

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

**DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LAS FRECUENCIAS
NATURALES DE VIBRACIÓN DE PLACAS DELGADAS**

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela

Por el Bachiller:

Febres P. Luis J.

Para Optar al Título de
Ingeniero Mecánico

Caracas 2007

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LAS FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACIÓN DE PLACAS DELGADAS

Tutor: Prof^a. Carmen Rosa Hernández

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela

Por el Bachiller:

Febres P. Luis J.

Para Optar al Título de
Ingeniero Mecánico

Caracas 2007

Caracas 22 de junio de 2007

ACTA


Los abajo firmantes, miembros del jurado asignado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el bachiller: **Luis José Febres Pascual**, titulado:

**“DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LAS FRECUENCIAS
NATURALES DE VIBRACION DE PLACAS DELGADAS”**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el Plan de Estudio al Título de Ingeniero Mecánico.



Prof. Jorge Cruz
Jurado



Prof. Juan León
Jurado



Prof.ª. Carmen Rosa Hernández
Tutor



RESUMEN

Autor: Febres P., Luis J.

DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LAS FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACION DE PLACAS DELGADAS

**Tutor Académico: Prof^a. Carmen Rosa Hernández. Tesis. U.C.V.
Facultad de Ingeniería Mecánica, Caracas, 2.007. 106 Páginas.**

Palabras Claves: Frecuencia Natural, Placas Delgadas, Figuras de Chladni.

El estudio experimental de las frecuencias naturales de vibración en placas delgadas, resulta bastante interesante, debido a que estos elementos son de gran uso en el campo de la Ingeniería, por lo que es necesario conocer su comportamiento bajo condiciones de vibración, y más específicamente el fenómeno de resonancia, el cual puede resultar bastante perjudicial. En tal efecto, para contribuir a ampliar los conocimientos en esta área en la presente investigación se obtiene de manera experimental las frecuencias naturales de vibración en placas delgadas, para lo cual se construyó un banco de pruebas, con el que se pueden determinar las primeras frecuencias fundamentales en placas delgadas de acero ASTM A36 para tres configuraciones distintas:

- Placa Cuadrada de 40x40 cm con Todos sus Lados Empotrados.
- Placa Rectangular de 20x40 cm con Todos sus Lados Empotrados.
- Placa Rectangular de 20x40 cm con Tres Lados Empotrados y Uno de sus Lados Mayores Libre.

El método utilizado consiste en hacer vibrar la placa con un altavoz como excitador, sobre dicha placa se esparce arena, la cual formará patrones claramente visibles y particulares para cada modo de vibración. El altavoz es alimentado por una señal amplificada proveniente de un generador de señales. Las figuras producidas llevan el nombre de *Figuras de Chladni*, gracias a que el primero en generarlas fue el científico Ernest Florens Friedrich Chladni en 1808.

Como resultado del trabajo realizado, se obtuvieron los valores y las figuras características por lo menos de los diez primeros modos de vibración para los tres casos estudiados, con un grado de exactitud del 97% para el mejor de los casos y en el peor de los casos un 84%, cumpliendo satisfactoriamente el objetivo principal planteado en este trabajo especial de grado.

DEDICATORIA

Principalmente a Dios, gracias por ayudarme a lograr otra de mis metas, escuchar mis plegarias y ser mi luz en el camino.

A mis padres (ADALBERTO Y MARÍA) que sin su apoyo y constante dedicación no lo hubiese logrado, para ustedes este triunfo, gracias por estar conmigo siempre y guiar mis pasos.

Hermano (TATO), que aunque al ser menor que yo y te encuentres lejos, eres una gran fuente de inspiración, gracias por los años de compañía apoyo y diversión que me has brindado hasta ahora, por eso este logro también es tuyo y espero ser siempre un buen ejemplo a seguir para ti.

A la familia Febres Gonzáles (TÍO MÁXIMO, TÍA YANÍS, DAYANA, MATOTO Y RAZIEL), que con su gran amor y calor familiar llenaron mi vida al encontrarme lejos de mi casa e hicieron de su hogar el mío, gracias por todo.

A la familia Pascual Da silva (TÍO KIKO, TÍA LUCI, DÉBORA Y VICTORIA), por no faltar nunca una palabra de aliento, un consejo ni el apoyo cuando lo necesité, eternamente GRACIAS.

A los de España (GOYO, POLI, YESE, STEPHANY, FELIPE Y MARIA PILAR) que aunque en este momento no estén aquí, gracias por todo el apoyo brindado, en mis primeros años universitarios.

A los que lamentablemente ya no están con nosotros (LUIS Y PILAR), tío fuente de inspiración y un gran modelo a seguir. Abuelita como quisiera que estuvieras presente, nada me haría sentir más feliz, pero ahora estas con Dios y se que

donde quiera que estés te vas a sentir orgullosa de mi, eso te lo prometo. En sus memorias este triunfo.

A mi novia (MALE) por estar conmigo incondicionalmente en cada momento y acompañarme en la culminación de esta etapa. En los momentos difíciles fuiste el empujón que necesitaba para continuar, y nunca perdiste tu fe en mi, GRACIAS.

Luis José Febres Pascual

AGRADECIMIENTOS

Fueron muchas las personas que me acompañaron y colaboraron en la realización de este Trabajo Especial de Grado y a lo largo de mi carrera, pero quiero agradecer especialmente a:

- A la casa que vence las sombras, la Universidad Central de Venezuela por formarme como profesional.
- A la Escuela de Ingeniería Mecánica de la U.C.V., por la ayuda prestada por su personal y el uso de los equipos.
- A la Prof^a. Carmen Rosa Hernández, por guiarme y ofrecerme su apoyo.
- Al Prof. Jorge Cruz, por su colaboración y disponibilidad para aclarar las dudas que surgieron durante la investigación.
- Al Prof. Hendryk Albornoz por la colaboración y ayuda prestada en este proyecto.
- Al Sr. Armando por su colaboración en la construcción del banco de pruebas.
- A mis padres por darme toda la ayuda que necesité.
- Al Concejo de Desarrollo Humanístico CDCH de la U.C.V., por el apoyo financiero otorgado a la presente investigación bajo la modalidad de proyecto individual bajo el N° 08.15.5430.2004.

- Al Sargento de la Armada Enrique García y su esposa Yuli de García, por darme hospedaje en su casa.
- Al Centro de Mantenimiento de Plantas Navales Base Naval Agustín Armario Puerto Cabello y a su personal técnico, por el apoyo brindado.
- Al técnico fresador Héctor López, por prestar sus servicios de manera gratuita y eficiente.
- Al Prof. Félix Flores y a la División de Ambiente Salud y Trabajo de la U.C.V. por facilitar los equipos para realizar el estudio de ruido.
- Al personal de la empresa IMFESICA: Celina Pérez, Marbella Monsalve y Rosa Miquilareno, por todas las colaboraciones y aportes que dieron.
- A la familia Blanca Guzmán (Sr. Alfredo, Sra. Émeli, Alfredo y Male), gracias por darme su apoyo en todo momento.
- A mis amigos incondicionales: Leo, Martha, Ariane, Carlos “El Chino”, David, Gerardo Giulio y Julio, por prestar sus manos, conocimientos y apoyo.

Luis José Febres Pascual

ÍNDICE

| | Pág. |
|---|------|
| RESUMEN..... | i |
| DEDICATORIA..... | ii |
| AGRADECIMIENTOS..... | iv |
| INTRODUCCIÓN..... | 1 |
| CAPÍTULO I: <u>Planteamiento del problema</u> | 3 |
| 4.1. Motivación..... | 3 |
| 4.2. Antecedentes..... | 4 |
| 4.3. Planteamiento del Problema..... | 6 |
| 4.4. Objetivos..... | 6 |
| 4.4.1. Objetivo General..... | 6 |
| 4.4.2. Objetivos Específicos..... | 7 |
| 4.5. Alcances..... | 7 |
| CAPÍTULO II: <u>Marco Teórico</u> | 9 |
| 2.1. Vibración de Medios Continuos..... | 9 |
| 2.2. Ecuaciones Fundamentales de la Teoría Clásica de Placas..... | 9 |
| 2.2.1. Coordenadas rectangulares..... | 11 |
| 2.2.1.1.Ecuaciones Clásicas..... | 11 |
| 2.2.1.2.Solución..... | 13 |
| 2.3. Placas Rectangulares..... | 14 |
| 2.3.1. Placas con los cuatro lados empotrados (EEEE)..... | 20 |
| 2.3.2. Placas con tres lados empotrados y uno libre (EEEL)..... | 25 |
| 2.4. Métodos experimentales para determinar frecuencias naturales en placas delgadas “Figuras de Chladni”..... | 25 |
| CAPÍTULO III: <u>Diseño del banco de pruebas</u> | 27 |
| 3.1. Método de Generación de Vibraciones..... | 27 |
| 3.1.1. Tormenta de Ideas..... | 27 |
| 3.1.2. Evaluación y Elección de la Mejor Idea..... | 29 |

| | Pág. |
|--|-------------|
| 3.1.2.1.Criterios de Evaluación..... | 29 |
| 3.1.2.2.Evaluación de las Ideas Propuestas..... | 31 |
| 3.2. Diseño de las Placas (Especímenes)..... | 32 |
| 3.2.1. Material..... | 32 |
| 3.2.2. Geometría..... | 33 |
| 3.2.3. Dimensiones..... | 33 |
| 3.3. Diseño de la Base Para las Placas..... | 36 |
| CAPÍTULO IV: <u>Procedimiento Experimental</u> | 39 |
| 4.1. Método Experimental..... | 39 |
| 4.2. Materiales y Equipos..... | 39 |
| 4.3. Montaje Experimental..... | 45 |
| 4.4. Procedimiento Experimental..... | 50 |
| 4.5. Seguridad..... | 51 |
| CAPÍTULO V: <u>Resultado y Análisis de Resultados</u> | 55 |
| 4.1. Caso 1..... | 57 |
| 4.2. Caso 2..... | 62 |
| 4.3. Caso 3..... | 67 |
| CONCLUSIONES..... | 72 |
| RECOMENDACIONES..... | 74 |
| REFERENCIAS DOCUMENTALES..... | 75 |
| ANEXOS..... | 81 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | Pág. |
|---|------|
| Tabla 2.1 Coeficientes para la ecuación 2.33 ($^a x=0$; $^b x=a$)..... | 19 |
| Tabla 2.2 Primeros seis juegos de frecuencias, líneas de nodales y coeficientes de amplitud, para una placa cuadrada de lado "a" con todos los lados empotrados..... | 21 |
| Tabla 2.3 Eigenfunciones para una viga empotrada en sus extremos..... | 22 |
| Tabla 2.4 Parámetros de frecuencia aproximados para una placa cuadrada empotrada en todos sus lados..... | 22 |
| Tabla 2.5 Parámetros $\omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ de frecuencia para una placa cuadrada empotrada en sus cuatro lados..... | 23 |
| Tabla 2.6 Parámetros de Frecuencia para una placa rectangular empotrada en todos sus lados..... | 24 |
| Tabla 3.1 Cuadro resumen de los criterios de evaluación..... | 30 |
| Tabla 3.2 Evaluación de las ideas en escala del 0 al 10..... | 31 |
| Tabla 3.3 Evaluación de las ideas con el valor ponderado..... | 32 |
| Tabla 3.4 Propiedades del acero ASTM A36..... | 32 |
| Tabla 4.1 Análisis de Ruido..... | 52 |
| Tabla 5.1 Cuadro resumen de resultados. Caso 1..... | 57 |
| Tabla 5.2 Cuadro resumen de figuras de Chladni. Caso 1..... | 58 |
| Tabla 5.3 Cuadro resumen de resultados. Caso 2..... | 63 |
| Tabla 5.4 Cuadro resumen de figuras de Chladni. Caso 2..... | 64 |
| Tabla 5.5 Cuadro resumen de resultados. Caso 3..... | 67 |
| Tabla 5.6 Cuadro resumen de figuras de Chladni. Caso 3..... | 69 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | Pág. |
|--|------|
| Figura 1.1 (a y b: Galpones con paredes y techos de láminas de zinc; c: container; d: separadores de oficina de láminas de vidrio; e: tren de laminación y f: tanque de acero)..... | 4 |
| Figura 2.1 Sistema de coordenadas rectangulares..... | 11 |
| Figura 2.2 Líneas nodales m y n | 18 |
| Figura 2.3 Placa empotrada en sus cuatro lados..... | 21 |
| Figura 2.4 Placa empotrada con tres lados empotrados y uno libre..... | 25 |
| Figura 2.5 Dibujos publicados por Chladni..... | 26 |
| Figura 3.1 Esquema excitador biela-manivela..... | 28 |
| Figura 3.2 Esquema motor con una leva..... | 29 |
| Figura 3.3 Vista de planta de la placa para el caso 1..... | 34 |
| Figura 3.4 Vista de planta de la placa para el caso 2..... | 35 |
| Figura 3.5 Vista de planta de la placa para el caso 3..... | 36 |
| Figura 3.6 Soporte ajustable..... | 36 |
| Figura 3.7 Vista de planta de la base..... | 37 |
| Figura 3.8 Vista de planta del marco superior..... | 38 |
| Figura 3.9 Vista de planta de los implementos..... | 38 |
| Figura 4.1 Generador de señales..... | 39 |
| Figura 4.2 Amplificador de audio..... | 40 |
| Figura 4.3 Altavoz..... | 40 |
| Figura 4.4 Multímetro Digital..... | 40 |
| Figura 4.5 Niveles de línea..... | 41 |
| Figura 4.6 Prensas manuales tipo C..... | 41 |
| Figura 4.7 Piezas de Madera..... | 41 |
| Figura 4.8 Cable RCA-Banana..... | 42 |
| Figura 4.9 Cable Banana-Banana..... | 42 |
| Figura 4.10 Cable Banana-Terminal Plano..... | 42 |

| | Pág. |
|---|-------------|
| Figura 4.11 Base..... | 43 |
| Figura 4.12 Marco Superior..... | 43 |
| Figura 4.13 Implemento para la base..... | 43 |
| Figura 4.14 Implemento para el marco superior..... | 44 |
| Figura 4.15 Placa cuadrada de 0,48x0,48 m..... | 44 |
| Figura 4.16 Placa rectangular de 0,48x0,28 m..... | 44 |
| Figura 4.17 Esquema del montaje del equipo..... | 45 |
| Figura 4.18 Salidas del generador de señales..... | 46 |
| Figura 4.19 Entradas RCA del amplificador de audio..... | 46 |
| Figura 4.20 Salidas del amplificador de audio..... | 46 |
| Figura 4.21 Conexión del generador de señales con el multímetro..... | 47 |
| Figura 4.22 Montaje para el caso 1..... | 48 |
| Figura 4.23 Montaje para el caso 3..... | 48 |
| Figura 4.24 Base con implemento..... | 49 |
| Figura 4.25 Marco superior con implemento..... | 49 |
| Figura 4.26 Montaje para el caso 2..... | 49 |
| Figura 4.27 Sonómetro y Analizador de Frecuencias..... | 51 |
| Figura 4.28 Protectores auditivos..... | 53 |
| Figura 4.29 Guantes protectores anticorte..... | 53 |
| Figura 4.30 Protectores visuales..... | 54 |

INTRODUCCIÓN

Para la obtención de las frecuencias fundamentales en medios continuos se pueden emplear, como generalmente se hace, las expresiones analíticas que modelan el comportamiento real del sistema en estudio, sin embargo, es posible obtener de manera experimental las primeras frecuencias de estos elementos, ensayándolos bajo las mismas condiciones que se consideran en el modelo teórico.

En el campo de la Ingeniería es muy común encontrarse con sistemas físicos sometidos a condiciones de vibración, la cual en muchos de los casos representa un factor muy importante estudiar, y de manera específica el fenómeno de resonancia.

En este trabajo, se obtienen de forma experimental, las primeras frecuencias naturales en placas delgadas. Para tal fin, se construyó un banco de pruebas que proporciona las condiciones necesarias para ensayar las placas en estudio. Para los ensayos son consideradas las siguientes configuraciones:

- Caso 1: Placa Cuadrada de Acero ASTM A36 de 0,4x0,4 m con Todos sus Lados Empotrados.
- Caso 2: Placa Rectangular de Acero ASTM A36 de 0,2x0,4 m con Todos sus Lados Empotrados.
- Caso 3: Placa Rectangular de Acero ASTM A36 de 0,2x0,4 m con Tres Lados Empotrados y Uno de sus Lados Mayores Libre.

La elección de estas características se debe a que el material presenta un comportamiento cercano al isotrópico, se cuenta con una amplia gama de datos teóricos para respaldar los resultados, las geometrías escogidas son las más factibles de producir y que las condiciones de borde son las más convenientes de simular.

Esta investigación, se enfoca a estudiar los primeros modos de vibración de placas delgadas, bajo las configuraciones anteriormente expuestas.

Este trabajo se estructura en 5 capítulos donde se expone detalladamente los resultados obtenidos y los procedimientos realizados para su obtención, así como también, los fundamentos teóricos que sirven como base para el desarrollo de ésta investigación.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Motivación:

Es bien conocido en el campo de la Ingeniería, que los fenómenos de vibración son un factor importante a tomar en cuenta en el diseño de estructuras y maquinarias, ya que resulta casi imposible encontrar elementos o sistemas que no se encuentren bajo la influencia de condiciones de vibración.

Ahora bien, si esta condición de vibración es causada por una excitación de tipo armónica puede presentarse el fenómeno de resonancia. Esta ocurre cuando un sistema es excitado con una fuerza armónica cuya frecuencia coincide con alguna de sus frecuencias propias o naturales. En algunos casos la condición de resonancia puede conducir a situaciones de alto riesgo, tanto para el desempeño del sistema considerado, como para sus alrededores. Un ejemplo de ello fue lo ocurrido el 7 de noviembre de 1940 en el puente de Tacoma, el cual alcanzó la condición de resonancia y comenzó a oscilar descontroladamente, presentando vibraciones transversales y torsionales de gran amplitud, hasta que la estructura finalmente colapsó.

En el campo de la Ingeniería es muy común encontrarse con sistemas físicos de diversa naturaleza, sometidos a condiciones de vibración tales como: tendidos eléctricos, bancadas de máquinas, líneas de tuberías, o elementos tales como vigas, placas, entre otros. Se podría decir que muchos de los elementos presentes en estructuras, maquinarias, sala de máquinas, etc., tienen forma de placas delgadas, elaboradas en diversos materiales. Comúnmente dichas placas en condiciones normales de trabajo, se encuentran sometidas a excitaciones externas de diversos tipos. Si dichas excitaciones son armónicas, el sistema en consideración podría

alcanzar la condición de resonancia. Resulta de gran importancia conocer los valores de las frecuencias naturales en elementos en forma de placas delgadas, para poder evaluar su desempeño dinámico y que permita tomar decisiones acertadas y oportunas en el diseño para la prevención de situaciones de riesgo, y garantizar un buen funcionamiento del sistema.

1.2. Antecedentes:

El uso de placas delgadas como elementos de diseño de máquinas y estructuras, es muy común en diversas áreas de la Ingeniería, y el desempeño dinámico de estos elementos debe ser considerado en las primeras etapas del diseño para garantizar condiciones de trabajo seguras y eficientes. Algunas aplicaciones se pueden apreciar en las siguientes imágenes:



a



b



c



d



e



f

Figura 1.1 (a y b: Galpones con paredes y techos de láminas de zinc; c: container; d: separadores de oficina de láminas de vidrio; e: tren de laminación y f: tanque de acero)

Ahora bien, el análisis dinámico de placas delgadas se puede llevar a cabo a través de la aplicación de modelos matemáticos que representan la generalidad del fenómeno físico. De igual forma, es posible emplear técnicas numéricas para el análisis dinámico de sistemas físicos; según el método empleado se toma ciertas consideraciones necesarias para la ejecución de la técnica. Evidencia de esto, es el trabajo realizado en 1998 por el Ing. Vargas, B., donde se analizó la respuesta dinámica de placas anisotrópicas e isotrópicas con diferentes condiciones de frontera y sujetas a cargas de impulso. Dicho estudio incluye un análisis de vibración libre y forzada tanto para placas anisotrópicas como isotrópicas, tomando en cuenta el efecto de las condiciones de frontera. Se utilizaron dos tipos de carga impulsiva modeladas mediante pulsos de forma senoidal y escalón.

El estudio dinámico de sistemas físicos también se puede realizar empleando técnicas experimentales, que además de proporcionar información cualitativa y/o cuantitativa del fenómeno, permite mostrar de manera más didáctica pero no menos valiosa, el fenómeno de vibraciones en medios continuos.

Las placas delgadas como elemento de diseño, no están restringidas al ámbito de la Ingeniería Mecánica; en otras áreas de la Ingeniería ha sido necesario la evaluación de estos sistemas, ejemplo de ello, es el trabajo presentado por Grases J. y Molina Y. (1973) donde se describe el procedimiento para determinar la frecuencia natural y amplitud de vibración de una losa compuesta. Este estudio fue realizado en la nave de ensayos del Instituto de Materiales y Modelos Estructurales de la Facultad de Ingeniería de la U.C.V. En el trabajo realizado por Guerrero, M., et al, se estudia los primeros cuatro modos trasversales de vibración de una viga de perfil tipo "I". Para tal fin, utilizaron tres métodos: analítico, experimental y numérico.

1.3. Planteamiento del Problema:

El uso de elementos en forma de placas delgadas en las diferentes ramas del campo de la Ingeniería, es muy amplio. Al someter estos elementos a excitación armónica, la posibilidad de la resonancia está presente, lo cual resulta muy poco deseable, ya que la magnitud de la amplitud de oscilación puede alcanzar valores no adecuados, lo que podría comprometer el desempeño del elemento o del sistema completo.

Debido a que la condición de resonancia ocurre cuando el valor de la frecuencia de la excitación es igual a la frecuencia natural del sistema, es necesario conocer este último, si quiere evitarse la resonancia.

Dada la importancia de conocer los valores de la frecuencia natural de elementos en forma de placa delgada, en este trabajo se plantea obtener experimentalmente las primeras frecuencias naturales de vibración de placas delgadas de material isotrópico, considerando diversos tipos de vínculos físicos y diversas geometrías.

1.4. Objetivos:

1.4.1. Objetivo General

El presente trabajo tiene como objetivo general:

- Determinar experimentalmente las frecuencias naturales de vibración de placas delgadas.

1.4.2. Objetivos Específicos

Los objetivos específicos contemplados son:

- Realizar una revisión bibliográfica de los trabajos de investigación desarrollados en el área de vibraciones en medios continuos, empleando métodos experimentales.
- Establecer las características geométricas y los parámetros físicos de las placas delgadas destinadas a ensayos.
- Establecer los tipos de vínculos físicos de las placas delgadas a ensayar.
- Diseñar un banco de pruebas para el ensayo de elementos en forma de placas delgadas, considerando los criterios geométricos y físicos establecidos.
- Construir el banco de pruebas según las condiciones del diseño.
- Ensayar las placas delgadas en el banco de pruebas.
- Analizar los resultados obtenidos.
- Redactar el informe final del trabajo especial de grado.

1.5. Alcances

El presente trabajo se encuentra restringido a las siguientes condiciones:

- La excitación externa será de tipo armónico, perpendicular a la mayor superficie de la placa delgada en estudio.
- El material de las placas debe ser de características isotrópicas.
- La determinación experimental de la frecuencia natural requiere de la construcción de un banco de pruebas con un diseño que contemple las siguientes condiciones:
 - Dimensiones adecuadas para el ensayo de placas delgadas con diferentes configuraciones geométricas.
 - Diseño que permita establecer diversos tipos de vínculos físicos.

