso 1 para obtener el $Q \in T$ y $Q \leq K$ buscado.

Caso 3: $([A] \notin Z$ y $[B] \notin Z)$.
Consideramos $Z' = Z \cup \{[A],[B]\}$ y tomamos $W = \leq^\star \restriction Z'$. Después aplicamos un razonamiento análogo al Caso 1 para obtener el $Q \in T$ y $Q \leq K$ buscado. Por lo tanto T es denso y, como G es P-genérico sobre $L(\mathbb{R})$, se infiere que $T \cap G \neq \emptyset$. Es decir, $([A],[B]) \in \bigcup G$ o $([B],[A]) \in \bigcup G$.

(IV) Veamos ahora que el orden lineal $\bigcup G$ extiende al orden parcial $\leq^\star$ de $P(\mathbb{N})/fin$: Sean $[A],[B] \in P(\mathbb{N})/fin$ tal que $([A],[B]) \in \leq^\star$. Se debe probar que $([A],[B]) \in \bigcup G$. Sea S el siguiente conjunto,

$$S = \{U \in P : ([A],[B]) \in U\}.$$

Se cumple que, $S \in L(\mathbb{R})$. Se debe probar que S es denso. Sea $K \in P$, entonces existe un conjunto finito $Z \subseteq P(\mathbb{N})/fin$ tal que K es una extensión lineal de $\leq^\star \restriction Z$. Hay que probar que existe un $Q \leq K$ tal que $Q \in T$. Si $([A],[B]) \in K$, entonces el Q buscado es el mismo

K. Si $([A],[B]) \notin K$, entonces como en la prueba de la propiedad de tricotomía pueden ocurrir alguno de los siguientes tres casos:

Caso 1: ($[A] \notin Z$ y $[B] \in Z$).
Consideramos $Z' = Z \cup \{[A]\}$ y tomamos $W = \leq^\star \restriction Z'$. Se cumple que $([A],[B]) \in W$, pues por hipótesis $([A],[B]) \in \leq^\star$. Sea $K \cup W$, el cual es un orden parcial con respecto a Z'. Sea K' un orden lineal finito que es una extensión de $K \cup W$. $K' \in P$ por razones análogas a las expresadas en la prueba de la propiedad de reflexividad. Como K' es un orden lineal que extiende a $K \cup W$ se cumple que $([A],[B]) \in K'$. En consecuencia $K' \in S$ y $K' \supseteq K$. Es decir, K' es el Q buscado.

Caso 2: ($[B] \notin Z$ y $[A] \in Z$).
Consideramos $Z' = Z \cup \{[B]\}$ y tomamos $W = \leq^\star \restriction Z'$. Luego aplicamos un razonamiento análogo al Caso 1 para obtener el $Q \in T$ y $Q \leq K$ buscado.

Caso 3: ($[A] \notin Z$ y $[B] \notin Z$).
Consideramos $Z' = Z \cup \{[A],[B]\}$ y tomamos $W = \leq^\star \restriction Z'$. Después aplicamos un razonamiento análogo al Caso 1 para obtener el $Q \in T$ y $Q \leq K$ buscado. Por lo tanto S es denso y, como G es P-genérico sobre $L(\mathbb{R})$, se infiere que $S \cap G \neq \emptyset$, es decir, $([A],[B]) \in \bigcup G$.

□

Referencias

[1] Di Prisco, C. and Henle, H., *Doughnuts, Floating Ordinals, Square Brackets, and Ultraflitters.* Journal of Symbolic Logic **65** (2000) 462-473.

[2] Jech, T., *Set Theory.* Springer. 2000.

[3] Kunen, K., *Set Theory.* Elsevier. 2006.