Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Asociación Matemática Venezolana

Introducción a la Teoría de Ondiculas

V Talleres de Formación Matemática
Maracaibo, 26 al 31 de Julio de 2004

Introducción a la Teoría de Ondículas a través del Algebra Lineal

Ventura Echandía y Wilfredo Urbina
Universidad Central de Venezuela
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias

Julio 2004

Índice General

Presentación

La Teoría de Ondículas es una teoría matemática muy reciente, su formulación se da a mediados de los años ochenta aunque sus orígenes, que son por cierto muy amplios y diversos, datan de varias décadas antes. Precisamente una caracteristica importante de la Teoría de Ondículas es que partiendo de motivaciones fuertemente aplicadas se desarrolla como una teoría matemática que unifica temas de investigación en el Análisis, así como en la Ingeniería y en la Teoría de señales, que hasta entonces se consideraban sin ninguna relación.

La Teoría de Ondículas es teóricamente un desarrollo del Análisis de Fourier, es decir, del Análisis Armónico. No lo niega ni se lo opone, forma típica del desarrollo teórico de la Filosofía, sino que lo desarrolla y complementa acabando con la "dictadura de Fourier" al posibilitar representaciones de funciones más allá de la base trigonométrica y más adapatadas a los problemas.

Una de los dificultades de hacer una exposición elemental de la Teoría de Ondículas es la serie de requisitos en Análisis de Fourier que se requieren, para comprender y apreciar sus avances. Sin embargo Michael W. Frazier en su libro *An Introduction to Wavelets through Linear Algebra* (Springer Verlag, New York 1999) desarrolla un enfoque novedoso y relativamente elemental a partir del Algebra Lineal. Las presentes notas estan basadas en ese libro y son una traducción "libre" de él. Esperamos que el estudiante interesado no sólo revise el mencionado libro, que contiene bastante más material, ejemplos y aplicaciones que los contenidos en estas notas, sino también la bibliografía que se anexa a final de estas notas para que pueda empaparse de esta fascinante teoría. Este curso fue dictado por el Prof. Ventura Enchandía en la Maestría de Matemáticas de la UCLA y esta siendo dictado actualmente por el Prof. Wilfredo Urbina en la Maestría de Modelos Aleatorios IVIC-UCV.

Finalmente, queremos agradecer a los organizadores la oportunidad de que nos han brindado para participar con este curso en el V TForMa.

Ventura Echandía y Wilfredo Urbina

Capítulo 1

La Transformada Discreta de Fourier.

1.1 Propiedades básicas de la Transformada Discreta de Fourier.

Consideremos el conjunto,

$$\mathbb{Z}_N = \{0, 1, 2, \ldots N-1\}.$$

A un vector z con n-componentes lo consideraremos indiciada en $\mathbb{Z}_N$ y sus componentes serán consideradas como evaluaciones $z_j = z(j)$, es decir z será considerada como una función definida sobre $\mathbb{Z}_N$.

Consideremos

$$\ell^2(\mathbb{Z}_N) = \{z = (z(0), z(1), z(2), \ldots z(N-1)) : z(j) \in \mathbb{C},\ 0 \leq j \leq N-1\}.$$

$\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con las operaciones naturales de suma componente a componente y multiplicación por escalar.

Consideremos el producto interior en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$,

$$< z, w >= \sum_{k=0}^{N-1} z_{(k)}\overline{w(k),}$$

con norma asociada

$$\| z \| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} | z(k) |^2 \right)^{1/2}.$$

Decimos que z es ortogonal a w, $z \perp w$, si y sólo si $< z, w >= 0$.

Obsérvese que originalmente $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ está definida sobre $\mathbb{Z}_N$, sin embargo extenderemos z a todo $\mathbb{Z}$ por periodicidad, mediante la fórmula

$$z(j + N) = z(j), \forall j \in \mathbb{Z}.$$

En $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tenemos la base canónica o euclideana $E = \{e_0, e_1, \cdots, e_{N-1}\}$ donde $e_j = (0, \cdots, 1, \cdots, 0) queestrivialmenteortonormal$. Consideramos además,

Definición 1 *Definimos la familia* $\{E_j\}_{j=0}^{N-1}$ *como*

$$E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i m n}{N}} \quad , \text{ para } 0 \leq n, m \leq N - 1.$$

Se tiene entonces el siguiente resultado,

Lema 1 *El conjunto* $\{E_j\}_{j=0}^{N-1}$ *es una base ortonormal de* $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Demostración

Sean $j, k \in \{0, 1, \cdots, N - 1\}$

$$\begin{aligned} < E_j, E_k > &= \sum_{n=0}^{N-1} E_j(n)\overline{E_k(n)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i (j-k) n}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{\frac{2\pi i (j-k)}{N}})^n = \frac{1 - (e^{\frac{2\pi i (j-k)}{N}})^N}{1 - e^{\frac{2\pi i (j-k)}{N}}} = 0. \end{aligned}$$

ya que $j - k$ es un entero. Luego si $j \neq k, < E_j, E_k >= 0$.

Luego $\{E_j\}_{j=0}^{N-1}$ es un conjunto ortonormal y por tanto lienalmente independiente y por tener N elementos es una base de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. ∎

Ejemplos:

i.) Si $N = 2$, entonces
$\mathrm{E}_0 = (E_0(0), E_0(1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$
$E_1 = (E_1(0), E_1(1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$

ii.) Si $N = 4$, entonces
$\mathrm{E}_0 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$; $E_1 = \frac{1}{2}(1, i, -1, i)$
$E_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$; $E_3 = \frac{1}{2}(1, -i, -1, i)$.

Como $\{E_j\}_{j=0}^{N-1}$ es una base de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se tiene entonces que para $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$,

i.) $z = \sum_{m=0}^{N-1} < z, E_m > E_m$

ii.) $< z, w >= \sum_{m=0}^{N-1} < z, E_m > \overline{< w, E_m >}$

iii.) $\| z \|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} |< z, E_m >|^2$

iv.) $< z, E_m >= \sum_{m=0}^{N-1} z\,(n)\, \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi imn/N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi imn/N}$

Definición 2 *Dada* $z = (z(0), z(1), \ldots z(N-1)) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$*, para* $m = 0, 1, \ldots N-1$ *definimos*

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi imn/N}.$$

Se tiene entonces que $\hat{z} = (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \ldots, \hat{z}(N-1))$ es un elemento de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. La función $\hat{}: \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, definida por

$$\hat{} : z \to \hat{z} \quad ,$$

es denominada **la transformada de Fourier discreta,**(TDF).

La función $\hat{}$ es períodica de período N, ya que,

$\hat{z}(m+n) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i(m+n)n/N} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi imn/N} e^{-2\frac{\pi iNm}{N}}$

$= \hat{z}(m), \forall m \in \mathbb{Z}$.

Nota:$e^{-2\pi i \frac{Nn}{N}} = e^{-2\pi in} = 1$.

Se tiene que

$$\hat{z}(m) = \sqrt{N} < z, E_m >$$

se tiene entonces los siguientes reultados para TFD,

Teorema 1 *Sean* $z = (z(0), z(1), \ldots z(N-1))$ *,* $w = (w(0), w(1), \ldots w(N-1)) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *se tiene entonces* *i.) Formula de inversión de Fourier*

$$z_{(n)} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)e^{2\pi imn/N} \quad , \quad n = 0, 1 \ldots, N-1$$

ii.) Formula de Parseval,

$$< z, w >= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)\overline{\hat{w}(m)} = \frac{1}{N} < \hat{z}, \hat{w} >$$

iii.) Formula de Plancherel,

$$\| z \|^2 = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} | \hat{z}(m) |^2 = \frac{1}{N} \| \hat{z} \|^2 .$$

para $m = 0, 1, \ldots N-1$

Definición 3 *Definimos* $F_m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *como*

$$F_m(n) = \frac{1}{N}e^{2\pi imn/N} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots N-1.$$

$F = \{F_m\}_{m=0}^{N-1}$ *la denominaremos la* **base de Fourier** *de* $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Con esta notación la parte i.) del lema anterior se puede escribir como

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m)F_m,$$

lo cual significa que el vector que representa a z con respecto a la base de Fourier es $\hat{z}$, es decir,

$$\hat{z} = [z]_F .$$

La TFD es una transformación lineal y por lo tanto puede ser representada por una matriz.

La TFD se puede representar por una matriz ya que $\hat{}$ es una trnasformación lineal. Para simplificar notación definimos

$$w_N = e^{-2\pi i/N},$$

Se tiene entonces que

$$w_N^{mn} = e^{\frac{-2\pi imn}{N}} \;\; ; \;\; w_N^{-mn} = e^{\frac{2\pi imn}{N}} . \;,$$

En esta notación se tiene que la TFD está definida por:

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) w_N^{mn}$$

para hacer compatible nuestra notación vamos a indizar las filas y columnas de nuestras matrices de 0 a $N-1$ en vez de 1 a N.

Definición 4 *Sea W_N la matriz $[w_{mn}]$ $0 \leq m, n \leq N-1$ tal que $w_{mn} = w_N^{mn}$.*

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & w_N^3 & \vdots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & w_N^6 & \vdots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & w_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)} & w_N^{3(N-1)} & \vdots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

La $m-$ésima componente de $W_N z$ es

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_{mn} z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) w_N^{mn} = \hat{z}(m).$$

es decir, se tiene que

$$\hat{z} = W_N z.$$

Luego veremos que hay un algoritmo rápido para calcular $\hat{z}$.

Ejemplos: Vamos a calcular ejemplos simples para verificar la definición, se tiene que

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Dado $z = (1, 0, -3, 4)$ en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ entonces usando W_4, obtenemos $\hat{z} = (2, 4+4i, -6, 4-4i)$. (Verificar).

La parte $i.)$ del último lema muestra que la transformación $\hat{}:.\ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es invertible y nos dá una fórmula para la inversa de $\hat{}$,

Definición 5 *Para* $w = (w(0), w(1), \dots w(N-1)) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *definimos*

$$w^{\vee}(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} W(m) e^{2\pi i m n/N} \quad , \quad n = 0, 1, \dots N-1$$

Notaremos

$$w^{\vee} = (w(0)^{\vee}), w(1)^{\vee}, \dots w(N-1)^{\vee}).$$

A la función

$$^{\vee} : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$$

la denominaremos la transformada de Fourier discreta inversa (TDFI).

El último lema nos dice que para $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tenemos

$$(\hat{z})^{\vee}_{(n)} = z_{(n)},$$

para $n = 0, 1, \dots N-1$, es decir $(\hat{z})^{\vee} = z$.

De manera análoga se obtiene que $(w^{\vee})^{\hat{}} = w$, para todo w en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Como $\hat{}$ es invertible, se tiene que W_N es invertible y se tiene que $z = W_N^{-1}\hat{z}$, (sustituyendo $\hat{z} = w$ y $z = w^{\vee}$) nos da que

$$w^{\vee} = W_N^{-1} w, \quad \forall w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N).$$

Luego

$$w^{\vee}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} w(m)\frac{1}{N} w_N^{-mn} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N}\overline{w_N^{nm}} w(m)$$

lo cual muestra que la entrada (n, m) de W_N^{-1} es $\overline{w_N^{nm}}/N$. Si denotamos por $\overline{W_N}$ la matriz cuyas entradas son los complejos conjugados de las entradas de W_N, se tiene que

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{W_N} \quad .$$

Ejemplos:

$$W_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$W_4^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

Dado $w = (2, 4+i, -6, 4-4i)$ en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ calcule $w^\vee$.

Solución $w^\vee = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$^\vee$ es una transformación periódica de período N, es decir $w^\vee(n+N) = w(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Además tenemos que

$$w^\vee(n) = \frac{1}{N}\hat{w}(-n) = \frac{1}{N}\hat{w}(N-n).$$

Vamos a considerar ahora como la Transformada de Fourier discreta se comporta bajo operaciones que son muy importantes en el Análisis Armónico.

Definición 6 *Dado $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y $k \in \mathbb{Z}$ Definimos el operador traslación por*

$$(R_k z)(n) = z(n-k)$$

Ejemplo: Supongamos $N = 6$, $k = 2$; $z = (2, 3-i, 2i, 4+i, 0, 1)$ se tiene entonces que

$$(R_2 z)(0) = Z(0-2) = Z(-2) = Z(4) = 0 \quad ,$$

de manera similar se obtiene que

$$(R_2 z)(1) = z(-1) = z(5) = 1 \quad , \quad (R_2 z)(2) = 2 \quad , \quad \ldots$$

en general se tiene que

$$(R_2 z) = (0, 1, 2, 3-i, 2i, 4+i).$$

Nótese que el operador R_k mueve los componentes de z y nota los que quedan fuera del dominio $\{0, 1, \ldots N-1\}$. En algunos casos R_k es denominado traslación circular.

Se tiene el siguiente resultado de la TFD sobre el operador traslación,

Lema 2 *Sea z en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y k en $\mathbb{Z}$, para cada m en $\mathbb{Z}$ se tiene que*

$$(R_k z)(m) = e^{-2\pi i m k/N}\,\hat{z}(m).$$

El lema anterior muestra una limitación de la TFD. Ella es que si uno observa solamente $\mid \hat{z}(m) \mid$, $m = 0, 1, \ldots N-1$, no se puede distinguir de otra traslación circular de $\hat{z}$. En particular, las caracteristicas locales de z no son determinadas por $\mid \hat{z} \mid$; información está contenida en el argumento (la fase)de $\hat{z}$, pero en esta forma es muy difícil de interpretar. Luego veremos que esta es una consideración para la cual es ventajoso usar ondículas en lugar de transformada de Fourier.

Veamos el comportamiento de la TFD, en el caso del operador conjugación.

Definición 7 *Para* $z = (z(0), z(1), \ldots z(N-1)) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *definimos la función* $\overline{z}$ *como* $\overline{z} = (\bar{z}(0), \bar{z}(1), \ldots \bar{z}(N-1))$.

Se tiene los siguientes resultados.

Lema 3 *Sea* $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, *se tiene que para* $m \in \mathbb{Z}$

$$(\bar{z})(m) = \overline{\hat{z}(-m)} = \overline{\hat{z}(N-m)}$$

Corolario 1 *Sea* $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, *$z$ es real (es decir cada componente de z es real) si y sólo si*

$$\hat{z}(m) = \overline{\hat{z}(N-m)}, \ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Ejercicios

1. Chequee directamente que $E_0 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}(1, i, -1, -i), \\ E_2 &= \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1) \\ E_3 &= \frac{1}{2}(1, -i, -1, i); \end{aligned}$$

forman una base ortonormal para $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$

2. Dado $z = (1, i, 2+i, -3) \in \ell^2(\mathbb{Z}_4)$

   i) Calcule $\hat{z}$

   ii) Calcule $(\hat{z})^{\vee}$ directamente y chequee que se obtiene z

3. Suponga que h es una función sobre $\mathbb{Z}$ la cual es periodica de período N, es decir $h(n+N) = h(n)$, para todo n.

   Demuestre que para cada $m \in \mathbb{Z}$

   $$\sum_{n=m}^{m+N-1} h(n) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n).$$

   En otras palabras, podemos sumar sobre cada intervalo de longitud N y obtenemos el mismo resultado

4. Sea $z = (z(0), z(1), \cdots, z(N-1)), w = (w(0), w(1), \cdots, w(N-1)) \in \ell^2(Z_N)$. Demuestre que

   $$\langle z^{\vee}, w^{\vee} \rangle = \frac{1}{N} \langle z, w \rangle$$

   y

   $$\|z^{\vee}\|^2 = \frac{1}{N} \|z\|^2$$

5. Suponga que $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Diremos que z es imaginario puro si $z = iw$ para algún w el cual es real, en otras palabras si cada componente de z es imaginario puro.

   Demuestre que z es imaginario puro si, y sólo si $\hat{z}(m) = -\overline{\hat{z}(N-m)}$,para todo m.

6. Supoga que $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$

   i) Demuestre que $\hat{z}$ es real si, y sólo si z$(m) = \overline{\hat{z}(N-m)}$,para cada m.

   ii) Demuestre que $\hat{z}$ es imaginario o puro si y solo si $z(m) = -\overline{\hat{z}(N-m)}$ para cada m.

7. Suponga que $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Defina $\tilde{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ por $\tilde{z}(n) = \overline{z(N-n)}$, para $n = 0, 1, 2, \cdots N-1$.

   Demuestre que $(\tilde{z})^{\wedge}(n) = -\overline{\hat{z}(n)}$, para todo n.

1.2 Diagonalización de transformaciones lineales invariantes por traslación.

Definición 8 *Una trasformación lineal $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se dirá invariante por traslación si para todo Z en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y k en $\mathbb{Z}$ se cumple que*

$$T(R_k z) = R_k T(z).$$

es decir si R_k conmuta con T.

Una de la más importantes propiedades de la base de Fourier es el siguiente resultado.

Teorema 2 *Dado $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ una transformación lineal invariante por traslaciones, se tiene entonces que cada elemento de la base de Fourier F es un autovalor de T. En particular, se tiene que T es diagonalizable.*

Demostración

Tomemos $F_m(n) = \frac{1}{N}e^{2\pi imn/N}$ el $m-$ésimo elemento de la base de Fourier. Luego existen $\{a_j\}_{j=0}^{N-1} \in \mathbb{C}$ tales que

$$T(F_m)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k F_k(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{2\pi imn/N}, n = 0, 1, \dots N-1$$

ya que F es una base de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Tenemos además que

$$R_1 F_m(n) = F_m(n-1) = \frac{1}{N}e^{2\pi im(n-1)/N} = e^{2\pi im/N}F_m(n),$$

de lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} T(R_1F_m)(n) &= T(e^{2\pi im/N}F_m(n)) = e^{2\pi im/N}T(F_m(n)) \\ &= e^{2\pi im/N}\sum_{k=0}^{N-1} a_k F_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} ak\, e^{2\pi im/N}F_k(n). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} (R_1T(F_m))(n) &= (T(F_m))(n-1) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} a_k\, e^{2\pi i(n-1)/N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, e^{2\pi ik/N}\, F_k(n), \end{aligned}$$

usando la hipótesis de invariancia por traslación de T y el hecho de que F es una base obtenemos que

$$a_k e^{2\pi im/N} = a_k e^{2\pi ik/N}; \quad k = 0, 1, \dots N-1$$

es cierto si y sólo si $k = m$, y de esto se deduce que $a_k = 0$ si $k \neq m$. Por lo tanto tenemos que

$$T(F_m)(n) = a_m F_m(n).$$

Es decir F_m es un autovector de T con autovalor a_m, asi que T es diagonizable. ∎

En lo que resta de esta sesión vamos a dar un esbozo de prueba del siguiente resultado más general.

Teorema 3 *Dada $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ una transformación lineal se tiene entonces que las siguientes proposiciones son equivalentes.*

i.) T es invariante por traslación.

ii.) La matriz $A_{T,E}$ es circulante, donde E es la base canónica.

iii.) T es un operador de convolución.

iv.) T es un multiplicador de Fourier.

v.) La matriz $A_{T,F}$ es diagonal donde F es la base de Fourier.

El teorema anterior establece que las únicas transformaciones lineales que son diagonalizables por la base de Fourier son las invariantes por traslaciones.

Vamos a adoptar la misma periodicidad para matrices que tenemos para elementos $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$; es decir que para $[a_{mn}]\, 0 \leq m, n \leq N-1$ dado, definimos a_{mn} para todo m, n en $\mathbb{Z}$ con periodicidan N en cada indice de la siguiente manera

$$a_{m+N,n} = a_{mn} \quad ; \quad a_{m,n+N} = a_{mn}$$

Definición 9 *Una matriz $A = [a_{mn}]\, 0 \leq m, n \leq N-1$ periodizada, se dice* **circulante** *si para todo m, n, k en $\mathbb{Z}$ se tiene que*

$$a_{m+k,n+k} = a_{mn}.$$

Lo cual es equivalente a decir que

$$a_{m+1,n+1} = a_{mn} \text{ para todo } m, n \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

Esta definición dice que en una matríz circulante la columna $(m+1)$ se obtine trasladando un largo hacia abajo a la columna m; y la fila $m+1$ se obtiene trasladando un lugar hacia la derecha la fila m.

Ejemplo: la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 2+i & -1 & 4i \\ 4i & 3 & 2+i & -1 \\ -1 & 4i & 3 & 2+i \\ 2+i & -1 & 4i & 3 \end{bmatrix}$$

es circulante, pero la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & i & 3 \\ 3 & 2 & i \\ i & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{no es circulante}$$

si la última fila fuera $i, 3, 2$ si le sería.

La implicación $i \Longrightarrow ii$ del teorema se demuestra con el siguiente resultado

Lema 4 *Sea $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ t.ℓ., $A_{T,E}$ la matriz de T en la base canónica. Si T es invariante por traslación, entonces $A_{T,E}$ es circulante.*

Definición 10 *para z, w en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ la convolución $z * w$ es definida como*

$$(z * w)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(m-n)w(n), \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo: *Dado $z = (1, 1, 0, 2)$ y $w = (i, 0, 1, i)$ se tiene que*

$$z * w = (2i, 2+i, i+2i, 1+3i).$$

Dado un vector fijo b en la convolución, ella se puede considerar como una transformación lineal.

Definición 11 *Dado $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ fijado. Definimos $T_b : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ por*

$$T_b(z) = b * z \ , \ \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N),$$

se tiene que T_b es una transformación lineal, que se denomina un operador de convolución.

La demostración $ii) \Longrightarrow iii)$ del teorema se sigue del siguiente resultado.