- Diseño que permita fácil operación y manipulación.
- Diseño que garantice la seguridad del equipo y del operador durante su traslado y operación.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Vibración de Medios Continuos

Al tratar las vibraciones de los medios continuos se supondrá que el material del cuerpo es totalmente elástico, homogéneo, isotrópico y que sigue la ley de Hooke. Se aplicaran las ecuaciones usadas para sistemas de partículas.

Sin embargo, en el caso de medios continuos se tiene un sistema consistente en un número infinitamente grande de partículas, entre las cuales actúan fuerzas elásticas. Este sistema requiere un número infinitamente grande de coordenadas para determinar su posición y tiene, en consecuencia, un número infinito de grados de libertad, porque cualquier pequeño desplazamiento que satisfaga la condición de continuidad (esto es un desplazamiento que no produzca resquebrajaduras en el cuerpo) puede ser tomado como un desplazamiento virtual o posible. Sobre esta base se ve que un medio continuo puede tener un número infinito de modos naturales de vibración.

2.2. Ecuaciones fundamentales de la teoría clásica de placas

En la siguiente discusión se supone que la placa consiste de un material perfectamente elástico, homogéneo e isotrópico, así mismo, se despreciará cualquier efecto de amortiguación. Las placas según su espesor se pueden clasificar en:

- $L/h > 500$ placas muy delgadas.
- $500 > L/h > 100$ placas delgadas.
- $100 > L/h > 20$ placas medias.
- $20 > L/h$ placas gruesas.

Donde h es el espesor y L es el lado de menor dimensión de la placa. Para el siguiente desarrollo teórico se supondrá que la placa es delgada.

Leissa (1969) emplea la ecuación diferencial clásica del movimiento para el desplazamiento transversal w de una placa expresada como:

$$D\nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad 2.1$$

donde D es la rigidez flexural y está definida como:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad 2.2$$

E es el módulo de Young, h el espesor de la placa, ν es el cociente de Poisson, ρ es la densidad en masa por unidad de área de la placa, t es tiempo, y $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$, donde ∇^2 es el operador Laplaciano.

Cuando se asumen vibraciones libres, el movimiento es expresado como:

$$w = W \cos \omega t \quad 2.3$$

donde ω es la frecuencia circular y W es una función que depende solo de la posición. Sustituyendo la ecuación 2.3 en la ecuación 2.1 se obtiene:

$$(\nabla^4 - k^4)W = 0 \quad 2.4$$

donde k es un parámetro escogido por conveniencia y definido por:

$$k^4 = \frac{\rho\omega^2}{D} \quad 2.5$$

Generalmente es conveniente factorizar la ecuación 2.4, se tiene:

$$(\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - k^2) = 0 \quad 2.6$$

de donde, por la teoría de ecuaciones diferenciales lineales, la solución completa de la ecuación 2.6 puede ser obtenida superponiendo las soluciones de las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 W_1 + k^2 W_1 &= 0 \\ \nabla^2 W_2 + k^2 W_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 2.7$$

2.2.1. *Coordenadas rectangulares.*

2.2.1.1. *Ecuaciones clásicas:*

Las coordenadas rectangulares de un punto cualquiera P son mostradas en la figura 2.1

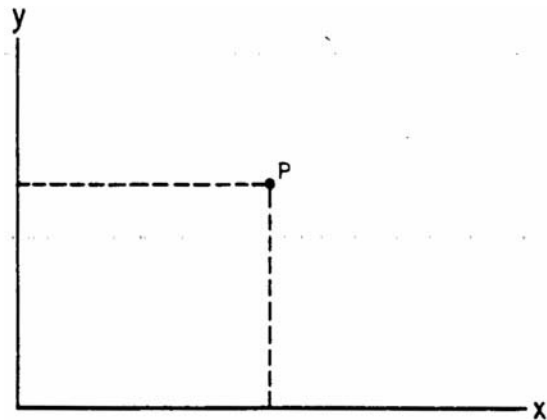


Figura 2.1 Sistema de coordenadas rectangulares

El operador Laplaciano en coordenadas rectangulares es:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad 2.8$$

Los momentos de torsión y flexión están relacionados con los desplazamientos por:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad 2.9$$

Las fuerzas transversales de cizallamiento que actúan vienen dadas por:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{aligned} \right\} \quad 2.10$$

Y las reacciones de borde de Kevin-Kirchhoff son:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ V_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad 2.11$$

La energía de tensión de flexión y torsión de una placa expresada en coordenadas rectangulares es:

$$U = \frac{D}{2} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA \quad 2.12$$

donde $dA = dx dy$

2.2.1.2. Soluciones:

Las soluciones generales a la ecuación 2.4 en coordenadas rectangulares pueden ser obtenidas asumiendo series de Fourier en una de las variables, como por ejemplo x ; esto es:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \alpha x + \sum_{m=0}^{\infty} Y_m^*(y) \cos \alpha x \quad 2.13$$

Sustituyendo la ecuación 2.13 en la ecuación 2.7 se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 Y_{m1}}{dy^2} + (k^2 - \alpha^2) Y_{m1} &= 0 \\ \frac{d^2 Y_{m2}}{dy^2} + (k^2 - \alpha^2) Y_{m2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 2.14$$

y dos ecuaciones similares para Y_m^* ; asumiendo que $k^2 > \alpha^2$, las soluciones para las ecuaciones diferenciales 2.14 son bien conocidas como:

$$\left. \begin{aligned} Y_{m1} &= A_m \sin \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + B_m \cos \sqrt{k^2 - \alpha^2} y \\ Y_{m2} &= C_m \sinh \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + D_m \cosh \sqrt{k^2 - \alpha^2} y \end{aligned} \right\} \quad 2.15$$

donde A_m, \dots, D_m son coeficientes arbitrarios que determinan el modo de vibración y son obtenidos mediante condiciones de borde. Si $k^2 < \alpha^2$ es necesario reescribir Y_{m1} :

$$Y_{m1} = A_m \sinh \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + B_m \cosh \sqrt{k^2 - \alpha^2} y \quad 2.16$$

De este modo, la solución completa a la ecuación 2.4 puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} & \left(A_m \sin \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + B_m \cos \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + C_m \sinh \sqrt{k^2 - \alpha^2} y \right. \\ & \left. + D_m \cosh \sqrt{k^2 - \alpha^2} y \right) \sin \alpha x + \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_m^* \sin \sqrt{k^2 - \alpha^2} y \right. \\ & \left. + B_m^* \cos \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + C_m^* \sinh \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + D_m^* \cosh \sqrt{k^2 - \alpha^2} y \right) \cos \alpha x \end{aligned} \quad 2.17$$

2.3. Placas Rectangulares

En conjunto existen 21 combinaciones de condiciones de borde simple (por ejemplo, empotrado (E), simplemente apoyado (SA) o libre (L)) para una placa rectangular. Los parámetros de frecuencia se expresan en términos de $\omega a \sqrt{\rho/D}$, donde a es una dimensión de longitud y no depende del cociente de Poisson salvo que al menos uno de los bordes de la placa esté libre. Sin embargo, como D contiene ν las frecuencias por si mismas dependerán de ν para todos los casos.

Warburton (1954) presentó la primera colección de soluciones para placas rectangulares. Utilizó el método de Rayleigh con funciones de deflexión como el producto de funciones de viga; esto es:

$$W(x, y) = X(x)Y(y) \quad 2.18$$

donde se eligen $X(x)$ y $Y(y)$ como los modos de vibración fundamentales de las vigas, tomando en cuenta las condiciones de borde de la placa. Esta elección de funciones satisface exactamente todas las condiciones de borde para la placa, excepto en la condición de borde libre donde la condición de cizallamiento está aproximadamente satisfecha. Las seis posibles combinaciones de condiciones de borde para $x=0$ y $x=a$ son satisfechas con los siguientes modos de vibración:

a) Simplemente apoyado para $x=0$ y $x=a$:

$$X(x) = \sin \frac{(m-1)\pi x}{a} \quad (m = 2, 3, 4, \dots) \quad 2.19$$

b) Empotrada para $x=0$ y $x=a$:

$$X(x) = \cos \gamma_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sin \left(\frac{\gamma_1}{2} \right)}{\sinh \left(\frac{\gamma_1}{2} \right)} \cosh \gamma_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \quad (m = 2, 4, 6, \dots) \quad 2.20$$

donde los valores de γ_1 son obtenidos como raíces de:

$$\tan \left(\frac{\gamma_1}{2} \right) + \tanh \left(\frac{\gamma_1}{2} \right) = 0 \quad 2.21$$

y

$$X(x) = \sin \gamma_2 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin \left(\frac{\gamma_2}{2} \right)}{\sinh \left(\frac{\gamma_2}{2} \right)} \sinh \gamma_2 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \quad (m = 3, 5, 7, \dots) \quad 2.22$$

donde los valores de γ_2 son obtenidos como raíces de:

$$\tan\left(\frac{\gamma_2}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\gamma_2}{2}\right) = 0 \quad 2.23$$

c) Libres para $x=0$ y $x=a$:

$$X(x) = 1 \quad (m = 0) \quad 2.24$$

$$X(x) = 1 - \frac{2x}{a} \quad (m = 1) \quad 2.25$$

$$X(x) = \cos \gamma_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sin\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)} \cosh \gamma_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) \quad (m = 2, 4, 6, \dots) \quad 2.26$$

y

$$X(x) = \sin \gamma_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sin\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)} \sinh \gamma_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) \quad (m = 3, 5, 7, \dots) \quad 2.27$$

con γ_1 y γ_2 como se definen en las ecuaciones 2.21 y 2.23

d) Empotrada para $x=0$ y libre para $x=a$:

$$X(x) = \cos \frac{\gamma_3 x}{a} - \cosh \frac{\gamma_3 x}{a} + \left(\frac{\sin \gamma_3 - \sinh \gamma_3}{\cos \gamma_3 - \cosh \gamma_3} \right) \left(\sin \frac{\gamma_3 x}{a} - \sinh \frac{\gamma_3 x}{a} \right) \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad 2.28$$

donde:

$$\cos \gamma_3 \cosh \gamma_3 = -1 \quad 2.29$$

e) Empotrada para $x=0$ y simplemente apoyada para $x=a$:

$$X(x) = \sin \gamma_2 \left(\frac{x}{2a} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin \left(\gamma_2 / 2 \right)}{\sinh \left(\gamma_2 / 2 \right)} \sinh \gamma_2 \left(\frac{x}{2a} - \frac{1}{2} \right) \quad (m = 2, 3, 4, \dots) \quad 2.30$$

con γ_2 como se definió en la ecuación 2.23

f) Libre para $x=0$ y simplemente apoyado para $x=a$:

$$X(x) = 1 - \frac{x}{a} \quad (m = 1) \quad 2.31$$

$$X(x) = \sin \gamma_2 \left(\frac{x}{2a} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sin \left(\gamma_2 / 2 \right)}{\sinh \left(\gamma_2 / 2 \right)} \sinh \gamma_2 \left(\frac{x}{2a} - \frac{1}{2} \right) \quad (m = 2, 3, 4, \dots) \quad 2.32$$

con γ_2 como se definió en la ecuación 2.23

Las funciones $Y(y)$ son elegidas similarmente por las condiciones para $y=0$ y $y=a$ reemplazando x por y , a por b y m por n (Figura 2.2) en las ecuaciones 2.19 hasta 2.22. Los indicadores n y m serán el número de líneas nodales en dirección x y y , respectivamente, incluyendo los bordes como líneas nodales, excepto cuando el borde está libre.

La frecuencia ω está dada por Warburton (1954) como:

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 D}{a^4 \rho} \left\{ G_x^4 + G_y^4 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left[\nu H_x H_y + (1-\nu) J_x J_y \right] \right\} \quad 2.33$$

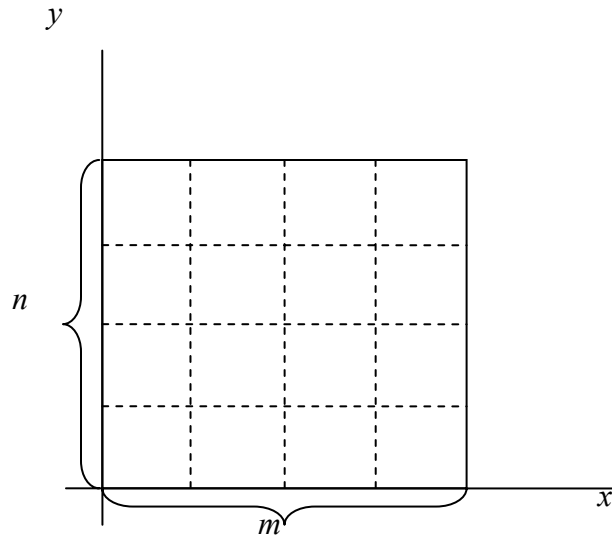


Figura 2.2 Líneas nodales m y n

donde G_x , H_x y J_x son funciones obtenidas de la tabla 2.1 de acuerdo con las condiciones para $x=0$ y $x=a$.

Las cantidades G_y , H_y y J_y se obtienen de la misma manera pero sustituyendo x por y y m por n .

Los resultados determinados en la tabla 2.1 decrecen en exactitud para los modos de vibración más altos, es decir, a medida que aumentan los valores para m y n .

| Tabla 2.1 Coeficientes para la ecuación 2.33 (^a x=0; ^b x=a) | | | | |
|--|-----------------|--------------------------|---|---|
| Condición de borde | <i>m</i> | <i>G_x</i> | <i>H_x</i> | <i>J_x</i> |
| SA ^a SA ^b | 2,3,4... | <i>m</i> - 1 | (<i>m</i> - 1) ² | (<i>m</i> - 1) ² |
| E ^a | 2 | 1.506 | 1.248 | 1.248 |
| E ^b | 3,4,5,... | <i>m</i> - $\frac{1}{2}$ | $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$ | $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$ |
| L ^a | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 12/π ² |
| | 2 | 1.506 | 1.248 | 5.017 |
| L ^b | 3,4,5,... | <i>m</i> - $\frac{1}{2}$ | $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$ | $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{6}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$ |
| E ^a SA ^b | 2,3,4,... | <i>m</i> - $\frac{3}{4}$ | $\left(m - \frac{3}{4}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{\left(m - \frac{3}{4}\right)\pi}\right]$ | $\left(m - \frac{3}{4}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{\left(m - \frac{3}{4}\right)\pi}\right]$ |
| L ^a | 1 | 0 | 0 | 3/π ² |
| | SA ^b | 2,3,5,... | <i>m</i> - $\frac{3}{4}$ | $\left(m - \frac{3}{4}\right)^2 \left[1 - \frac{3}{\left(m - \frac{3}{4}\right)\pi}\right]$ |
| E ^a | 1 | 0.597 | -0.0870 | 0.471 |
| | 2 | 1.494 | 1.347 | 3.284 |
| L ^b | 3,4,5,... | <i>m</i> - $\frac{1}{2}$ | $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$ | $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$ |

2.3.1. Placas con los cuatro lados empotrados (EEEE)

El caso de vibración de una placa empotrada por sus cuatro lados (fig. 2.3) ha sido ampliamente estudiado, especialmente el caso para una placa cuadrada. Los primeros resultados razonablemente exactos para una placa cuadrada fueron dados en 1931 por Sezawa quien utilizó el método de series. Usó funciones que satisfacían exactamente la ecuación diferencial (EC. 2.1) y la condición de borde de deflexión cero a lo largo del mismo, por lo que requería que en el punto medio de estos la pendiente fuera cero. Este trabajo inicial ha sido seguido por un gran número de publicaciones japonesas sobre el problema; por ejemplo: Kato (1932), Tomotika (1936), Iguchi (1938), Habata (1947), Naruoka (1951), Kanazawa y hawaii (1952), Munakata (1952) Hamada (1959), Suzuki.

Variaciones del método de serie fueron usadas por: Sezawa (1931), Kato (1932), Tomotika (1936), Iguchi (1938), Habata (1947), Naruoka (1951), Deverall (1961), Claassen y Thorne (1961), entre otros. Particularmente notable es el trabajo de Tomotika (1933 y 1936); quien determinó la frecuencia fundamental para una placa cuadrada con bastante exactitud. De la misma manera que Sezawa, escogió funciones que satisfacían exactamente la condición de deflexión y agregó un factor determinante característico infinito para las condiciones de la pendiente.

La tabla 2.2 resume los primeros seis juegos de frecuencias, líneas nodales, y coeficientes de amplitud para una placa cuadrada de lado a . Iguchi (1938) no encontró el cuarto modo en su trabajo. Young (1950) usó los productos de funciones de viga y el método de Rayleigh-Ritz para obtener mayor exactitud. Los modos de vibración que dan como resultado vienen dadas por:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} \left[\cosh\left(\frac{\varepsilon_m x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\varepsilon_m x}{a}\right) - \alpha_m \left(\sinh\left(\frac{\varepsilon_m x}{a}\right) - \sin\left(\frac{\varepsilon_m x}{a}\right) \right) \right] \left[\cosh\left(\frac{\varepsilon_n y}{a}\right) - \cos\left(\frac{\varepsilon_n y}{a}\right) - \alpha_n \left(\sinh\left(\frac{\varepsilon_n y}{a}\right) - \sin\left(\frac{\varepsilon_n y}{a}\right) \right) \right] \quad 2.34$$

Tabla 2.2 Primeros seis juegos de frecuencias, líneas de nodales y coeficientes de amplitud, para una placa cuadrada de lado "a" con todos los lados empotrados

| $\omega a^2 \sqrt{\rho/d}$ | a 35,9866 | c 73,40 | c 108,22 | ----- | c 132,18 | c 164,99 |
|-------------------------------|---|---|---|---|---|--|
| | b 35,99 | b 73,41 | b 108,27 | b 131,64 | b 132,25 | b 165,15 |
| Líneas Nodales | | | | | | |
| Coeficientes de Amplitud b | $A_{11}=1,0000$ $A_{13}=0,0142$ $A_{15}=0,0020$ $A_{31}=0,0142$ $A_{33}=-0,0031$ $A_{35}=-0,0009$ $A_{51}=0,0020$ $A_{53}=-0,0009$ $A_{55}=-0,0004$ | $A_{12}=1,0000$ $A_{14}=0,0101$ $A_{16}=0,0020$ $A_{32}=0,0406$ $A_{34}=-0,0022$ $A_{36}=-0,0007$ $A_{52}=0,0070$ $A_{54}=-0,0011$ $A_{56}=-0,0005$ | $A_{22}=1,0000$ $A_{24}=0,0326$ $A_{26}=0,0073$ $A_{42}=0,0326$ $A_{44}=-0,0019$ $A_{46}=-0,0010$ $A_{62}=0,0073$ $A_{64}=-0,0010$ $A_{66}=-0,0006$ | $A_{13}=1,0000$ $A_{15}=0,0085$ $A_{31}=-1,0000$ $A_{35}=-0,0141$ $A_{51}=-0,0085$ $A_{53}=0,0141$ | $A_{11}=-0,0280$ $A_{13}=1,0000$ $A_{15}=0,0055$ $A_{31}=1,0000$ $A_{33}=0,1267$ $A_{35}=0,0118$ $A_{51}=0,0055$ $A_{53}=0,0118$ $A_{55}=-0,0018$ | $A_{12}=-0,0406$ $A_{14}=-0,0105$ $A_{16}=-0,0017$ $A_{32}=1,0000$ $A_{34}=0,0560$ $A_{36}=0,0141$ $A_{52}=0,0238$ $A_{54}=-0,0011$ $A_{56}=-0,0009$ |

a Trabajo de Tomotika

b Trabajo de Young

c Trabajo de Iguchi

Donde los valores de A_{mn} son dados en la tabla 2.2 y los valores de α y ε son tomados de la tabla 2.3. El origen del sistema de coordenadas de xy es tomado en una esquina de la placa como se muestra en la figura 2.3

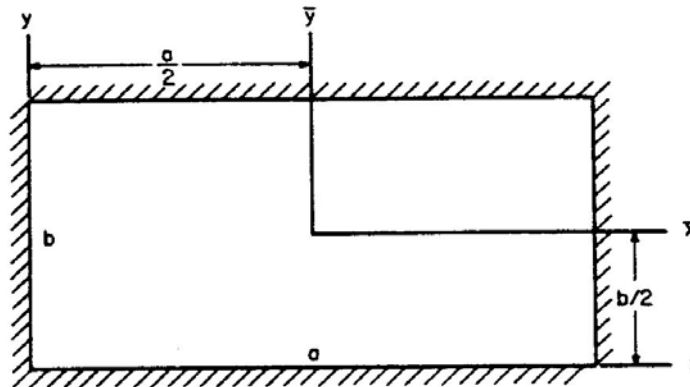


Figura 2.3 Placa empotrada en sus cuatro lados

| Tabla 2.3 Eigenfunciones para una viga empotrada en sus extremos | | |
|---|--|--|
| <i>m, n</i> | α_m, α_n | ϵ_m, ϵ_n |
| 1----- | 0,98250222 | 4,7300408 |
| 2----- | 1,00077731 | 7,8532046 |
| 3----- | 0,99996645 | 10,9956078 |
| 4----- | 1,00000145 | 14,1371655 |
| 5----- | 0,99999994 | 17,2787596 |
| 6----- | 1,00000000 | 20,4203522 |
| r>6----- | 1,0 | (2r+1)π/2 |

Bolotin (1961) obtuvo resultados adicionales para una placa cuadrada utilizando una modificación del método de series. Éstos son resumidos en la tabla 2.4. En dicha tabla los valores impares de m producen modos simétricos sobre el eje y , incluso ciertos valores de m producen modos antisimétricos sobre el eje y y de forma semejante para n con respecto al eje x .

Tabla 2.4 Parámetros de frecuencia aproximados para una placa cuadrada empotrada en todos sus lados

| <i>m</i> | <i>n</i> | $\omega a^2 \sqrt{\rho/d}$ |
|-----------------|-----------------|--|
| 1 | 1 | 35,10 |
| 2 | 1 | 72,90 |
| 2 | 2 | 107,47 |
| 3 | 1 | 131,63 |
| 3 | 2 | 164,39 |
| 4 | 1 | 210,35 |
| 3 | 3 | 219,32 |
| 4 | 2 | 242,20 |
| 4 | 3 | 295,69 |
| 4 | 4 | 370,66 |

La fórmula general, obtenida por Bolotin, para una placa cuadrada empotrada en sus cuatro lados para cuando $m=n$ es:

$$\omega_{mm} = 2 \left(m + \frac{1}{3} \right)^2 \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho}} \quad 2.35$$

Ödman (1955) usó una variación del método de Galerkin donde los modos de vibración son de la forma $W(\bar{x}, \bar{y}) = X(\bar{x})Y(\bar{y})$, donde:

$$\begin{cases} X(\bar{x}) = A_1 \cosh(\mu_1 \bar{x}) + A_2 \sinh(\mu_1 \bar{x}) + A_3 \cosh(\mu_2 \bar{x}) + A_4 \sinh(\mu_2 \bar{x}) \\ Y(\bar{y}) = B_1 \cosh(\mu_3 \bar{y}) + B_2 \sinh(\mu_3 \bar{y}) + B_3 \cosh(\mu_4 \bar{y}) + B_4 \sinh(\mu_4 \bar{y}) \end{cases} \quad 2.36$$

y donde μ_1, \dots, μ_4 son determinados aplicando la fórmula de Galerkin para la ecuación diferencial de movimiento de la placa. Las 36 primeras frecuencias ω_{mn} ($m, n=1, \dots, 6$) fueron calculadas por Ödman y son mostradas en la tabla 2.5, estos valores serán los valores utilizados como referencia en nuestra investigación

Tabla 2.5 Parámetros $\omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ de frecuencia para una placa cuadrada empotrada en sus cuatro lados
[Los valores entre paréntesis fueron obtenidos por interpolación; tabla simétrica]

| m | $\omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para valores de n | | | | | |
|---|--|---------|---------|---------|---------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 39,998965 | 73,405 | 131,902 | 210,526 | 309,038 | (428) |
| 2 | ---- | 108,237 | 165,023 | 242,66 | 340,59 | 458,27 |
| 3 | ---- | ---- | 220,06 | 296,35 | 393,36 | 509,9 |
| 4 | ---- | ---- | ---- | 371,38 | 467,29 | 583,83 |
| 5 | ---- | ---- | ---- | ---- | 562,28 | (676) |
| 6 | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | 792,5 |

En el caso de una placa rectangular empotrada en sus cuatro lados Ödman (1955) y Bolotin; Makabov; Mishenkov y Shveiko (1960) presentan una gran cantidad de valores para varias relaciones de aspecto (a/b), estos valores están contenidos en la tabla 2.6. Los valores para la relación de aspecto 0,5 de la tabla 2.6 serán el patrón de referencia para este caso en este estudio.

