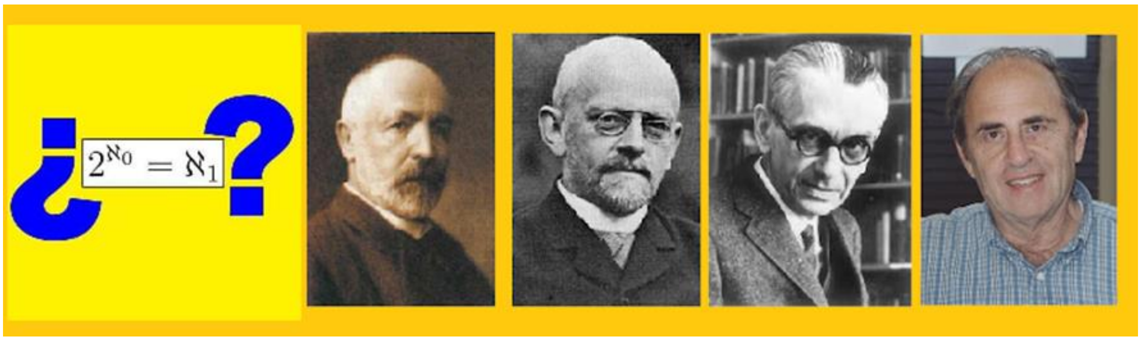
¿CUÁL ES EL CARDINAL DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES?
Autor: Franklin Galindo. Dr. en Matemática.

(14-01-2022)



¿(En la actualidad) Estamos cerca de una solución del problema del cardinal del conjunto de los números reales? ¿Estamos cerca de saber cuál es dicho cardinal o falta mucho todavía? Los intentos por determinar la cardinalidad del conjunto de los números reales (el cardinal del continuo) han contribuido sustancialmente con el desarrollo de la Teoría de Conjuntos. Hacia 1878 Cantor conjeturó que tal cardinal es el menor cardinal mayor que el cardinal de los números naturales ($\aleph_0$), es decir, $\aleph_1$. Esta hipótesis se denomina Hipótesis del continuo (HC) y Cantor no pudo demostrar la misma.

Para Hilbert la HC era tan importante que la colocó de primera en la lista de problemas presentada al Congreso Internacional de Matemáticas realizado en París en 1900; y uno de los resultados más destacados al respecto es la prueba de su independencia de los axiomas estándar de la Teoría de Conjuntos, la cual se debe a Gödel usando la clase de los conjuntos constructibles (1938), y a Cohen utilizando el método de forcing (1963-64), es decir, tales autores demostraron que si los axiomas estándar de la Teoría de Conjuntos son consistentes, entonces no se puede deducir de ellos ni la HC, ni la negación de la HC. Considerando esta independencia y además que (desde un punto de vista platonista matemático) la HC es una proposición significativa la cual es verdadera o falsa, una de las investigaciones actuales más relevantes sobre el tema consiste en la búsqueda de nuevos axiomas que permitan decidir el cardinal del continuo. Vale la pena destacar que algunos de los candidatos a nuevos axiomas de la Teoría de conjuntos dicen que Cantor estaba equivocado, pues ellos implican que el cardinal del continuo es $\aleph_2$, el menor cardinal mayor que $\aleph_1$ (Gödel había intuido este resultado años antes).

Dos ejemplos de candidatos a nuevos axiomas de este tipo son EL AXIOMA DE FORCING PROPIO (PFA) (El "forcing propio" fue introducido por Shelah en 1982 y 1998, y el "Axioma de forcing propio" fue introducido por Baumgartner en 1984) y EL AXIOMA DE MARTIN MÁXIMO (MM) (formulado por Foreman, Magidor y Shelah en 1988), los cuales son generalizaciones del AXIOMA DE MARTIN (AM), (Martin 1970), el AM es una proposición relacionada con la combinatoria infinita, la topología y el forcing que tiene importantes consecuencias en diversas áreas de las matemáticas como la Combinatoria, el Análisis, la Topología y el Álgebra (por ejemplo una consecuencia del AM es el conocido Teorema de Categoría de Baire y una generalización de tal teorema también se puede demostrar a partir del AM).

Sin embargo, tales candidatos a nuevos axiomas (PFA, MM, entre otros no mencionados en este breve escrito) no han sido aceptados totalmente como nuevos axiomas de la Teoría de conjuntos hasta los momentos, quizá esto se deba (en parte) a que ellos tienen al menos las siguientes dos características: (a) Ellos son muy poco "intuitivos", y (b) Las pruebas de la consistencia relativa de los mismos con los axiomas estándar que se han realizado hasta los momentos suponen la existencia de hipótesis fuertes de la teoría de conjuntos como por ejemplo que existen cardinales inaccesibles, por ejemplo las pruebas de la consistencia relativa con los axiomas estándar de PFA y de MM suponen la existencia cardinales supercompactos, y la existencia de estos grandes cardinales no se puede probar con los axiomas estándar como consecuencia del Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel (1931).

¿Qué ha pasado con el problema del cardinal del continuo después de Gödel (1938) y Cohen (1964)? Intentos de responder esta pregunta pueden encontrarse en los artículos de José Alfredo Amor (1946-2011*), "El Problema del continuo después de Cohen (1964-2004)"*, de Carlos Di Prisco , *"Are we closer to a solution of the continuum problem"*, y de Joan Bagaria, *"Natural axioms of set and the continuum problem"* , que se pueden encontrar en la biblioteca digital de mi blog de Lógica Matemática y Fundamentos de la Matemática: http://logicamatematica-lm.blogspot.com/