Lema 5 *Dada $A = [a_{mn}]$ $0 \leq m, n \leq N-1$ circulante, defina b en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ por*

$$b_{(n)} = a_{n,0} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots N-1,$$

es decir, b es la primera columna de A. Entonces para todo z en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se tiene que

$$Az = b * z = T_b(z)$$

La demostración del rec

Lema 6 *Dado $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y T_b su operador de convolución asociado. Se tiene entonces que T_b es invariante por traslación.*

Con los resultados anteriores tenemos que $i \Leftrightarrow ii \Leftrightarrow iii$ del teorema. Es decir trasformaciones lineales invariantes por traslación, operadores de convolución y transformaciones lineales cuyas matrices en la base canónica son circulantes son la misma cosa.

Vamos a dar una aplicación del resultado anterior.

Definición 12 *Defineremos $\delta \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ como*

$$\delta(n) \begin{cases} 1, \; si \; n = 0 \\ 0, \; si \; n = 1, 2, \ldots N-1 \end{cases}$$

Este δ es la versión discreta de la que algunas veces es denominada la función delta de Dirac. Esta versión discreta es tamién conocida como el impulso unidad. Obsérvese que $\delta = e_0$ el primer elemento de la base canónica.

Para δ se tiene el siguiente resultado.

Lema 7 *Para cada w en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, se tiene que*

$$w * \delta = w$$

Demostración

Para cada m en $\mathbb{Z}$ tenemos que

$$(w * \delta)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w(m-n)\delta(n) = w(m). \blacksquare$$

Este resultado tiene la siguiente interpretación. Supóngase que se tiene un sistema que es invariante por traslación, como hemos probado que cada trasformación invariante por traslación es un operador de convolución T_b para algún b en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, luego si conocemos b la acción de nuestro sistema sobre cada señal z está completamente determinado. Ahora ¿Como se puede encontrar b si uno sabe que T es invariante por traslación?. Por el lema anterior tenemos que

$$T(\delta) = T_b(\delta) = b * \delta = b.$$

Asi, para obtener b, nada más tenemos que medir la salida del sistema cuando la entrada es δ. Como δ es denominado el impulso unidad, b es denominado el impulso respuesta del sistema.

El problema hasta aquí es que sólo hemos simplificado notación, ya que escribir un operador invariante por traslación como una convolución es bonito, pero una convolución todavia es dificil para los cálculos. Sin embargo no hemos usado TFD, la cual nos resuelve un problema de cálculo mediante el siguiente resultado.

Lema 8 *Si z y w pertenecen a $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, se tiene entonces que*

$$(z * w)(m) = \hat{z}(m)\hat{w}(m), \quad m = 0, 1, \ldots N - 1.$$

El lema anterior dice que la TFD trasforma la operación de convolución, la cual es complicada de calcular, en una simple multiplicación.

El lema anterior sugiere considerar transformaciones lineales que se obtengan de tomar la TFD, multiplicar los compenentes resultantes por algún número y tomar la TFDI. Este tipo de transformaciones lineales son denominados multiplicadores de Fourier.

Definición 13 *Dado $m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, definimos $T_{(m)} : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ como*

$$T_{(m)}(z) = (m\hat{z})^{\vee},$$

donde $m\hat{z}$ es el vector obtenido multiplicando coordenada a coordenada, es decir

$$(m\hat{z})(n) = m(n)\hat{z}(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots N - 1.$$

$T_{(m)}$ es una transformación lineal que se denomina multiplicador de Fourier.

Otra manera de describir $T_{(m)}$ es notar que para cada k

$$(T_{(m)}(z))^{\wedge}(k) = m(k)\hat{Z}(k)$$

La equivalencia *iii*) $\Longleftrightarrow$ *iv*) del teorema viene dado por el siguiente resultado.

Lema 9 *Dado $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ una transformación lineal. Entonces se tiene que T es un operador de convolución si y sólo si T es un multiplicador de Fourier.*

Es decir, para un operador de convolución dado T_b tomamos $m = \hat{b}$, se tiene que $T_b = T_{(m)}$. Reciprocamente dado un multiplicador de Fourier $T_{(m)}$, si tomamos $b = m^{\vee}$, entonces se tiene que $T_{(m)} = T_b$

La última parte del teorema viene dada por el siguiente resultado.

Lema 10 *Dada $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ una tranformación lineal, T es un multiplicador de Fourier $T_{(m)}$ para algún m en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ si y sólo si la matriz A_{T_1F} es diagonal.*

Más aún, si $T = T_{(m)}$ es un multiplicador de Fourier, entonces $A_{T_1F} = [a_{mn}]$ satisface que $a_{nn} = m(n)$

El teorema se puede usar de una manera de práctica para el cálculo de matrices. Por ejemplo, supóngase que tenemos una transformación lineal invariante por traslaciones T, por el teorema anterior tiene asociada respecto a la báse canónica E, una matriz $A = A_{T,E} = (a_{m,n})$, que debe ser circulante. Si tomamos la primera columna de A y lo llamamos b, se tiene entonces que $T = T_b$ un operador de convolución. Si tomamos $m = \hat{b}$, T es un operador multiplicador de Fourier $T_{(m)}$. Si formamos la matriz diagonal D con $d_{n,n} = m(n)$, entonces D representa a T en la base de Fourier F, es decir $D = A_{T,F}$. A nivel matricial lo anterior significa que,

$\mathrm{W}_N Az = (Az)^{\wedge} = [Az]_F = [T(z)]_F = D\,[z]_F = D\hat{z} = DW_N z$,

de lo cual se obtiene que, multiplicando por W_N^{-1},

$$Az = W_N^{-1} D W_N z,$$

y por tanto,

$$A = W_N^{-1} D W_N \text{ o equivalentemente } W_N^{-1} A W_N = D.$$

Esto es una diagonalización explíicita de A. Obsérvese que la matriz de diagonalización W_N es la misma para cualquier A matriz circulante. Las entradas de D son los autovalores de A y en caso de matrices circulantes tenemos que las entrdas de D son las coordenadas del vector m. Se tiene entonces que para matrices circulantes no es necesario usar el polinomio caracteristico para calcular sus autovalores.

Ejemplo:

Sea $T : \ell^2(\mathbb{Z}_4) \to \ell^2(\mathbb{Z}_4)$ una transformación lineal definida por,

$$T(z)(n) = z(n) + 2z(n+1) + z(n+3).$$

Encontrar los autovalores y autovectores de T y diagonalizar la matriz $A_{T,E}$

Solución: Se puede verificar que T es invariante por traslación, $T(R_k z) = R_k T z$, alternativamente

$$A = A_{T,E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que es una matriz circulante. Entonces $b = (1, 1, 0, 2)$, y se tiene que

$$m = \hat{b} = (4, 1+i, -2, 1-i).$$

las coordenadas de m son los autovalores de A y los autovectores son los vectores de la base de Fourier, en particular se tiene que

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

y se satisface que $A = W_4^{-1} D W_4$.

Ejercicios

1. Para $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ defina $T(z) \in \mathbb{Z}_N$ por

   $$(T(z))(n) = z(n-1),$$

   para todo n. Demuestre que T es invariate por traslación

2. Defina $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ por

   $$(T(z))(n) = 3z(n-2) + iz(n) - (2+i)z(n+1),$$

   para todo n.

   i) Demuestre que T es invariante para traslación

ii) Escriba la matriz que representa a T con respecto a la base can óncia en el caso $N = 4$.

iii) Demuestre que los vectores $E_0 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}(1,i,-1,i)\,; E_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1) \\ E_3 &= \frac{1}{2}(1,-i,-1,i)\,; \end{aligned}$$

son autovalores de T en el caso $N = 4$.

3. Defina $T : \ell^2(\mathbb{Z}_4) \to \ell^2(\mathbb{Z}_4)$ por

$$T(z) = (2z(0) - z(1), iz(1) + 2z(2), z(1), 0).$$

Sea $z = (1, 0, -2, i)$; calcule $T(R_1 z)$ y $R_1 T(z)$, observe que no son iguales, entonces T no es invariante por traslación.

4. Sea $z = (2, i, 1, 0)$ y $w = (1, 0, 2i, 3)$.

   i) Calcule $\hat{z}$ y $\hat{w}$

   ii) Calcule $z * w$

   iii) Calcule $(z * w)^{\wedge}$ y chequee que coincide con $\hat{z}\hat{w}$.

5. Sea $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Demuestre que

$$z * w = w * z.$$

6. Demuestre que la convolución es asociativa, es decir que para cada $x, y, z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$,

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

7. Defina $T : \ell^2(\mathbb{Z}_4) \to \ell^2(\mathbb{Z}_4)$ por

$$(T(z))(n) = 3z(n-1) + z(n).$$

   i) Escriba la matriz $A_{T,E}$ que representa a T con respecto a la base canónica. Observe que $A_{T,E}$ es circulante.

   ii) Encuentre $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_4)$ tal que $T(z) = b * z$.

   iii) Encuentre la matriz $A_{T,F}$ que representa a T en la base de Fourier.

8. Definimos $\Delta : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, por

$$(\Delta(z))(n) = z(n+1) - 2z(n) + z(n-1)$$

Encontrar los autovalores de Δ.

Δ es el llamado **operador segunda diferencia** que se utiliza en el método de diferencia finitas.

1.3 La Transformada Rápida de Fourier

La Transformada de Fourier Discreta (TFD) puede ser calculada via un algoritmo rápido denominado la Transformada rápida de Fourier TRF (FFT en sus siglas en inglés).

Sin la TRF el uso de la TFD para análisis de señales e imagenes sería dramáticamente limitada. Como

$$\hat{z} = [z]_F = W_N z,$$

se tiene que para calcular directamente $\hat{z}$ se necesita N^2 multiplicaciones complejas (vamos a despreciar las sumas ya que las computadoras tardan mucho menos tiempo para sumar que para multiplicar).

Vamos a comenzar con la versión más simple de la Trasformada rápida de Fourier, en la cual la longitud N es par, ya que en este caso queda clara la idea básica detrás de la TRF.

Lema 11 *Supóngase que N es par, digamos $N = 2M$. Dado $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Definimos $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ por*

$$u(k) = z(2k); k = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

$$v(k) = z(2k+1); k = 0, 1, 2, \ldots, M-1.$$

i) Para cada $m = 0, 1, \ldots M-1$, se tiene que

$$\hat{z}(m) = \hat{u}(m) + e^{-2\pi i m/N}\hat{v}(m).$$

ii) Para $m = M, M+1, M+2, \ldots N-1$, tomemos $\ell = m - M$ (note que $l = 0, 1, \ldots M-1$) se tiene entonces que

$$\hat{z}(m) = \hat{z}(l+M) = \hat{u}(e) - e^{-2\pi i\ell/N}\hat{v}(\ell).$$

Note que $\hat{z} = W_N z$ y

$$\hat{u} = W_M u \ , \ \ \hat{v} = W_M v.$$

Demostración

Para cada $m = 0, 1, \ldots N-1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{z}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i n m/N} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} z(2k) e^{-2\pi i 2km/N} + \sum_{k=0}^{M-1} z(2k+1) e^{-2\pi i (2k+1)m/N} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} u(k) e^{-2\pi i km/M} + e^{-2\pi i m/N} \sum_{k=0}^{M-1} v(k) e^{-2\pi i km/M}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

En el caso $m = 0, 1, \ldots M-1$ la última expresión es igual a

$$\hat{u}(m) + e^{-2\pi i m/N} \hat{v}(m).$$

En el caso $m = M, M+1 \ldots, N-1$, escribimos

$$m = \ell + M (\ell = 0, 1, \ldots M-1)$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{z}(m) &= \sum_{k=0}^{M-1} u(k) e^{-2\pi i k(\ell+M)/M} + e^{-2\pi i(\ell+M)/N} \sum_{k=0}^{M-1} v(k) e^{-2\pi i k(\ell+M)/M} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} u(k) e^{-2\pi i k\ell/M} - e^{2\pi i \ell/N} \sum_{k=0}^{M-1} v(k) e^{-2\pi i k\ell/M},
\end{aligned}$$

por la periodicidad de $e^{-2\pi i k\ell/M}$ y que $e^{-2\pi i M/N} = e^{-\pi i} = -1$. ∎

Ejemplo:

Dado $z = (1, 1, 1, i, 1, -1, 1, -i)$ encontrar $\hat{z}$.

Solución: $\hat{z} = (4, 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2i}, 0, 0, 4, -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2i}, 0, 0)$.

El paso básico del procedimiento del lema es comenzar con los valores $\hat{u}(m), \hat{v}(m)$ y dá $\hat{z}(m)$ y $\hat{z}(m+M)$ de acuerdo al diagrama llamado una mariposa.

Las mariposas son tan básicas en computación que el hardware es alguna veces evaluado por cuantas mariposas puede realizar por segundo. Note que los mismos valores son usados en (1) y (2) del lema anteior, es decir $\hat{u}(m), \hat{v}(m)$, $m = 0, 1, \ldots M-1$.

Para aplicar (1) y (2) primero calculamos $\hat{u}, \hat{v}$. Como u y v son de longitud $M = N/2$, estas transformadas pueden ser calculamos directamente con M^2 multiplicaciones, luego calculamos los productos $e^{-2\pi i m/N}\hat{v}(m)$ para $m = 0, 1, \ldots M-1$, lo cual requiere M multiplicaciones adicionales, el resto son sumas y restas de estas cantidades las cuales despreciaremos, asi que el total de multiplicaciones requeridas para calcular $\hat{z}$ usando el lema será

$$2M^2 + M = 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + M = \frac{1}{2}N^2 + \frac{N}{2} = \frac{1}{2}(N^2 + N)$$

Si N es divisible entre 4 en lugar de por 2 se podría aplicar el lema de nuevo y seguir bajando el número de multiplicaciones que se necesitan. El caso más favorable es cuando N es una potencia de 2, es decir $N = 2^n$, para algún n. Si denotamos $\#N$ para el número de multiplicaciones complejas que se requieren para calcular la TFD de un vector de longitud N; tenemos que si $N = 2M$, entonces

$$\#_N \leq 2\#_M + M$$

Se tiene el siguiente resultado en el caso en que N es potencia de 2.

Lema 12 *Supóngase que $N = 2^n$ para algún n en $\mathbb{N}$ se tiene entonces que*

$$\#_N \leq \frac{1}{2}N \;\; log_2 N.$$

Demostración

Vamos a aplicar inducción en N.

Cuando n =1, z= (a,b) y $\hat{z} = (a + b, a - b)$ la cual no requiere ninguna multiplicación. En este caso se tiene que

$$\#_2 = 0 < 1 = (2\log_2(2))/2$$

Supongamos ahora que la desigualdad es cierta para $n = k-1$ y veamos el caso $n = k$. Para $n = k$ se tiene que

$$\begin{aligned} \#_{2^k} &\leq 2\#_{2^{k-1}} + 2^{k-1} \leq 2\frac{1}{2}2^{k-1}(k-1) + 2^{k-1} \\ &= k2^{k-1} = \frac{1}{2}k2^k = \frac{1}{2}N\log_2 N. \end{aligned}$$

Lo cual demuestra el lema. ∎

Por ejemplo para un vector de longitud. $2^{18} = 262.144$ la TRF reduce el número de multiplicaciones necesarias para calcular la TDF de 6.87×10^{10} a $2.359, 296$; haciendo el cálculo 29.000 veces más rápido, es decir si tomara 8 horas calcular la TDF directamente, tomara 1 segundo calcularla usando TRF. Esta diferencia es por supuesto más extrema si N es más grande. Esta diferencia en velocidad es esencial para el procesamiento de señales digitales.

Que pasa si N no es par? Si N es primo el método de TRF no se puede aplicar; si N es compuesto, es decir $N = p.q$ con p, q en $\mathbb{N}$, entonces existe una generalización del lema anterior.

Lema 13 *Supongase que* $p, q \in \mathbb{N}$ *y* $N = p.q$. *Sea* $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, *definimos* $w_0, w_1, \ldots w_{p-1} \in \ell^2(\mathbb{Z}_q)$ *como*

$$w_\ell(k) = z(kp + \ell), \quad k = 0, 1, \ldots q - 1.$$

para $b = 0, 1, \ldots q - 1$ *definimos* $v_b \in \ell^2(\mathbb{Z}_p)$, *como*

$$v_b(\ell) = e^{-2\pi i b\ell/N} \hat{w}_\ell(b) \ \ , \ell = 0, 1, \ldots p - 1$$

se tiene entonces que para $a = 0, 1 \ldots, p - 1; b = 0, 1, \ldots, q - 1$

$$\hat{z}(aq + b) = \hat{v}_b(a).$$

Note que por el algoritmo de división, cada $m = 0, 1, 2 \ldots, N - 1$ se puede escribir de la forma $aq + b$ para algún $a \in \{0, 1, \ldots p - 1\}$ y $b \in \{0, 1, \ldots q - 1\}$, así, se tiene que la igualdad anterior permite calcular todas las coordenadas de la TFD.

Demostración

Podemos escribir cada $n \in \{0, 1, \ldots N - 1\}$ de manera única en la forma $kp + \ell$ para algún k en $\{0, 1, \ldots p - 1\}$ y b en $\{0, 1, \ldots q - 1\}$. Se tiene entonces que,

$$\begin{aligned} \hat{z}(aq + b) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i (aq+b)n/N} \\ &= \sum_{\ell=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{q-1} z(kp + \ell) e^{-2\pi i (aq+b)(kp+\ell)/pq}, \end{aligned}$$

Note que

$$e^{-2\pi i (aq+b)(kp+\ell)/pq} = e^{-2\pi i ak} e^{-2\pi i a\ell/p} e^{-2\pi i bk/q} e^{-2\pi i b\ell/pq}$$

como $e^{-2\pi iak} = 1, pq = N$ y $z(kp+\ell) = w_\ell(k)$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\hat{z}(aq+b) &= \sum_{\ell=0}^{p-1} e^{-2\pi ia\ell/p} e^{-2\pi ib\ell/N} \sum_{k=0}^{q-\ell} w_\ell(k) e^{-2\pi bk/q} \\
&= \sum_{\ell=0}^{p-1} e^{-2\pi ia\ell/p} e^{-2\pi ib\ell/N} \hat{w}_\ell(b) \\
&= \sum_{\ell=0}^{p-1} e^{-2\pi ia\ell/p} v_b(\ell) = \hat{v}_b(a). \blacksquare
\end{aligned}$$

Esta prueba muestra el pricipio básico detras de la TRF. Para calcular $\hat{z}(aq+b)$, las mismas cantidades $v_b(\ell)$, $\ell = 0, 1, \ldots p-1$ aparecenpara cada valor de a. la TRF reconoce esto y calcula estos valores una sola vez. El cálculo directo de $\hat{z}$ implica implícitamente recalcular estos valores cada vez que ellos aparecen.

Ejercicio: Verifique que

$$\#pq \leq p\#q + q\#_p + pq$$

Los lemas anteriores dicen como hacer cada paso para el cálculo de la TRF, pero no muestra como organizar los pasos de manera interativa. Vamos a ver otro algoritmo de TRF para mostrar como se puede organizar el cálculo. Por simplicidad nos restringiremos al caso $N = 2^n$. Entonces cada número m en $\{0, 1, 2 \ldots, N-1\}$ se puede escribir en base 2 de la forma

$$m = m_0 + 2m_1 + 2^2 m_2 + \ldots + 2^{n-1} m_{m-1}, \text{ donde } m_j \in \{0, 1\}, \, j = 0, 1, \ldots n-1.$$

Para $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ denotemos

$$z(m) = z(m_{n-1}, m_{n-2}, \ldots, m_1, m_0).$$

para cada $k = k_0 + 2k_1 + \ldots + 2^{n-1} k_{n-1}$, $k_j \in \{0, 1\}$, y se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{z}(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} z(m) e^{-2\pi ikm/N} \\
&= \sum_{m_0=0}^{1} \sum_{m_1=0}^{1} \cdots \sum_{m_{n-1}=0}^{1} z(m_{n-1}, m_{n-2}, \ldots m_1, m_0) \\
&\qquad \times e^{-2\pi i(k_0+2k_1+\ldots+2^{n-1}k_{n-1})(m_0+2m_1+\ldots+2^{n-1}m_{n-1})/2^n}
\end{aligned}$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
& e^{-2\pi i(k_0+2k_1+\ldots+2^{n-1}k_{n-1})(m_0+2m_1+\ldots+2^{n-1}m_{n-1})/2^n} \\
= \quad & e^{-2\pi i(k_0+2k_1+\ldots+2^{n-1}k_{n-1})2^{n-1}m_{n-1}/2^n}\ldots e^{-2\pi i(k_0+2k_1+\ldots+2^{n-1}k_{n-1})2m_1/2^n} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \times e^{-2\pi i(k_0+2k_1+\ldots+2^{n-1}k_{n-1})m_0/2^n} \\
= \quad & e^{-2\pi i k_0 \frac{2^{n-1}m_{n-1}}{2^n}} e^{-2\pi i(k_0+2k_1)\frac{2^{n-2}m_{n-2}}{2^n}} \ldots\ldots e^{-2\pi i(k_0+2k_1+\ldots+2^{n-1}k_{n-1})\frac{m_0}{2^n}},
\end{aligned}
$$

ya que se pueden eliminar en cada exponente todos los productos que dan múltiplo de $2\pi i 2^n$ en el numerador, ya que al dividirlo entre 2^n el argumento es un múltiplo entero de $2\pi,$ cuyo exponencial es 1.