Tabla 2.6 Parámetros de Frecuencia para una placa rectangular empotrada en todos sus lados.
[Valores en paréntesis obtenidos por interpolación]

| m | n | $\omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ para a/b | | | |
|---|---|-------------------------------------|--------|----------|------------|
| | | 0,25 1 | 0,5 | | 0,667 2 |
| | | | 1 | 2 | |
| 1 | 1 | 23,19 | 24,09 | 24,58 | 27,01 |
| | 2 | 23,94 | 31,4 | 31,83 | 41,72 |
| | 3 | 26,32 | 44,35 | 44,78 | 66,53 |
| | 4 | 30,01 | 63,00 | 63,34 | 100,81 |
| | 5 | ----- | ----- | 87,26 | 144,21 |
| | 6 | ----- | ----- | (117,00) | (195,00) |
| 2 | 1 | 62,17 | 63,93 | 64,10 | (65,50) |
| | 2 | 63,70 | 70,90 | 71,08 | 79,81 |
| | 3 | 66,23 | 82,90 | 83,20 | (103,00) |
| | 4 | 63,97 | 100,18 | 100,80 | 136,10 |
| | 5 | ----- | ----- | 124,20 | (178,00) |
| | 6 | ----- | ----- | 151,91 | 230,04 |
| 3 | 1 | 121,29 | 123,07 | (124,20) | (126,00) |
| | 2 | 122,98 | 130,13 | 130,35 | 138,64 |
| | 3 | 125,74 | 142,12 | 142,38 | 161,23 |
| | 4 | 129,81 | 156,47 | 159,49 | 193,24 |
| | 5 | ----- | ----- | 181,79 | 234,65 |
| | 6 | ----- | ----- | (209,60) | (285,40) |
| 4 | 1 | 200,33 | 202,02 | (204,00) | (206,00) |
| | 2 | 202,00 | 209,18 | (210,00) | (218,00) |
| | 3 | 204,72 | 231,02 | (221,00) | (241,00) |
| | 4 | 208,83 | 238,01 | 238,35 | 271,17 |
| | 5 | ----- | ----- | (261,00) | (312,00) |
| | 6 | ----- | ----- | 287,54 | 361,90 |
| 5 | 1 | ----- | ----- | (302,00) | (303,00) |
| | 2 | ----- | ----- | 308,12 | 316,11 |
| | 3 | ----- | ----- | (320,00) | (339,00) |
| | 4 | ----- | ----- | 337,08 | 369,34 |
| | 5 | ----- | ----- | 358,00 | (409,00) |
| | 6 | ----- | ----- | (382,00) | (456,00) |
| 6 | 1 | ----- | ----- | (421,00) | (422,00) |
| | 2 | ----- | ----- | (427,00) | (436,00) |
| | 3 | ----- | ----- | (439,00) | (457,00) |
| | 4 | ----- | ----- | (456,00) | (488,00) |
| | 5 | ----- | ----- | (478,00) | (429,00) |
| | 6 | ----- | ----- | 504,30 | 576,60 |

1 Trabajo de Bolotin; Makabov; Mishenkov y Shveiko (1960)

2 Trabajo de Ödman (1955)

----- no existe el valor

2.3.2. Placas con tres lados empotrados y uno libre (EEEL).

Los únicos resultados conocidos para el problema de la placa con tres lados empotrados y uno libre (fig. 2.4) es la fórmula aproximada, ecuación 2.33.

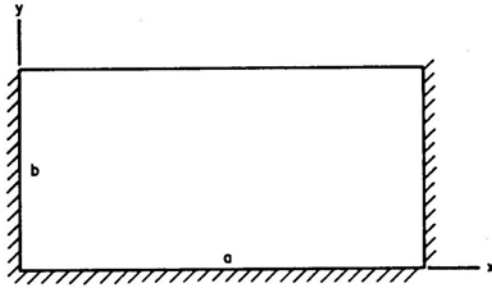


Figura 2.4 Placa empotrada con tres lados empotrados y uno libre

2.4. Método experimental para determinar frecuencias naturales en placas: “Figuras de Chladni”

El físico alemán Ernest Florens Friedrich Chladni (1756 - 1827) realizó profundos estudios sobre las vibraciones de las placas y membranas y descubrió que en estos cuerpos no existen nodos y vientres propiamente dichos, sino líneas de puntos donde la vibración es nula o pequeña, llamadas líneas nodales, y zonas demarcadas por estas líneas donde la vibración alcanza valores máximos llamadas zonas ventrales. Chladni conocido como "el padre de la acústica" fue el primero (1808) en crear un método experimental para hacer visible los modos de vibración de una placa. El estudio de Chladni consistió en hacer vibrar una placa frotándola con el arco de un violín, después de haber espolvoreado arena fina sobre ella. Dicha arena creaba patrones sobre la placa los cuales representaban los diferentes modos de vibración de la placa. Lo que ocurre es que cuando la placa comienza a vibrar las partículas de arena se depositan en las líneas nodales, creando así los distintos patrones. Cuando Chladni hacía las demostraciones en las diversas instituciones científicas congregaba grandes cantidades de personas debido la calidad estética de

las figuras producidas por la arena, incluso el emperador Napoleón al ver estas figuras exclamó “¡El sonido puede verse!” y ordenó el estudio posterior de los principios matemáticos que describían dicho fenómeno ofreciendo como recompensa 1kg de oro a aquel que lo hiciera primero. Esto despertó en la comunidad científica un gran interés por el estudio de fenómenos de vibración, ondas y acústica. En la figura 2.5 se aprecian los dibujos originales de los resultados publicados por Chladni.

Mientras que los métodos experimentales y los equipos se han mejorado mucho en los últimos 200 años, la ley y los patrones originales de Chladni todavía se emplean regularmente para estudiar vibraciones de placas. Actualmente se ha sustituido la fuente de vibraciones de un arco de violín por un altavoz acoplado a un amplificador y a un generador de señales.

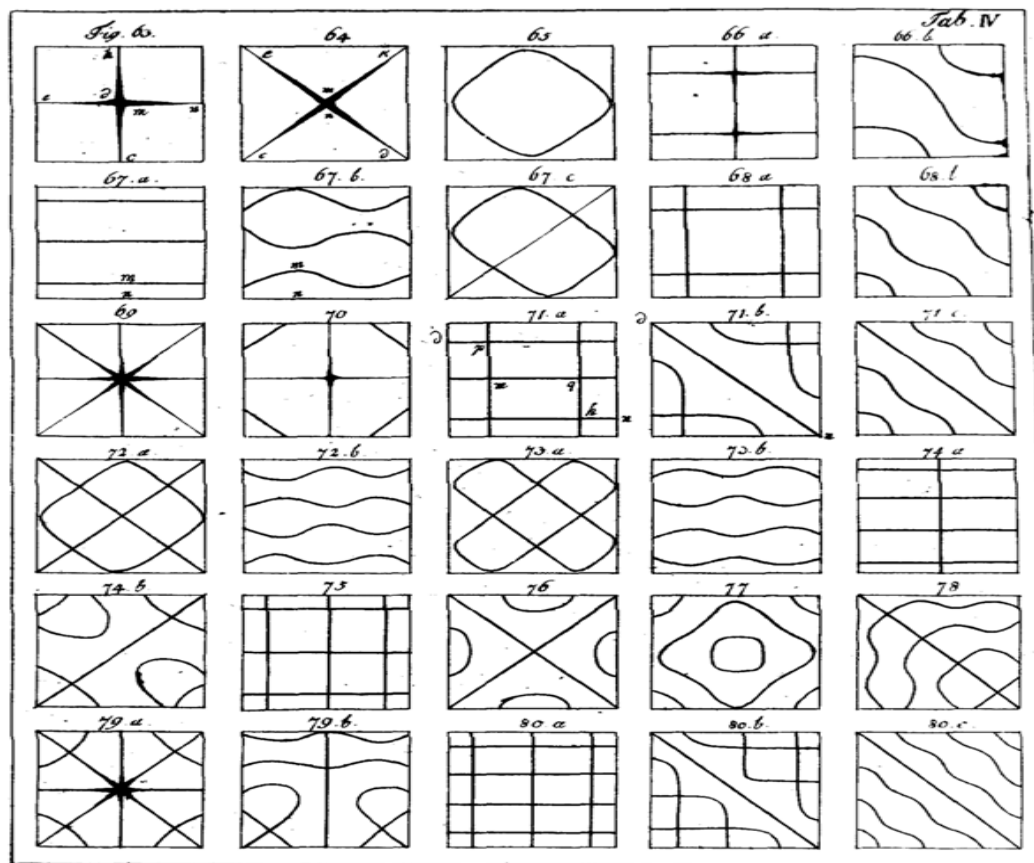


Figura 2.5 Dibujos publicados por Chladni

CAPÍTULO III

DISEÑO DEL BANCO DE PRUEBAS

3.1. Método de generación de vibraciones

3.1.1. “Tormenta de ideas”

Para el diseño del banco de pruebas se utilizó la técnica de “*Tormenta de Ideas*”, realizada en el Laboratorio de Dinámica de Máquinas de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la U.C.V. el 2 de agosto del 2006 a las 4:30 PM, en la cual participó un grupo conformado por ingenieros y estudiantes de la Escuela, a quienes primero, se les explicó qué son vibraciones mecánicas y lo qué es el fenómeno de resonancia. Segundo se les planteó el siguiente problema:

***“Se necesita hacer vibrar una placa delgada fija a tierra en posición horizontal,
para varios valores de frecuencia”***

Y se les pidió que propusieran soluciones para dicho problema. A continuación se presentarán las soluciones planteadas:

a) Excitador biela-manivela.

Autor: Estudiante de la Escuela de Ingeniería Mecánica U.C.V. Luis Febres

Descripción:

Se utiliza un sistema biela-manivela acoplado a un motor, al cual está sujeta la placa generando las vibraciones. La frecuencia de vibración sería controlada por medio de un regulador de velocidades para el motor.

Ver figura 3.1

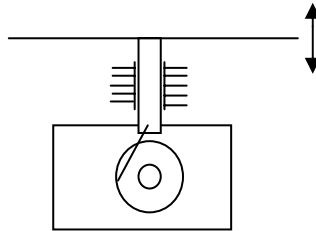


Figura 3.1 Esquema excitador biela-manivela

b) Motor con carga excéntrica.

Autor: Ing. Civil Carlos Lee.

Descripción:

La vibración se inducirá por medio de la rotación de una masa desbalanceada acoplada a un motor el cual estará en contacto con la placa. La frecuencia será controlada al igual que en el caso anterior.

c) Golpes con una baqueta (percusión).

Autor: Estudiante de la Escuela de Ingeniería Mecánica U.C.V. Roberto Ibarra

Descripción:

Se golpea la placa con una baqueta produciendo vibraciones por percusión.

d) Ondas sonoras

Autor: Estudiante de la Escuela de Ingeniería Mecánica U.C.V Giulio Faragalli

Descripción:

Se generan ondas sonoras haciéndolas incidir sobre la superficie de la placa, las cuales se transforman en vibraciones. Para generar el sonido se puede usar un generador de señales, un amplificador de audio y un altavoz. Con el generador de señales también se podrá controlar la frecuencia.

e) Motor con una leva

Autor: Estudiante de la Escuela de Ingeniería Mecánica U.C.V. Ariane Giraud

Descripción:

Se acopla una leva a un motor, dicha leva tendrá una forma específica y estará en contacto con la superficie de la placa y al girar originará las vibraciones. Ver figura 3.2

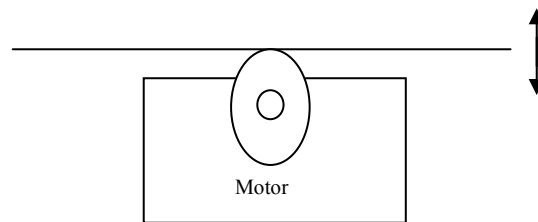


Figura 3.2 Esquema motor con una leva

La frecuencia será controlada igual que en los casos (a) y (b).

f) Arco de violín

Autor: Estudiante de la Escuela de Ingeniería Mecánica U.C.V. Luis Febres

Descripción:

Se hace pasar por uno de los costados un arco de violín untado con brea por uno de los bordes de la placa, la fuerza de roce inducirá las vibraciones en la placa.

3.1.2. Evaluación y elección de la mejor propuesta

3.1.2.1. Criterios de evaluación

A continuación se encuentran los criterios que se usaron para evaluar las propuestas producto de la tormenta de ideas, así como también su valor porcentual.

1. *Seguridad del operador.*
2. *Rendimiento (el grado en que la propuesta solucione el problema planteado).*
3. *Confiabilidad (una alta probabilidad de que la propuesta proporcione resultados confiables).*
4. *Factibilidad de fabricación.*
5. *Disponibilidad de servicio y mantenimiento.*
6. *Operabilidad.*
7. *Costo bajo.*
8. *Costo de operación y mantenimiento bajo.*
9. *Tamaño reducido y de poco peso.*
10. *Poco mantenimiento.*

A continuación se presenta un cuadro resumen (tabla 3.1) de los criterios y adicionalmente su valor porcentual:

| Tabla 3.1 Cuadro resumen de los criterios de evaluación | | |
|--|--|-----------------------------|
| Cod. | Criterio | Valor Porcentual (%) |
| <i>I</i> | <i>Seguridad del operador.</i> | 18 |
| <i>II</i> | <i>Rendimiento.</i> | 17 |
| <i>III</i> | <i>Confiabilidad.</i> | 17 |
| <i>IV</i> | <i>Factibilidad de fabricación.</i> | 14 |
| <i>V</i> | <i>Disponibilidad de servicio y mantenimiento.</i> | 5 |
| <i>VI</i> | <i>Operabilidad.</i> | 9 |
| <i>VII</i> | <i>Costo bajo.</i> | 6 |
| <i>VIII</i> | <i>Costo de operación y mantenimiento bajo.</i> | 6 |
| <i>IX</i> | <i>Tamaño reducido y de poco peso</i> | 4 |
| <i>X</i> | <i>Poco mantenimiento</i> | 4 |

3.1.2.2. Evaluación de las ideas propuestas:

Para la evaluación de las ideas se utilizó una escala de 0 a 10 para cada idea (tabla 3.2) y luego se obtuvo un valor ponderado (tabla 3.3) con los porcentajes anteriormente expuestos en la tabla 3.1.

Tabla 3.2 Evaluación de las ideas en escala del 0 al 10

| Ideas | Excitador biela-manivela | Motor con carga excéntrica | Golpes con una baqueta | Ondas sonoras | Motor con una leva | Arco de violín |
|--|---------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|----------------------|---------------------------|-----------------------|
| Seguridad del operador | 8 | 8 | 10 | 7 | 8 | 10 |
| Rendimiento | 9 | 9 | 2 | 9 | 9 | 2 |
| Confiabilidad | 9 | 9 | 2 | 9 | 9 | 2 |
| Factibilidad de fabricación. | 4 | 4 | 10 | 5 | 4 | 10 |
| Disponibilidad de servicio y mantenimiento. | 7 | 7 | 10 | 8 | 7 | 10 |
| Operabilidad | 7 | 7 | 10 | 9 | 7 | 10 |
| Costo bajo | 2 | 2 | 10 | 2 | 2 | 10 |
| Costo de operación y mantenimiento bajos | 4 | 4 | 10 | 6 | 4 | 10 |
| Tamaño reducido y de poco peso | 3 | 3 | 10 | 8 | 3 | 10 |
| Poco mantenimiento | 4 | 4 | 10 | 7 | 4 | 10 |
| Total | 57 | 57 | 84 | 70 | 57 | 84 |

Observando los resultados de la tabla 3.3 se puede decir que la idea que obtuvo la mayor puntuación fue la de ondas sonoras, la cual se desarrolló en este Trabajo Especial de Grado. Es importante señalar que a diferencia de las otras propuestas en esta no hay contacto directo sobre la placa en el momento de inducir la vibración, lo cual es una ventaja sobre las demás ideas. Para llevar a cabo esta propuesta serán necesarios los siguientes equipos y materiales: Un generador de señales, un amplificador de audio, un multímetro, un altavoz y una base para soportar las placas.

Tabla 3.3 Evaluación de las ideas con el valor ponderado

| Ideas | Excitador biela-manivela | Motor con carga excéntrica | Golpes con una baqueta | Ondas sonoras | Motor con una leva | Arco de violín |
|--|---------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|----------------------|---------------------------|-----------------------|
| Seguridad del operador | 14,4 | 14,4 | 18 | 12,6 | 14,4 | 18 |
| Rendimiento | 15,3 | 15,3 | 3,4 | 15,3 | 15,3 | 3,4 |
| Confiabilidad | 15,3 | 15,3 | 3,4 | 15,3 | 15,3 | 3,4 |
| Factibilidad de fabricación. | 5,6 | 5,6 | 14 | 7 | 5,6 | 14 |
| Disponibilidad de servicio y mantenimiento. | 3,5 | 3,5 | 5 | 4 | 3,5 | 5 |
| Operabilidad | 6,3 | 6,3 | 9 | 8,1 | 6,3 | 9 |
| Costo bajo | 1,2 | 1,2 | 6 | 1,2 | 1,2 | 6 |
| Costo de operación y mantenimiento bajos | 2,4 | 2,4 | 6 | 3,6 | 2,4 | 6 |
| Tamaño reducido y de poco peso | 1,2 | 1,2 | 4 | 3,2 | 1,2 | 4 |
| Poco mantenimiento | 1,6 | 1,6 | 4 | 2,8 | 1,6 | 4 |
| Total | 66,8 | 66,8 | 72,8 | 73,1 | 66,8 | 72,8 |

3.2. Diseño de las placas (specímenes).

3.2.1. Material:

El material seleccionado para las placas es acero ASTM A36 (popularmente conocido como hierro pulido o hierro negro dependiendo de su presentación) ya que es un material con un comportamiento cercano al isotrópico, comercialmente abundante en forma de placas y bajo costo, cuyas propiedades físicas se muestran en la tabla 3.4:

Tabla 3.4 Propiedades del acero ASTM A36

| Módulo de elasticidad E [Gpa] | Razón de Poisson | Densidad [kg/m³] |
|---|-------------------------|------------------------------------|
| 200 | 0,26 | 7850 |

3.2.2. Geometría:

Las geometrías consideradas serán cuadradas y rectangulares con relación de aspecto 0,5. La elección de estas geometrías se debe a que se cuenta con una amplia cantidad de datos teóricos para estas configuraciones las cuales son geometrías prácticas a la hora de realizar los ensayos e incluso para su fabricación.

3.2.3. Dimensiones:

Debido a que las deducciones teóricas expuestas anteriormente se basan en el concepto de placa delgada las dimensiones de los especímenes a ensayar deben ser seleccionadas tomando esto en consideración. Por último debemos considerar y elegir las condiciones de borde que se estudiarán en esta investigación para dar el dimensionamiento adecuado a las placas. Esta elección se basa en el sentido de que condiciones de borde son las más factibles de simular, por lo que las definiremos a continuación:

- Caso 1: Placa Cuadrada de Acero ASTM A36 de 0,4x0,4 m con Todos sus Lados Empotrados (EEEE).
- Caso 2: Placa Rectangular de Acero ASTM A36 de 0,2x0,4 m con Todos sus Lados Empotrados (EEEE).
- Caso 3: Placa Rectangular de Acero ASTM A36 de 0,2x0,4 m con Tres Lados Empotrados y Uno de sus Lados Mayores Libre (EEEL).

Para la placa cuadrada de lado g (Figura 3.3) se seleccionaron las siguientes dimensiones:

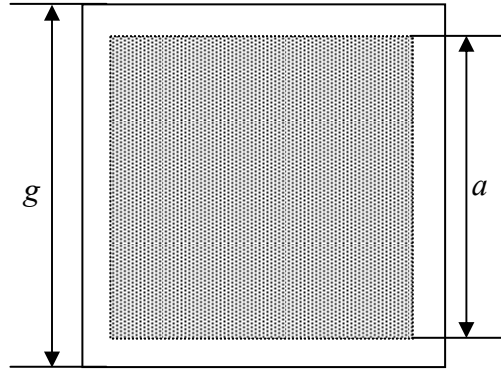


Figura 3.3 Vista de planta de la placa para el caso 1

- Lado g : 48×10^{-2} m.
- Lado efectivo a : 40×10^{-2} m.
- Espesor h : 9×10^{-4} m.
- Área efectiva: $0,16 \text{ m}^2$ (zona punteada figura 3.3).
- Peso: 1,1056 kg.

El área efectiva o área de ensayo es calculada utilizando el lado efectivo a , el resto del área de la placa (zona blanca figura 3.3) es la que se utilizará para fijarla en la base donde irá montada.

Es importante hacer notar que el espesor de la placa es aproximadamente 445 veces menor que el lado efectivo, por lo que podemos decir que $500 > a/h > 100$, concordando así con el planteamiento de placa delgada.

En cuanto a la placa rectangular de relación de aspecto 0.5 de lados gxp (Figura 3.4) se seleccionaron las siguientes dimensiones:

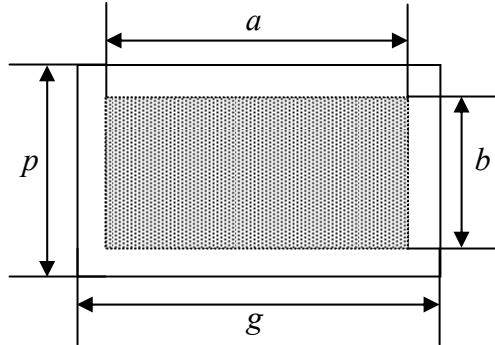


Figura 3.4 Vista de planta de la placa para el caso 2

- Lado g : 48×10^{-2} m.
- Lado p : 28×10^{-2} m.
- Lado efectivo a : 40×10^{-2} m.
- Lado efectivo b : 20×10^{-2} m.
- Espesor h : 9×10^{-4} m.
- Área efectiva: $0,08 \text{ m}^2$ (zona punteada figura 3.4)
- Peso: 0.5528 kg.

La relación de h y el lado menor efectivo de la placa b es aproximadamente de 222 a 1 con lo que podemos decir que $b \gg h$. al igual que en el caso anterior el área efectiva es calculada utilizando los lados efectivos a y b . La zona blanca es el área utilizada para fijar la placa. En el caso en que uno de los bordes esta libre se desplaza el área efectiva hasta el borde libre como se muestra en la figura 3.5, esto con la finalidad de poder utilizar la misma placa para diversos ensayos.

El corte de las placas se realizó mediante corte con cizalla, debido a que el espesor de las mismas, es aceptable para realizar dicho proceso.

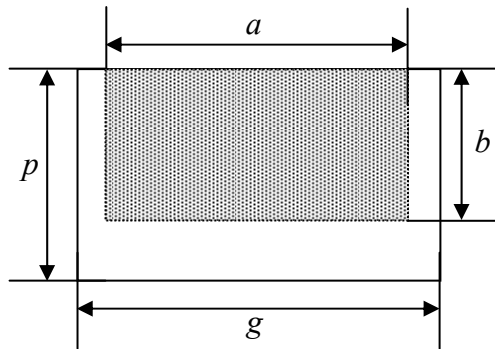


Figura 3.5 Vista de planta de la placa para el caso 3

3.3. Diseño de la base para las placas

La base para soportar las placas fue fabricada en los talleres de la Base Naval de Puerto Cabello estado Carabobo. Dicha base fue elaborada en una pieza monolítica a partir de una placa de acero ASTM A36 (conocido comercialmente como hierro negro) de 10mm de espesor, mediante un proceso de oxicorte para separar la pieza de la placa y posteriormente un proceso de fresado para ajustar las medidas de la misma. Adicionalmente se soldaron en las esquinas, soportes ajustables (Figura 3.6) para controlar la horizontalidad, los cuales pueden variar su altura desde 0,145 m hasta 0,165 m.



Figura 3.6 Soporte ajustable. Fuente: el autor

Las dimensiones de la base vienen dadas por las de las placas a ensayar, quedando según la configuración mostrada en anexo 1. La figura 3.7 muestra una vista de planta de la base.

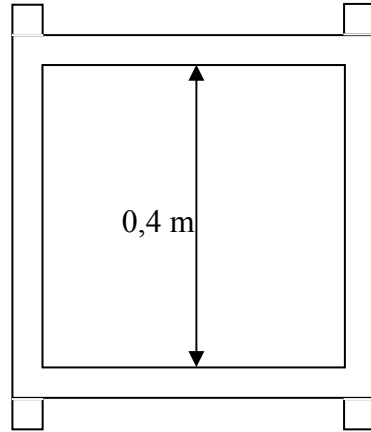


Figura 3.7 Vista de planta de la base

Así mismo, para ensayar las diversas condiciones de borde de los diferentes casos, se incorporarán un marco superior (ver Figura 3.8 y Anexo N° 2) para empotrar en todo su contorno la placa en el caso 1, y dos implementos (Ver Figura 3.9 y Anexos N° 3 y N° 4), los cuales irán situados, uno en la parte interna de la base, y el otro, en la parte interna del marco superior para empotrar la placa en el caso 2 (tanto el marco superior como los implementos fueron elaborados del mismo material que el utilizado para fabricar la base). Por su parte, el implemento de la base, posee un soporte ajustable como el reflejado en la figura 3.6. Cabe destacar, que estos implementos permitirán ensayar a futuro diversas relaciones de aspecto para placas rectangulares. El montaje de los mismos se explicará con más detalle posteriormente.

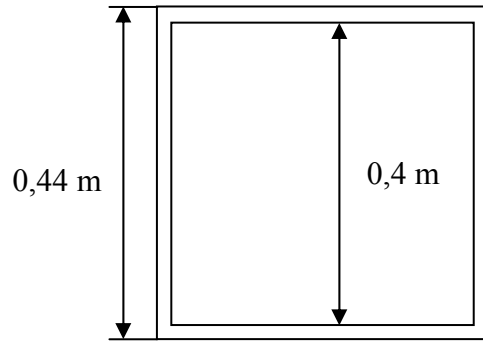


Figura 3.8 Vista de planta del marco superior

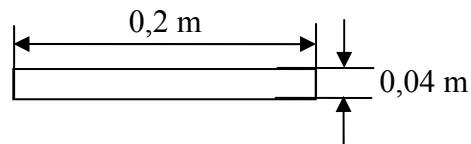


Figura 3.9 Vista de planta de los implementos

Es importante señalar que para evitar la oxidación y corrosión de las piezas, éstas serán protegidas con fondo anticorrosivo y antioxidante gris para garantizar una mayor vida útil y presentar un mejor acabado.

CAPÍTULO IV

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

4.1. MÉTODO EXPERIMENTAL

Se utilizó el método propuesto por Chladni (vea sección 2.4) para visualizar los distintos modos de vibración en placas. La perturbación sobre la placa se hará mediante un altavoz, el cual es alimentado por una señal amplificada proveniente de un generador de señales. Así mismo, la toma de datos se hará de manera directa a través de un multímetro digital.

4.2. MATERIALES Y EQUIPOS

- Generador de señales marca Leader modelo LAG-125 (Figura 4.1).



Figura 4.1 Generador de señales. Fuente: el autor

- Amplificador de audio marca Targa de 300 W modelo DA-333 (Figura 4.2).



Figura 4.2 Amplificador de audio. Fuente: el autor

- Altavoz marca Miyako USA modelo SW-520 de 200 W y 6 Ohm (Figura 4.3).

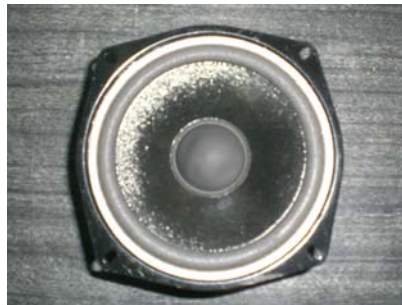


Figura 4.3 Altavoz. Fuente: el autor

- Multímetro digital marca UNI-T modelo UT50C (Figura 4.4) con una apreciación de ± 1 Hz.



Figura 4.4 Multímetro Digital. Fuente: el autor

- Niveles de línea (Figura 4.5).



Figura 4.5 Niveles de línea. Fuente: el autor

- Prensas manuales tipo C (Figura 4.6)



Figura 4.6 Prensas manuales tipo C. Fuente: el autor

- Piezas de madera (Figura 4.7)



Figura 4.7 Piezas de Madera. Fuente: el autor

- Cables:
 - 1 Tipo 1: RCA- Banana (Figura 4.8).

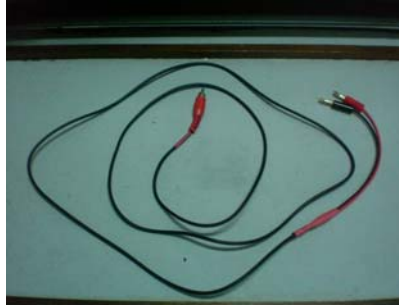


Figura 4.8 Cable RCA-Banana. Fuente: el autor

- 1 Tipo 2: Cable 18 doble negro-rojo Banana-Banana (Figura 4.9).



Figura 4.9 Cable Banana-Banana. Fuente: el autor

- 1 Tipo 3: Cable 18 doble rojo-negro Banana-Terminal Plano (Figura 4.10).

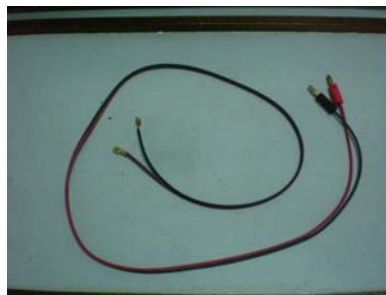


Figura 4.10 Cable Banana-Terminal Plano. Fuente: el autor

- Equipo de seguridad: Protectores visuales, guantes anticortes, bata o braga y protectores auditivos.
- Base (Figura 4.11).



Figura 4.11 Base. Fuente: el autor

- Marco superior (Figura 4.12).



Figura 4.12 Marco Superior. Fuente: el autor

- Implemento para la base (Figura 4.13).



Figura 4.13 Implemento para la base. Fuente: el autor

- Implemento para el marco superior (Figura 4.14).



Figura 4.14 Implemento para el marco superior. Fuente: el autor

- Placa de acero cuadrada de 0,48x0,48 m (Figura 4.15).

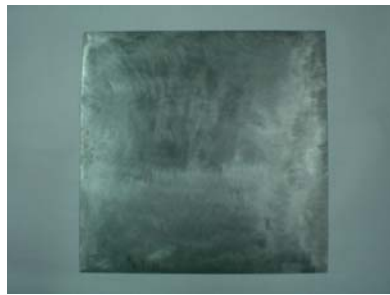


Figura 4.15 Placa cuadrada. Fuente: el autor

- Placa rectangular de 0,48x0,28 m (Figura 4.16).



Figura 4.16 Placa rectangular. Fuente: el autor

- Arena: la arena que se utilizó fue fina con un N° de grano no mayor a 22.

4.3. MONTAJE EXPERIMENTAL

En la figura 4.17 se ilustra un esquema del banco de pruebas diseñado. El montaje de la placa en la base depende de las condiciones de borde y la geometría que se estudiaron.

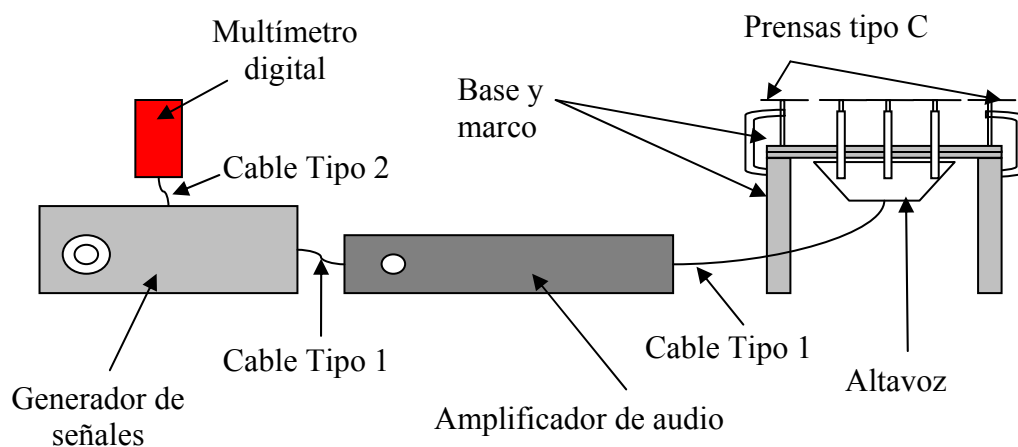


Figura 4.17 Esquema del montaje del equipo.

Para el color del cableado se estableció el color rojo para el positivo y el color negro para el negativo. Al menos que, se indique con símbolos de positivo (+) o negativo (-), los terminales seguirán la codificación de colores del cableado.

En cuanto a la conexión de los equipos se realiza de la siguiente manera: se conectan los terminales banana del cable Tipo 1 en las salidas del generador de señales (Figura 4.18), el rojo en el positivo y el negro en el negativo, luego se conecta el terminal RCA en el conector de entrada ubicado en la parte posterior del amplificador de audio (Figura 4.19).



Figura 4.18 Salidas del generador de señales. Fuente: el autor

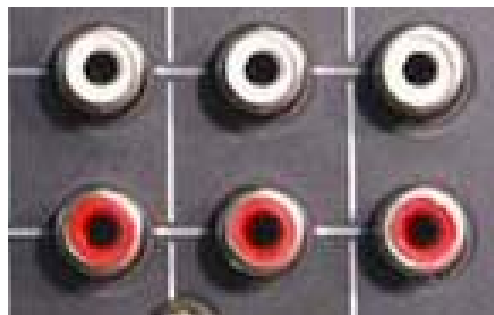


Figura 4.19 Entradas RCD del amplificador de audio. Fuente: el autor

Seguidamente, se conectan los terminales banana del cable Tipo 3 en la salida del amplificador de audio (Figura 4.20), y los terminales planos, en el altavoz. Por último, se conectan el generador de señales con el multímetro digital utilizando el cable Tipo 2 como se muestra en la figura 4.21.

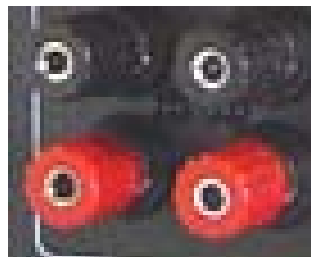


Figura 4.20 Salidas del amplificador de audio. Fuente: el autor



Figura 4.21 Conexión del generador de señales con el multímetro. Fuente: el autor

Para realizar el montaje de las placas sobre la base se realiza de la siguiente manera:

- Ubicar la placa que se desea estudiar sobre la base utilizando las marcas de referencias de cada una de ellas como guía. Dichas marcas estarán identificadas según el caso.
- Ubicar el marco superior sobre la placa, de manera que, coincidan el borde interno del mismo con el de la base. Al igual que en el caso anterior, es necesario utilizar las marcas de referencia como guía.
- Apretar el conjunto anterior con prensas manuales tipo “C”, colocando las piezas de madera entre el marco superior y las mismas para no causar daño a la pintura protectora del marco superior, como se muestra en las figuras 4.22 y 4.23 (esto para el caso 1 y 3 respectivamente).

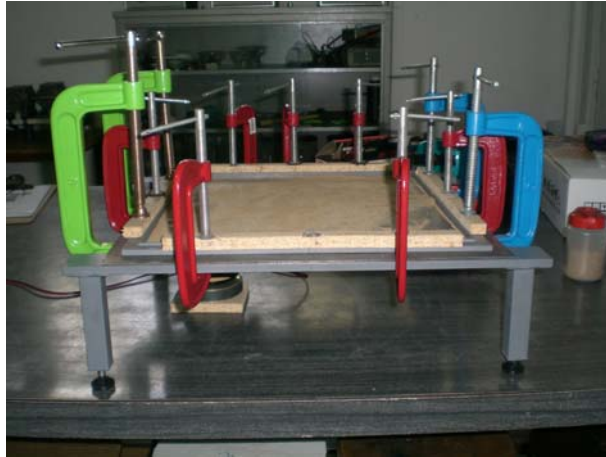


Figura 4.22 Montaje para el caso 1. Fuente: el autor



Figura 4.23 Montaje para el caso 3. Fuente: el autor

- Para el caso 2 se debe utilizar los implementos del marco superior y de la base. Estos deben ser colocados en el área interna de la base y del marco superior como se aprecia en las figuras 4.24 y 4.25 de igual manera utilizando siempre las marcas de referencia. Ahora bien, al apretar los implementos con las prensas, se debe utilizar al igual que en los otros casos, piezas de madera como protección de la pintura. El montaje para este caso se muestra en la figura 4.26



Figura 4.24 Base con implemento. Fuente: el autor



Figura 4.25 Marco superior con implemento. Fuente: el autor

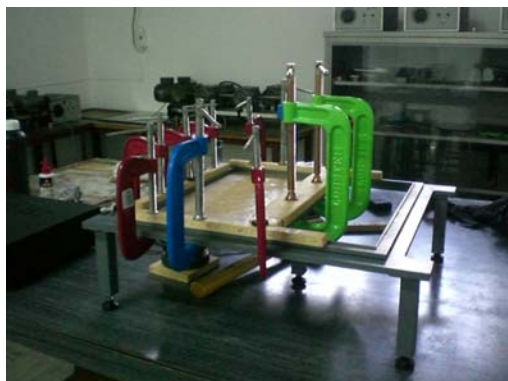


Figura 4.26 Montaje para el caso 2. Fuente: el autor

4.4. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Para llevar a cabo los ensayos se recomienda seguir los siguientes pasos:

- a)* Se recomienda el uso del equipo de seguridad correspondiente.
- b)* Realizar el montaje de todas las partes y equipos necesarios.
- c)* Verificar, mediante varios niveles de burbuja, la horizontalidad de la placa y corregir cuando sea necesario ajustando los tornillos de los soportes del banco de pruebas.
- d)* Esparcir arena sobre la placa de manera tal que se forme una capa fina que cubra toda la superficie.
- e)* Energizar uno por uno los equipos electrónicos en el siguiente orden: Generador de señales, amplificador de audio y multímetro digital. El generador de señales se ajusta para que emita una señal senoidal.
- f)* Aumentar el volumen de la planta de audio hasta aproximadamente un tercio de su capacidad.
- g)* Ubicar manualmente el altavoz en la zona central inferior de la placa lo más cerca posible sin hacer contacto con la misma.
- h)* Se comienza a aumentar gradual y lentamente la frecuencia emitida por el generador de señales comenzando en 20 Hz. Cuando la frecuencia de vibración de la placa iguala a alguna de sus frecuencias fundamentales la arena depositada sobre la placa forma figuras o patrones claramente visibles, cuando esto sucede se registran el valor de la frecuencia y la figura formada para dicho valor. Ahora bien, el altavoz utilizado es un medio, por lo tanto, para frecuencias muy altas o muy bajas éste disminuye su respuesta por lo que es necesario ajustar el volumen al variar la frecuencia. A medida que lo amerite, se debe colocar mas arena sobre la superficie de la placa.
- i)* Luego de obtener las frecuencias requeridas en el banco de pruebas, se apagan los equipos y se desmonta la placa. En el caso de necesitar repetir

el ensayo, es recomendable dejar enfriar y descansar los equipos por un tiempo de 15 minutos aproximadamente sin tener que desmontar la placa.

4.5. SEGURIDAD

Dado que uno de los requerimientos de diseño es la seguridad, en este capítulo se presentan una serie de recomendaciones a seguir para asegurar que no se afecte la salud ni la integridad física del operador:

- Debido a que los ensayos realizados en el banco de pruebas generan altos niveles de ruido, se llevó a cabo un estudio para determinar el tipo de protección auditiva. El estudio fue realizado según la norma COVENIN 1565:1995 “*Ruido Ocupacional. Programa de Conservación Auditiva. Niveles Permisibles y Criterios de Evaluación*”. Los equipos utilizados en este estudio fueron un sonómetro marca Quest Technologies modelo 1900 y un analizador de la marca Quest Technologies modelo OB-300 (Figura 4.27) con una apreciación de ± 0.1 dB. a continuación se presentan los datos obtenidos (tabla 4.1):



Figura 4.27 Sonómetro y Analizador de Frecuencias. Fuente: el autor

Se puede observar que en la mayoría de los casos los valores exceden el nivel máximo permisible de 85 dB establecido en la norma ya mencionada, con un valor máximo de 106,3 dB por lo que se recomienda el uso de un protector

auditivo (Figura 4.28) con 30 dB de atenuación para cumplir con los requerimientos de dicha norma en lo que respecta a protectores auditivos.

Tabla 4.1 Análisis de Ruido

| Altura del sonómetro (m) | | | 1,25 |
|---------------------------------|-----------------|---------------|--------------|
| Distancia a la fuente ruido (m) | | | 1,5 |
| N | Frecuencia (Hz) | Tiempo (seg.) | Leq±0.1 (dB) |
| 1 | 160 | 30 | 80,3 |
| 2 | 200 | 30 | 84,2 |
| 3 | 250 | 30 | 88,2 |
| 4 | 315 | 30 | 98,5 |
| 5 | 400 | 30 | 102,6 |
| 6 | 500 | 30 | 96,6 |
| 7 | 630 | 30 | 94,4 |
| 8 | 800 | 30 | 97,7 |
| 9 | 1000 | 30 | 103,1 |
| 10 | 1250 | 30 | 106,3 |
| 11 | 1600 | 30 | 103,9 |
| 12 | 2000 | 30 | 106,8 |
| 13 | 2500 | 30 | 99,8 |
| 14 | 3150 | 30 | 98,5 |
| 15 | 4000 | 30 | 103,9 |
| 16 | 5000 | 30 | 84 |
| 17 | 6300 | 30 | 87 |
| 18 | 8000 | 30 | 75,9 |
| 19 | 10000 | 30 | 71,1 |
| 20 | 12500 | 30 | 53,3 |
| 21 | 16000 | 30 | 51,9 |
| 22 | 20000 | 30 | 39,7 |

Leq: Nivel de ruido equivalente



Figura 4.28 Protectores auditivos. Fuente: el autor

- Se recomienda llevar una protección sobre la ropa ya que se puede ensuciar o romper por roce con algún borde afilado. Dicha protección puede hacerse con una braga o bata de laboratorio. También se deben llevar zapatos cerrados para la protección de los pies.
- Para la protección de las manos se recomienda el uso de guantes anticortes (Figura 4.29), debido a que se manejan placas y piezas de acero que pueden cortar y maltratar las mismas.



Figura 4.29 Guantes protectores anticorte. Fuente: el autor

- Se recomienda el uso de protectores visuales (Figura 4.30) para evitar que caigan partículas dañinas en los ojos.



Figura 4.30 Protectores visuales. Fuente: el autor

CAPÍTULO V

RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos del diseño experimental. Como cada caso ensayado se repitió diez veces, se trabajará con el valor medio de la medición. Esto se debe a que el mejor valor estimado para una serie de valores x_i , es dicho valor. Los valores obtenidos para cada ensayo están contenidos en los anexos del 5 al 7 el cual viene definido por la ecuación. 5.1:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad 5.1$$

donde N es el número de mediciones realizadas.

Para determinar número de mediciones suficiente se calculará para cada caso el valor de la dispersión D , la cual se obtiene restando el valor menor de las medidas de la mayor de éstas, luego se calcula el porcentaje de la dispersión ($\%D$) cuyo valor para un número de medidas comprendido entre 6-10 debe ser menor al 8%, y viene dado por la ecuación 5.2:

$$\%D = \frac{100D}{\bar{x}} \quad 5.2$$

Para determinar la calidad de los resultados usaremos el valor del error absoluto (EC. 5.3) y del error relativo (EC. 5.4), debido a que se cuenta con valores de referencias (valor convencionalmente verdadero).

$$e = |\text{valor_de_la_medición} - \text{valor_convencionalmente_verdadero}| \quad 5.3$$

$$\%e = \frac{e}{\text{valor_convencionalmente_verdadero}} 100 \quad 5.4$$

En este caso se presentan dos fuentes de incertidumbres, una debida a la apreciación del multímetro digital ($\pm 1 \text{ Hz}$), y la segunda debida a fluctuaciones estadísticas. Debido a que los resultados obtenidos para cada ω_{mn} se distribuyen alrededor de su valor medio de acuerdo a la denominada distribución normal o Gaussiana como lo reflejan los Anexos del 8 al 10, la desviación estándar caracterizará la incertidumbre de la medida y se garantiza que el 68 % de los valores de ω_{mn} esta dentro del rango $\bar{\omega}_{mn} \pm \sigma_{\omega}$, y por lo tanto, es sensato adoptar a σ_{ω} como la incertidumbre de la medida ($\delta\omega = \sigma_{\omega}$). Sin embargo, existe un criterio más conservador para el cálculo de la incertidumbre, donde se multiplica el valor de la desviación estándar por un factor igual a 2 garantizando que el 95% de los valores esta dentro del rango $\bar{\omega}_{mn} \pm 2\sigma_{\omega}$, por lo que la incertidumbre viene definida por $\delta\omega = 2\sigma_{\omega}$. De las dos fuentes de incertidumbres se tomará la que posea el mayor valor. La desviación estándar para un número N de medidas de una cantidad x se define como:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad 5.5$$

y la incertidumbre relativa como:

$$\% \delta x = \frac{\delta x}{x} \quad 5.6$$

A continuación se presentarán los resultados obtenidos para cada caso.