Sustituyendo arriba tenemos que

$$
\begin{aligned}
\hat{z}(aq+b) \quad = \quad & \sum_{m_0=0}^{1}\sum_{m_1=0}^{1}\ldots\sum_{m_{n-1}=0}^{1} z(m_{n-1},m_{n-2},\ldots,m_0)e^{-2\pi i k_0 2^{n-1}m_{n-1}/2^n} \\
& \times e^{-2\pi i(k_0+2k_1)2^{m-2}m_{n-2}/2^n}\ldots e^{-2\pi i(k_0+2k_1+\ldots+2^{n-1}k_{n-1})m_0/2^n}
\end{aligned}
$$

Observe que las sumas interiores dependen de las variables de sumación exteriores $m_0, m_1, \ldots, m_{n-2}$ y en k_0 pero no en $k_1, \ldots, k_{n-1}$. Así si definimos

$$
\begin{aligned}
y_1(k_0, m_{n-2}, m_{n-3}, \ldots, m_0) \quad = \quad & \sum_{m_{n-1}=0}^{1} z(m_{n-1}, m_{n-2}, \ldots, m_0)e^{-2\pi i k_0 2^{n-1}m_{n-1}/2^n} \\
= \quad & z(0, m_{n-2}, \ldots, m_1, m_0)]\cdot 1 \\
& \qquad +z(1, m_{n-2,\ldots}, m_1, m_0)e^{-2\pi i k_0 2^{n-1}/2^n}.
\end{aligned}
$$

Calcular $y_1(k_{0,}m_{n-2,\ldots}, m_0)$ requiere sólo una multiplicación para cada una de las 2^n posibles elecciones de $k_0, m_{n-2,\ldots}m_0$ en $\{0,1\}$, lo cual nos da un total de 2^n multiplicaciones para calcular todos los posibles valores de y_1. En el siguiente paso definimos

$$
\begin{aligned}
y_2(k_0, k_1, m_{n-3,}\ldots m_0) \quad = \quad & \sum_{m_{n-2}=0}^{1} y_1(k_0, m_{n-2,}m_{n-3,}\ldots m_0) \\
& \qquad \times e^{-2\pi i(k_0+2k_1)2^{n-2}m_{n-2/2^n}}
\end{aligned}
$$

de la misma manera que antes se tiene que se necesitan 2^n multiplicaciones para calcular los posibles valores y_2. Continuando de la misma manera cada vez reemplazando el indíce más alto de m por el próximo indíce de k se tiene

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{z}(\mathrm{m}_{n-1}, m_{n-2}, \ldots m_1, m_0) \to y_1(k_0, m_{n-2}, m_{n-3}, \ldots m_0) \\
& y_1(k_0, m_{n-2}, m_{n-3}, \ldots, m_0) \to y_2(k_0, k_1, m_{n-3}\ldots, m_0)
\end{aligned}
$$

$\vdots$

$y_{n-1}(k_0,k_1,k_2,\ldots k_{n-2},m_0) \rightarrow y_n(k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-2},k_{n-1}) = \hat{z}$

En cada paso calculamos el vector y_j en todas las 2^n posibles elecciones de sus variables. Así cada paso requiere a lo sumo 2^n multiplicaciones y hay n pasos en total y por lo tanto necesitamos a lo sumo $n2^n = N\log_2 N$ multiplicaciones. Una vez el vector y_j ha sido calculado y_{j-1} no se necesita, esto permite que el cálculo pueda ser hecho "in place", es decir en cada paso la data anterior puede ser reemplazada por la data nueva. Esto reduce la cantidad de memoria que se necesita para realizar el cálculo.

¿Que pasa con la transformada inversa? Como tenemos que

$$\check{w}(n) = \frac{1}{N}\check{w}(N-n),$$

el algoritmo de TRF puede ser usado para calcular la TFDI de manera rápida. Dado que la TFR y TFDI pueden ser calculados de manera rápida, se tiene que la convolución se puede hacer tambien de manera rápida. En efecto, como se puede escribir,

$$z * w = (\hat{z}\hat{w})\check{}.$$

si $z,w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N),\ \ N = 2^n,$ se necesitan a lo más $N\log_2 N$ para calcular $\hat{z}$ y $\hat{w}$ y N multiplicaciones para calcular $\hat{z}\hat{w}$, y a lo más $(N/2)log_2 N$ para tomar la TFDI. Así, se tiene que se necesitaran menos de $N+(3N/2)\log_2 N$ multiplicaciones para calcular $z*w$.

Recuérdese que cualquier transformación lineal invariante por traslación en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se puede escribir como un operador de convolución. Por el teorema visto esto incluye la operación de multiplicación por una matriz circulante. Así el producto de una matriz $N\times N$ circulante por un vector de longitud N se puede calcular usando a lo más $N+(3N/2)\log_2 N$ multiplicaciones en ez de N^2. Es decir que cuando T es invariante por traslaci'on la TFD no sólo diagonaliza T, sino que da (via la TFR una manera rápida y práctica de calcular T.

Ejercicios

1. Observe que

$$(a+ib)\,(c+id) = (a-b)\,d + (c-d)\,a + [(a-b)\,d + (c+d)\,b]\,i.$$

Esto significa que para calcular el producto de los números complejos se necesitan calcular solamente tres multiplicaciones reales, a decir $(a-b)\,d$,$(c-d)\,a$, $(c+d)\,b$.

2. Sea $u = (1,3)\,, v = (0,4)$ y $z = (1,0,3,4)\,.$

   i) Calcule $\hat{u}$ y $\hat{v}$.

   ii) Use parte $i)$ y el hecho que

   $$\hat{z}\,(m) = \hat{u}\,(m) + e^{-2\pi i m/N}\hat{v}\,(m)$$

   y

   $$\hat{z}\,(m) = \hat{z}\,(e+M) = \hat{u}\,(e) - e^{-2\pi i e/N}\hat{v}\,(e)\,.$$

   para calcular $\hat{z}$

   iii) Calcule $\hat{z}$ directamente y compare con la respuesta de ii).

   iv) Sea $w = (0,1,4,3)$ calcule $\hat{w}$.

3. Sea $\{e_0, e_1, \cdots, e_{N-1}\}$ la base canonica para $\ell^2\,(Z_N)$, y sea $\{F_0, F_1, \cdots, f_{N-1}\}$ la base de Fourier para $\ell^2\,(Z_N)$.

   i) Demuestre que $\hat{e}_m\,(k) = e^{-2\pi i\; mk/N}$, para todo k

   ii) Demuestre que $\hat{F}_m = e_m$.

4. Sea $z = (1,1,1,1)$ y $w = (1,0,1,0,1,01,0)\,,$ calcule $\hat{w}$.

5. Sea $u = (1,i,-1,-1)\,, v = (1,-1,1,-1)$ y

   $$z = (1,1,i,-1,-1,1,-i,-1)\,.$$

   i) Calcule $\hat{u}$ y $\hat{v}$.

   ii) Calcule $\hat{z}$.

6. Suponga $u = (a,b,c,d)\,, v = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ y

   $$z = (a,\alpha,b,\beta,c,\gamma,d,\delta)\,.$$

   Calcule $\hat{z}$.

Capítulo 2

Ondículas en $\mathbb{Z}_N$

2.1 Construcción de Ondículas: Primer paso

Muchos de las dificultades del Análisis de Fourier para analizar señales derivan del hecho de que los elementos de la base de Fourier no son localizados en espacio en el sentido de la siguiente definición:

Definición 14 *Diremos que un vector $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ esta localizada (en espacio) alrededor de n_0 si todas sus coordenadas $z(n)$, de z son cero o muy pequeños, excepto para los valores n que están "cerca" de n_0.*

La base de Fourier no está localizada en el espacio ya que todas sus coordenadas $F_m(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi imn/N}$ tienen las misma magnitud $\frac{1}{N}$. Esto es lo opuesto de ser localizada, la base de Fourier es la más dispersa posible.

Supóngase que $B = \{v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}\}$ es una base de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tal que todos los elementos de B estan localizados (en espacio). Para un vector z podemos escribir

$$z = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) v_n,$$

para algunos escalares $a_0, a_1, \cdots, a_{N-1}$. Supongamos que queremos enfocarnos en las coordenadas de z cercana a algún n_0. Los coeficientes de los v_n que son cero o despreciablemente pequeños cerca de n_0 se pueden borrar sin cambiar el desarrollo cerca de n_0 de manera significativa. Esto nos permitiría reemplazar la suma sobre N términos por una mas pequeña para analizar la data. Esto es una forma de compresión de la señal, como veremos más adelante.

Una base localizada es útil porque provee un análisis local de una señal. Si un cierto coeficiente en el desarrollo de z es "grande", podemos identificar la localización a la cual esta asociada. Se podría por ejemplo enfocar en esta localización y analizarla en más detalles.

Ejemplos donde se puede usar esas técnicas son, el procesamiento de imagenes médicas para buscar potenciales tumores, análisis de señales de radar, etc.

Tener una base localizada es sumamente útil para la llamada compresión de datos. Una base localizada nos ayudaría a comprimir imagenes de video, ya que para imagenes de video un cuadro defiere muy poco del anterior, por ejemplo el anterior puede ser el mismo salvo el movimiento de una mano, entonces en lugar de transmitir todo el cuadro nuevo se transmite solamente la diferencia entre un cuadro y el otro, lo cual se podría hacer nada más que cambiando las coeficientes "cercanos" al movimiento de la mano.

Esto no puede hacerse si estamos usando la base de Fourier para representar nuestros datos ya que

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)\, e^{-2\pi imn/N},$$

y como $e^{-2\pi imn/N}$ tiene módulo 1 en cada n un cambio en algún $z(n)$ puede afectar todos los valores de $\hat{z}(m)$ de manera significativa. De manera que el movimiento de la mano, que es espacialmente localizado, afectaría todos los valores de la TFD de manera significativa. Por lo tanto tansmitir las imagenes en las bases de Fourier puede requerir un gran número de datos a pesar de que la imagen cambie sólo un poco, localmente.

Un ejemplo de base localizada es la base canónica $E = \{e_0, e_1, \cdots, e_{N-1}\}$, la cual es la más localizada posible ya que cada vector tiene una sola coordenada diferente de cero. Sin embargo también se desea obtener las ventajas de la base de Fourier, en particular el cálculo rápido de las transformaciones lineales invariantes por traslación. Para esto desearíamos que muestras bases fueron localizadas en frecuencias. Es decir que la TFD de nuestra base fueron "localizadas". Lo cual significaría que los vectores de nuestra base deberían consistir de un grupo pequeño de frecuencias.

La base conónica no es localizada en frecuencia ya que $|\hat{e}_m(k)| = 1$, para todo $k = 0, 1, \cdots, N-1$ (**Ejercicio**), y la base de Fourier está perfectamente localizada en frecuencia ya que $\hat{F}_m = e_m$ (**Ejercicio**).

Como la base de Fourier diagonaliza exactamente a las transformaciones lineales invariantes por traslación, esperamos que una base que sea de alguna manera localizada en frecuencia, diagonalizará este tipo de transformaciones lineales en algún sentido.

Trabajar con bases localizadas en frecuencia nos permite realizar técnicas comunes de filtrado. Por ejemplo puede pasar que los componentes de alta frecuencia de la señal tengan coeficientes pequeños, de manera que esos valores pueden ser desechados del desarrollo sin alterar la señal. Puede suceder que los componentes de alta frecuencia no son humanamente perceptibles, as{ı que borrarlos no afecta nuestra percepción de la señal (por ejemplo, señales de sonido). Incluso puede pasar que las frecuencias más altas provengan de ruido adiccionados a la señal, asi que la señal será más clara cuando los términos de alta frecuencia son desachados. Con bases localizados en frecuencia sabemos cuales términos de nuestro desarrollo debemos eliminar si queremos remover los componentes de frecuenia alta de la señal. Si el resultado es que la señal es satisfactoriamente representada por un número reducido de datos, habremos obtenido compresión.

Así que lo ideal sería obtener bases cuyos elementos fueron localizados en frecuencia y tiempo. Una desarrollo en esta base nos proveería de información en el tiempo y en la frecuencia, lo que nos permitiría realizar de manera simultánea el análisis tiempo-frecuencia de una señal. Las ondículas nos daran tales bases.

También queremos que nuestra base B sea tal que el cambio de base de la base canónica E a B sea calculable con un algoritmo rápido, porque de otro modo B sería inútil para señales para audio y video de tamaño real. Para esto vamos a ver la relación entre convolución y producto interno.

Definición 15 *Para cada $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, definimos $\tilde{w} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ como*

$$\tilde{w}(n) = \overline{w(-n)} = \overline{w(N-n)},$$

para toda n.

Ejercicio: *Verifique que*

$$(\tilde{w})(n) = \overline{\hat{w}(n)}, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1.$$

Se tiene entonces el siguiente resultado:

Lema 14 *Si $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_n)$ se tiene que*

$$z * \tilde{w}(k) = \langle z, R_k w \rangle \tag{2.1}$$

$$z * w(k) = \langle z, R_k \tilde{w} \rangle \tag{2.2}$$

Demostración

$$\begin{aligned}\langle z, R_k w\rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n)\,\overline{R_k w(n)} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)\,\overline{w(n-k)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n)\,\tilde{w}(k-n) = (\tilde{w} * z)(k) = (z * \tilde{w})(k)\,. \blacksquare\end{aligned}$$

¿El resultado anterior puede ser usado para obtener una base que pueda ser calculada rápidamente?

Supongamos que $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_n)$ es tal que $B = \{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, entonces los coeficientes del desarrollo de un vector z en términos de B son los productos internos $\langle z, R_k w\rangle$ que son exactamente las coordenadas de $z * \tilde{w}$, es decir

$$[z]_B = z * \tilde{w},$$

lo cual puede ser calculado rápidamente usando TRF. Así, para una tal base B, que ha sido generada por traslaciones de un solo vector, podemos calcular la matriz de cambio de base de E a B rápidamente.

La base canónica es el único ejemplo obvio de una base ortonormal de la forma $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$. Sin embargo existe una condición simple, en términos de la TDF de w que caracteriza todas tales bases B.

Lema 15 *Dado w en $\ell^2(\mathbb{Z})$, se tiene que $\{R_l w\}_{k=0}^{N-1}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ si y sólo si $|\hat{w}(n)| = 1$ para todo n en $\mathbb{Z}_N$*

Demostración

Se tiene que $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es ortonormal si y sólo si

$$\langle w, R_k w\rangle = \begin{cases} 1, \text{ si } k = 0 \\ 0, \text{ si } k = 1, 2, \cdots, N-1 \end{cases}$$

De acá se obtiene que $w * \tilde{w} = \delta$, ya que

$$\langle w, R_k w\rangle = w * \tilde{w}(k)\,; k = 0, 1, \cdots N-1$$

se tiene entonces que

$$1 = \hat{\delta}(n) = (w * \tilde{w})(n) = w\hat{\ }(n)\,(\tilde{w})\hat{\ }(n) = \hat{w}(n)\,\overline{\hat{w}(n)} = |\hat{w}(n)|^2,$$

para todo $n = 0, 1, \cdots, N-1$. $\blacksquare$

Aunque es gratificante obtener una caraterización tan simple para que B sea ortonormal, el resultado anterior es muy desalentador desde nuestro punto de vista, ya que dice que no se puede obtener una base ortonormal localizada en frecuencia de la forma $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$, por que $\hat{w}(n)$ debería tener la misma magnitud para cada $n = 0, 1, \cdots, N-1$. Así que la situación para bases del tipo $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es similar a la base canónica.

En lugar de buscar vector cuyas trasladas formen una base ortonormal, buscaremos dos vectores u y v tales que el conjunto de sus trasladas por números pares formen una base ortonormal. Para esta búsqueda nos restrigiremos a valores pares de N.

Definición 16 *Supongamos que N es par, digamos $N = 2M$. Una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ de la forma*

$$\{R_2 k u\}_k = 0^{M-1} \cup \{R_2 k v\}_k = 0^{M-1},$$

para u, v en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es denominada una **base de ondícula de primer paso**. *Llamaremos a u y v* **generadores de la base** *de ondículas.*

En lo que sigue vamos a determinar cuando un par de vectores u y v genera una base de ondículas de primer paso. Vamos a dar algunos resultados necesarios para nuestra caraterización.

Lema 16 *Sea $N = 2M$ y $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, si definimos $z^* \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ por $z^*(n) = (-1)^n z(n)$ para todo n, se tiene entonces que*

$$(z^*)\hat{}\,(n) = \hat{z}(n+M),$$

para todo n.

Demostración

$$\begin{aligned}
(z^*)(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} z^*(k) e^{-2\pi ikn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k z(k) e^{-2\pi ikn/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} z(k) e^{-i\pi k} e^{-2\pi ikn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} z(k) e^{-2\pi ik(n+M)/N} = \hat{z}(n+M). \blacksquare
\end{aligned}$$

Observe para N par y $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se tiene que

$$(z+z^*)(n) = z(n)(1+(-1)^n) = \begin{cases} 2z(n); & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \qquad (2.3)$$

De esta relación queda claro la utilidad de z^*, ella permite restringirse a los valores pares de n.

Lema 17 *Sea* $N = 2M$ *y* $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. *Se tiene que* $\{R_{2k}w\}_{k=0}^{M-1}$ *es un conjunto ortonormal si y sólo si*

$$|\hat{w}(n)|^2 + |\hat{w}(n+m)|^2 = 2; n = 0, 1, \cdots, N-1.$$

Demostración

Se tiene que $\{R_{2k}w\}_{k=0}^{M-1}$ es ortonormal,

$$\langle R_{2k}u, R_{2j}v\rangle = 0,$$

$j, k = 0, 1, \cdots, M-j$ si y sólo si

$$\langle u, R_{2k}v\rangle = 0,$$

$k = 0, 1, \cdots, M-1$. (**Ejercicio**) y esto último se cumple si y sólo si

$$w * \tilde{w}(2k) = \langle w, R_{2k}w\rangle = \begin{cases} 1, \text{ si } k = 0 \\ 0, \text{ si } k = 1, 2, \cdots, M-1 \end{cases} \tag{2.4}$$

Como

$$\left[(w * \tilde{w}) + (w * \tilde{w})^*\right](n) = \begin{cases} 2(w + \tilde{w})(n) \text{ si } n \text{ es par} \\ 0 \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

tendremos que para valores pares de n, $n = 2k$, la ecuación (2.4) es cierta si y sólo si

$$[(w * \tilde{w}) + (w + \tilde{w})](2k) = 2w * \tilde{w}(2k) = \begin{cases} 2; \text{ si } k = 0 \\ 0; \text{ si } k = 1, 2, \cdots, M-1 \end{cases},$$

y esto se cumple si y sólo si

$$w * \tilde{w} + (w * \tilde{w})^* = 2\delta.$$

Lo cual es equivalente a

$$(w * \tilde{w})^\wedge(n) + ((w * \tilde{w})*)^\wedge(n) = 2, \text{ para } n = 0, 1, \cdots, N-1.$$

Del hecho que

$$(w * \tilde{w})^\wedge(n) = \hat{w}(n)(\tilde{w})^\wedge(n) = \hat{w}(n)\overline{\hat{w}(n)} = |\hat{w}(n)|^2$$

y

$$\left[(w + \tilde{w})^*\right]^\wedge(n) = (w * \tilde{w})^\wedge(n+M) = |\hat{w}(n+M)|^2,$$

obtenemos nuestro resultado por sustitución. ∎

Definición 17 *Sea $N = 2M$ y sean $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Para $n\mathbb{Z}$, sea*

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{u}(n) & \hat{v}(n) \\ \hat{u}(n+M) & \hat{v}(n+M) \end{bmatrix}.$$

La matriz $A(n)$ será denominada la **matriz sistema** *de u, v.*

Note que hay un abuso de lenguaje en la definición anterior, ya que no hay una sola matriz si no una matriz para cada $n \in \mathbb{Z}$,

Ahora caracterizaremos las bases ortonormales generadas por las trasladadas pares de dos vectores en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Teorema 4 *Supóngase que, $M \in BBn$ y $N = 2M$. Sea $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i.) $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1} = \{u, R_2u, \cdots, R_{N-2}u, v, R_2v, \cdots, R_{N-2}v\}$ *es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.*

ii) La matriz sistema $A(n)$ de los generadores u, v es unitaria para cada $n = 0, 1, \cdots, M-1$

iii) Se verifican

$$|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{u}(n+m)|^2 = 2, \tag{2.5}$$

$$|\hat{v}(n)|^2 + |\hat{v}(n+m)|^2 = 2, \tag{2.6}$$

y

$$\hat{u}(n)\overline{\hat{v}(n)} + \hat{u}(n+M)\overline{\hat{v}(n+M)} = 0, \tag{2.7}$$

para todo $n = 0, 1, \cdots, N-1$.

Demostración

Recordemos que una matriz 2×2 es unitaria si y sólo si sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$. Aplicando el lema anterior vemos que $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M}$ es ortonormal si y sólo si la primera columna de $A(n)$ tiene longitud 1 para cada $n = 0, 1, \cdots, M-1$ y $\{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ es ortonormal si y sólo si la segunda columna de $A(n)$ tiene longitud 1 para $n = 0, 1, \cdots, M-1$.

Probaremos ahora que

$$\langle R_{2k}, u, R_{2j}v\rangle = 0, \text{ para } j, k = 0, 1, \cdots, M-1$$

si y sólo si

$$\hat{u}(n)\overline{\hat{v}(n)} + \hat{u}(n+M)\overline{\hat{v}(n+M)} = 0, \; n = 0, 1, \cdots, M-1.$$

Esto o último es equivalente a que las columnas de $A(n)$ son ortogonales y ello es equivalente a que $A(n)$ es unitaria, para cada $n = 0, 1, \cdots, M-1$.

Para verificar la suposición usamos el argumento de la demostración del lema anterior. La ortogonalidad es equivalente a

$$u * \tilde{v}(2k) =< u, R_{2k}v >= 0$$

para todo $k = 0, 1, \cdots, N-1$, y esto es equivalente a

$$u * \tilde{v} + (u * \tilde{v})^* = 0,$$

ya que los valores en los índices impares son automáticamente 0. Por la inversion de la TFD, esto es equivalente a

$$(u * \tilde{v})\hat{} + ((u * \tilde{v})^*)\hat{} = 0.$$

Pero, otra parte, tenemos que

$$(u * \tilde{v})\ \hat{}\ (n) = \hat{u}(n)\, \overline{\hat{v}(n)}$$

y

$$\left((u * \tilde{v})^*\right)\ \hat{}\ (n) = \hat{u}(n+M)\, \overline{\hat{v}(n+M)}$$

Asi que tomando la TFDI, obtenemos

$$(u * \tilde{v}) + (u * \tilde{v})^* = 0$$

con lo quedemostramos que nuestra suposición y con ello el teorema. ∎

Comparando las condiciones de los resultados anteriores, vemos que en el lema la restricción sobre $\tilde{w}$ es que debe tener magnitud 1 en cada coordenada $w(n)$, a diferencia de la restricción del teorema que es que $|\hat{u}(n)|^2$ y $|\hat{u}(n+M)|^2$ deben tener promedio 1. Esto permite, por ejemplo, que $|\hat{u}(n)|^2 = 2$ y $|\hat{u}(n+M)|^2 = 0$, lo cual forzaría a que $\hat{v}(n) = 0$ y $|\hat{v}(n+M)|^2 = 2$. De manera que es posible seleccionar u de forma tal que u contenga solo coordenada de alta frecuencia y v contenga coordenada de baja frecuencia.

Ejemplo 1:

Dado $\hat{u} = \left(\sqrt{2}, 1, 0, 1\right)$ y $\hat{v} = \left(0, 1, \sqrt{2}, -1\right)$, entonces

$$A(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = I,\ A(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Las cuales son unitarias y por lo tanto el teorema anterior nos permite concluir que $\{u, R_2u, v, R_2v\}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$.

Se tiene que

$$u = (\hat{u})^v = W_4^{-1}\hat{u} = \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2+\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

y análogamente

$$v = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2i, \sqrt{2}, \sqrt{2} - 2i\right).$$

Además

$$R_2 u = \frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, \sqrt{2}\right),$$

$$R_2 v = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 2i, \sqrt{2}, -\sqrt{2} + 2i\right).$$

Vamos a considerar un ejemplo definido para cualquier N par, el cual separa en altas frecuencias y en bajas frecuencias. Recuérdese que las altas frecuencias son los vectores de la base de Fourier $\{F_m\}_{M-0}^{N-1}$ cuyo índice m está cerca de $N/2$ y las debajas frecuencias son los que tienen índice m están "cercanos" a 0 o $N-1$.

Ejemplo 2: (**Base de Shannon de primer paso**).

Supongamos que N es divisible entre 4. Definimos $\hat{u}, \hat{v}$ en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ por

$$\hat{u}(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0, 1, \cdots (N/4) - 1 \text{ ó } n = \frac{3N}{4}, \frac{3N}{4} + 1, \cdots, N-1 \\ \sqrt{2} \text{ si } n = \frac{N}{4}, \frac{N}{4} + 1, \cdots, \frac{3N}{4} - 1 \end{cases}$$

$$\hat{v}(n) = \begin{cases} \sqrt{2} \text{ si } n = 0, 1, \cdots, (n/4) - 1 \text{ ó } n = \frac{3n}{4}, \frac{3N}{4} + 1, \cdots, N-1 \\ 0 \text{ si } n = N/4, \frac{N}{4} + 1, \cdots, \frac{3N}{4} - 2, \frac{3N}{4} - 1 \end{cases}$$

Como para cada n, $\hat{u}(n) = 0$ ó $\hat{v}(n) = 0$, se tiene que las columnas de las matrices $A(n)$ son ortogonales entre si y como en cada n se tiene $\hat{u}(n) = \sqrt{2}$ y $\hat{u}(n + N/2) = 0$ ó viceversa, se tiene que la primera columna de $A(n)$ tiene longitud 1 para cada n y lo mismo se observa para $\hat{v}(n)$. Aplicando el teorema anterior concluimos que

$$\{R_{2k}u\}_{k=0}^{N/2-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{N/2-1}$$

es una base de ondícula de primer paso. Esta base se denomina base de ondícula de Shannon de primer paso, ya que una base similar se puede obtener de un resultado conocido como el "teorema de muestreo de Shannon".

Note que u y v se han dado via m sus transformadas de Fourier $\hat{u}, \hat{v}$. Para obtener u y v tenemos que calcular sus transformadas inversas de $\hat{u}$ y $\hat{v}$, cosa que se puede hacer en forma explícita, obteniéndose

$$u(0) = v(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si $n = 1, 2, \cdots, N-1$

$$u(n) = \frac{\sqrt{2}}{N}(-1)^n e^{-i\pi n/N} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)},$$

$$v(n) = \frac{\sqrt{2}}{N} e^{-i\pi n/N} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)}.$$

Algunas veces es conveniente tener base que consista de vectores que tienen solamente coordenadas reales. Por ejemplo, supongamos que la señal z que queremos desarrollar tiene todos sus valores reales, que es el caso de las aplicaciones (señales de audio señales visuales). Si los elementos de la base son reales, entonces los coeficientes del desarrollo de z ya que ellos son el producto interior de z con los elementos de la base. De manera que en ese caso se pueden guardar los componentes de z en esta base como un vector real; lo cual simplifica los cálculos y salva espacio en la memoria del computador, ya que los vectores complejos son guardados como pares de vectores reales.

Note que la base de Shannon no es a valores reales ya que un vector z tiene solamente coordenadas reales si y sólo si

$$\hat{z}(m) = \overline{\hat{z}(n-m)}, \text{ para cada } m.$$

Mirando la TFD de u vemos que esta condición es satisfecha para $m = 0, 1, \cdots, \left(\frac{N}{4} - 1\right)$ y $m = \left(\frac{3N}{4}\right) + 1, \cdots, N-1$ donde ambos valores son 0, y para $m = \frac{N}{4} + 1, \cdots, \frac{3N}{4} - 1$, donde ambos valores son $\sqrt{2}$. Sin embargo la condición falla para $m = \frac{N}{4}$ (o equivalentemente en $m = \frac{3N}{4}$), ya que $\hat{u}\left(\frac{N}{4}\right) = \sqrt{2}$, mientras que $\hat{u}\left(\frac{3N}{4}\right) = 0$. Una cuestion similar es cierta para v.

Sin embargo podemos modificar $\hat{u}$ y $\hat{v}$ en estos valores de tal manera que podamos obtener la condición de simetría (y asi obtener u y v reales) mientras que todavía se satisfacen lascondiciones del teorema,

Ejemplo 3: (**Base de Shannon de primer paso real**). Supongamos que N es divisible entre 4 y definamos $\hat{u}$ y $\hat{v}$ por

$$\hat{u}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0, 1, \cdots (N/4) - 1 \quad \text{ó} \quad n = \left(\frac{3N}{4}\right) + 1, \cdots, N - 1 \\ 1 & \text{si} \quad n = N/4 \quad \text{ó} \quad n = \frac{3N}{4} \\ \sqrt{2} & \text{si} \quad n = \frac{N}{4} + 1, \cdots, \left(\frac{3N}{4}\right) - 1, \end{cases}$$

$$\hat{v}(n) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si} \quad n = 0, 1, \cdots, N/4 - 1 \quad \text{ó} \quad n = \left(\frac{3N}{4}\right) + 1, \cdots, N - 1 \\ i & \text{si} \quad n = N/4 \\ -i & \text{si} \quad n = \frac{3N}{4} \\ 0 & \text{si} \quad n = \frac{N}{4} + 1, \cdots, \left(\frac{3N}{4}\right) - 1 \end{cases}$$

En $\frac{N}{4}$ y $\frac{3N}{4}$ tenemos que $\hat{u}(N/4) = \hat{u}(N/4) = \overline{\hat{u}\left(\frac{3N}{4}\right)} = 1$; mientras que $\hat{u}(N/4) = i = \overline{-i} = \overline{\hat{v}\left(\frac{3N}{4}\right)}$.

Como en los otros valores de m, $\hat{u}$ y $\hat{v}$ coinciden con la base de Shannon, satisfacen la condición de simetría. Se tiene así que u y v son vectores reales. Además en $m = \frac{N}{4}$ la matriz sistema es

$$A\left(\frac{N}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix},$$

que es unitaria. En los otros valores de m se tiene que la matriz sistema $A(m)$ coincide con la base de Shannon y por lo tanto es unitaria. Se tiene entonces que para u y v dados anteriormente,

$$\{R_{2k}u\}_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}$$

forman una base de ondícula del primer paso y tienen coordenadas reales solamente.

En este caso es difícil encontrar una formula explícita para u y v. En la práctica para un N específico se usa un programa para calcular la $TFDI$ y se obtiene u y v.

Como las matrices unitarias 2×2 son fáciles de caracterizar, el teorema anterior puede ser usado para describir todas las bases de ondículas de primer paso. Se tiene el siguiente resultado,

Teorema 5 *Supongamos que N es par, digamos $N = 2M$,*

i) Sean $\{r(n)\}_{n=0}^{M-1}$ números reales tales que $0 \leq r(n) \leq \sqrt{2}, n = 0, 1, \cdots M - 1$. Sea $\{\theta(n)\}_{n=0}^{M-1}$,$\{\varphi(n)\}_{n=0}^{M-1}$,$\{\sigma(n)\}_{n=0}^{M-1}$, $\{\rho(n)\}_{n=0}^{M-1}$ números reales tales que si $n \in \{0, 1, 2, \cdots, M - 1\}$ y $0 < r(n) < \sqrt{2}$, entonces $\theta(n) +$

$\rho(n) - \varphi(n) - \sigma(n) = (2k+1)\,\pi$, para algún $k = k\,(n) \in \mathbb{Z}$. (si $r\,(n) = 0$ ó $r\,(n) = \sqrt{2}$, entonces $\theta\,(n)\,, \varphi\,(n)\,, \sigma\,(n)\,,$ y $\rho\,(n)$ no tienen restricción). Defina $\hat{u}, \hat{v}$ en $\ell^2\,(\mathbb{Z}_N)$ tomando,

$$\hat{u}\,(n) = r\,(n)\,e^{i\theta(n)},\ \hat{u}\,(n+N/2) = \sqrt{2-(r\,(n))^2}e^{i\varphi(n)},$$

$$\hat{v}\,(n) = \sqrt{2-(r\,(n))^2}e^{i\sigma(n)},\ \hat{v}\,(n+N/2) = r\,(n)\,e^{i\rho(n)},$$

para $n = 0, 1, \cdots, M-1$.

Defina u, v en $\ell^2\,(\mathbb{Z}_N)$ por $u = (\hat{u})^v$, $v = (\hat{v})^v$, entonces

$$\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$$

es una base ortonormal de $\ell^2\,(\mathbb{Z}_N)$.

ii) Recíprocamente, se tiene que para cada base de ondículas de primer paso $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$, existen $r\,(n)\,, \theta\,(n)\,, \sigma\,(n)\,, \rho\,(n)\,;$ $\hat{u}$ y $\hat{v}$ pueden ser descrita por las fórmulas descritas en i).

Demostración

i) Para $r(n), \theta(n), \varphi(n), \sigma(n)$ y $\rho(n)$ la matriz sistema es

$$A\,(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} r\,(n)\,e^{i\theta(n)} & \sqrt{2-(r\,(n))^2}e^{i\sigma(n)} \\ \sqrt{2-(r\,(n))^2}e^{i\varphi(n)} & r\,(n)\,e^{i\rho(n)} \end{bmatrix}$$

$n = 0, 1, \cdots, N-1$. Cada columna tiene longitud 1 y el producto interno de las dos columnas es

$$\frac{1}{2}r\,(n)\,\sqrt{2-(r\,(n))^2}e^{i(\varphi.\rho)}e^{i(\theta-\sigma-\varphi+\rho)+1}.$$

Si $r\,(n) = 0$ ó $r\,(n) = \sqrt{2}$, este producto es cero y por lo tanto $A\,(n)$ es unitaria; en otro caso la condición sobre θ, σ, φ y ρ garantiza que el producto sea cero.

ii) Recíprocamente, si $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ es una base ortonormal de $\ell^2\,(\mathbb{Z}_N)$, entonces $A\,(n)$ es unitaria para $n = 0, 1, \cdots, M-1$. Así que se debe satisfacer que $\hat{u}\,(n) = r\,(n)\,e^{i\theta(n)}$ para algún $0 \leq r\,(n) \leq \sqrt{2}$ y $\theta\,(n)$ real. Como la primera columna de $A\,(n)$ tiene longitud 1 se tiene que satisfacer $\hat{u}\,(n+N/2) = \sqrt{2-(r\,(n))^2}e^{i\varphi(n)}$ para algún $\varphi\,(n)$ real. El hecho que $A\,(n)$ sea unitaria implica que $|\hat{v}\,(n)| = |\hat{u}\,(n+M)|$, así que

$\hat{v}(n) = \sqrt{2-(r(n))^2}e^{i\sigma(n)}$ se cumple para algún $\sigma(n)$ real. El hecho que la segunda columna de $A(n)$ tiene longitud 1 implica que $\hat{v}(n+N/2) = r(n)\,e^{i\rho(n)}$ se cumple para algún real $\rho(n)$ real. En el caso $r(n) \neq 0$ y $r(n) \neq \sqrt{2}$, la expresión que se obtuvo para el producto interno de las dos columnas de $A(n)$ muestran que $\theta(n) + \rho(n) - \varphi(n) - \sigma(n) = (2k+1)\pi$ debe ser satisfecho, ya que se tiene $e^{i(\theta(n)+\rho(n)-\varphi(n)-\sigma(n))=-1.}$ ∎

El lema anterior nos permite crear muchos ejemplos de ondículas de primer paso, de hecho este resultado las paramétriza todas.

El siguiente resultado, que nos será muy útil, dice que toda potencial ondícula padre u tiene una ondícula madre compañera v, tal que u, v generan una base de ondículas de primer paso.

Lema 18 *Supongamos que N es par, digamos $N = 2M$, y sea $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tal que $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}$ es un conjunto ortonormal de M elementos. Definimos $v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ por*

$$v(k) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)},$$

para toda k. Entonces $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ es una base de ondículas de primer paso de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Demostración

$$\begin{aligned}
\hat{v}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} v(n)e^{-2\pi imn/N} = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^{n-1}\overline{u(1-n)}e^{-2\pi imn/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^{-k}\overline{u(k)}e^{-2\pi im(1-k)/N} \\
&= e^{-2\pi im/N}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^{-k}\overline{u(k)}(e^{-i\pi})^{-k}e^{-2\pi imk/N} \\
&= e^{-2\pi im/N}\overline{\sum_{k=0}^{N-1}u(k)e^{-2\pi i(m+M)k/N}} = e^{-2\pi im/N}\overline{\hat{u}(m+M)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\hat{v}(m+M) &= e^{-2\pi i(m+M)/N}\overline{\hat{u}(m+2M)} \\
&= e^{-2\pi iM/N}e^{-2\pi im/N}\overline{\hat{u}(m)} = e^{-2\pi im/N}\overline{\hat{u}(m)},
\end{aligned}$$

ya que $2M = N$, así que $\hat{u}(m+2M) = \hat{u}(m+N) = \hat{u}(m)$ y $e^{-2\pi iM/N} = e^{\pi i} = -1$. Por lo tanto

$$|\hat{v}(m)|^2 + |\hat{v}(m+M)|^2 = |\hat{u}(m+M)|^2 + |\hat{u}(m)|^2 = 2,$$

para $m = 0, 1, \cdots, M-1$ por el lema 17 y la ortonormalidad de $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}$. Además

$$\begin{aligned}&\hat{u}(m)\overline{\hat{v}(m)} + \hat{u}(m+M)\overline{\hat{v}(m+M)}\\ = &\hat{u}(m)e^{2\pi im/N}\hat{u}(m+M) - \hat{u}(m+M)e^{2\pi im/N}\hat{u}(m) = 0.\end{aligned}$$

Luego se cumplen las condiones del teorema 4. ∎

Supóngase que $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ es una base de ondícula de primer paso. La matriz de cambio de bases de B a E es la matriz U con vectores columnas $v, R_2v, \cdots, R_{N-2}v, u, R_2u, \cdots, R_{N-2}u$, en ese orden. Como B es ortonormal U es unitaria, asi que la matriz de cambio de base de E a B es $U^{-1} = U^*$. Sin embargo, calcular $[z]_B$ directamente es muy lento, se requieren N^2 multiplicaciones. Para calcular este cambio de bases rápidamente usaremos el hecho que el coeficiente de $R_{2k}u$ en la expansión de z es $\langle z, R_{2k}u\rangle = (z * \tilde{u})(2k)$ y análogamente para v. Ası, se tiene que

$$[z]_B = \begin{bmatrix} (z*\tilde{u})(0) \\ (z*\tilde{u})(2) \\ \vdots \\ (z*\tilde{u})(N-2) \\ (z*\tilde{v})(0) \\ (2*\tilde{v})(2) \\ \vdots \\ (z*\tilde{v})(N-2) \end{bmatrix}$$

El cálculo del vector $[z]_B$ se puede representar como el resultado de dos convoluciones de z seguidas en cada caso de la operación que elimina las coordenadas pares. Esta operación es denominada submuestreo o diezmación.

Definición 18 *Supóngase que N es par, digamos $N = 2M$. Definamos el operador $D : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_M)$ por*

$$D(z)(n) = z(2n);\ n = 0, 1, \cdots, M-1.$$

El operador D es denominado el **operador de submuestreo o de diezmación**.

En otras palabras si

$$z = (z(0), z(1), z(2), \ldots, z(N-1)),$$

entonces

$$Dz = (z\,(0)\,, z\,(2)\,, z\,(4)\,, \cdots, z\,(N-2))\,.$$

El operador de submuestreo es representado usualmente en los diagramas por el símbolo $\downarrow 2$.

Asi, la operación de calcular $[z]_B$ se representa por el siguiente diagrama.

$$\sim \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (z*\tilde{u}) = 0 \\ (z*\tilde{u})\,(2) \\ \vdots \\ (z*\tilde{u})\,(N-2) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (z*\tilde{v})\,(0) \\ (z*\tilde{v})\,(2) \\ \vdots \\ (z*\tilde{v})\,(N-2) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z*\tilde{u})\,(0) \\ (z*\tilde{u})\,(2) \\ \vdots \\ (z*\tilde{u})\,(N-2) \\ (z*\tilde{v})\,(0) \\ (z*\tilde{v})\,(2) \\ \vdots \\ (z*\tilde{v})\,(N-2) \end{bmatrix} = [z]_B$$

Figura 1

Este es un ejemplo sencillo de los asi llamados “bancos de filtros”. En general, un “banco de filtro” es una sucesión de convoluciones y otras operaciones. El estudio de “bancos de filtros” es una materia de estudio completo en ingeniería denominada “Análisis multivariado de señales”. El término “filtro” es usado para notar a los operadores de convolución porque tales operadores pueden sacar varias frecuencias si el multiplicador de Fourier asociado es cero (o suficientemente pequeño) en esas frecuencias. Los filtros más comunes son los llamados filtros de “paso bajo” los cuales sacan las altas frecuencias y los filtros “paso alto”, los cuales sacan las bajas frecuencias.

Hemos visto que se puede calcular rápidamente el cambio de base de E a B, ¿pasa con el cambio de B a E?. Por supuesto podemos obtenerla multiplicando por la matriz $N \times N, U$, pero eso es muy lento. Existe un procedimiento de cálculo rápido basado en el enfoque de banco de filtros para esto necesitamos definir "sobremuestreo"

Definición 19 *Supongamos que N es par, digamos $N = 2M$. Defina $U : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ como*

$$U(z)(n) = \begin{cases} z(n/2) & si\ n\ \ es\ par \\ 0\ si\ n\ \ es\ impar \end{cases}.$$

El operador U es denominado el **operador de sobremuestreo** *y es denotado en los diagramas por $\uparrow 2$.*

En otras palabras, el operador de sobremuestreo dobla el tamaño de un vector dado, insertando ceros entre cada dos coordenadas adyacentes originalmente.

Note que si sobremuestremos y luego submuestreamos obtenemos la entrada original, es decir

$$D(U(z)) = z, \text{ para cada } z.$$

Si embargo si primero submuestreamos y luego sobremuestreamos, lo que hacemos es eliminar las coordenadas pares de la entrada original y luego las rellenamos con ceros, lo que por supuesto no tiene que regresar la entrada original, es decir, en general,

$$U(D(z)) \neq z.$$

En general se tiene que

$$(U \circ D)(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

Para tratar de obtener z a partir de la salida del banco de filtro anterior continuo con otro banco de filtro a la derecha de la manera siguiente.

Figura 2

La salida de la rama superior del diagrama es $\tilde{s} * U(D(z * \tilde{u}))$ mientras que la salida de la rama inferior es $\tilde{t} * (D(z * \tilde{v}))$. El resulato siguiente da condiciones bajo las cuales la suma de estas dos salidas es la entrada original z. Cuando esto sucede diremos que tenemos **reconstrucción perfecta** en el banco de filtro.

Lema 19 *Sea* $N = 2M$ *y* $u, v, s, t \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. *Para* $n = 0, 1, \cdots, N-1$ *sea* $A(n)$ *la matriz sistema de* u *y* v*, tendremos entonces reconstrucción perfecta en el diagrama de arriba, es decir*

$$\tilde{s} * U(d(z * \tilde{u})) * \tilde{t} * (D(z * \tilde{v})) = z,$$

para toda $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$*, si y sólo si se tiene que*

$$A(n) \begin{bmatrix} \hat{s}(n) \\ \hat{t}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

para $n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$.

Demostración

Tenemos que

$$U(D(z * \tilde{u})) = \frac{1}{2}((z * \tilde{u}) + (z * \tilde{u}) *)$$

y análogamente para v.