5.1. CASO 1

En la tabla 5.1 se presentan los resultados obtenidos en este caso

Tabla 5.1 Cuadro resumen de resultados. Caso 1

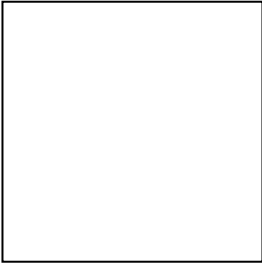
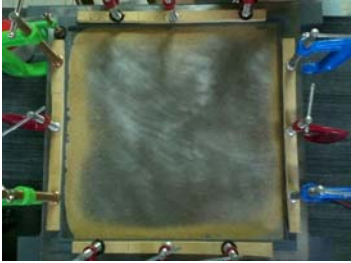
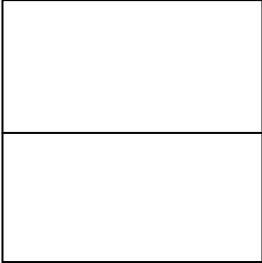
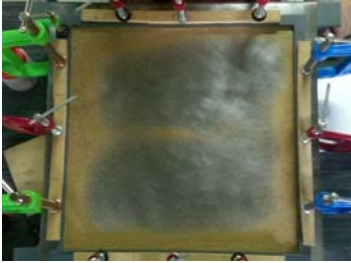
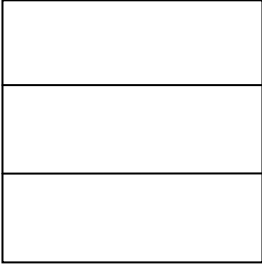
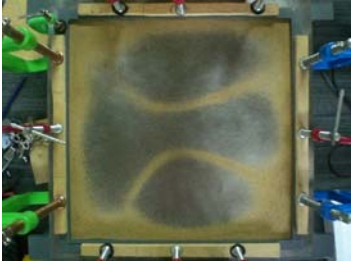
| m | n | Valor Convencionalmente Verdadero de Frecuencia [Hz] | Valor Medio de Frecuencia Experimental [Hz] | Error e [Hz] | Error Relativo $\%e$ [%] | Porcentaje de Dispersión $\%D$ | Desviación Estándar [Hz] | Incertidumbre Relativa [%] |
|-----|-----|--|---|----------------|--------------------------|--------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1 | 1 | 49 | 50 | 1 | 2,04 | 4,00 | 1,00 | 4,00 |
| | 2 | 99 | 99 | 0 | 0,00 | 2,02 | 1,00 | 2,02 |
| | 3 | 178 | 177 | 1 | 0,56 | 1,69 | 1,00 | 1,13 |
| | 4 | 284 | 280 | 4 | 1,41 | 0,71 | 1,00 | 0,71 |
| | 5 | 417 | 416 | 1 | 0,24 | 0,48 | 1,00 | 0,48 |
| 2 | 1 | 99 | 99 | 0 | 0,00 | 2,02 | 1,00 | 2,02 |
| | 2 | 146 | 150 | 4 | 2,74 | 1,33 | 1,00 | 1,33 |
| | 3 | 223 | 226 | 3 | 1,35 | 1,77 | 1,00 | 0,88 |
| | 4 | 328 | 332 | 4 | 1,22 | 0,90 | 1,00 | 0,60 |
| 3 | 1 | 178 | 177 | 1 | 0,56 | 1,69 | 1,00 | 1,13 |
| | 2 | 223 | 226 | 3 | 1,35 | 1,77 | 1,00 | 0,88 |
| | 3 | 297 | 305 | 8 | 2,69 | 0,66 | 1,00 | 0,66 |
| | 4 | 400 | 409 | 9 | 2,25 | 0,98 | 1,00 | 0,49 |
| 4 | 1 | 284 | 280 | 4 | 1,41 | 0,71 | 1,00 | 0,71 |
| | 2 | 328 | 332 | 4 | 1,22 | 0,90 | 1,00 | 0,60 |
| | 3 | 400 | 409 | 9 | 2,25 | 0,98 | 1,00 | 0,49 |
| | 4 | 502 | 511 | 9 | 1,79 | 0,78 | 1,00 | 0,39 |
| 5 | 1 | 417 | 416 | 1 | 0,24 | 0,48 | 1,00 | 0,48 |

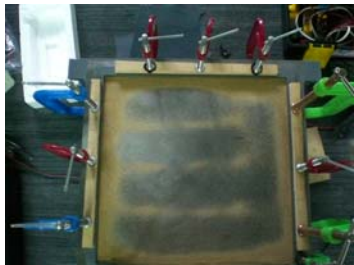
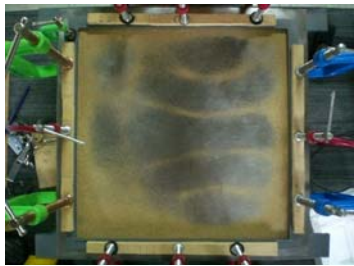
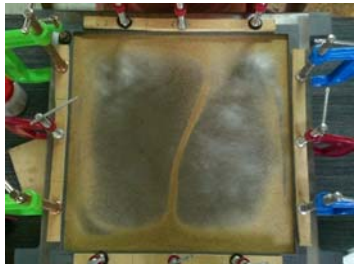
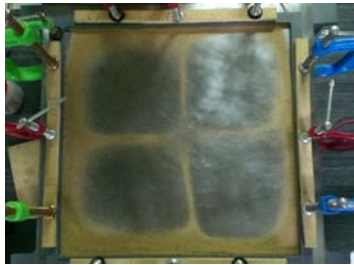

Se observa que para todos los valores de ω_{mn} el valor de la desviación estándar es de ± 1 Hz que es igual que la del instrumento, por lo que el valor de la

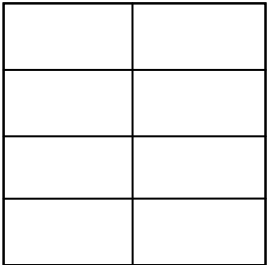
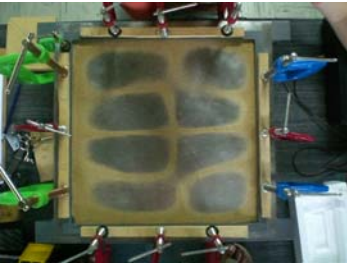
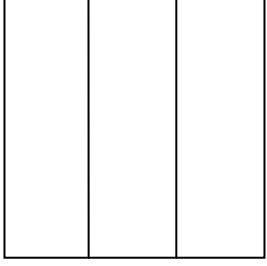
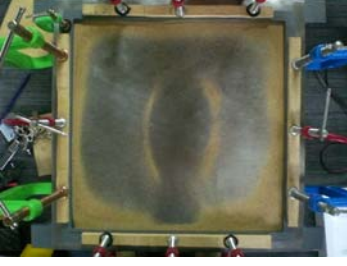
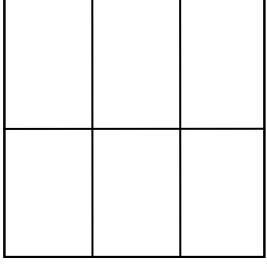

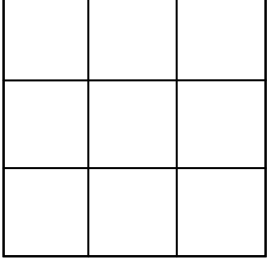
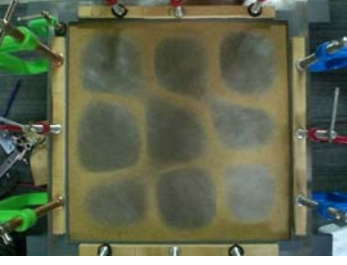
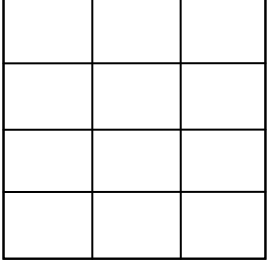
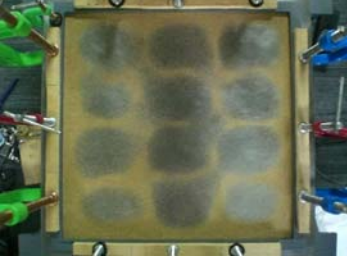
incertidumbre será de $\pm 2 \text{ Hz}$. La incertidumbre relativa que se muestra en la tabla 5.1, se puede observar que oscila entre el 0,39% y el 4%. En este caso, el valor máximo de %D obtenido fue de 4% por lo que se encuentra por debajo del 8%, siendo así suficiente 10 mediciones.

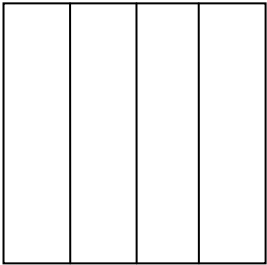
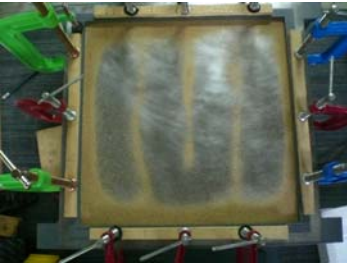
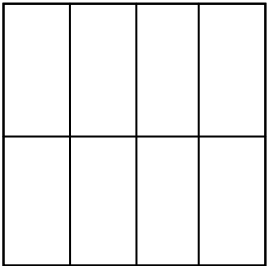

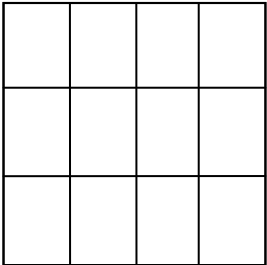
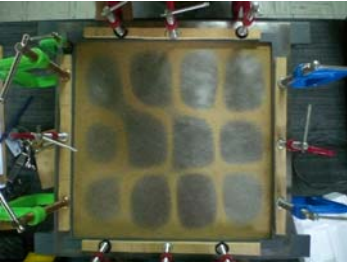
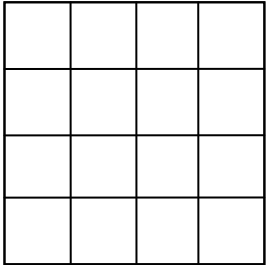
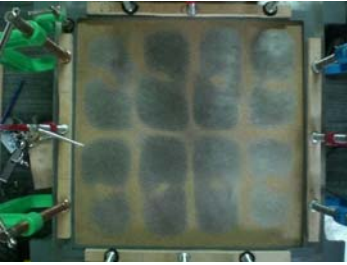
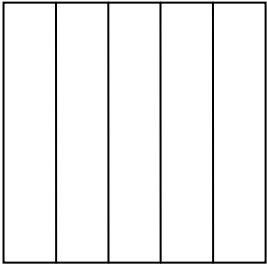
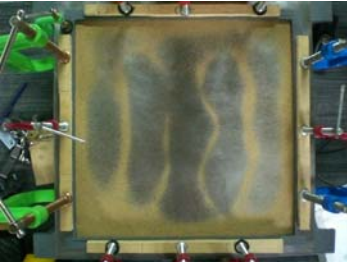
De la tabla 5.1 también se puede observar que el error relativo oscila entre 0,24% y 2,74%, garantizando que para este caso, el banco de pruebas proporciona resultados en un 97% acorde a nuestro patrón de referencia.

Tabla 5.2 Cuadro resumen de figuras de Chladni. Caso 1

| <i>m</i> | <i>n</i> | Líneas Nodales Características Esperadas | Líneas Nodales Características Obtenidas |
|----------|----------|---|--|
| 1 | 1 |  |  |
| | 2 |  |  |
| | 3 |  |  |

| | | | | | | | | |
|---|--|---|--|--|---|--|--|--|
| | 4 | <table border="1"> <tr><td></td></tr> <tr><td></td></tr> <tr><td></td></tr> <tr><td></td></tr> </table> | | | | |  | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| 5 | <table border="1"> <tr><td></td></tr> <tr><td></td></tr> <tr><td></td></tr> <tr><td></td></tr> <tr><td></td></tr> </table> | | | | | |  | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| 2 | 1 | <table border="1"> <tr> <td></td> <td></td> </tr> </table> | | |  | | | |
| | | | | | | | | |
| | 2 | <table border="1"> <tr> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> </tr> </table> | | | | |  | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| 3 | <table border="1"> <tr> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> </tr> </table> | | | | | | |  |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

| | | | |
|---|---|---|--|
| | 4 |  |  |
| 3 | 1 |  |  |
| | 2 |  |  |
| | 3 |  |  |
| | 4 |  |  |

| | | | |
|---|---|---|--|
| 4 | 1 |  |  |
| | 2 |  |  |
| | 3 |  |  |
| | 4 |  |  |
| 5 | 1 |  |  |

De la tabla 5.2 podemos decir que las figuras registradas coinciden con lo anteriormente dicho en la sección 2.3 con respecto a m y n . Para el conteo de las

líneas nodales en este caso solo se contará uno de los lados por cada dirección, el otro no se contará. Es importante señalar que las figuras formadas por la arena son claramente bien definidas, identificando así cada modo de vibración.

5.2. CASO 2

En este caso se cuenta con dos fuentes distintas para calcular los valores convencionalmente verdaderos de frecuencia, los cuales serán usados como patrón de comparación para nuestros resultados. En la tabla 5.3 se presenta un resumen de los resultados para este caso, donde podemos observar, que al igual que en el caso anterior, los resultados reflejan un valor constante para la desviación estándar de ± 1 Hz, obteniendo una incertidumbre igual a ± 2 Hz. En cuanto a la incertidumbre relativa, observamos que el valor máximo es de 1,5% y el valor mínimo es de 0,37%. El máximo valor de %D es de 1,5% siendo así suficiente 10 mediciones.

Adicional a lo anterior, también se puede observar que para ω_{21} el valor del error relativo es considerablemente mayor en comparación al resto de los ω_{mn} . El estudio estadístico del error muestra una desviación estándar de ± 2 Hz y que para este punto representa una incertidumbre relativa del 0,62%. Las figuras obtenidas y las figuras esperadas se presentan en el cuadro 5.4 (el conteo de las líneas nodales se hará igual que en el caso anterior) donde se puede apreciar que son bastante claras, bien definidas y coinciden con las esperadas.

Tabla5.3 Cuadro resumen de resultados. Caso 2

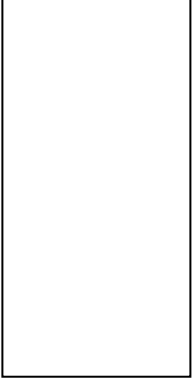



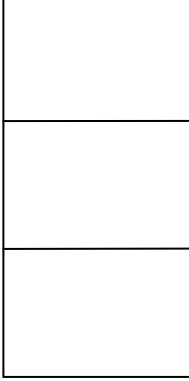

| m | n | Valor Convencionalmente Verdadero de Frecuencia (a) [Hz] | Valor Convencionalmente Verdadero de Frecuencia (b) [Hz] | Valor Medio de Frecuencia Experimental [Hz] | Error e (a) [Hz] | Error e (b) [Hz] | Error Relativo %e (a) [%] | Error Relativo %e (b) [%] | Porcentaje de Dispersión %D | Desviación Estándar [Hz] | Incertidumbre Relativa [%] |
|---|---|--|--|---|------------------|------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1 | 1 | 133 | 130 | 133 | 0 | 3 | 0,00 | 2,26 | 1,50 | 1,00 | 1,50 |
| | 2 | 172 | 170 | 173 | 1 | 3 | 0,58 | 1,73 | 1,16 | 1,00 | 1,16 |
| | 3 | 242 | 240 | 245 | 3 | 5 | 1,22 | 2,04 | 0,82 | 1,00 | 0,82 |
| | 4 | 342 | 340 | 343 | 1 | 3 | 0,29 | 0,87 | 0,58 | 1,00 | 0,58 |
| | 5 | 472 | ----- | 472 | 0 | ----- | 0,00 | ----- | 0,21 | 1,00 | 0,42 |
| | 6 | 632 | ----- | 625 | 7 | ----- | 1,12 | ----- | 0,32 | 1,00 | 0,32 |
| 2 | 1 | 346 | 345 | 321 | 25 | 24 | 7,79 | 7,48 | 0,62 | 1,00 | 0,62 |
| | 2 | 384 | 383 | 379 | 5 | 4 | 1,32 | 1,06 | 0,26 | 1,00 | 0,53 |
| | 3 | 450 | 448 | 445 | 5 | 3 | 1,12 | 0,67 | 0,45 | 1,00 | 0,45 |
| | 4 | 545 | 541 | 537 | 8 | 4 | 1,49 | 0,74 | 0,37 | 1,00 | 0,37 |

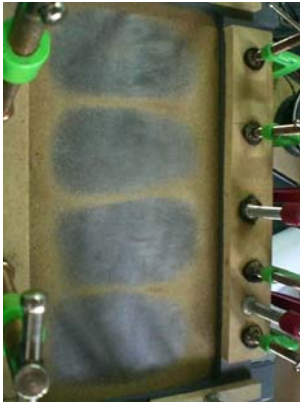
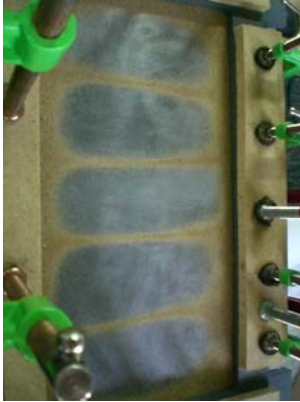
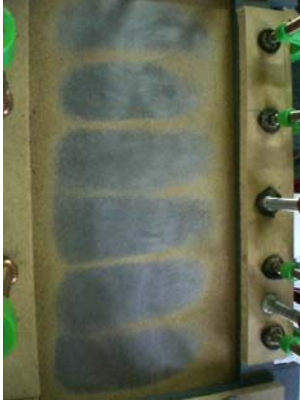
(a) Trabajo de Ödman (1955)

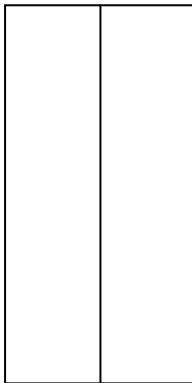

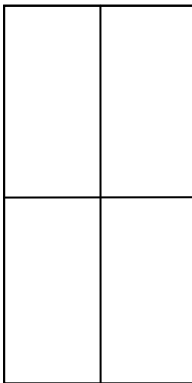
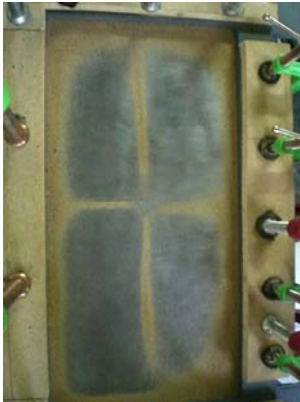
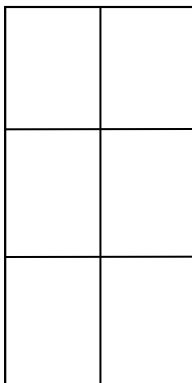
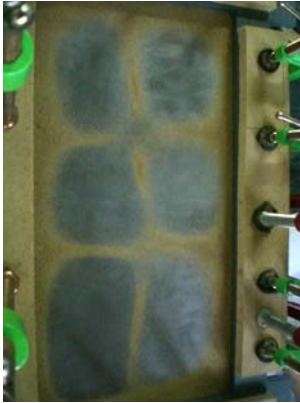
(b) Trabajo de Bolotin; Makabov; Mishenkov y Shveiko (1960)

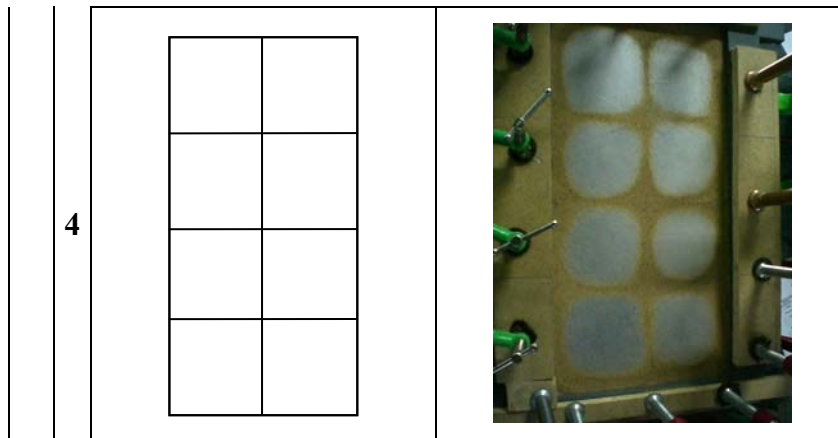
----- No se posee el valor

Tabla 5.4 Cuadro resumen de figuras de Chladni. Caso 2

| m | n | Líneas Nodales Características Esperadas | Líneas Nodales Características Obtenidas |
|---|---|---|--|
| 1 | 1 |  |  |
| | 2 |  |  |
| | 3 |  |  |

| | | | | | | | | |
|---|---|--|--|--|--|--|---|--|
| 4 | <table border="1"> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> </table> | | | | |  | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| 5 | <table border="1"> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> </table> | | | | | |  | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| 6 | <table border="1"> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> <tr><td> </td></tr> </table> | | | | | | |  |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

| | | | |
|---|---|---|--|
| 2 | 1 |  |  |
| 2 | 2 |  |  |
| 3 | 3 |  |  |



5.3. CASO 3

En este caso para calcular los valores de referencia o valores convencionalmente verdaderos, se cuenta con la ecuación 2.33.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en la tabla 5.5.