Para cada n tenemos que (usando los mismos técnicas que en una demostración anterior),

$$[U(D(z * \tilde{u}))]\,\hat{}\,(n) = \frac{1}{2}\left(\hat{z}(n)\overline{\hat{u}(n)} + \hat{z}(n * M)\overline{\hat{u}(n+M)}\right)$$

y

$$[U(D(z * \tilde{v}))]\,\hat{}\,(n) = \frac{1}{2}\left(\hat{z}(n)\overline{\hat{v}(n)} + \hat{z}(n+M)\overline{\hat{v}(n+M)}\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\left[\tilde{s} * U(D(z * \tilde{u})) + \tilde{t} * U(D(z * \tilde{v}))\right]\,\hat{}\,(n) \\
&\quad = \overline{\hat{s}}(n)\,\frac{1}{2}\left(\hat{z}(n)\overline{\hat{u}(n)} + \hat{z}(n+M)\overline{\hat{u}(n+M)}\right) + \overline{\hat{t}(n)}\frac{1}{2}\left(\hat{s}(n)\overline{\hat{v}(n)} + \hat{z}(n+M)\overline{\hat{v}(n+M)}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(\overline{\hat{s}(n)\,\hat{u}(n)} + \overline{\hat{t}(n)\,\hat{v}(n)}\right)\hat{z}(n) + \frac{1}{2}\left(\overline{\hat{s}(n)\,\hat{u}(n+M)} + \left(\overline{\hat{t}(n)\,\hat{v}(n+M)}\right)\hat{z}(n+M)\right).
\end{aligned}$$

Aplicando TFDI tendremos reconstrucción perfecta si y sólo si para cada $z\ in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y cada $n = 0, 1, 2, \ldots, M-1$ la fórmula anterior coincide con $\hat{z}(n)$, lo cual es equivalente a verificar que se cumple

$$\hat{s}(n)\,\hat{u}(n) + \hat{t}(n)\,\hat{v}(n) = 2.$$

y

$$\hat{s}(n)\,\hat{u}(n+M) + \hat{t}(n)\,\hat{v}(n+M) = 0.$$

que es equivalente a

$$A(n) = \begin{bmatrix} \hat{s}(n) \\ \hat{t}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

lo que queríamos probar.

Vamos a verificar nuestra afirmación, para ello tomamos conjugados y sustituimos, obteniendo,

$$\hat{z}(n) = \frac{1}{2}(2)\,\hat{z}(n) + 0 = \left[\tilde{s} * U(D(z * \tilde{u})) + t * U(D(z * \tilde{v}))\right]^{\wedge}(n).$$

Lo cual dice que nuestra afirmación es una condición necesaria para reconstrucción perfecta.

Recíprocamente, si asumimos reconstrucción perfecta, escojemos $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tal que $\hat{z}(n) = 1$ y $\hat{z}(n+M) = 0$, lo cual la da la primera igualdad de nuestra afirmación. Por otra parte, si escojemos $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tal que $\hat{z}(n) = 0$ y $\hat{z}(n+M) = 1$ tendremos la segundad igualdad de nuestra afirmación lo cual verifica la equivalencia de las dos proposiciones y queda demostrado el resultado.

En el caso que $A(n)$ es unitaria se tiene que $A(n)$ es invertible y $A^{-1}(n) \underline{\;=\;} A^*(n)$. resolviendo el sistema en el lema obtenemos que $\hat{s}(n) = \overline{\hat{u}(n)}$ y $\hat{t}(n) = \hat{v}(n)$. Es decir si $A(n)$ es unitaria para toda n, entonces

$$s = \hat{u} \text{ y } t = \tilde{v}$$

como en el caso de ondícula de primer paso se tiene que $A(n)$ es unitaria, tenemos que para obtener reconstrucción perfecta en el diagrama debemos poner $s = \tilde{u}$ y $t = \tilde{v}$. ∎

Note que el lema da un resultado general acerca de bancos de filtros los cuales no corresponde necesariamente a bases ortonormales. Este resultado se puede utilizar para una generalización de ondículas ortonormales llamadas ondículas biortogonales.

El resultado anterior nos dice como podemos reconstruir z usando el diagrama de banco de filtros, en el caso en que u y v generan una base de ondículas de primer paso. Tomamos $s = \tilde{u}$ y $t = \tilde{v}$ en el diagrama. En particular, el paso de reconstrucción implica solamente dos convoluciones más y por lo tanto puede ser calculada de manera rápida.

Para decirlo de otra manera para calcular el cambio de base de B a E, ponga la mitad superior de $[z]_B$ en la rama superior de la parte derecha del diagrama y ponga la mitad inferior de $[z]_B$ en la rama inferior, la salida será $[z]_E$.

Ejercicios

1. Sean $z, w, u, v, \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

   i) Demuestre que $\langle R_n z, R_j w\rangle = \langle z, R_{j-k} w\rangle = \langle R_{k-j} z, w\rangle$ para cada k, j.

   ii) Demuestre que el conjunto (ordenado) $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es ortonormal si y sólo si $\langle w, R_k w\rangle = \begin{cases} 1, \text{ si } k = 0 \\ 0, \text{ si } k = 1, 2, \cdots N-1 \end{cases}$

   iii) Suponga que N es par, digamos $N = 2M$. Demuestre que el conjunto (ordenado) $\{R_{2k} u\}_{k=0}^{M-1}$ es ortonormal si y sólo si $\langle u, R_{2k} u\rangle = \begin{cases} 1, \text{ si } k = 0 \\ 0, \text{ si } k = 1, 2, \cdots, M-1 \end{cases}$

   iv) Suponga que N es par, es decir $N = 2M$.

   Demuestre que $\langle R_{2k} u, R_{2j} v\rangle = 0$ para todo $k, j = 0, 1, \cdots, M-1$, si y sólo si $\langle u, R_{2k} v\rangle = 0$ para todo $k = 0, 1, \cdots, M-1$

2. (**La base de Haar de primer paso**)

   Suponga $N = 2M$, para $M \in N$. Defina $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z})$ por

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \cdots, 0\right),$$

   y

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \cdots 0\right).$$

   i) Demuetre que $\{R_{2k} u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k} v\}_{k=0}^{M-1}$ es una base ortonormal $\ell^2(Z_N)$

   ii) Calcule $\hat{u}$ y $\hat{v}$. Chequee que la matriz de sistema $A(n)$ es unitaria para todo n.

   iii) para z en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ defina

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} \langle z, R_{2k} v\rangle R_{2k} v \\ R(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} \langle z, R_{2k} u\rangle R_{2k} u. \end{aligned}$$

Se tiene que $z = P(z) + R(z)$. Demuestre que para $m = 0, 1, 2, \cdots, M-1$

$$P(z)(2m) = P(z)(2m+1) = (z(2m) + z(2m+1))/2.$$

En otras palabras, $P(z)$ es obtenido de z remplazando el valor de z en $2m$ y $2m+1$ por su average. Lo cual puede ser considerado como el vector z visto a una resoluciópn de 2, entonces $R(z)$ es el "detalle" que se necesita para pasar de una resolución de 2 a una resolución de 1.

iv) Para $N = 8$, sea z=$(4, 2, 3, 7, 10, 8, 10, 14)$.Calcule $p(z), R(z)$ y grafique $z, p(z)$ y $R(z)$.

3. Sea u en $\ell^2(Z_4)$ tal que $\hat{u} = \left(1, \sqrt{2}, i, 0\right)$. Encuentre algún $\hat{v}$ tal que $\{u, R_2u, v, R_2v\}$ es una base ortonormal para $\ell^2(Z_4)$.

2.2 Construcción de ondículas en $\mathbb{Z}_N$: el paso iterativo.

Hemos construido bases ortonormales de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ de la forma

$$\{R_{2k}u\}_{k=0}^{(N/2)-1} \cup \{R_{2k}^{v}\}_{k=0}^{(N/2)-1},$$

que llamamos bases de ondículas de primer paso. Dimos condiciones necesarias y suficientes sobre $\hat{u}$ y $\hat{v}$ para que tal colección forman una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Además, como hemos visto en los ejemplos, podemos concentrar las frecuencias altas en los terminos del desarrollo que envuelve a u y las frecuencia bajas en ls términos del desarrollo que envuelven a v, y así se obtiene algún grado de localización en frecuencia. También se ha obtenido algún grado de localización en espacio. Además el cambio de base puede ser calculado rápidamente con el esquema de banco de filtro, asi como el cambio inverso. Estos cambio se pueden computar rápidamente porque ellosse pueden obtener como un par de convoluciones.

El banco de filtro (Figura 2) sugiere una posibilidad de iteración. A alguna o a ambas salidas de la fase de análisis podemos aplicar el mismo procedimiento otra vez. Podemos pasar las salidas de cada rama a través de otros dos filtros y submuestrar otra vez en cada nueva rama. Anaálogamente en la parte derecha del gráfico, podemos sobremuestrear la señal de cada una de esta dos nuevas ramas y luego pasarla a través de nuevos filtros. Si los filtros de este segundo paso son compatibles, como en el primer paso, todavia tendríamos reconstrucción perfecta y asi podemos continuar iterando.

En principio podemos iterar en cada rama pero en el análisis de ondícula usual iteraremos en una de las dos ramas del paso previo de una manera particular (un esquema más complicado de iteración adaptativa ocurren el la Teoría de paquetes de ondículas. Estudiaremos este procedimiento de iteración y en particular veremos que estas corresponden a un ciertotipo de base ortonormal, el cual llamaremos base ondícula para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Un comentario acerca de porque queremos iterar. Si consideramos la base de Shannon de ondículas de primer paso (Ejemplo 2 de la sección anterior) se nota que el elemento v tiene $|\hat{v}(n)| = 1$ para los $N/2$ frecuencias altas $N/4 \leq n \leq \left(\frac{3N}{4}\right) - 1$ y $|\hat{v}(n)| = 0$ para las restantes $N/2$ frecuencias y las trasladadas de v tienen la misma propiedad. Por otro lado se tiene que $|\hat{u}(n)| = 1$ para las $N/2$ frecuencias restantes se tiene asi que u y v parten la escala de frecuencia en z por la mitad. Pero, por ejemplo en el caso de la musica. es más natural considerar frecuencias en octavas. Esto sugiere que se deberíamos dejar los términos de frecuencias altas iguales y subdividir las frecuencias bajas en z, es decir, en cuartos de frecuencias y podemos seguir iterando de manera que nuestra descomposición en la base obtenida nos de un análisis de frecuencia de la señal más refinida.

Para describir el paso de iteración mis detalladamente consideremos el gráfico anterior (Figura 2) y denotemos los filtros en la mitad izquierda por $\tilde{u}_1, \tilde{v}_1$ en lugar de $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$, si suponemos que u_1 y v_1 generan una ondícula de primer paso, $A(n)$ la matriz delsistema de $\tilde{u}_1, \tilde{v}_1$ es unitaria para todo n y la reconstrucción perfecta se logra tomando los filtros de la mitad derecha de gráfico como u_1 y v_1.

Si $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es la entrada, para el segundo paso que queremos describir N debe ser divisible por 4. La salida de la fase de análisis es el par de vectores $D(z * \tilde{u}_1), D(z * \tilde{v}_1) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2}\right)$. Dejaremos el vector $D(z * \tilde{u}_1)$ solo y operaremos sobre el vector $D(z * \tilde{v}_1)$ de la misma manera que lo hicimos sobre z. Es decir, escojeremos dos vectores $u_2, v_2 \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2}\right)$ cuya matriz sistema es unitaria para todo n, pasamos $D(z * \tilde{v}_1)$ a través de los filtros que corresponden a $\tilde{u}_2$ y $\tilde{v}_2$ seguido en cada caso par un submuestreo. Esta salida más la salida de la rama de arriba es la salida de muesta procedimiento de análisis de segundo paso. En otras palabras la salida del análisis de segundo paso es el conjunto de vectores, $D(z * \tilde{u}_1)$, $D(D(z * \tilde{v}_1) * \tilde{u}_2)$ y $D(D(z * \tilde{v}_1) * \tilde{v}_2)$, en la parte izquierda del siguiente gráfico.

Figura 3

Para la fase de reconstrucción o síntesis solamente se introducen dos nuevas ramas correspondiente a la dos ramas introducidas en el segundo paso. Cada rama consiste de un sobremuestreo seguido de una convolucción con u_2 en una rama y con v_2 en la rama más baja. Entonces sumamos las salidas de estas dos convoluciones. El efecto de todas las ramas introducidas en el segundo paso es la identidad, así, vía el resultado para el primer paso, el efecto total del diagrama completo es la identidad y tendremos reconstrucción perfecta.

Si N es divisible entre 2^p, podemos repetir este proceso p veces, cada vez subdividimos sólo la rama inferior del diagrama y cada vez usamos filtros u_ℓ, v_ℓ satisfaciendo las condiciones que garantiza reconstrución perfecta. Vamos a formalizar lo anterior con la siguiente definición,

Definición 20 *Supongamos que N es divisible entre 2^p. Una sucesión de filtros de ondículas de $p-$ésimo paso es una sucesión de vectores $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots u_p, v_p$; tales que para cada $\ell = 1, 2, \cdots, p$*

$$u_\ell, v_\ell \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_N/2^{\ell-1}\right),$$

y la matriz sistema

$$A_\ell(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \hat{u}_\ell(n) & \hat{v}_\ell(n) \\ \hat{u}_\ell\left(n + N/2^\ell\right) & \hat{v}_\ell\left(n + N/2^\ell\right) \end{bmatrix}$$

es unitaria para toda $n = 0, 1, \cdots, \left(N/2^\ell\right) - 1$.

Con una entrada $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ definimos

$$x_1 = D(z * \tilde{u}_1) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N/2),$$

y

$$y_1 = D(z * \tilde{v}_1) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N/2)$$

De manera inductiva definimos $x_2, y_2, \cdots, x_p, y_p$ *tomando*

$$x_\ell = D\left(y_{\ell-1} * u_\ell\right) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2^\ell}\right) \tag{2.8}$$

y

$$y_\ell = D\left(y_{\ell-1} * v_\ell\right) \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2^\ell}\right) \tag{2.9}$$

para $\ell = 2, \cdots, p$.

La salida de la fase de análisis del filtro de banco de ondículas de $p-$*ésimo paso es el conjunto de vectores* $\{x_1, x_2, \cdots, x_p, y_p\}$

Las formulas de recursión (2.8) y (2.9) pueden ser mejor entendidas considerando el ℓ-ésimo paso de la sucesión de filtros en el siguiente gráfico,

Figura 4

Note que $y_1, y_2, \cdots, y_{p-1}$ no están en la salida de la fase de análisis. Para $\ell < p$, y_ℓ es usado solamente para definir $x_{\ell+1}$ y $y_{\ell+1}$. Si escribimos x_ℓ y y_ℓ explícitamente obtenemos que

$$x_\ell = D\left(D\left(\cdots D\left(D\left(z * \tilde{v}_1\right) * \tilde{v}_2\right) \cdots * \tilde{v}_{e-1}\right) * \tilde{u}_e\right)$$

$$y_\ell = D\left(D\left(\cdots D\left(D\left(z * \tilde{v}_1\right) * \tilde{v}_2\right) \cdots * \tilde{v}_{e-1}\right) * \tilde{v}_e\right)$$

Nótese que la suma del número de componentes de todos los vectores salidas del paso de análisis es

$$\frac{N}{2} + \frac{N}{2^2} + \cdots + \frac{N}{2^{p-1}} + \frac{N}{2^p} + \frac{N}{2^p} = N$$

como era de esperarse.

La fase de recosntrucción puede ser descrita por la siguiente sucesión de pasos. Sea $w_p = y_p$, primero calculamos $U\left(w_p\right) * v_p$ y $\left(U\left(x_p\right)\right) * u_p$. Por la propiedad de reconstruccperfecta del bloque de abajo del banco de filtro, tenemos que su suma es w_{p-1}, es decir

$$w_{p-1} = (U(w_p)) * v_p + (U(x_p)) * u_p.$$

Continuemos de manera similar con w_{p-1} y x_{p-1}, entonces w_{p-2} y x_{p-2}, etc, como es sugerido por el siguiente gráfico,

Figura 5

Formalmente definimos

$$w_{p-2} = (U(w_{p-1})) * v_{p-1} + (U(x_{p-1})) * U_{p-1}$$

$$w_{p-3} = (U(w_{p-2})) * v_{p-2} + (U(x_{p-2})) * U_{p-2}$$

y así sucesivamente hasta tener

$$w_1 = (U(w_2)) * v_2 + (U(x_2)) * u_2.$$

Entonces un paso más producimos el vector original z es decir

$$z = (U(w_1)) * v_1 + (U(x_1)) * u_1$$

Definición 21 *Supongamos que N es múltiplo de 2^p. Sea B un conjunto ordenado de la forma*

$$\{R_{2k}f_1\}_{k=0}^{(N/2)-1} \cup \{R_{2^2k}f_2\}_{k=0}^{(N/4)-1} \cup \cdots \cup \{R_{2^pk}f_p\}_{k=0}^{(N/2^p)-1} \cup \{R_{2^pk}g_p\}_{k=0}^{(N/2^p)-1},$$

para $f_1, f_2, \cdots, f_p g_p \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Si B es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, diremos que B es una base de ondícula de $p-$ésimo paso para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Diremos que $f_1, f_2, \cdots, f_p, g_p$ generan B.

Nuestro objetivo es probar que los $f_1, f_2, \cdots, f_p, g_p$ obtenidos via nuestra definición generan una base de ondícula de $p-$ésimo paso. Para considerar el número de multiplicaciones complejas que se necesitan para calcular las salidas de la fase de análisis de una sucesión de banco de filtro de ondículas tenemos el siguiente resultado, cuya prueba, que se basa en el número de operaciones de la transformada rápida de Fourirer, queda como **ejercicio**.

Lema 20 *Supóngase que* $N = 2^n$, $1 \leq p \leq n$ *y* $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_p, v_p$ *forman una sucesión de filtros de ondículas de p-ésimo paso. Entonces se tiene que las salidas* $\{x_1, x_2, \cdots, x_p, y_p\}$ *de la fase de análisis, correspondiendo al banco de filtro de ondícula del* $p-$*ésimo paso, pueden ser calculadas usando no más de*

$$4N + N \log_2 N$$

multiplicaciones complejas

El resultado anterior nos dice que los bancos de filtros recursivos pueden ser calculados de manera rápida. Aunque la descripción recursiva es útil para el propósito computacional, es difícil trabajar con ella a nivel teórico. Veamos una formulación no recursiva equivalente. Comenzaremos con el siguiente resultado, cuya prueba queda también como **ejercicio**,

Lema 21 *Supóngase que N es par,* $N = 2M$, $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *y* $x, y, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2})$. *Se tiene entonces que*

$$D(z) * w = D(z * U(w))$$

y

$$U(x) * U(y) = U(x * y)$$

Cuando escribimos $D^\ell(z)$, significa D compuesto con si mismo ℓ-veces, es decir, $D^1 = D$, y, por inducción $D^\ell(z) = D\left(D^{\ell-1}(z)\right)$. Lo mismo es cierto para U, $U^\ell(z) = U\left(U^{\ell-1}(z)\right)$.

Note que $D^\ell : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2^\ell}\right)$ está dada por

$$D^\ell(z)(n) = z\left(2^\ell n\right),$$

mientras $U^\ell : \ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2^\ell}\right) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ está dado por

$$U^\ell(w)(n) = \begin{cases} w\left(n/2^\ell\right) \text{ si } n \text{ es divisible entre } 2^\ell \\ 0 \text{ si } n \text{ no es divisible entre } 2^\ell \end{cases}$$

se tiene el siguiente resultado,

Corolario 2 *Supóngase que* N *es divisible por* 2^{ℓ}, $x, y, w \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2^{\ell}}\right)$ *y* $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *se tiene entonces que*

$$D^{\ell}(z) * w = D^{\ell}\left(z * U^{\ell}(w)\right)$$

$$U^{\ell}(x * y) = U^{\ell}(x) * U^{\ell}(y)$$

Demostración Ejercicio. ∎

Vamos ahora a introducir una notación no recursiva que será equivalente a la notación recursiva conocida (Definición 20).

Definición 22 *Supóngase que* N *es divisible por* 2^p.
Sean $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots u_p, v_p$, *vectores dados tales que para cada* $\ell = 1, 2, \cdots, p$,

$$u_{\ell}, v_{\ell} \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2^{\ell-1}}\right).$$

Definimos $f_1 = u_1$ *y* $g_1 = v_1$. *Entonces inductivamente definimos* $f_{\ell}, g_{\ell} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, *para* $\ell = 2, 3, \cdots, p$, *como*

$$f_{\ell} = g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(u_{\ell}) \tag{2.10}$$

$$g_{\ell} = g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(v_e). \tag{2.11}$$

Es decir:

$$f_2 = v_1 * U(u_2), \; g_2 = v_1 * U(v_2),$$

$$f_3 = v_1 * U(v_2) * U^2(u_3), g_3 = v_1 * U(v_2) * U^2(v_3)$$

$$f_{\ell} = v_1 * U(v_2) * U^2(v_3) \cdots * U^{\ell-2}(v_{\ell-1}) * U^{\ell-1}(u_{\ell})$$

y

$$g_{\ell} = v_1 * U(v_2) * U^2(v_3) \cdots * U^{\ell-2}(v_{\ell-1}) * U^{\ell-1}(v_{\ell})$$

Nótese que todos los convoluciones en la definición de f_{ℓ} y g_{ℓ} implican solamente a los v_j salvo el último término en f_{ℓ}.

Además se tiene que, **(ejercicio)**

$$\tilde{f}_{\ell} = \left(g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(u_{\ell})\right)^{\sim} = \tilde{g}_{\ell-1} * \left(U^{\ell-1}(u_{\ell})\right)^{\sim} = \tilde{g}_{\ell-1} * U^{\ell-1}(\tilde{u}_{\ell}),$$

y

$$\tilde{g}_{\ell} = g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(\tilde{v}_{\ell}).$$

El siguiente resultado nos permite describir la salida de la fase de análisis de un banco de filtro de ondícula de p-ésimo paso como un conjunto de convoluciones simples (no recursivas). También nos permite describir la fase de reconstrucción de una manrea análoga.

Lema 22 *Supóngamos que N es divisible por 2^p, $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y $u_1, v_1, \cdots, u_p, v_p$ son tales que para $\ell = 1, 2, \cdots, p$*

$$u_\ell, v_\ell \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2^{\ell-1}}\right).$$

Definimos $x_1, x_2, \cdots, x_p, y_1, y_2, \cdots, y_p$ como en la definición recursiva y

$$f_1, f_2, \cdots, f_p, g_1, g_2, \cdots, g_p$$

como en la definición anterior. Se tiene entonces que

$$x_\ell = D^\ell\left(z * \tilde{f}_\ell\right)$$

y

$$y_\ell = D^\ell\left(z * \tilde{g}_\ell\right).$$

Lema 23 *Supóngamos que N es divisible por 2^p y sea $u_1, v_1, \cdots, u_p, v_p$ una sucesión de banco de filtros de p-ésimo paso. Definimos $f_1, f_2, \cdots, f_p, q_p$ como en la última definición. Si la entrada de la $\ell-$ésima rama de la fase de recosntrucción es x_ℓ, entonces la salida de la fase de resconstrucción será*

$$U^\ell(x_\ell) * f_\ell.$$

Si la entrada de la rama final es y_p, entonces la salida de la fase de reconstrucción será

$$U^p(y_p) * g_p.$$

Se tiene entonces que el p-ésimo banco de filtro recursivo puede ser representado por una estructura no recursiva. Aunque la estructura recursiva es conveniente para computación, es difícil ver que se debe hacer para lograr nuestro intento original de construir bases ortonormales para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Sin embargo es más facil verlo con la estructura no recursiva.

Se tiene que la salida de la fase de análisis es el conjunto de vectores $x_1, x_2, \cdots, x_p, y_p$ y se tiene que

$$x_\ell(k) = D^\ell\left(z * \tilde{f}_\ell\right)(k) = z * \tilde{f}_\ell\left(2^\ell k\right) = \langle z, R_{2^\ell k} f_\ell\rangle,$$

$$y_p(k) = D^p(z * g_p)(k) = (z * g_p)(2^p k) = \langle z, R_{2p_k} g_p\rangle,$$

$k = 0, 1, \cdots, (N/2^p) - 1$.

Además se tiene que el número total de coordenadas de $x_1, x_2, \cdots, x_p, y_p$ es N. Se debe esperar que estas coordenadas sean los componentes de la expansión de z con respecto a una base ortonormal.

Nuestro objetivo es probar que $f_1, f_2, \cdots, f_p, g_p$ definido por nuestra última definición general una base de ondícula de p-ésimo paso. Para lograr ese objetivo vamos a comenzar con el siguiente resultado.

Lema 24 *Supongamos que N es divisible por 2^p y $g_{\ell-1} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es tal que el conjunto (ordenado)*

$$\{R_{2^{\ell-1}k}g_{\ell-1}\}_{k=0}^{(N/2^{\ell-1})-1}$$

es ortonormal con $(N/2^{\ell-1})$ elementos. Supogamos que $u_\ell, v_\ell \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2^{\ell-1}}\right)$ son tales que la matriz sistema $A_\ell(n)$ es una matriz unitaria para todo $n = 0, 1, 2, \cdots \left(N/2^\ell\right) - 1$. Definimos

$$f_\ell = g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(u_\ell) \;\; y \;\; g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(v_\ell),$$

entonces el conjunto (ordenado)

$$\{R_{2^\ell k}f_\ell\}_{k=0}^{(N/2^\ell)-1} \cup \{R_{2^\ell k}g_\ell\}_{k=0}^{(N/2^\ell)-1},$$

es ortonormal con $N/2^{\ell-1}$ elementos.

El resultado anterior muestra como podemos partir un subespacio generado por trasladadas de $2^{\ell-1}$ de un vector en dos subespacios ortoganales, cada uno generado por las trasladadas 2^ℓ de otro vector. Este resultado nos permite iterar esta división. Vamos a dar la siguientes notaciones que nos permitirar describir mejor nuestro objetivo.

Definición 23 *Supongamos que X es un espacio con producto interior, U y V supespacios de X. Supongamos que U y V son ortogonales, $U \perp V$. Definimos*

$$U \oplus V = \{u + v : u \in U, v \in V\}.$$

$U \oplus V$ se denomina la **suma directa ortogonal** *de U y V. En particular, si decimos $U \oplus V = X$ queremos significar que $U, V \subset X, U \perp V$ y cada elemento de x puede ser escrito como $x = u + v$, $u \in U$, $v \in V$.*

Lema 25 *Supóngase que N es divisible por 2^ℓ, y $g_{\ell-1} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es tal que el conjunto ordenado $\{R_{2^{\ell-1}k}g_{\ell-1}\}_{k=0}^{(N/2^{\ell-1})-1}$ es ortornormal y tiene $N/2^{\ell-1}$ elementos. Suponga que $u_\ell, v_\ell \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2^{\ell-1}}\right)$ son tales que la matriz sistema $A_\ell(n)$ es unitaria para $n = 0, 1, 2, \cdots, \left(N/2^{\ell-1}\right) - 1$. Definimos*

$$f_\ell = g_\ell - 1 * U^{\ell-1}(u_\ell) \;\; y \;\; g_\ell = g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(v_\ell)$$

Definimos los espacios

$$
\begin{aligned}
V_{-\ell+1} &= span\left\{R_{2^{\ell-1}k}g_{\ell-1}\right\}_{k=0}^{\left(N/2^{\ell-1}\right)-1}, && (2.12)\\
W_{-\ell} &= span\left\{R_{2^{\ell k}f_\ell}\right\}_{k=0}^{\left(N/2^{\ell}\right)-1}, && (2.13)\\
V_{-\ell} &= span\left\{R_{2^{\ell k}g_\ell}\right\}_{k=0}^{\left(N/2^{e}\right)-1}, && (2.14)
\end{aligned}
$$

se tiene que

$$V_{-\ell} \oplus W_{-\ell} = V_{-\ell+1}.$$

Los índices negativos en $V_{-\ell}$ deben sonar extraño, pero estan definidos de esa manera en parte para significar la inclusion de los espacios (los espacios decrecen con el índice) $(V_{-\ell} \subset V_{-\ell+1})$ y en parte para ser consistente con la notación que se usará cuando consideremos ondículas en $\mathbb{R}$.

Usando entonces el lema anterior, podemos probar que la salida de la fase de análisis de un banco de filtros de ondículas de $p-$ésimo paso con entrada z, producen los coeficientes de z con respecto a una base de ondícula de p-ésimo paso.

Teorema 6 *Supongamos que N es divisible por 2^p y $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_p, v_p$ es una sucesión de filtros de ondículas del p-ésimo paso. Definimos $f_1, f_2, \cdots, f_p, g_1, g_2, \cdots, g_p$ como en la Definición 22. Se tiene entonces que $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_p, g_p$; generan una base de ondículas de p-́esimo paso para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.*

Demostración

Vamos a probar que el conjunto

$$\{R_{2k}f_1\}_{k=0}^{(N/2)-1} \cup \{R_{4k}f_2\}_{k=0}^{(N/4)-1} \cup \cdots \cup \{R_{2^pk}f_p\}_{k=0}^{(N/2^p)-1} \cup \{R_{2^pk}g_p\}_{k=0}^{(N/2_p)-1},$$

es ortonormal y como tiene N elementos, entonces es una base de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Para el caso $p = 1$ se tiene que el resultado es cierto ya que $f_1 = u_1$ y $g_1 = v_1$ y ya hemos probado que en ese caso

$$\{R_{2k}f_1\}_{k=0}^{(N/2)-1} \cup \{R_{2k}g_1\}_{k=0}^{(N/2)-1}$$

son ortonormales.

Aplicando uno de los lemas anteriores de manera inductiva mostramos que $\{R_{2^\ell k}f_\ell\}_{k=0}^{\left(N/2^\ell\right)-1}$ es ortonormal para $\ell = 1, 2, \cdots, p$ y $\{R_{2^pk}g_p\}_{k=0}^{(N/2^p)-1}$ es ortonormal. Por lo tanto para probar la ortonormalidad del conjunto completo nos falta probar la ortonormalidad entre los elementos de diferentes conjuntos. Consideremos primero algun $R_{2^\ell k} f_\ell$ y $R_{2^m j} f_m$ y supongamos $m < \ell$. Se tiene entonces del último lema que

$$R_{2^\ell k} f_\ell \in W_{-\ell} \subseteq V_{-\ell+1} \subset \cdots \subset V_{-m},$$

mientras que $R_{2^m j} f_m \in W_{-m}$ y como por el lema anterior tenemos que $V_{-m} \perp W_{-m}$, se tiene entonces que $R_{2^m j} f_m$ es ortonormal a $R_{2^\ell k} f_\ell$. De manera anóloga obtenemos que $R_{2^p k} g_p$ pertenece a $V_{-p} \subset V_{-\ell}$ y por lo tanto es ortogonal a cada $R_{2^\ell j} f_\ell \in W_{-\ell}$. ∎

La mejor manera de observar lo hemos hecho es en términos del siguiente gráfico:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} V_{-p} & \rightarrow & V_{-p+1} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & V_{-3} & \rightarrow & V_{-2} & \rightarrow & V_{-1} & \rightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ \oplus & & \oplus & & & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \\ W_{-p} & \nearrow & W_{-p+1} & \nearrow & & & W_{-3} & \nearrow & W_{-2} & \nearrow & W_{-1} & \nearrow & \end{array}$$

Acá las flechas representan inclusión. Empezando por la derecha, partimos $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ en dos subespacios ortogonales V_{-1} y W_{-1} guardamos W_{-1} y partimos V_{-1} en dos subespacios ortogonales V_{-2} y W_{-2}, guardamos W_{-2} y continuamos con V_{-2} y seguimos de esta manera hasta el p-ésimo paso donde nos quedamos con V_{-p} y W_{-p}.

Del hecho que

$$\begin{aligned} x_\ell(k) &= \langle z, R_{2^\ell k} f_\ell \rangle, \ell = 1, 2, \cdots, ;\ k = 0, 1, \cdots \left(N/2^\ell\right) - 1 \\ y_p(k) &= \langle z, R_{2^p k} g_p \rangle, k = 0, 1, 2, \cdots, \left(N/2^\ell\right) - 1 \end{aligned}$$

se tiene que la salida de la fase de análisis del banco de filtro de ondícula de $p-$ésimo paso con entrada z, es un conjunto de vectores cuyas coordenadas son las coordenadas del desarrollo de z con respecto a la base de ondícula de $p-$ésimo paso dada en el teorema anterior. En particular los coeficientes de ondículas pueden ser calculadas por un algoritmo rápido.

Vamos a establecer la siguiente notación pensando en los futuros desarrollos.

Definición 24 *Suponga que N es divisible por 2^p. Sea*

$$u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_p, v_p$$

una sucesión de filtros de ondículas de $p-$ésimo paso. Definimos

$$f_1, g_1, f_2, g_2, \cdots, f_p, g_p$$

como en la Definición 22. Definimos para $j = 1, 2, \cdots, p$ *y* $k = 0, 1, 2, \cdots, \left(N/2^j\right) - 1$,

$$\begin{aligned} \psi_{-j,k} &= R_{2^j k} f_j & (2.15) \\ \varphi_{-j,k} &= R_{2^j k} g_j. & (2.16) \end{aligned}$$

En la notación anterior la base de ondícula del $p-$*ésimo paso generada por* $f_1, f_2, \cdots, f_p, g_p$ *tiene la forma*

$$\{\psi_{-1,k}\}_{k=0}^{(N/2)-1} \cup \{\psi_{-2,k}\}_{k=0}^{(N/4-1)} \cup \cdots \cup \{\psi_{-p,k}\}_{k=0}^{(N/2^p)-1} \cup \{\varphi_{p,k}\}_{k=0}^{(N/2^p)-1}.$$

Los elementos de esta base ortonormal se llaman ondículas en $\mathbb{Z}_N$.

Note que en esta terminología

$$\begin{aligned} V_{-j} &= span\, \{\varphi_{-j,k}\}_{k=0}^{\left(N/2^j\right)-1} \\ W_{-j} &= span\, \{\psi_{-j,k}\}_{k=0}^{\left(N/2^j\right)-1}. \end{aligned}$$

En general el término ondícula se usa usualmente para ondículas en $\mathbb{R}$. Lo que hemos hecho hasta ahora es una versión análoga para el caso finito-dimensional. Este caso tiene su interés propio y también sirve para hacer más fácil la introducción del caso de ondículas en $\mathbb{R}$.

Resumiendo nuestros resultados tenemos la siguiente "receta" para construir una base de ondícula de p-ésimo paso en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Receta: Supongamos que N es divisible por 2^p. Sea $u_1, u_2, v_2, \cdots, u_p, v_p$ unas sucesión de filtros de ondículas. Definimos $f_1, f_2, \cdots, f_p, g_1, g_2, \cdots, g_p$ como en la Definición 22 y $\psi_{-j,k}; \varphi_{-p,k}$ como en la Definición 24, entonces el conjunto

$$\{\psi_{-1,k}\}_{k=0}^{(N/2)-1} \cup \{\psi_{-2,k}\}_{k=0}^{(N/4-1)} \cup \cdots \cup \{\psi_{-p,k}\}_{k=0}^{(N/2^p)-1} \cup \{\varphi_{p,k}\}_{k=0}^{(N/2^p)-1}.$$

es una base de ondícula de p-ésimo paso para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Resulta que toda base de ondículas para $\mathbb{Z}_N$ se obtiene de alguna sucesión de filtro de ondículas usando esta receta.

Algunas veces es útil mirar las ondículas en $\mathbb{Z}_N$ dede el lado de la TDF. Tenemos que (**Ejercicio**)

$$\hat{\psi}_{-j,0}(n) = \hat{f}_j(n) = \hat{v}_1(n)\, \hat{v}_2(n) \cdots \hat{v}_{k-1}(n)\, \hat{u}_j(n)$$

y

$$\hat{\varphi}_{j,0}(n) = \hat{g}_j(n) = \hat{v}_1(n)\, \hat{v}_2(n) \cdots \hat{v}_{j-1}(n)\, \hat{v}_j(n)$$

Nótese que

$$\psi_{-j,k} = R_{2^j k} f_j = R_{2^j k} \psi_{-j,0}$$

y

$$\varphi_{-p,k} = R_{2^p k} g_j = R_{2^p k} \varphi_{p,0},$$

se tiene, por un lema anterior, que

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{-j,k}(m) &= e^{-2\pi i m 2^j k/N} \hat{\psi}_{-j,0}(m) \\ \hat{\varphi}_{-j,k}(n) &= e^{-2\pi i m 2^j k/N} \varphi_{-j,0}(m) \end{aligned}$$

para todo j, k.

Hasta acá no hemos requerido niguna relación entre los filtros u_ℓ, v_ℓ en diferentes pasos. Pareciera que no hay relación posible, ya que ellos son vectores de diferentes longitud. Sin embargo, el próximo resultado nos provee una manera de obtener filtros u_2, v_2 que satisfagan que la matriz sistema $A_2(n)$ sea unitaria para cada n, directamente de los filtros u_1, v_1, que satisfacen esa propiedad en el nivel previo.

Lema 26 *(de plegamiento (folding)) Supóngase que N es divisible por 2 y $u_1 \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$.*

i) Defina u_2 en $\ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2}\right)$ por

$$u_2(n) = u_1(n) + u_1(n + N/2), \tag{2.17}$$

entonces, para toda m,

$$\hat{u}_2(m) = \hat{u}_1(2m). \tag{2.18}$$

[Note que el lado derecho de (2.17) es periódico con período $N/2$.]

ii) Supóngase que N es divisible por 2^ℓ. Definimos $u_\ell \in \ell^2\left(\mathbb{Z}_{N/2^{\ell-1}}\right)$ como

$$u_\ell(n) = \sum_{k=0}^{2^\ell - 1} u_1\left(n + kN/2^{\ell-1}\right). \tag{2.19}$$

Se tiene entoces que

$$\hat{u}_\ell(m) = \hat{u}_1\left(2^{\ell-1} m\right). \tag{2.20}$$

Demostración

i) Escribimos

$$\begin{aligned}
\hat{u}_2(m) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} u_2(n)\, e^{-2\pi i n m/(N/2)} \\
&= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} u_1(n)\, e^{-2\pi i n m/(N/2)} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} u_1(n+N/2)\, e^{-2\pi i n m/(N/2)}.
\end{aligned}$$

poniendo $k=n$ en la primera suma y $k=n+N/2$ en la segunda suma obtenemos

$$\hat{u}_2(m) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} u_1(k)\, e^{-2\pi i k(2m)/N} + \sum_{k=N/2}^{N-1} u_1(k)\, e^{-2\pi k(2m)/N} = \hat{u}_1(2m).$$

La parte *ii*) sigue por un argumento de inducción (**Ejercicio**). ∎

Este lema se llama lema de plegamiento porque u_2 se obtiene u_1 cortando u_1 en la mitad, justo antes de $(N/2)$, plegando esta parte sobre la primera parte y sumando. Se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3 *Supóngase que N es divisible de 2^p, y que $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ son tales que la matriz sistema $A(n)$ es unitaria para toda n. Sea $u_1 = u$, $v_1 = v$ y para $\ell = 2, 3, \cdots p$ definimos*

$$u_\ell(n) = \sum_{k=0}^{2^\ell-1} u_1\left(n + kN/2^{\ell-1}\right),$$

y

$$v_\ell(n) = \sum_{k=0}^{2^\ell-1} v_1\left(n + kN/2^{\ell-1}\right).$$

Se tiene entonces que $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_p, v_p$ es una sucesión de filtros de ondículas del p-ésimo paso.

Así, el corolario anterior nos permite construir sucesiones de filtros de ondículas del p-ésimo paso a partir de dos vectores dados y por lo tanto nos permite construir base de ondículas del p-ésimo paso usando la receta. En este caso diremos que tenemos una base de ondículas con filtros repetidos.

Note que para el caso de filtros repetidos tenemos,

$$\hat{\psi}_{-j,0}(n) = \hat{v}_1(n)\,\hat{v}_1(2n)\,\hat{v}_1(4n)\cdots\hat{v}_1\left(2^{j-2}n\right)\hat{u}_1\left(2^{j-1}n\right)$$

y

$$\hat{\varphi}_{-j,0}(n) = \hat{v}_1(n)\,\hat{v}_1(2n)\,\hat{v}_1(4n)\cdots\hat{v}_1\left(2^{j-2}n\right)\hat{v}_1\left(2^{j-1}n\right).$$

Bases de ondículas de este tipo son particularmente fáciles de construir ya que se requiere solamente construir un par de vectores u, v tales que la matriz sistema es unitaria.

Nótese que si tenemos una base de ondículas del p-ésimo paso y $1 \leq j \leq p$, entonces

$$\left(\bigcup_{\ell=1}^{j}\{\psi_{-\ell,k}\}_{k=0}^{\left(N/2^{\ell}\right)-1}\right)\cup\{\varphi_{-j,k}\}_{k=0}^{\left(N/2^{j}\right)-1}$$

es una base de ondícula de j-ésimo paso.

Dado una base de ondícula del p-ésimo paso y $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, definimos para $j = 1, 2, \cdots, p$

$$P_{-j}(z) = \sum_{k=0}^{\left(N/2^{j}\right)-1}\langle z, \varphi_{-j,k}\rangle\,\varphi_{-j,k}$$

Denominaremos a $P_{-j}(z)$ como la **reconstrucción parcial a nivel** $-j$ de z . Esta $P_j(z)$ representa una aproximación de z usando solamente $N/2^j$ términos del desarrollo de z en la base de ondículas del j-ésimo paso. Por supuesto esta aproximación es más mala a medida que j crece.

Si definimos

$$Q_{-j}(z) = \sum_{k=0}^{\left(N/2^{j}\right)-1}\langle z, \psi_{-j,k}\rangle\,\psi_{-j,k},$$

Recuérdese que

$$V_{-\ell}\oplus W_{-\ell} = V_{-\ell+1},$$

luego que $\{\varphi_{-j,k}\}_{k=0}^{(N/2^j)-1}\cup\{\psi_{-j,k}\}_{k=0}^{(N/2^j)-1}$ es una base ortonormal para V_{-j+1} (como lo es $\{\varphi_{-j+1,k}\}_{k=0}^{(N/2^{j-1})-1}$), luego

$$P_{-j+1}(z) = \sum_{k=0}^{\left(N/2^{j}\right)-1}\langle z, \psi_{-j}, k\rangle\,\psi_{-j,k} + \sum_{k=0}^{\left(N/2^{j}\right)-1}\langle z, \varphi_{-j,k}\rangle\,\varphi_{-j,k},$$

para toda $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Por lo tanto,

$$P_{-j+1}(z) = P_{-j}(z) + Q_{-j}(z)$$

para $j = 2, 3, \cdots, p$. Definiendo

$$R_{-j}(z) = \sum_{\ell=1}^{j} Q_{-\ell}(z),$$

obtenemos inductivamente que

$$z = P_{-j}(z) + \sum_{\ell=1}^{j} Q_{-\ell}(z) = P_{-j}(z) + R_{-j}(z),$$

para todo $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Así que $R_{-j}(z)$ es el error que se comete al aproximar z por $P_{-j}(z)$. Si pensamos en $P_{-j}(z)$ como la aproximación a z en el nivel $-j$, entonces $Q_{-j}(z)$ contiene los "detalles" al nivel $-j+1$ que se necesitan para pasar de la aproximación $P_{-j}(z)$ al nivel $-j$ a la aproximación $P_{-j+1}(z)$ en el nivel $j+1$.