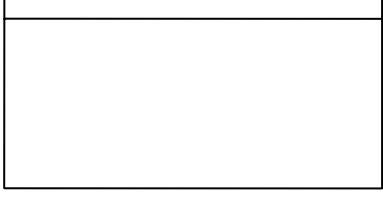

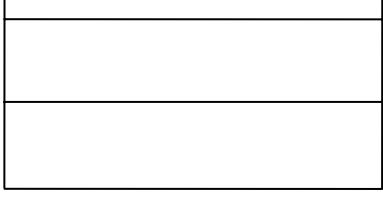
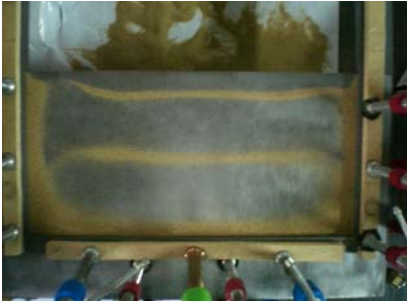
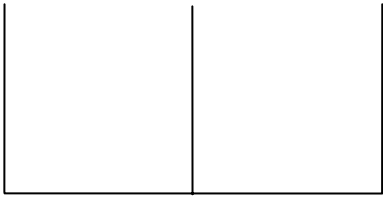

Tabla 5.5 Cuadro resumen de resultados. Caso 3

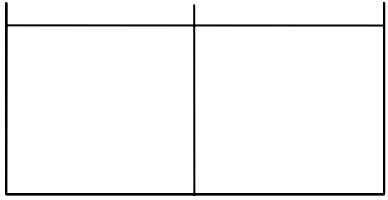

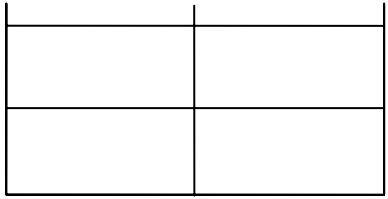
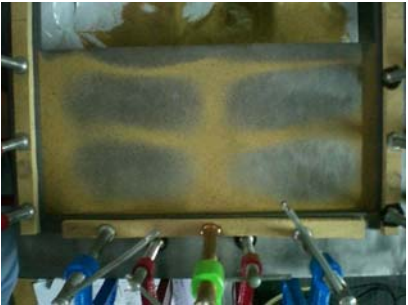
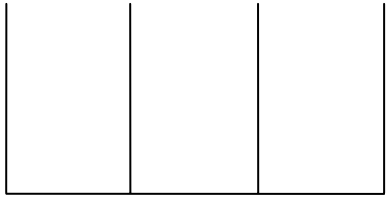
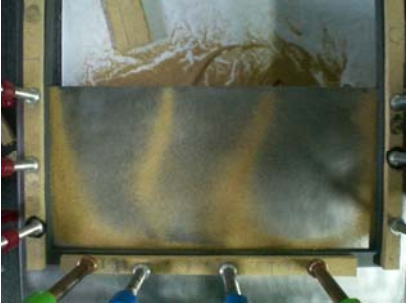
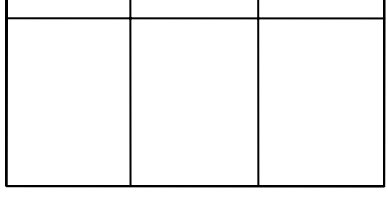

| m | n | Valor Convencionalmente Verdadero de Frecuencia [Hz] | Valor Medio de Frecuencia Experimental [Hz] | Error <i>e</i> [Hz] | Error Relativo %<i>e</i> [%] | Porcentaje de Dispersión %<i>D</i> | Desviación Estándar [Hz] | Incertidumbre Relativa [%] |
|----------|----------|---|--|----------------------------|-------------------------------------|---|---------------------------------|-----------------------------------|
| 2 | 1 | 43 | 42 | 1 | 2,38 | 7,14 | 1,00 | 4,76 |
| | 2 | 141 | 133 | 8 | 6,02 | 0,75 | 1,00 | 1,50 |
| | 3 | 348 | 345 | 3 | 0,87 | 0,87 | 1,00 | 0,58 |
| 3 | 1 | 97 | 95 | 2 | 2,11 | 3,16 | 1,00 | 2,11 |
| | 2 | 199 | 195 | 4 | 2,05 | 2,05 | 1,00 | 1,03 |
| | 3 | 389 | 396 | 7 | 1,77 | 0,51 | 1,00 | 0,51 |
| 4 | 1 | 178 | 156 | 22 | 14,10 | 1,92 | 1,00 | 1,28 |
| | 2 | 284 | 275 | 9 | 3,27 | 1,45 | 1,00 | 0,73 |
| | 3 | 457 | 477 | 20 | 4,19 | 0,63 | 1,00 | 0,42 |
| 5 | 1 | 285 | 247 | 38 | 15,38 | 0,81 | 1,00 | 0,81 |
| | 2 | 395 | 406 | 11 | 2,71 | 0,49 | 1,00 | 0,49 |

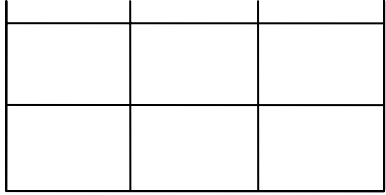

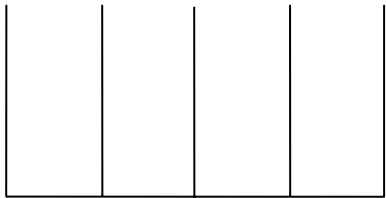
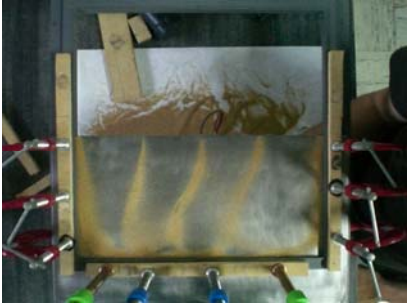
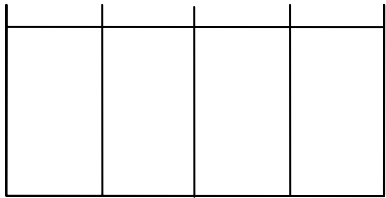
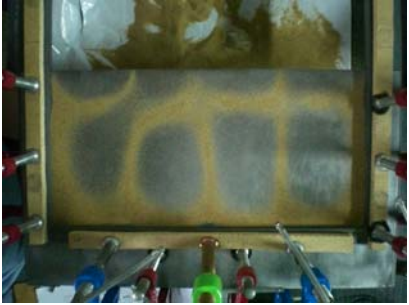
Al igual que en los casos anteriores se observa que la desviación estándar es igual $\pm 1 \text{ Hz}$ por lo que la incertidumbre nos queda $\delta\omega_{mn}=\pm 2 \text{ Hz}$. En cuanto a los valores de la incertidumbre relativa, oscilan entre $0,49\%$ y el $4,76\%$. Por otro lado, el número de mediciones se puede decir que es suficiente ya que el máximo valor del porcentaje de dispersión obtenido es de $7,14\%$ el cual es menor a 8% .

Observando la tabla 5.5 se puede afirmar que los resultados obtenidos concuerdan en un 84% con el patrón usado como referencia. Basándonos en los resultados de la desviación estándar relativa, podemos decir que aunque el error relativo alcance valores de $15,38\%$, el experimento es bastante confiable debido a que el valor máximo de la misma es de $4,76\%$, sumado a esto, está el hecho de que las figuras obtenidas (Tabla 5.6) corroboran los resultados, es decir, las figuras obtenidas en los valores presentados corresponden a los distintos modos de vibración. En este caso, para el conteo de líneas nodales, se incluirá cada lado empotrado como una línea nodal, por esta razón, es que en este caso m comienza en 2.

Tabla 5.6 Cuadro resumen de figuras de Chladni. Caso 3

| m | n | Líneas Nodales Características Esperadas | Líneas Nodales Características Obtenidas |
|---|---|---|--|
| 2 | 1 |  |  |
| | 2 |  |  |
| | 3 |  |  |
| 3 | 1 |  |  |

| | | |
|-----|---|--|
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 1 |  |  |
| 2 |  |  |

| | | | |
|---|---|--|---|
| | 3 |  |  |
| 5 | 1 |  |  |
| | 2 |  |  |

CONCLUSIONES

En base al análisis de los resultados obtenidos, se tienen las siguientes conclusiones:

- Se determinó de forma experimental los primeros valores de frecuencia naturales de vibración para tres casos distintos.
- El banco de pruebas construido cumple con los parámetros de diseño con bastante versatilidad.
- Las figuras características obtenidas concuerdan con las esperadas en todos los casos.
- El caso 1 tiene un error relativo máximo menor que el de los otros dos casos estudiados.
- Para el caso 1 se puede afirmar que los resultados obtenidos concuerdan por lo menos en un 97% con los patrones de referencia.
- Para el caso 2 los resultados experimentales concuerdan en un 92% con los patrones de referencia.
- En el caso 3 la concordancia de los valores experimentales es de 84% con respecto a los valores de referencia.
- El valor máximo de incertidumbre relativa para todos los casos es menor al 5%, con lo cual se puede afirmar que el experimento realizado es bastante confiable.

- El método de Chladni comprueba de manera bastante acertada, la teoría clásica de placas, para los casos estudiados en esta investigación.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda diseñar y construir una base para el altavoz lo suficientemente versátil para realizar los ensayos con mayor comodidad.
- Proponer investigaciones de vibraciones en otros medios continuos como por ejemplo perfiles, láminas, placas con otras geometrías, etc.
- Proponer otros estudios utilizando el banco de pruebas construido en esta investigación, como por ejemplo placas con otras condiciones de borde, otros materiales, diversos espesores, etc.
- Incorporar el banco de pruebas al laboratorio de la asignatura “Dinámica de Máquinas” para futuras prácticas y estudios relacionados con vibraciones en medios continuos bidimensionales para fines didácticos.
- Acondicionar el Laboratorio de Dinámica de Máquinas de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la U.C.V. con aislamiento sonoro, para no perturbar las actividades académicas de la Escuela.
- Se recomienda dotar a los Laboratorios de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la U.C.V., con más y nuevos equipos, con el fin de facilitar futuros trabajos de investigación.

REFERENCIAS DOCUMENTALES

BIBLIOGRAFÍA

- Arias, F. (2004). *El Proyecto de Investigación: Introducción a la Metodología Científica*. 4ta ed. Caracas. Episteme.
- Boyce, W. y Di Prima R. (1991). *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. 3era ed. México. Editorial Limusa.
- Churrh, A. (1963). *Mechanical Vibrations*. 2da ed. Japón. Wiley.
- Deverall, L.: *Modified Method of Collocations for Vibrating Plate Problems*. Int. Conf. on Partial Differential Equations and Continuum Mechanics (Univ. Wisconsin, 1960), Univ. Press, 1961.
- Dimarogonas, A. (1993). *Vibration for Engineers*. 2da ed. USA. Prentice-Hall.
- French, A. (2001). *Vibraciones y Ondas*. Barcelona-España. Merrill.
- González, C., Juzga J., Hernández A. y Morales L. (2002) *Laboratorio de Física General Guía de Prácticas*. Departamento de Física Aplicada. Escuela Básica. Facultad de Ingeniería de la U.C.V. Caracas-Venezuela.
- Genta, G. (1995). *Vibration of Structures and Machines*. 2da ed. New York. Springer-Verlag.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, L. (1991). *Metodología de la Investigación*. México. McGraw Hill.

Leissa, Arthur W. (1969) *Vibration of Plates*. Washington D.C. U.S.A. Office of Technoly Utilization N.A.S.A.

León, J. (2004). *Dinámica de Máquinas. Introducción a la Teoría de Máquinas*. Caracas. Servicios de impresión de la Universidad Simón Bolívar.

Mabie, S. y Reinholtz, J. (2001). *Mecanismos y Dinámica de Máquinas*. 2da ed. México. Editorial Limusa.

Figuera, L., Padrón, M. y Mikaty M., (2005). *Instructivo para la Presentación de Tesis de Grado Postgrado Doctorado y Trabajos de Ascenso*. Caracas. U.C.V. Facultad de Ingeniería Comisión de Bibliotecas.

Sabino, C. (1986). *El Proceso de la Investigación*. Caracas. Editorial Panapo.

Thomson, W. y Dale, M. (1998). *Theory of Vibration with Aplications*. 5ta ed. USA. Prentice Hall.

Timoshenko, S. y Young, D. (1960). *Problemas de Vibración en Ingeniería*. México. Editorial Continental S.A.

Volterra, E. y Zachmanogolv, E. (1965). *Dinamics of Vibrations*. USA. Merrill.

PUBLICACIONES Y REVISTAS

Bolotin V.: *Dinamic Edge Effect in the Elastic vibrations of Plates*. Inshen. Sbornik., vol. 31, 1961, pp. 3-14 (en ruso).

- Bolotin V., Makabov, B., Mishenkov, G. y Shveiko, Yu Yu: *Asymptotic Method of Investigating the Natural Frequency Spectrum of Elastic Plates*. Raschetna Prochnost, Mashgiz (Moscow), N° 6, 1960, pp. 231-253 (en ruso).
- Campos, R., Guerrero, M., Isasi, M. y Valderrábano, S. (1999). *Aplicación del Método de Elemento Finito al Análisis Nodal*. Revista Ingenierías. Volumen II. Número 3 enero-abril. pp 49-55.
- Claassen, R. W.; y Thorne. C. J.: *Transverse Vibrations of Thin Rectangular Isotropic Plates*. NOTS Tech. Pub. 2379, NAVWEPS Rept. 7016 U.S. Naval Ordnance Test Sta., China Lake, Calif., Aug. 1960 (Errata available from CFSTI as AD 245000).
- Claassen, R. W.; y Thorne. C. J.: *Vibrations of Thin Rectangular Isotropic Plates*. J. Appl. Mech., vol. 28, N° 2, June 1961, pp.304-305.
- Cleghorn, W., Yu, S., Xu, J. y Fenton, R. (1994). *Free Vibration Analysis of Rectangular Plates with a Linear Crack Along Central Axis*. Proceedings of the 1994 ASME winter Annual Meeting. Chicago.
- Durán, R., Hervella, L., Liberman, E. y Solomin, J. (1999). *Approximation of the Vibration Modes of a plate by Reissner-Mindlin*. Journal Math. Comp 68. pp 1447-1463.
- Grases, J. y Molina, Y. (1973). *Determinación Experimental de las Frecuencias Naturales de Vibración de una Losa Compuesta*. Boletín I.M.M.E. Volumen 42. pp 47-56. Caracas
- Habata, Y.: *On the Lateral Vibration of a Rectangular Plate Clamped at Four Edges*. Trans. JSME, vol. 13 N° 44, 1947, pp. 67-83 (In Japanese).

- Hamada, M.: *A Method for Solving Problems of Vibration, Deflection and Buckling of Rectangular Plates With Clamped or Supported Edges*. Bull. JSME, vol. 2, N° 5, 1959, pp. 92-97.
- Iguchi, S.: *Die Eigenwertprobleme für die elastische rechteckige Platte*. Mem. Fac. Eng., Hokkaido Univ., 1938, pp. 305-372.
- Kanazawa, T.; y Kawai, T: *On the Lateral Vibration on Anisotropic Rectangular Plates*. Proc. 2d Jap. Natl. Congr. Appl. Mech., 1952, pp. 333-338.
- Kato, H.: *On the Bending and Vibration of Rectangular plate*. J. Soc. Nav. Architect., vol. 50, 1932, pp. 209-230.
- Liu, M. y S., C. (2003) *Free Vibration of Laminated Composite Shell Structures Using Hybrid Strain Based Layerwise Finite Elements Source*. Finite Elements in Analysis and Desing. Volume 40. Issue 1. pp 83-120.
- Munakata, K.: *On the Vibration and Elastic Stability of a Rectangular Plate Clamped at it's Four Edges*. J. Math. & Phys., vol. 31, N° , Apr. 1952, pp.69-74.
- Naruoka, M.: *On Transverse Vibration of Rectangular Flat Plates Clamped at Four Edges*. Trans. JSME, vol. 17 N° 57, 1951, pp. 26-30 (In Japanese).
- Ödman, S. T. A.: *Studie of Boundary Value Problems. Part II. Characteristics Funtions of Rectangular Plates*. Proc NR 24, Swedish Cement and Concrete Res. Inst., Roy. Inst. Tech, (Stockholm), 1955, pp 7-62.
- Petrolito, J., y Golley, B. (2000). *Vibration of Thick Plates Using Finite Strip-Elements*. Austral. Mathematical Soc.

Sezawa, K.: *On the Lateral Vibration of Rectangular Plate Clamped at Four Edges.*

Pept. N° 70, Aeron. Res. Inst., Tokyo Univ., 1931, pp 61-70.

Suzuki, S.: *On Transverse Vibration of Rectangular Flat Plates Clamped at Four*

Edges. Trans. JSME, vol. 13 N° 44, pp. I-50-I-58 (In Japanese).

Tomotika, S.: *The Transverse Vibration on a Square Plate Clamped at Four Edges.*

Phil Mag., ser. 7, vol. 21, N° 142, Apr. 1936, pp.745-760.

Vargas, B. (1998). *Análisis del Efecto de las Condiciones de Frontera en la*

Respuesta Dinámica de Placas Anisotrópicas. Revista Tecnología Hoy.

Volumen 2.

Warburton, G.B.: *The Vibration of Rectangular Plates,* Proc. Inst. Mech. Eng., ser. A,

vol. 168, N°. 12, 1954, pp. 371-384.

Young, D.: *Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method.* J. Appl. Mech., vol.

17, N° 4, Dec. 1950, pp. 448-453.

FUENTES ELECTRÓNICAS

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín. (s.f.). Lección de Teoría de la

Medición disponible en: [http://www.unalmed.edu.co/fisica/paginas/recursos_](http://www.unalmed.edu.co/fisica/paginas/recursos_web/lecciones_fisica_universitaria/leccion_teor%C3%ADa_de_la_medida/)

[web/lecciones_fisica_universitaria/leccion_teor%C3%ADa_de_la_medida/](http://www.unalmed.edu.co/fisica/paginas/recursos_web/lecciones_fisica_universitaria/leccion_teor%C3%ADa_de_la_medida/) [Consulta

4/05/2007 5:00 pm].

Vibration Data. (s.f.). Disponible en: <http://www.vibrationdata.com/> [Consulta

3/10/2006 3:00 pm].

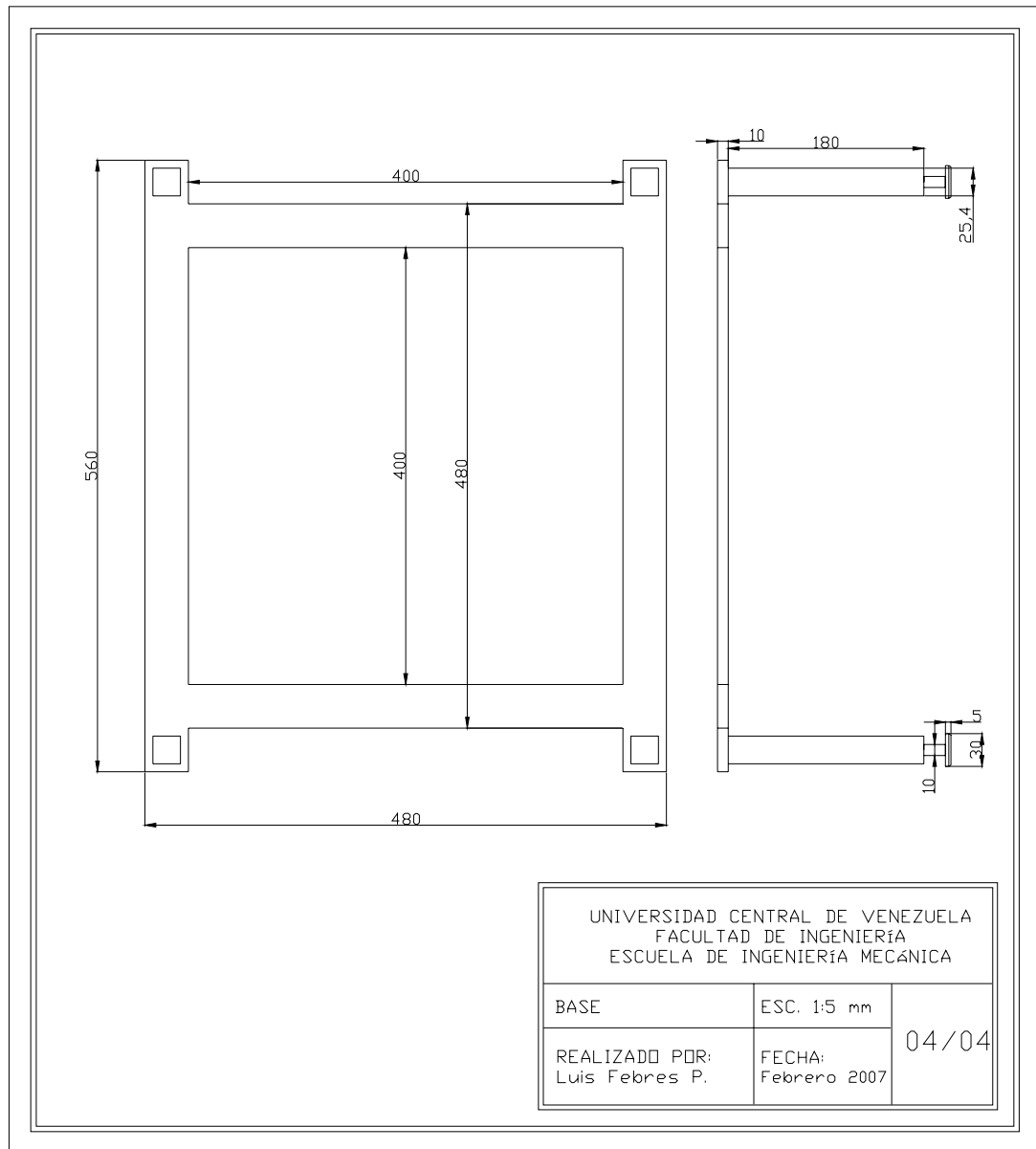
Davidson Physics (s.f.). A Study of Vibrating Plates. Disponible en:
<http://www.phy.davidson.edu/StuHome/jimn/chladni/pages/menu.htm>
[consulta 20/09/2006 10:00 am].

FUENTES DE TIPO LEGAL

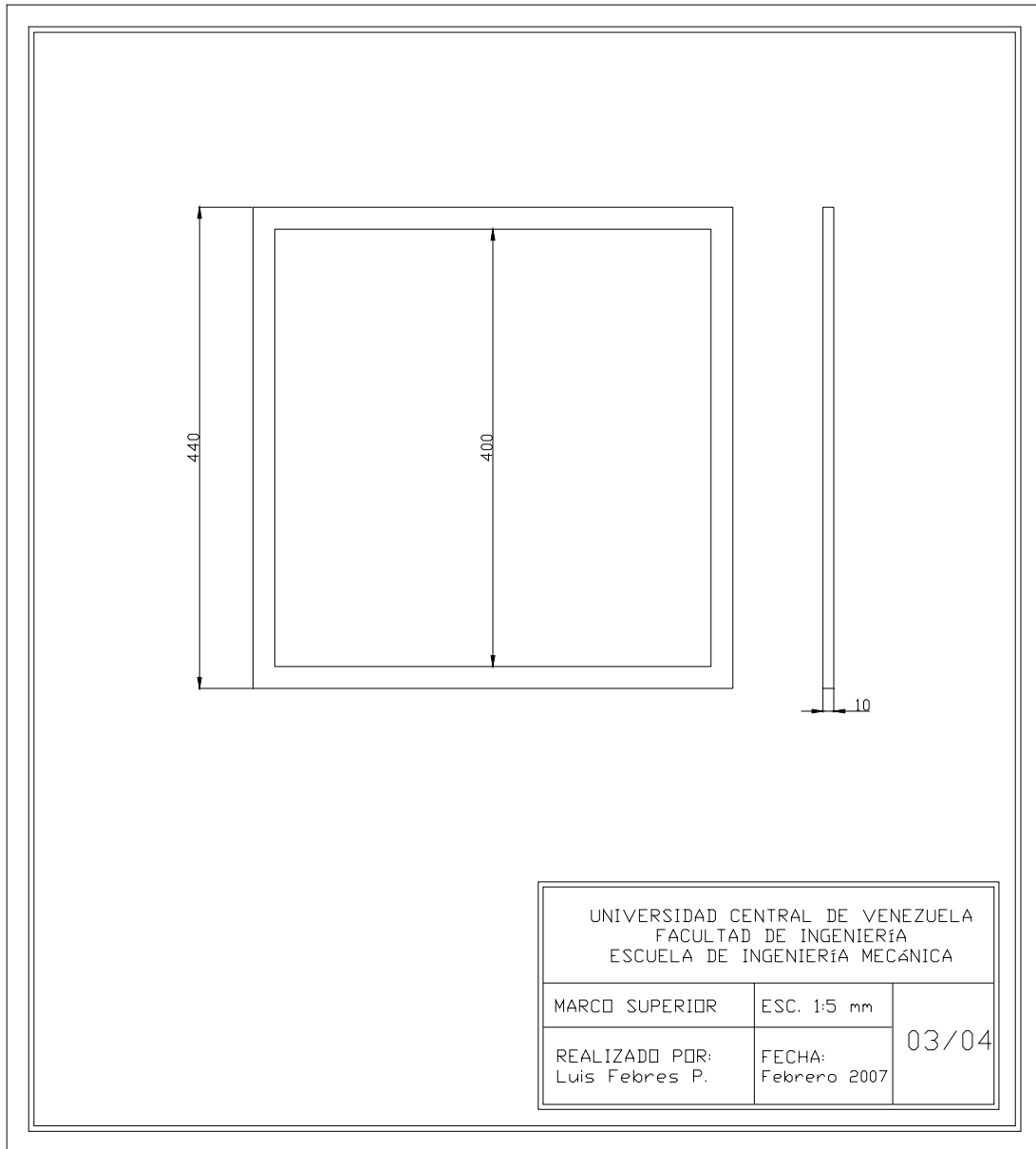
COVENIN 1565:1995. Norma Venezolana Ruido Ocupacional. Programa de Conservación Auditiva. Niveles Permisibles y Criterios de Evaluación. (1995, Diciembre 06) (3^{ra} Revisión).