Ejemplo 4: (**El sistema de Haar**)

Vamos a usar filtros repetidos. Supongamos que N es divisible por 2^p. Definimos

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \cdots 0\right) \\ v_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \cdots, 0\right) \end{aligned}$$

En un ejercicio de la sección anterior se ha probado que u_1, y v_1 forman una base de ondícula de primer paso.

Definimos ahora u_ℓ, v_ℓ como

$$u_\ell(n) = \sum_{k=0}^{2^{\ell-1}} u_1\left(n + k\ N/2^{\ell-1}\right),\ v_\ell = \sum_{k=0}^{2^{\ell-1}-1} v_1\left(n + \frac{kn}{2^{\ell-1}}\right).$$

Se puede verificar que (**Ejercicio**)

$$\begin{aligned} u_\ell(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, u_\ell(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, u_\ell(n) = 0 \text{ si } n = 2, 3, \cdots \left(N/2^{\ell-1}\right) - 1 \\ v_\ell(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, v_\ell(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, v_\ell(n) = 0 \text{ si } n = 2, 3, \cdots \left(N/2^{\ell-1}\right) - 1 \end{aligned}$$

se tiene entonces mediante un argumento inductivo (**Ejercicio**) que para $\ell = 1, 2, \cdots, p$

$$f_\ell(n) = \begin{cases} 2^{-\ell/2} \text{si } n = 0, 1, \cdots, 2^{\ell-1} - 1 \\ -2^{-\ell/2} \text{ si } n = 2^{\ell-1}, 2^{\ell-1}+1, \cdots, 2^\ell - 1 \\ 0 \text{ si } n = 2^\ell, 2^\ell + 1, \cdots, N-1 \end{cases}$$

y

$$g_\ell(n) = \begin{cases} 2^{-\ell/2} \text{ si } n = 0, 1, \cdots, 2^\ell - 1 \\ 0 \text{ si } n = 2^\ell, 2^\ell + 1, 2^\ell + 2, \cdots, N \end{cases}$$

Por lo tanto se tiene que para $k = 0, 1, \cdots (N/2^\ell) - 1$

$$\psi_{-\ell,k}(n) = \begin{cases} 2^{(-\ell/2)} \text{ si } n = 2^\ell k, 2^\ell k + 1, \cdots, 2^\ell k + 2^{\ell-1} - 1 \\ -2^{-\ell/2} \text{ si } n = 2^\ell k + 2^{\ell-1}, 2^\ell k + 2^{\ell-1} + 1, \cdots, 2^\ell (k+1) - 1 \\ 0 \text{ si } n = 0, 1, \cdots, 2^\ell k - 1, 2^\ell (k+1), \cdots, N - 1 \end{cases},$$

La reconstrucción al nivel ℓ para el sistema de Haar tiene una interpretación simple, en efecto se tiene que, (**Ejercicio**)

$$P_{-\ell}(z)(n) = \frac{1}{2^\ell} \left[z\left(2^\ell k\right) + z\left(2^\ell k + 1\right) + \cdots + z\left(2^\ell k + 2^\ell - 1\right) \right]$$

para n tal que $2^\ell k \leq n \leq 2^\ell (k+1) - 1$. Es decir, $P_{-j}(z)$ se obtiene de z reemplazando los 2^ℓ valores consecutivos de z en el segmento $n = 2^\ell k, 2^\ell k + 1, \cdots, 2^\ell k + 2^{\ell-1} - 1$, por su promedio.

Ejemplo 5: (**Ondículas de Shannon**) En el ejemplo 2 de la sección anterior, consideramos la base de Shannon de primer paso. Llamando u, v de allí como u_1, v_1 respectivamente, definimos u_ℓ, $v_\ell \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{\ell-1}})$ como

$$u_\ell(n) = \sum_{k=0}^{2^{\ell-1}} u_1\left(n + k\ N/2^{\ell-1}\right),\ v_\ell = \sum_{k=0}^{2^{\ell-1}-1} v_1\left(n + \frac{kn}{2^{\ell-1}}\right).$$

Se puede verificar que (**Ejercicio**)

$$\hat{u}_\ell(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0, 1, \cdots \left(N/2^{\ell+1}\right) - 1 \text{ ó } n = \frac{3N}{2^{\ell+1}}, \frac{3N}{2^{\ell+1}} + 1, \cdots, N/2^{\ell+1} - 1 \\ \sqrt{2} \text{ si } n = \frac{N}{2^{\ell+1}}, \frac{N}{2^{\ell+1}} + 1, \cdots, \frac{3N}{2^{\ell+1}} - 1 \end{cases}$$

$$\hat{v}_\ell(n) = \begin{cases} \sqrt{2} \text{ si } n = 0, 1, \cdots, (n/4) - 1 \text{ ó } n = \frac{3n}{4}, \frac{3N}{4} + 1, \cdots, N/2^{\ell+1} - 1 \\ 0 \text{ si } n = N/4, \frac{N}{4} + 1, \cdots, \frac{3N}{4} - 2, \frac{3N}{4} - 1 \end{cases}$$

Definimos $f_1, f_2, \cdots, f_p, g_1, g_2, \cdots, g_p$ como en la Definición 22 y $\psi_{-j,k}; \varphi_{-p,k}$ como en la Definición 24, entonces (**Ejercicio**)

$$\hat{\psi}_{-1,0} = \hat{v}_1,\ \hat{\varphi}_{-1,0} = \hat{u}_1,$$

y para $\ell \geq 2$

$$\hat{\psi}_{-\ell,0}(n) = \begin{cases} 2^{-\ell/2} \text{ si } N/2^{\ell+1} \leq n \leq N/2^{\ell} - 1; \\ \qquad N - N/2^{\ell} \leq n \leq N - N/2^{\ell+1} - 1 \\ 0 \text{ si } 0 \leq n \leq N/2^{\ell+1} - 1; N/2^{\ell} \leq n \leq N - N/(2^{\ell} - 1); \\ \qquad N - N/2^{\ell+1} \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

y

$$\hat{\varphi}_{-\ell,0}(n) = \begin{cases} 2^{\ell/2} \text{ si } 0 \leq n \leq N/2^{\ell+1} - 1; N - N/2^{\ell+1} \leq n \leq N - 1 \\ 0 \text{ si } N/2^{\ell+1} \leq n \leq N - N/2^{\ell+1} - 1 \end{cases}$$

Ejemplo 6: (**Ondículas de Shannon reales**) En el ejemplo 3 de la sección anterior, consideramos la base de Shannon real de primer paso, que era una modificación menor de la base de Shannon de primer paso. Aplicando el procedimiento iterativo descrito en el ejemplo anterior para este caso, tenemos entonces (**Ejercicio**)

$$\hat{\psi}_{-1,0} = \hat{v},\ \hat{\varphi}_{-1,0} = \hat{u},$$

y para $\ell \geq 2$

$$\hat{\psi}_{-\ell,0}(n) = \begin{cases} 2^{(\ell-1)/2} \text{ si } n = N/2^{\ell+1}, N - N/2^{\ell+1} \\ 2^{\ell/2} \text{ si } N/2^{\ell+1} + 1 \leq n \leq N/2^{\ell} - 1; \\ \qquad N - N/2^{\ell} + 1 \leq n \leq N - N/2^{\ell+1} - 1 \\ 2^{(\ell-1)/2} i \text{ si } n = N/2^{\ell} \\ -2^{(\ell-1)/2} i \text{ si } n = N - N/2^{\ell} \\ 0 \text{ si } 0 \leq n \leq N/2^{\ell+1} - 1; N/2^{\ell} + 1 \leq n \leq N - N/2^{\ell} - 1; \\ \qquad N - N/2^{\ell+1} + 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

y

$$\hat{\varphi}_{-\ell,0}(n) = \begin{cases} 2^{\ell/2} \text{ si } 0 \leq n \leq N/2^{\ell+1} - 1; N - N/2^{\ell+1} + 1 \leq n \leq N - 1 \\ 2^{(\ell-1)/2} i \text{ si } n = N/2^{\ell+1} \\ -2^{(\ell-1)/2} i \text{ si } n = N - N/2^{\ell+1} \\ 0 \text{ si } N/2^{\ell+1} + 1 \leq n \leq N - N/2^{\ell+1} - 1. \end{cases}$$

Ejercicios

1. Suponga que N es par y $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$

i) Demuestre que

$$(D(z))^{\wedge}(n) = \frac{1}{2}\left(\hat{z}(n) + \hat{z}(n + N/2)\right)$$

para toda n.

Sugerencia: demuestre que $DFT\ N/2$ puntos de $D(z)$ coincide con la DFT de N puntos de $\frac{(z+z^*)}{2}$ para $z^*(n) = (-1)^n z(n)$.

ii) Demuestre que $(\cup(z))^{\wedge}(n) = \hat{z}(n)$, para todo n.

2. Suponga $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

   i) Demuestre que $(z * w)^{\sim} = \tilde{z} * \tilde{w}$

   ii) Suponga que N es par. Demuestre que $(D(z))^{\sim} = D(\tilde{z})$

   iii) Demuestre que $(U(z))^{\sim} = U(\tilde{z})$

3. Suponga $1 \leq p \leq n$. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{p}(n-k)\,2^{n-k} \leq n2^n.$$

Sugerencia: Use inducción en n.

Capítulo 3

Ondículas en $\mathbb{Z}$.

3.1 Conjuntos Ortonormales completos en espacios de Hilbert. $\ell^2(\mathbb{Z})$.

En este capítulo consideremos señales infinitas las cuales son, en general, no periodicas, es decir, consideremos sucesiones de números complejos denotadas por

$$z = (\cdots z(-2), z(-1), z(0), z(1), z(2)), \cdots),$$

o más consisamente,

$$z = (z(n))_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Para poder hacer cáculos significativos, z no debe ser “muy grande”, más precisamente pediremos que z sea **cuadrado sumable**

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)|^2 < \infty.$$

Denotamos por el espacio de todas las sucesiones complejas cuadrado sumables en $\mathbb{Z}$, por

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ z = (z(n))_{n \in \mathbb{Z}} : z(n) \in \mathbb{C} \text{ para todo } n \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mid z(n) \mid^2 < \infty \right\}.$$

Se puede probar que $\ell^2(\mathbb{Z})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ bajo las operaciones naturales, coordenada a coordenada, de suma y producto por escalar (**Ejercicio**). Además podemos definir para $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z})$

$$< z, w >= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(n)\overline{w(n)}.$$

Se sigue que $< \cdot, \cdot >$ es un producto interior complejo en $\ell^2(\mathbb{Z})$(**Ejercicio**). Definimos la norma en $\ell^2(\mathbb{Z})$ como

$$\| z \| = \sqrt{< z, z >} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} | z(n) |^2 \right)^{1/2}.$$

Con esta norma se tiene que $\ell^2(\mathbb{Z})$ es un espacio de Hilbert es decir un espacio normado completo.

Una sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset H$, un espacio de Hilbert se dice ontonormal completa si es ortonormal y si

$$< f, f_k >= 0, \forall k \in \mathbb{Z} \,\text{implica que} f = 0.$$

La sucesión $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ defina por

$$e_j(n) \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & , & \text{si} & n & = & j \\ 0 & , & \text{si} & n & = & j \end{array} \right.$$

es un conjunto ontonormal completo de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Tenemos el siguiente resultado general.

Teorema 7 *Supongamos que H es un espacio de Hilbert, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ un conjunto ortonormal en H. Entonces se tiene que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ontonormal completo si y sólo*

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} < f, a_j > a_j, \quad \forall f \in H$$

Una caracterización importante es la siguiente.

Lema 27 *Sea $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ un conjunto ontonormal en H. Las siguientes proposiciones son equivalentes,*

(i) $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es ontonormal completa.*

(ii) (Identidad de Parseval) Para toda $f, g \in H$

$$< f, g >= \sum_{j\in\mathbb{Z}} < f, a_j > \overline{< g, a_j >}$$

(iii) (Identidad de Plancherel) Para toda $f \in H$

$$\| f \|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |< f, a_j >|^2$$

Otro espacio de Hilbert de gran importancia, es el espacio de las funciones cuadrado integrables,

$$L^2\left([-\pi,\pi]\right) = \left\{ f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(\theta\right)\right|^2 d\theta < \infty \right\},$$

con producto escalar complejo

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta\right) \overline{g\left(\theta\right)} d\theta$$

y norma

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-} \pi^{\pi} \left|f\left(x\right)\right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

El sistema trigonométrico es el conjunto de funciones $\left\{e^{in\theta}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Se tiene que el sistema trigonométrico es un conjunto ontonormal completo en $L^2\left([-\pi,\pi]\right)$.

Otro espacio importante para nosotros (de Banach, no de Hilbert) es el espacio de las funciones integrables,

$$L^1([-\pi,\pi]) = \left\{ f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta < \infty \right\}.$$

Se tiene que

$$L^2([-\pi,\pi]) \subset L^1([-\pi,\pi]).$$

Para $L^2([-\pi,\pi])$ se tiene el siguiente resultado análogo al visto para un espacio de Hilbert general H,

Lema 28 *En el espacio de Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$, tenemos*

i) Si $z = (z(n))_{n\in\mathbb{Z})} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, entonces la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n) e^{in\theta}$$

converge a un elemento de $L^2([-\pi,\pi])$.

ii) Si $f \in L^2([-\pi,\pi])$ se tiene que la sucesión $\{\langle f, e^{in\theta}\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ con

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\left\langle f, e^{in\theta}\right\rangle|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

iii) Si $f, g \in L^2([-\pi,\pi])$; *entonces*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle f, e^{in\theta}\right\rangle \overline{\langle g, e^{in\theta}\rangle}$$

iv) Para cada f *en* $L^2([-\pi,\pi])$ *se tiene que*

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle f, e^{in\cdot}\right\rangle e^{in\theta},$$

en sentido de la convergencia en $L^2([-\pi,\pi])$.

Ejercicios

1. Sea $\sum_{n\in\mathbb{Z}} w(n)$ una serie de números complejos.

   i) (**Criterio de Cauchy**) Demuestre que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} w(n)$ converge si, y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que para todo $m \geq k > N$,
   $$\left|\sum_{n=-m}^{k} w(n) + \sum_{n=k}^{m} w(n)\right| < \varepsilon.$$

   ii) (**Criterio de comparación**) Sea $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de números reales no negativos tales que $|w(n)| \leq a(n)$, para todo $n \geq N$, para algún $n \in \mathbb{Z}$. Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)$ converge, demuestre que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} w(n)$ converge.

   iii) Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} w(n)$ converge absolutamente, demuestre que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} w(n)$ converge.

2. i) Demuestre que la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n$ converge, pero no converge absolutamente. En particular, no es cierto que, con la definición de convergencia en esta sección, la convergencia de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} w(n)$ implique que $\lim_{n\to\infty} w(n) = 0$.

   ii) Demuestre que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} w(n)$ converge absolutamente si, y sólo si $\sum_{n=0}^{\infty} w(n)$ y $\sum_{n=2}^{\infty} w(-n)$ convergen absolutamente.

iii) Demuestre que si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} w(n)$ converge absolutamente, entonces $\lim_{n\to\infty} w(n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} w(-n) = 0$.

3. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio con producto interno complejo X. Demuestre que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en X a algún $x \in X$ si y sólo si $\|x_n - x\|$ converge a cero cuando n tiene a infinito.

4. Suponga $M \in \mathbb{Z}$, $\{x_n\}_{n=M}^{\infty}$ una sucesión en un espacio complejo con producto interno X y $\{x_n\}_{n=M}^{\infty}$ converge en X a algún $x \in X$. Demuestre que $\{x_n\}_{n=M}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

5. Suponga que X es un espacio con producto interno y $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ es un conjunto ortonormal en X. Si $z = \sum_{j=1}^{n} z(j)\, v_j$ y $w = \sum_{j=1}^{n} w(j)\, v_j$ para escalares $\{z(j)\}_{j=1}^{n}$ $\{w(j)\}_{j=1}^{n}$, entonces

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z(j)\, \overline{w(j)},$$

y

$$\|z\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z(j)|^2 .$$

3.2 La Transformada de Fourier y Convolución en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

En lo que sigue veremos una serie de definiciones y resultados en $\ell^2(\mathbb{Z})$ que son análogos a definiciones y resultados para el caso $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$, y que por tanto las pruebas quedan como ejercicios.

Definición 25 *La Transformada de Fourier en $\ell^2(\mathbb{Z})$ es la función*

$$\wedge : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2([-\pi, \pi])$$

definida por

$$\hat{z}(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n) e^{in\theta},$$

en sentido de la convergencia en $L^2([-\pi, \pi])$.

Definición 26 *La transformada inversa de Fourier en $L^2([-\pi,\pi])$ es la función $\vee : L^2([-\pi,\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ definida por*

$$f^\vee(n) = \left\langle f, e^{in\theta} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta.$$

Se tiene el siguiente resultado,

Lema 29 *La transformada de Fourier $\wedge$ es sobreyectiva en $\ell^2(\mathbb{Z})$ con inversa $\vee$. En particular se tiene para $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$.*

i) $z(n) = (\hat{z})^\vee(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{z}(\theta)e^{-in\theta}d\theta.$

ii) Para todo $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene que

$$\langle z, w\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n)\overline{w}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{z}(\theta)\overline{\hat{w}(\theta)}d\theta = \langle \hat{z}, \hat{w}\rangle$$

iii) $\|z\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\hat{z}(\theta)|^2 d\theta = \|\hat{z}\|_2^2.$

Demostración : Ejercicio

Definición 27 *Sea $z = (z(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de números complejos. Decimos que z es sumable si la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)| < \infty.$$

Denotamos por el espacio de todas las sucesiones complejas sumables en $\mathbb{Z}$, por

$$\ell^1(\mathbb{Z}) = \left\{ z = (z(n))_{n\in\mathbb{Z}} : z(n) \in \mathbb{C} \text{ para todo } n \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid z(n) \mid < \infty \right\}.$$

Para $z \in \ell^1(\mathbb{Z})$, definimos la norma

$$\| z \|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid z(n) \mid .$$

Definición 28 *Supongamos $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z})$, para $m \in \mathbb{Z}$ definimos*

$$(z * w)(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(m-n)w(n).$$

La sucesión $z * w$ es denominada la convolución de z y w.

La convolución tiene las siguientes propiedades,

Lema 30 *Supongamos que* $v, w \in \ell^1(\mathbb{Z})$ *y* $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *entonces,*

i) $(z * w)^\wedge(\theta) = \hat{z}(\theta)\hat{w}(\theta)$

ii) $z * w = w * z$

iii) $v * (w * z) = (v * w) * z$

iv) $\| z * w \| \leq \| z \| \| w \|_1$

Demostración : Ejercicio

Definición 29 *Para* $k \in \mathbb{Z}$ *el operador traslación* $R_k : \ell^2(\mathbb{Z} \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *es definido por* $R_k(z)(n) = z(n-k)$*, para toda* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Diremos que una transformación lineal $T : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *es invariante por traslación si para todo* $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *y* $k \in \mathbb{Z}$ *se tiene que*

$$T(R_k z) = R_k T(z).$$

Definición 30 *Sea* $\delta = e_0$*, es decir*

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ 0 & si \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Se tiene el siguiente resultado,

Lema 31 *Supóngase que* $T : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *es una transformación lineal acotada e invariante por traslación. Defina* b *en* $\ell^2(\mathbb{Z})$ *por*

$$b = T(\delta).$$

Entonces para todo z *en* $\ell^2(\mathbb{Z})$ *se tiene que* $T(z) = b * z$*.*

Demostración : Ejercicio.

Definición 31 *Suponga que* $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *para* n, k *en* $\mathbb{Z}$ *definimos*

$$\begin{aligned} \tilde{z}(n) &= \overline{z(-n)} \\ z^*(n) &= (-1)^n z(n). \end{aligned}$$

Lema 32 *Suponga que* $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z})$. *Se tiene entonces que*

i) $\tilde{z}, z^* \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *y* $R_k z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *para toda* $k \in \mathbb{Z}$.

ii) $(\tilde{z})^\wedge(\theta) = \overline{\hat{z}(\theta)}$

iii) $(z^*)^\wedge(\theta) = \hat{z}(\theta + \pi)$

iv) $(R_k z)^\wedge(\theta) = e^{ik\theta}\hat{z}(\theta)$

v) $\langle R_j z, R_k w\rangle = \langle z, R_{k-j} w\rangle$, *para todo* $j, k \in \mathbb{Z}$.

vi) $\langle z, R_k w\rangle = z * \tilde{w}(k)$, *para todo* $k \in \mathbb{Z}$.

vii) $\hat{\delta}(\theta) = 1$, *para todo* θ.

Demostración : Ejercicio.

Ejercicios

1. Para $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, defina $f + g$ y αf por

$$(f+g)(\theta) = f(\theta) + g(\theta) \text{ y } (\alpha f)(\theta) = \alpha f(\theta),$$

para $-\pi \le \theta \le \pi$.

i) Demuestre que $L^2([-\pi, \pi])$ con estas operaciones es un espacio vectorial.

ii) Demuestre

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta,$$

define un producto interno sobre $L^2([-\pi, \pi])$.

iii) Demuestre que $L^2([-\pi, \pi]) \subseteq L^1([-\pi, \pi])$.

iv) Defina

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\theta|}}, \text{ si } \theta \neq 0 \\ 0, \text{ si } \theta = 0. \end{cases}$$

Demuestre que $f \in L^1([-\pi, \pi])$, pero $f \notin L^2([-\pi, \pi])$.