ANEXOS

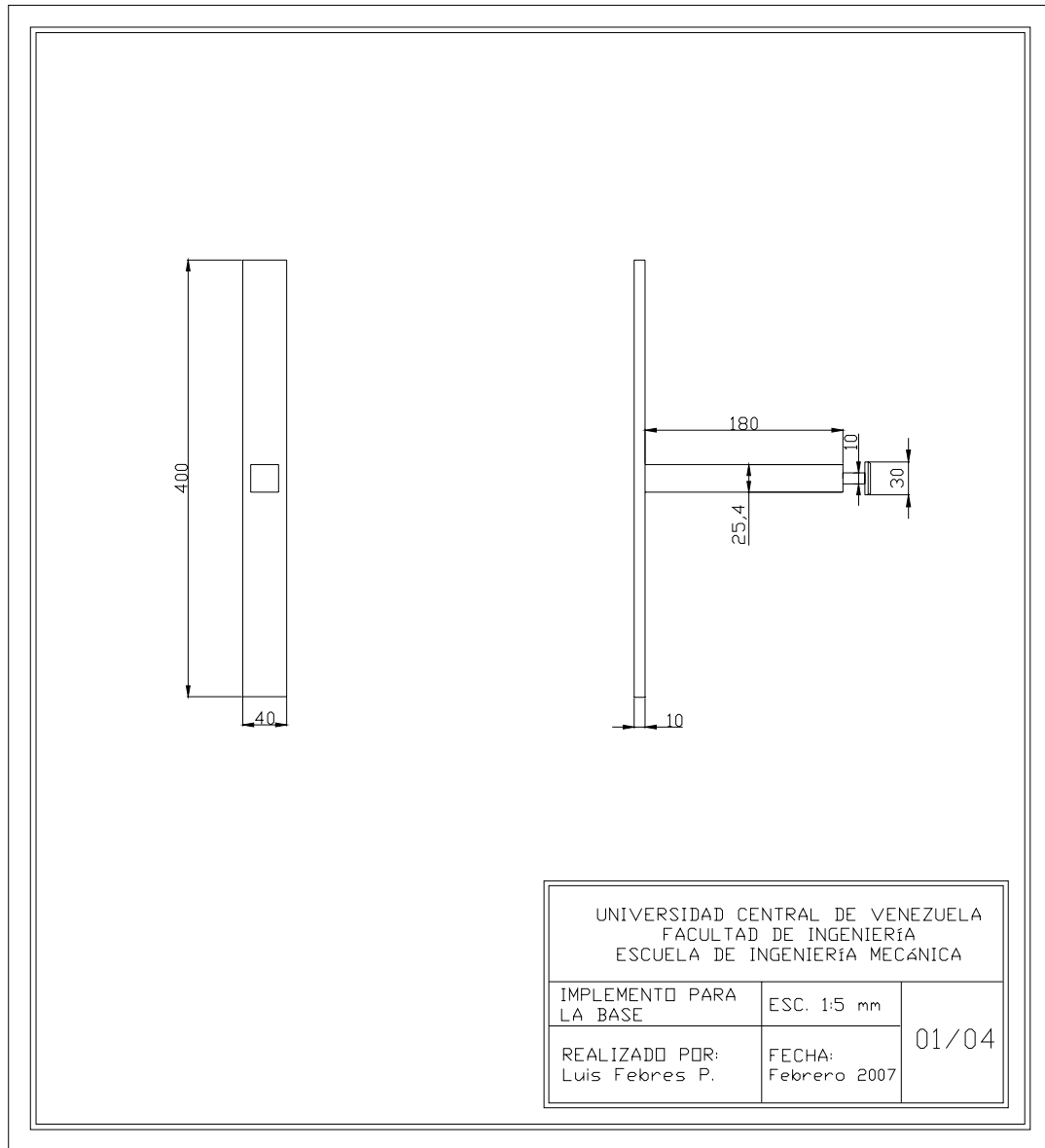
ANEXO 1: PLANO. BASE



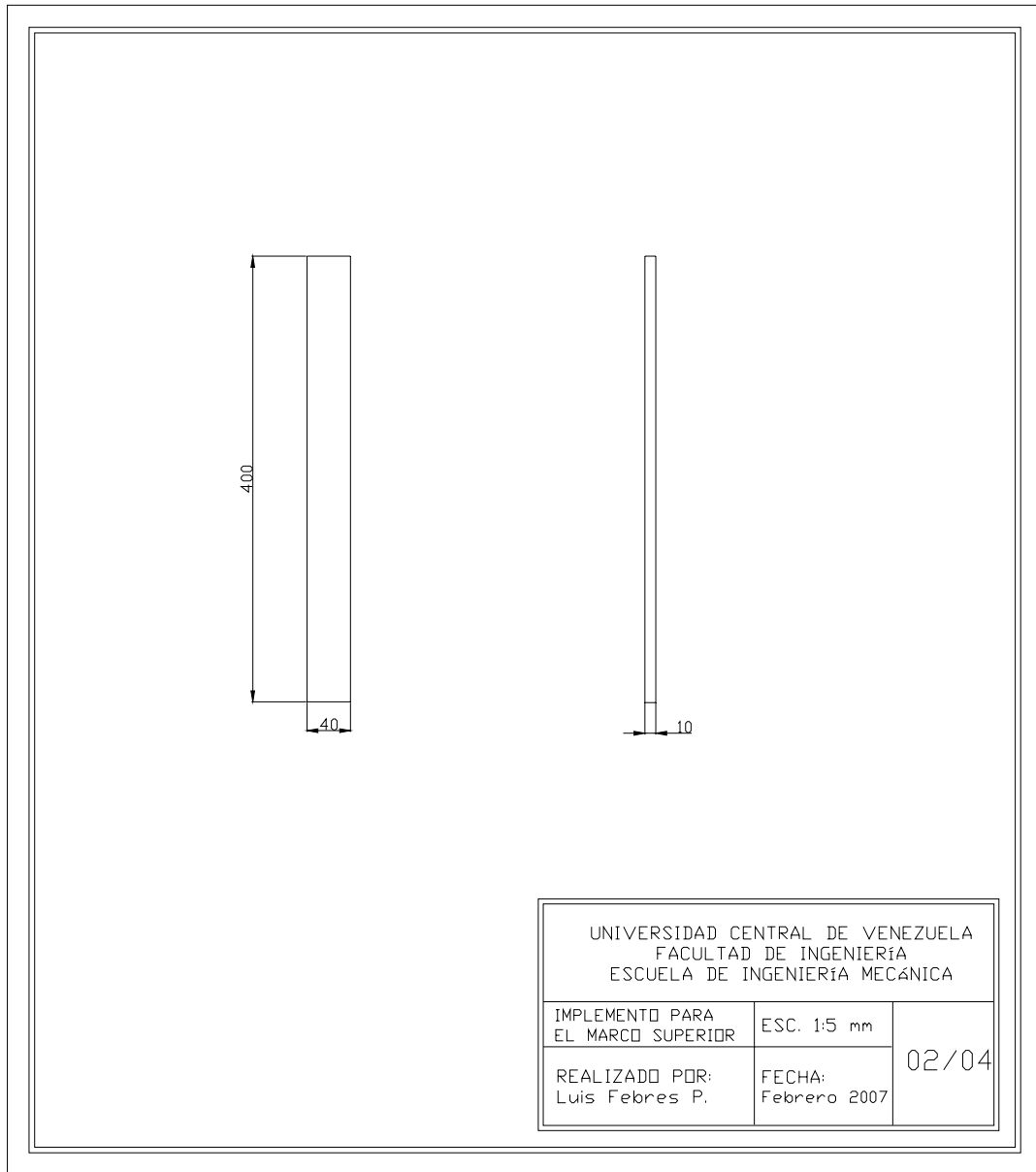
ANEXO 2: PLANO. MARCO SUPERIOR



ANEXO 3: PLANO. IMPLEMENTO PARA LA BASE



ANEXO 4: PLANO, IMPLEMENTO PARA EL MARCO SUPERIOR



ANEXO 5: Valores de ω_{mn} [Hz] obtenidos en diez los ensayos realizados para el caso 1

Ensayo 1. Caso 1

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 50 | 99 | 177 | 279 | 416 |
| 2 | 99 | 149 | 226 | 334 | |
| 3 | 177 | 226 | 305 | 410 | |
| 4 | 279 | 334 | 410 | 510 | |
| 5 | 416 | | | | |

Ensayo 2. Caso 1

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 50 | 99 | 179 | 278 | 417 |
| 2 | 99 | 150 | 228 | 334 | |
| 3 | 179 | 228 | 304 | 406 | |
| 4 | 278 | 334 | 406 | 513 | |
| 5 | 417 | | | | |

Ensayo 3. Caso 1

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 51 | 100 | 176 | 281 | 416 |
| 2 | 100 | 150 | 227 | 333 | |
| 3 | 176 | 227 | 305 | 409 | |
| 4 | 281 | 333 | 409 | 512 | |
| 5 | 416 | | | | |

Ensayo 4. Caso 1

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 51 | 98 | 177 | 280 | 415 |
| 2 | 98 | 150 | 224 | 332 | |
| 3 | 177 | 224 | 305 | 409 | |
| 4 | 280 | 332 | 409 | 510 | |
| 5 | 415 | | | | |

Ensayo 5. Caso 1

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 49 | 100 | 178 | 280 | 416 |
| 2 | 100 | 151 | 225 | 332 | |
| 3 | 178 | 225 | 306 | 409 | |
| 4 | 280 | 332 | 409 | 510 | |
| 5 | 416 | | | | |

Ensayo 6. Caso 1

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 50 | 99 | 177 | 280 | 416 |
| 2 | 99 | 150 | 226 | 332 | |
| 3 | 177 | 226 | 306 | 410 | |
| 4 | 280 | 332 | 410 | 511 | |
| 5 | 416 | | | | |

Ensayo 7. Caso 1

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 50 | 100 | 177 | 280 | 415 |
| 2 | 100 | 150 | 227 | 331 | |
| 3 | 177 | 227 | 306 | 409 | |
| 4 | 280 | 331 | 409 | 510 | |
| 5 | 415 | | | | |

Ensayo 8. Caso 1

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 50 | 99 | 178 | 280 | 416 |
| 2 | 99 | 150 | 226 | 333 | |
| 3 | 178 | 226 | 305 | 408 | |
| 4 | 280 | 333 | 408 | 509 | |
| 5 | 416 | | | | |

Ensayo 9. Caso 1

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 49 | 100 | 176 | 281 | 414 |
| 2 | 100 | 149 | 226 | 331 | |
| 3 | 176 | 226 | 305 | 407 | |
| 4 | 281 | 331 | 407 | 511 | |
| 5 | 414 | | | | |

Ensayo 10. Caso 1

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 51 | 99 | 177 | 279 | 414 |
| 2 | 99 | 150 | 226 | 332 | |
| 3 | 177 | 226 | 305 | 409 | |
| 4 | 279 | 332 | 409 | 510 | |
| 5 | 414 | | | | |

ANEXO 6: Valores de ω_{mn} [Hz] obtenidos en los diez ensayos realizados para el caso 2

Ensayo 1. Caso 2

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 133 | 173 | 246 | 343 | 472 | 626 |
| 2 | 320 | 379 | 447 | 538 | | |

Ensayo 2. Caso 2

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 132 | 173 | 245 | 342 | 472 | 625 |
| 2 | 320 | 378 | 446 | 536 | | |

Ensayo 3. Caso 2

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 133 | 172 | 245 | 342 | 473 | 626 |
| 2 | 322 | 379 | 447 | 537 | | |

Ensayo 4. Caso 2

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 134 | 174 | 243 | 342 | 472 | 625 |
| 2 | 321 | 378 | 448 | 537 | | |

Ensayo 5. Caso 2

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 133 | 172 | 245 | 343 | 472 | 626 |
| 2 | 322 | 378 | 447 | 538 | | |

Ensayo 6. Caso 2

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 133 | 173 | 245 | 343 | 471 | 624 |
| 2 | 320 | 379 | 447 | 538 | | |

Ensayo 7. Caso 2

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 134 | 173 | 244 | 341 | 471 | 625 |
| 2 | 321 | 377 | 446 | 536 | | |

Ensayo 8. Caso 2

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 132 | 173 | 245 | 342 | 473 | 625 |
| 2 | 321 | 379 | 446 | 536 | | |

Ensayo 9. Caso 2

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | | |
|----------|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 133 | 174 | 244 | 343 | 472 | 625 |
| 2 | 321 | 380 | 447 | 537 | | |

Ensayo 10. Caso 2

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | | |
|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 132 | 173 | 246 | 344 | 471 | 626 |
| 2 | 322 | 379 | 447 | 537 | | |

ANEXO 7: Valores de ω_{mn} [Hz] obtenidos en los diez ensayos realizados para el caso 3

Ensayo 1. Caso 3

| <i>m</i> | <i>n</i> | | |
|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 41 | 133 | 343 |
| 3 | 94 | 197 | 397 |
| 4 | 155 | 273 | |
| 5 | 247 | 406 | |

Ensayo 2. Caso 3

| <i>m</i> | <i>n</i> | | |
|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 42 | 133 | 344 |
| 3 | 96 | 195 | 397 |
| 4 | 158 | 277 | |
| 5 | 246 | 406 | |

Ensayo 3. Caso 3

| <i>m</i> | <i>n</i> | | |
|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 42 | 133 | 344 |
| 3 | 93 | 194 | 396 |
| 4 | 156 | 273 | |
| 5 | 247 | 407 | |

Ensayo 4. Caso 3

| <i>m</i> | <i>n</i> | | |
|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 41 | 134 | 345 |
| 3 | 94 | 193 | 396 |
| 4 | 156 | 274 | |
| 5 | 247 | 407 | |

Ensayo 5. Caso 3

| <i>m</i> | <i>n</i> | | |
|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 43 | 133 | 346 |
| 3 | 95 | 196 | 395 |
| 4 | 157 | 275 | |
| 5 | 247 | 405 | |

Ensayo 6. Caso 3

| <i>m</i> | <i>n</i> | | |
|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 42 | 134 | 343 |
| 3 | 95 | 194 | 396 |
| 4 | 157 | 275 | |
| 5 | 247 | 406 | |

Ensayo 7. Caso 3

| <i>m</i> | <i>n</i> | | |
|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 43 | 132 | 345 |
| 3 | 96 | 194 | 396 |
| 4 | 156 | 274 | |
| 5 | 248 | 406 | |

Ensayo 8. Caso 3

| <i>m</i> | <i>n</i> | | |
|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 42 | 132 | 346 |
| 3 | 95 | 195 | 395 |
| 4 | 157 | 276 | |
| 5 | 248 | 406 | |

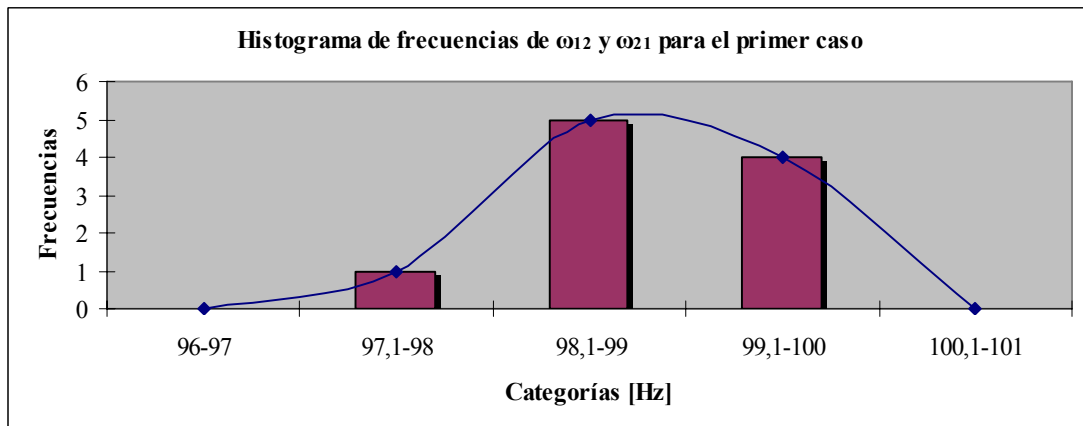
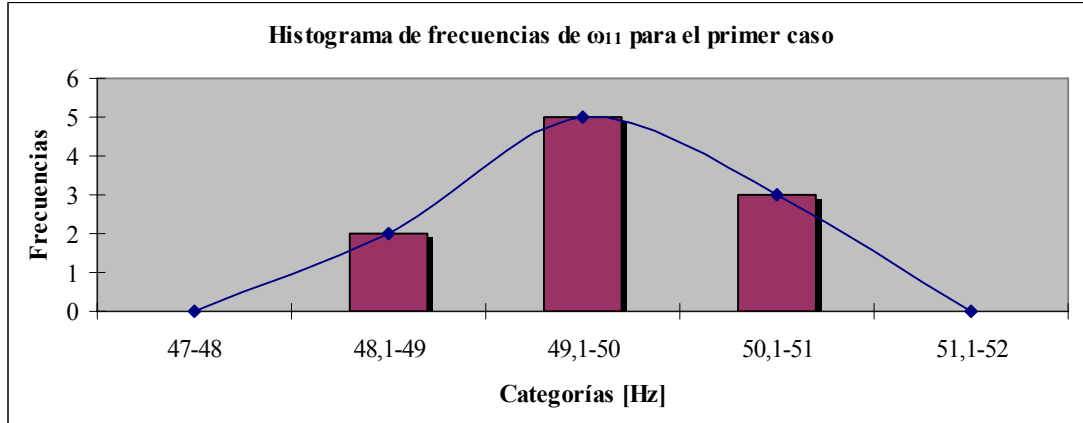
Ensayo 9. Caso 3

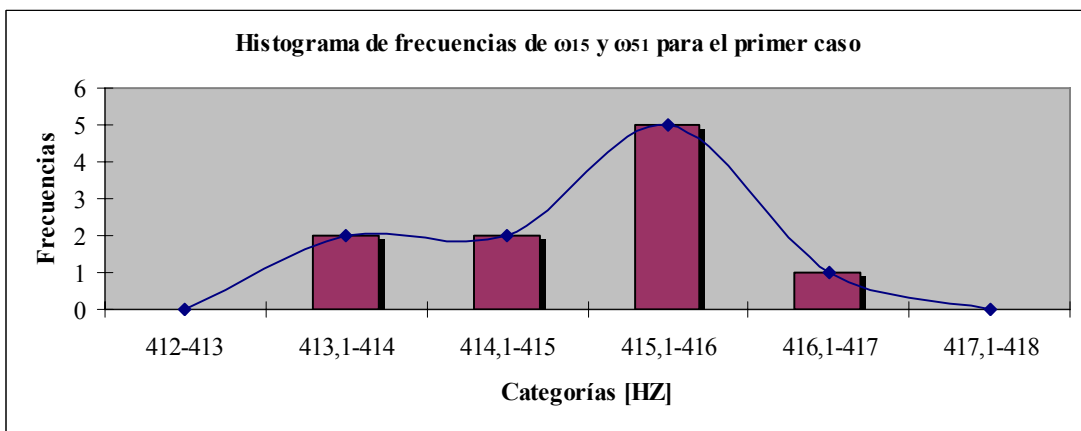
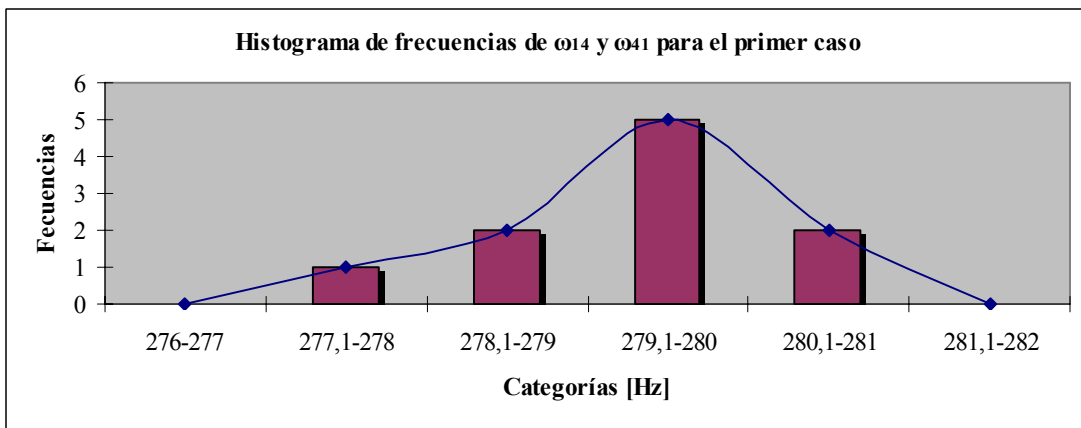
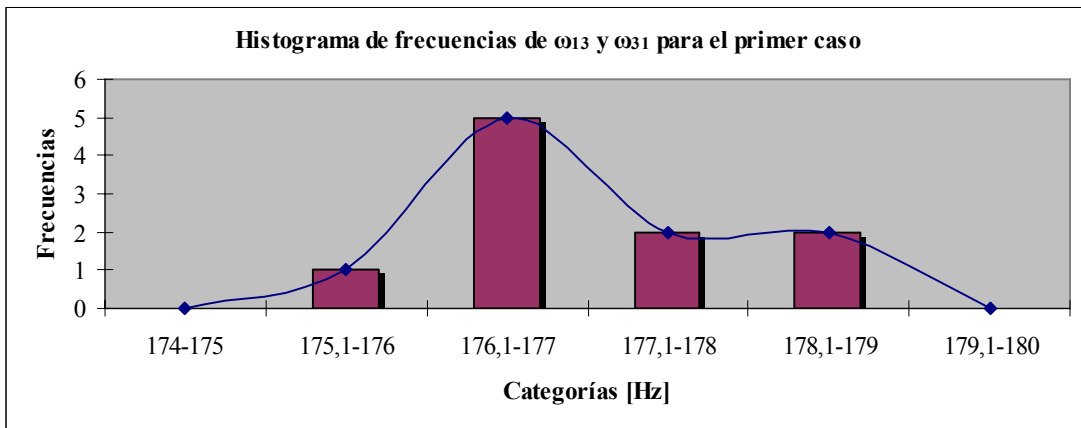
| <i>m</i> | <i>n</i> | | |
|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 44 | 133 | 344 |
| 3 | 95 | 193 | 396 |
| 4 | 155 | 275 | |
| 5 | 247 | 406 | |

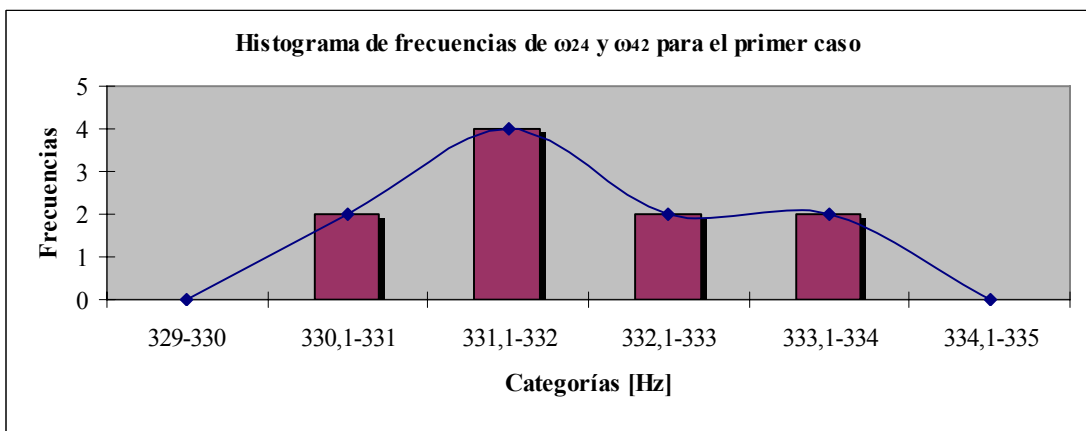
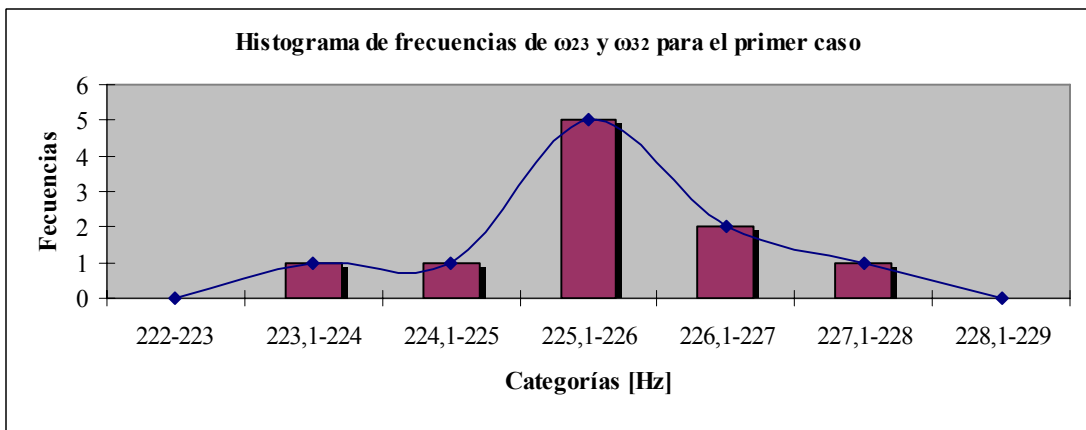
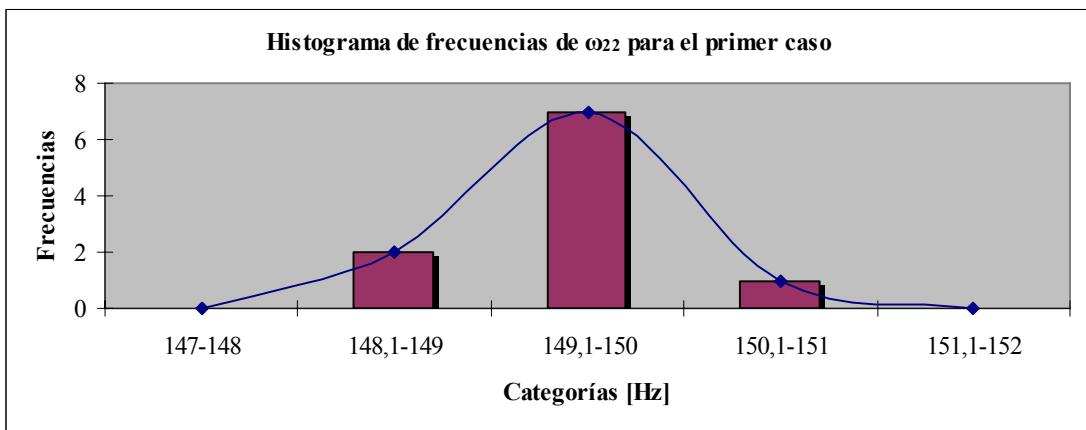
Ensayo 10. Caso 3

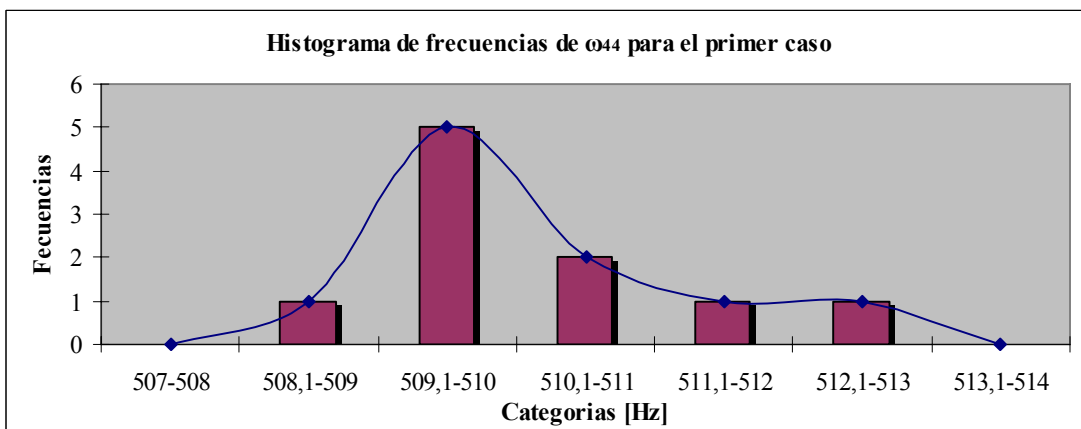
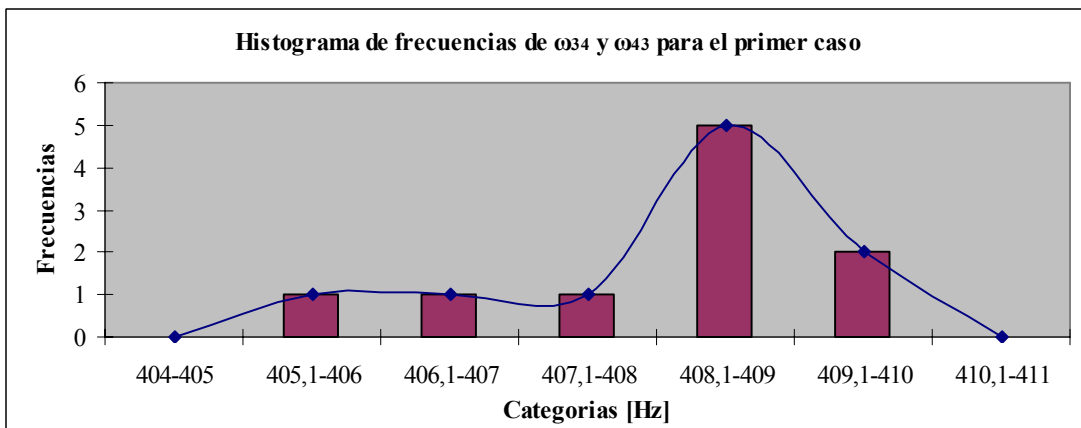
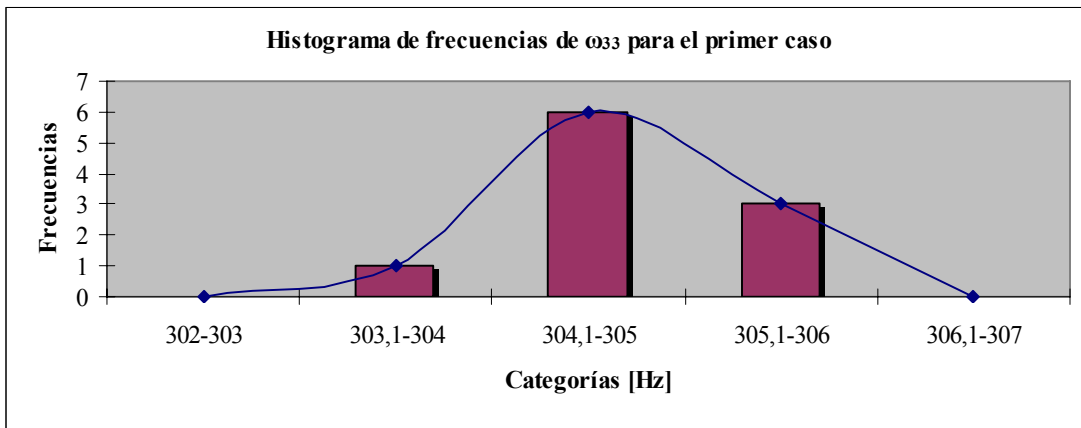
| <i>m</i> | <i>n</i> | | |
|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 42 | 132 | 345 |
| 3 | 95 | 196 | 397 |
| 4 | 156 | 275 | |
| 5 | 246 | 406 | |

ANEXO 8: Histogramas de frecuencia para los ω_{mn} , obtenidos en el primer caso

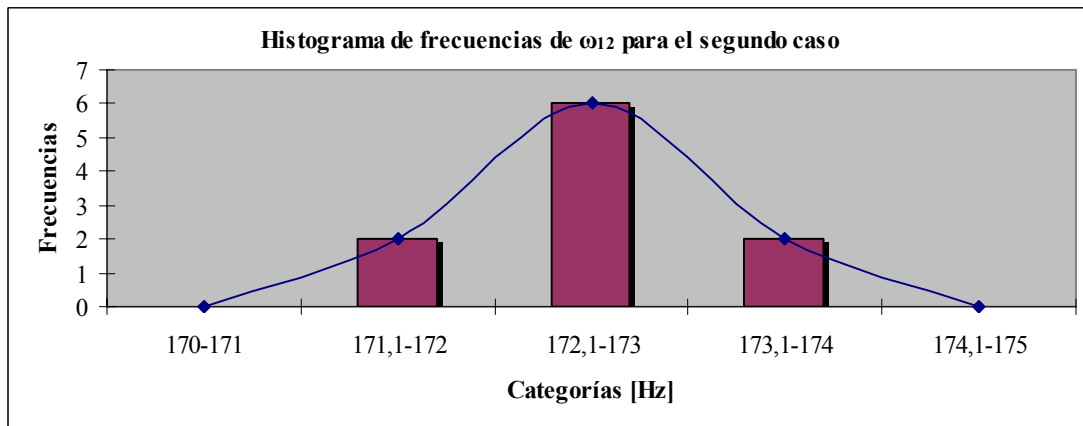
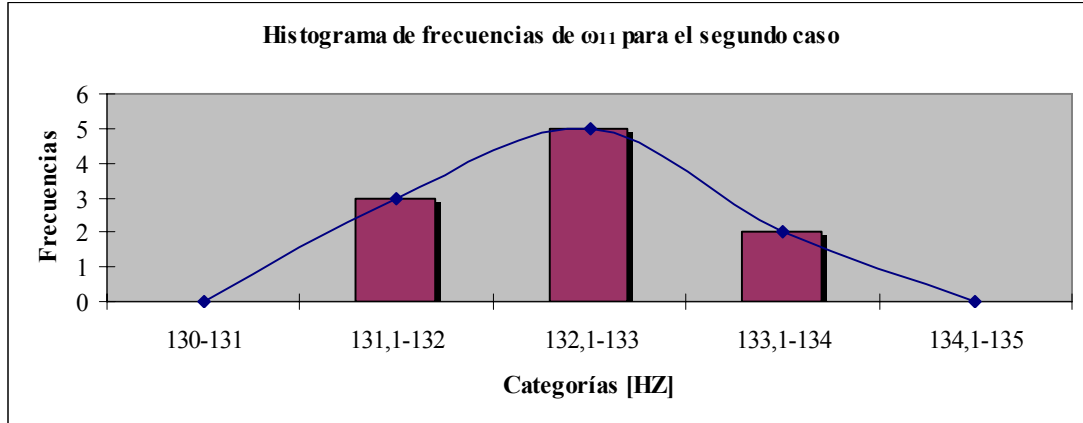


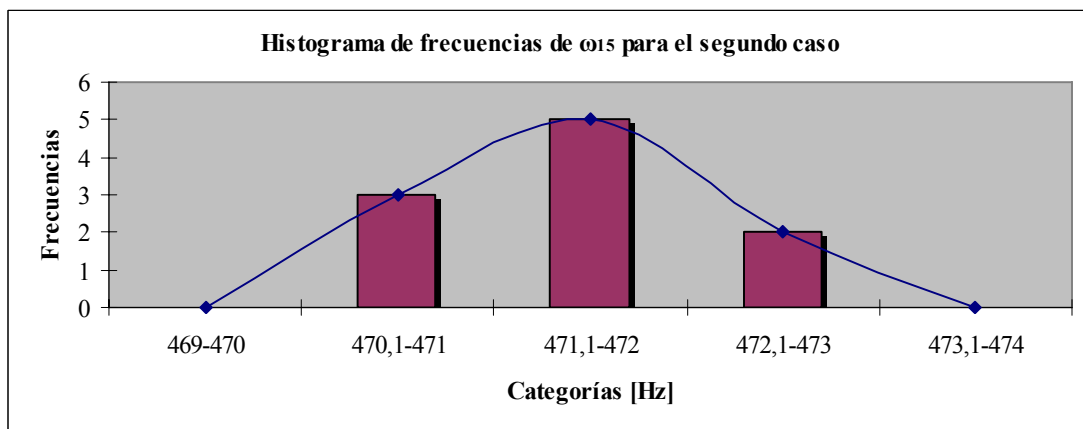
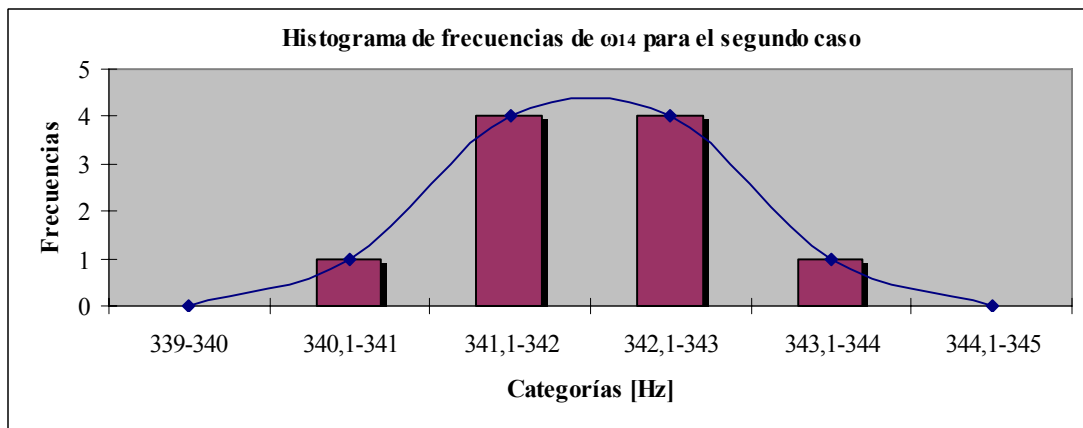
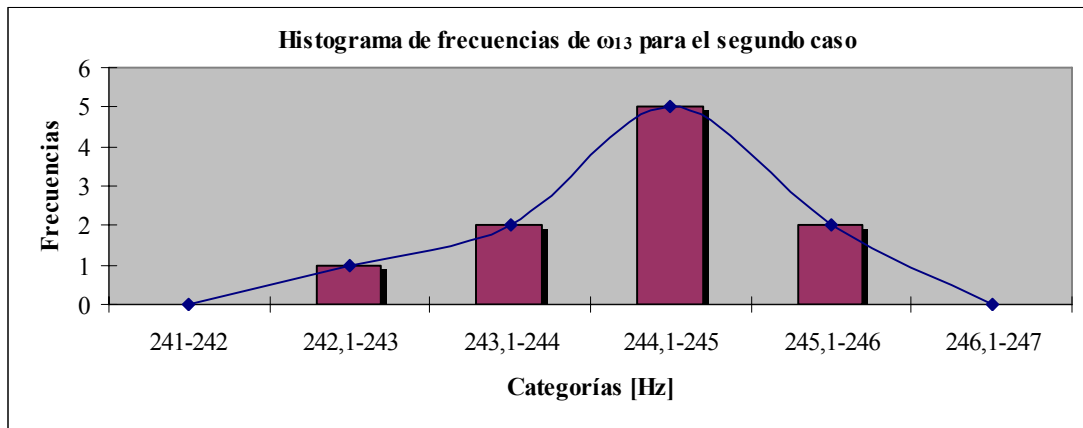


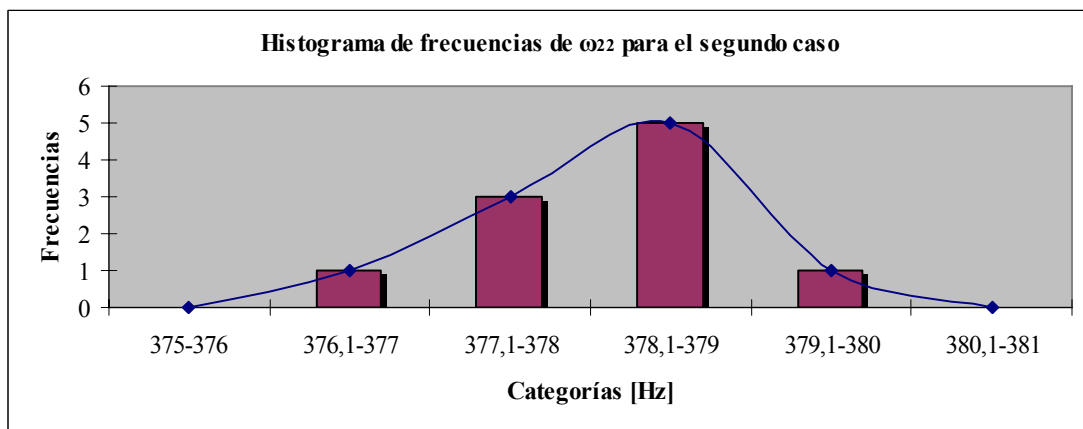
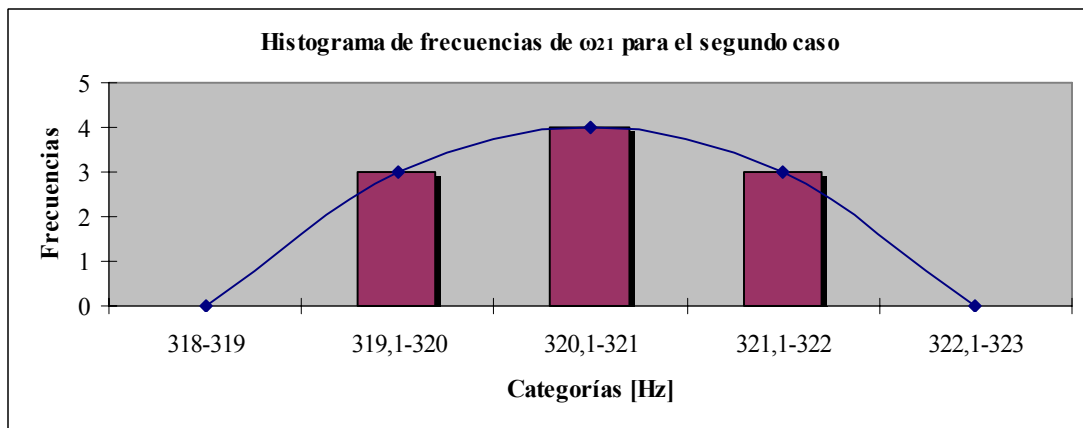
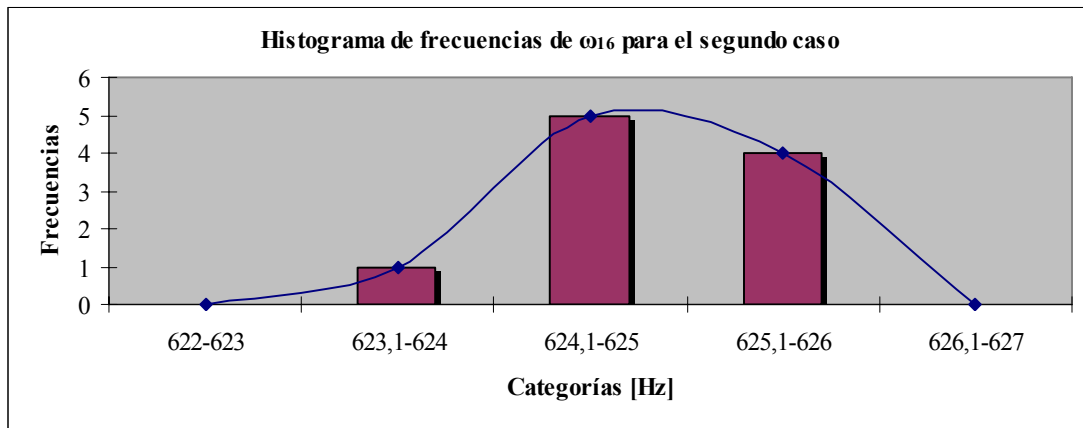


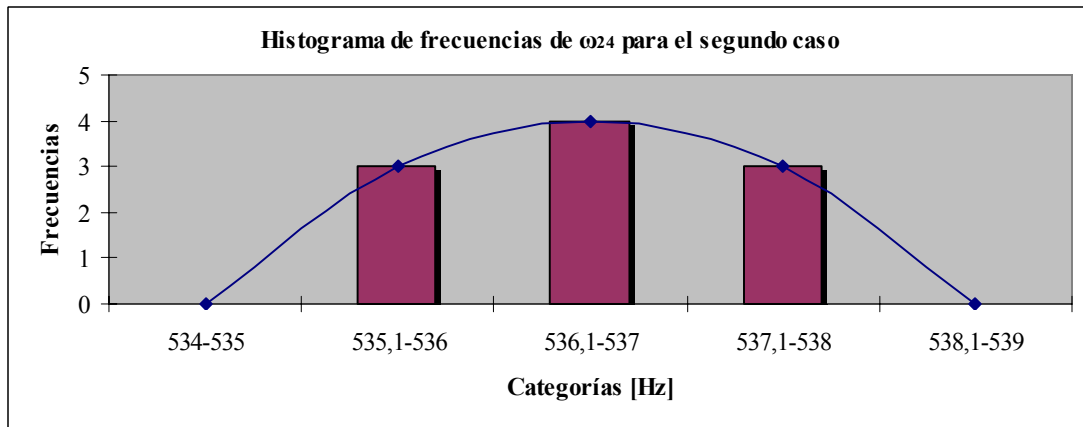
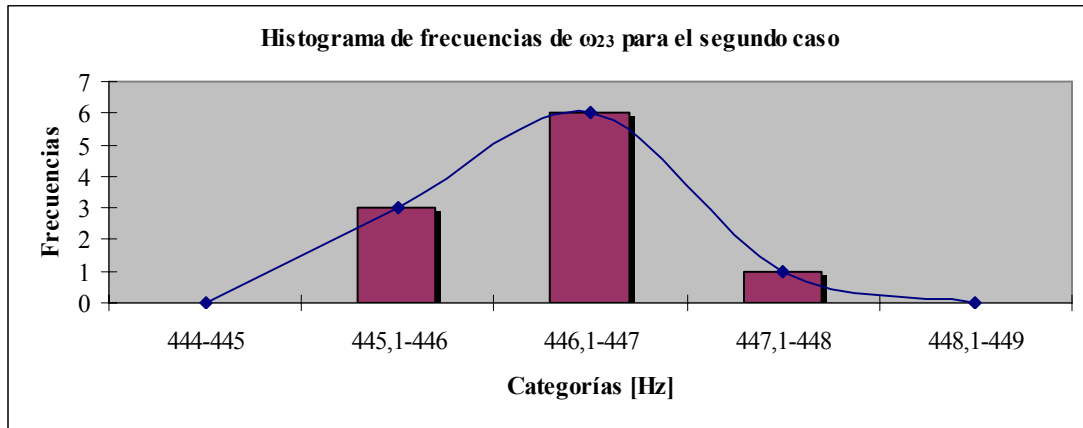


ANEXO 9: Histogramas de frecuencia para los ω_{mn} , obtenidos en el segundo caso









ANEXO 10: Histogramas de frecuencia para los ω_{mn} , obtenidos en el tercer caso