2. Para $a > 0$ defina

$$L^2([-a,a]) = \left\{ f : [-a,a] \to \mathbb{C} : \int_{-a}^{a} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

Demuestre que el sistema $\left\{e^{in\pi t/a}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2([-a,a])$

3. Defina $L^2([0,\pi]) = \left\{ f : [0,\pi] \to \mathbb{C} : \int_0^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta < \infty \right\}$.

   i) Demuestre que el conjunto $\left\{\sqrt{2}\sin(n\theta)\right\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal completo en $L^2([0,\pi])$.

   ii) Demuestre que el conjunto $\left\{1, \sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\cos 2\theta, \sqrt{2}\cos 3\theta, \cdots\right\}$ es un conjunto ortonormal completo en $L^2([0,\pi])$.

4. Suponga que $\mathcal{X} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisface que,

   i) $\mathcal{X}$ es 2π periódica en $\mathbb{R} : \mathcal{X}(\theta + \in\pi) = \mathcal{X}(\theta)$, para $\theta \in \mathbb{R}$.

   ii) $\mathcal{X}$ es multiplicativa: $\mathcal{X}(\theta + \varphi) = \mathcal{X}(\theta)\,\mathcal{X}(\varphi)\,; \theta, \varphi \in \mathbb{R}$.

   iii) $\mathcal{X}$ no es idénticamente cero en $\mathbb{R}$.

   iv) $\mathcal{X}$ es continua en $\mathbb{R}$.

   Demuestre que existe $n \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\mathcal{X}(\theta) = \exp \backslash\rangle\theta, \theta \in \mathbb{R}.$$

5. i) Demuestre que $\ell^1(\mathbb{Z})$ es un espacio vectorial con la suma (coordenada a coordenada) y multiplicación por escalar usuales.

   ii) Demuestre que $\|.\|_1$ es una norma $\ell^1(\mathbb{Z})$.

   iii) Demuestre que $\ell^1(\mathbb{Z}) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z})$.

3.3 Ondículas de primer paso en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Vamos a caracterizar ondículas de primer paso en $\ell^2(\mathbb{Z})$, adaptando las técnicas utilizadas en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ a $\ell^2(\mathbb{Z})$. La gran diferencia proviene del hecho que $\ell^2(\mathbb{Z})$ es infinito dimensional. En $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ un conjunto ortonormal con N vectores genera el espacio pero un conjunto ortonormal infinito (numerable) en $\ell^2(\mathbb{Z})$ no tiene por que generar todo el espacio. Así que vamos a poner especial énfasis en mostrar que los conjuntos ortonormales dados son completos. Se tiene el primer resultado análogo al caso finito dimensional,

Lema 33 *Suponga que $z, w \in \ell^1(\mathbb{Z})$.*

i) El conjunto (ordenado) $\{R_{2k}w\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal si y sólo si

$$|\hat{w}(\theta)|^2 + |\hat{w}(\theta+\pi)|^2 = 2, \qquad \textit{para todo } \theta \in [0,\pi).$$

ii) Se tiene que $\langle R_{2k}z, R_{2j}w\rangle = 0; \forall j,k \in \mathbb{Z}$, si y sólo si

$$\hat{z}(\theta)\hat{w}(\theta) + \hat{z}(\theta+\pi)\overline{\hat{w}(\theta+\pi)} = 0, \qquad \textit{para todo } \theta \in [0,\pi).$$

Demostración

Se verifica que $\{R_{2k}w\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal si y sólo si

$$\langle w, R_2kw\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{si} \quad k \neq 0 \end{cases}.$$

Para cada $y \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tenemos que

$$(y+y^*)(n) = (1+(-1)^n)y(n) = \begin{cases} 2y(n) & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}.$$

De lo anterior se obtiene, poniendo $y = w * \widetilde{w}$, que

$$w * \widetilde{w} + (w * \widetilde{w})^* = 2\delta,$$

lo cual es equivalente a

$$(w * \widetilde{w})^\wedge(\theta) + ((w * \widetilde{w})^*)^\wedge(\theta) = 2$$

para toda θ.

Del lema anterior obtenemos que

$$(w * \widetilde{w})^\wedge(\theta) = \widehat{w}(\theta)(\widetilde{w})^\wedge(\theta) = \widehat{w}(\theta)\overline{\widehat{w}(\theta)} = |\widehat{w}(\theta)|^2$$

y

$$((w * \widetilde{w})^*)^\wedge(\theta) = (w * \widetilde{w})^\wedge(\theta + \pi) = |\widehat{w}(\theta + \pi)|^2$$

Sustituyendo se obtiene la equivalencia y se demuestra (i) (ii) **Ejercicio.** ∎

Las siguientes definiciones son similares a las correspondientes para el caso $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Definición 32 *Para una secesión* $z = (z(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *definimos las sucesiones*

$$D(z)(n) = z(2n)\,;\ n \in \mathbb{Z}$$

y

$$U(z)(n) = \begin{cases} z(n/2) & si\ n\ es\ par \\ 0\ si\ n\ es\ impar \end{cases}.$$

$$D : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) \ \ y\ U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$$

Además

$$\begin{aligned} D^m(z)(n) &= z(2^m n) \\ U^m(z)(n) &= \begin{cases} z(n/2^m)\,;\ si\ n\ es\ múltiplo\ de\ 2^j \\ 0;\ si\ n\ no\ es\ múltiplo\ de\ 2^j \end{cases} \end{aligned}$$

D es denominado el **operador submuestreo** *y U el* **operador sobremuestreo**.

Definición 33 *Suponga que* $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z})$. *Sea*

$$B = \{R_{2k}u\}_k \in \mathbb{Z} \cup \{R_{2k}v\}_k \in \mathbb{Z};$$

Si B es un conjunto ortonormal completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$, entonces diremos que B es un sistema de ondícula de primer paso para $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Definición 34 *Suponga que u y $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$. La matriz sistema de u y v sera la matriz definida por*

$$A(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{u}(\theta) & v(\theta) \\ \hat{u}(\theta + \pi) & \hat{v}(\theta + \pi) \end{bmatrix}$$

Vamos a asumir, para propositos futuros, que u y v pertenece a $\ell^1(\mathbb{Z})$ y no solamente a $\ell^2(\mathbb{Z})$

Teorema 8 *Suponga que* u,$v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. *Entonces*

$$\{R_{2k}u\}_k \in \mathbb{Z} \cup \{R_{2k}v\}_k \in \mathbb{Z},$$

es un conjunto ortonormal completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$ *si y sólo si la matriz sistema de* u *y* v,$A(\theta)$, *es unitaria para todo* θ *en* $[0,\pi]$.

Demostración

Por el resultado anterior se tiene que $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal si y sólo si la primera columna de $A(\theta)$ tiene norma 1 y lo mismo para $\{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Además los elementos de $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ son ortogonales a los elementos de $\{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}}$ si y solo si las dos columnas de $A(\theta)$ son ortogonales para casi todo θ. De lo cual se tiene que $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}V\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal si y sólo si $A(\theta)$ es unitaria para casi todo θ. Sin embargo como u y v pertenecen a $\ell^1(k)$, $\hat{u}$, $\hat{v}$ son continuas lo cual fuerza a que la matriz $A(\theta)$ sea unitaria en todo $[0,\pi]$. Para finalizar la demostración, debemos mostrar que si $A(\theta)$ es unitaria para todo θ, entonces el conjunto ortonormal $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Vamos a mostrar que para todo z en $\ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene que

$$z = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle z, R_{2k}u\rangle R_{2k}u + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle z, R_{2k}v\rangle R_{2k}v.$$

Por una parte se tiene que

$$U(D(z*\tilde{u}))(m) = \begin{cases} (z*\tilde{u})(m) \text{ si } m \text{ es par} \\ 0 \text{ si } m \text{ es impar,} \end{cases}$$

asi que

$$\begin{aligned} u * U(D(z+\tilde{u}))(n) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} u(n-m)\, U(D(z*\tilde{u}))(m) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(n-2k)(z*\tilde{u}) = (2k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} R_{2k}u(n) \langle z, R_{2k}u\rangle . \end{aligned}$$

Reeplazando v por u y sumando las dos identidades obtenemos,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle z,R_{2k}u\rangle R_{2k}u+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle z,R_{2k}v\rangle R_{2k}v=u{*}U\left(D\left(z*\tilde{u}\right)\right)+v{*}U\left(D\left(z*\tilde{v}\right)\right).$$

Utilizando el mismo procedimiento que en la demostración del lema anterior, obtenemos

u$*U\left(D\left(z*\tilde{u}\right)\right)\hat{}\,(\theta)+\left(v*U\left(D\left(z*\tilde{v}\right)\right)\right)\hat{}\,(\theta)$

$=u\left(\theta\right)\frac{1}{2}\left[z\hat{}\,(\theta)\,\overline{\hat{u}\left(\theta\right)}+\hat{z}\left(\theta+\pi\right)\overline{\hat{u}\left(\theta+\pi\right)}\right]+\hat{v}\left(\theta\right)\frac{1}{2}\left[2\left(\theta\right)\hat{v}\left(\theta\right)+\hat{z}\left(\theta+\pi\right)\overline{\hat{v}\left(\theta+\pi\right)}\right]$

$=\hat{z}\left(\theta\right).1+\hat{z}\left(\theta+\pi\right).0=\hat{z}\left(\theta\right).$

De lo cual se deduce (aplicando transformada inversa) que

$$u*U\left(D\left(z*\tilde{u}\right)\right)+v*U\left(D\left(z*\tilde{v}\right)\right)=z.$$

Es decir, que para todo z en $\ell^2\left(\mathbb{Z}\right)$ se tiene que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle z,R_{2k}u\rangle R_{2k}u+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle z,R_{2k}v\rangle R_{2k}v=u{*}U\left(D\left(z*\tilde{u}\right)\right)+v{*}(D\left(z*\tilde{v}\right))=z$$

que es lo que se quería demostrar. ∎

Nótese que la identidad anterior muestra que un banco de filtros similar al del caso $\ell^2\left(\mathbb{Z}_N\right)$ se puede utilizar en el caso $\ell^2\left(\mathbb{Z}\right)$ para obtener las fases de análisis y síntesis.

Un sistema de ondículas de primer paso $\left\{R_{2k}u\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\cup\left\{R_{2k}v\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, para $\ell^2\left(\mathbb{Z}\right)$ con $u,v\in\ell^1\left(\mathbb{Z}\right)$, automáticamente genera una base de ondícula de primer paso para $\ell^2\left(\mathbb{Z}_N\right)$, por un proceso conocido como periodización.

Lema 34 *(Ondículas periodizadas para $\ell^2\left(\mathbb{Z}_N\right)$. Supongamos N par, digamos $N=2M$ y supongamos que $u,v\in\ell^1\left(\mathbb{Z}\right)$ son tales que $\left\{R_{2k}u\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\cup\left\{R_{2k}v\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de ondículas de primer paso para $\ell^2\left(\mathbb{Z}_N\right)$. Definimos $u_{(N)},u_{(N)}$ en $\ell^2\left(\mathbb{Z}_N\right)$ por*

$$u_{(N)}\left(n\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u\left(n+kN\right)\ \ y\ v_{(N)}\left(n\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}v\left(n+kN\right).$$

Entonces

$$\left\{R_{2k}u_{(N)}\right\}_{k=0}^{N-1}\cup\left\{R_{2k}v_{(N)}\right\}_{k=0}^{N-1}$$

es una ondícula de primer paso para $\ell^2\left(\mathbb{Z}_N\right)$.

Demostración

Se tiene que,

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{(N)}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} u_{(N)}(n)\, e^{-\pi i n m/n} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(n+kN)\, e^{-2\pi i n m/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(n+kN)\, e^{-2\pi i (n+kN) m/N} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n+kN)\, e^{-}2\pi i n m/N \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} u(\ell)\, e^{-2\pi i \ell m/N} = \hat{u}\left(\frac{-2\pi m}{N}\right).
\end{aligned}$$

Como u es 2π períodica se tiene que

$$\hat{u}_{(N)}(m+M) = \hat{u}\left(-2\pi\frac{m+M}{N}\right) = \hat{u}\left(-\frac{2\pi m}{N} - \pi\right) = \hat{u}\left(-\frac{2\pi m}{N} + \pi\right)$$

Sustituyendo v para u, se tiene que la matriz sistema $A(n)$ para $u_{(N)}$ y $v_{(N)}$ es igual a la matriz sistema $A(\theta)$ de u y v cuando $\theta = \frac{-2\pi m}{N}$ y como $A(\theta)$ es unitaria para toda θ, ya que u y v generan un sistema de ondícul de primer paso, se tiene que $A(n)$ es unitaria para todo $n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$. De lo anterior se deduce que $\left\{R_{2k}u_{(N)}\right\}_{k=0}^{N-1} \cup \left\{R_{2k}v_{(B)}\right\}_{k=0}^{N-1}$ es una ondícula de primer paso para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. ∎

Ejercicios

1. Sean $w, z \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Demuestre que el conjunto coordenada $\{R_{2k}w\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal si, y sólo si

$$\langle w, R_{2k}w\rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

2. i) Demuestre que $D : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, es una transformación lineal la cual es sobreyectiva pero no es inyectiva.

   ii) Demuestre que $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ es una trasformación lineal que es inyectiva pero no es sobreyectiva.

3. Sean $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Demuestre que

   i) $U(z * w) = U(z) * U(w)$

   ii) $(U(z))^{\sim} = U(\tilde{z})$;

iii) $(z * w)^{\sim} = \tilde{z} * \tilde{w}$

4. (**Sistema de Haar** en $\mathbb{Z}$) Defina $u, v \in \ell^2(Z)$ por $\mathrm{u}(n) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, \text{ si } n = 0 \\ -1/\sqrt{2}, \text{ si } n = 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$

   $\mathrm{V}(n) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, \text{ si } n = 0 \text{ó } 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$

   i) Demuestre directamente que $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}V\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto orotonormal completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$

   Sugerencia: Demuestre que para z en $\ell^2(\mathbb{Z})$

   $$z(2m) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle z, R_{2m}u\rangle + \langle z, R_{2m}V\rangle\right)$$

   y

   $$z(2m+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle z, R_{2m}V\rangle - \langle z, R_{2m}u\rangle\right).$$

   ii) Demuestre que la matriz de sistema $A(\theta)$ es unitaria para todo θ.

   iii) Para $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ sea

   $$P(z) = \sum_{k\in Z} \langle z, R_{2k}v\rangle R_{2k}v.$$

   Demuestre que

   $$P(z)(2m) = P(z)(2m+1) = (z(2m) + z(2m+1))/2.$$

   Asi, se tiene que $P(z)$ reemplaza $z(2m)$ y $z(2m+1)$ por sus promedios.

3.4 El paso de Iteración para ondículas en $\mathbb{Z}$.

En la sección anterior vimos que si podemos construir $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tal que la matriz sistema $A(\theta)$ de u y v es unitaria para todo θ, entonces podemos dividir $\ell^2(\mathbb{Z})$ en dos conjuntos generados cada uno por las trasladadas pares de u y v respectivamente. En esta sección vamos a tratar de iterar esa división de manera análoga a como lo hicimos en el caso de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Vamos a comenzar con el siguiente resultado.

Lema 35 *Supongamos que* $\ell \in \mathbb{N}$ *y* $g_{\ell-1} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *es tal que* $\{R_{2^{\ell-1}k} g_{\ell-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, *es ortonormal en* $\ell^2(\mathbb{Z})$. *Supongamos que* $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ *son tales que la matriz sistema* $A(\theta)$ *de* u *y* v *es unitaria para toda* θ. *Definimos*

$$f_\ell = g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(u);\; g_\ell = g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(v).$$

Se tiene entonces que el conjunto (ordenado)

$$\{R_{2^\ell k} f_\ell\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{R_{2^\ell k} g_\ell\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

es ortonormal .

Demostración

Si $U^{\ell-1}(u), U^{\ell-1}(v) \in \ell^1(\mathbb{Z})$, entonces $f_\ell, g_\ell \in \ell^2(\mathbb{Z})$, por definición.

Note que (**Ejercicio**)

$$\tilde{f}_\ell = \left(g_{\ell-1} * U^{e-1}(u)\right)^{\sim} = \tilde{g}_{\ell-1} * U^{\ell-1}(\tilde{u}),$$

de lo cual se obtiene que

$$\langle f_\ell, R_{2^\ell k} f_\ell\rangle = f_\ell * \tilde{f}_\ell\left(2^{\ell k}\right)$$

y además

$$\begin{aligned}&\left(g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(u) * \tilde{g}_{\ell-1} * U^{\ell-1}(\tilde{u})\right)\left(2^\ell k\right)\\ &= (g_{\ell-1} * \tilde{g}_{\ell-1}) * \left(U^{\ell-1}(u * \tilde{u})\right)\left(2^\ell k\right) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} (g_{\ell-1} * \tilde{g}_{\ell-1})\left(2^\ell k - n\right) u^{\ell-1}(u * \tilde{u})(n).\end{aligned}$$

Como

$$\left(U^{\ell-1}(u * \tilde{u})\right)(n) = \begin{cases} (u * \tilde{u})(m), \text{ si } n = 2^{\ell-1} m \\ 0, \text{ en otro caso,}\end{cases}$$

se tiene que

$$\langle f_\ell, R_{2^e llk} f_\ell\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (g_{\ell-1} * \tilde{g}_{\ell-1})\left(2^{\ell-1}(2k - m)\right)(u * \tilde{u})(m)$$

Del hecho que

$$(g_{\ell-1} * \tilde{g}_{\ell-1})\left(2^{\ell-1}(2k - m)\right) = \left\langle g_{\ell-1}, R_{2^{\ell-1}(2k-m)} g_{\ell-1}\right\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } m = 2k \\ 0 \text{ en otro caso,}\end{cases}$$

se obtiene que

$$\langle f_\ell, R_{2^\ell k} f_\ell\rangle = u * \tilde{u}(2k)) = \langle u, R_{2k} u\rangle.$$

como $A(\theta)$ es unitaria para todo θ, se tiene que

i) $\langle f_\ell, R_{2^\ell k} f_\ell \rangle = \langle u, R_{2k} u \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$ De manera análoga se obtiene que

ii) $\langle g_\ell, R_{2^\ell k} g_\ell \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$ El hecho que $A(\theta)$ es unitaria tambien implica que $\langle u, R_{2k} v \rangle = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Usando lo anterior y el resultado para primer paso obtenemos que, (**Ejercicio**).

iii) $\langle f_\ell, R_{2^\ell k} f_\ell \rangle = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

i), *ii*) y *iii*) demuestran el resultado deseado. ∎

También tenemos el siguiente resultado para $\ell^2(\mathbb{Z})$ análogo al caso $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$,

Lema 36 *Sean $u, v, g_{\ell-1}, f_\ell$ y g_ℓ definidos como anteriormente. Defina*

$$\begin{aligned} V_{-\ell+1} &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k) R_{2^{\ell-1}k} g_{\ell-1} : z = (z(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\} \\ V_{-\ell} &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k) R_{2^\ell k} g_\ell : z = (z(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\} \\ W_{-\ell} &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k) R_{2^\ell k} f_\ell : z = (z(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\} \end{aligned}$$

*Se tiene entonces que $V_{-\ell+1}, V_{-\ell}, W_{-\ell}$, son subespacios de $\ell^2(\mathbb{Z})$ (***ejercicio***) y*

$$V_{-\ell} \oplus W_{-\ell} = V_{-\ell+1}.$$

Definición 35 *Suponga que $p \in \mathbb{N}$ y $f_1, f_2, \cdots, f_p, g_p \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Sea*

$$B = \{R_{2k} f_1\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{4k} f_2\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \cdots \cup \{R_{2^p k} f_p\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2^p k} g_p\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Si B es un conjunto ortonormal completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$, diremos que B es un sistema de ondícul de P-esimo paso para $\ell^2(\mathbb{Z})$. Diremos que $f_1, \cdots, f_p, g_p$, generan a B. Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9 *Sea $p \in \mathbb{N}$. para $\ell = 1, 2, \cdots, p$ supongase que $u_\ell, v_\ell \in \ell^1(\mathbb{Z})$ son tales que la matriz sistema*

$$A_\ell(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{u}_\ell(\theta) & \hat{v}_\ell(\theta) \\ \hat{u}_\ell(\theta + \pi) & \hat{v}_\ell(\theta + \pi) \end{bmatrix},$$

es unitaria para toda θ *en* $[0,\pi)$. *Defina* $f_1 = u_1, g_1 = v_1$ *e inductivamente para* $\ell = 2,3,\cdots,p$

$$f_\ell = g_\ell - 1 * U^{\ell-1}(u_\ell)\,; g_\ell = g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(v_\ell)\,.$$

Defina $B = \{R_{2^\ell k} f_e : k \in \mathbb{Z}; \ell = 1,2,\cdots,p\} \cup \{R_{2^p k} g_p\}_{k\in\mathbb{Z}}$. *Entonces* B *es un conjunto ortonormal completo para* $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Demostración

$\{R_{2^\ell k} f_\ell\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal para $\ell = 1,2,\cdots,p$ por resultado anteriores, lo mismo para $\{R_{2^p k} g_p\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Solamente se necesita chequear ortogonalidad entre conjuntos diferentes. Si $m < \ell \leq p$ y $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$R_{2^\ell k} f_\ell \in W_{-\ell} \subset V_{-\ell+1} \subseteq \cdots \subseteq V_{-m}$$

y lo mismo para $R_{2^p k} g_p$ en lugar de $R_{2^\ell k} f_\ell$ y para todo $j \in \mathbb{Z}$, $R_{2^m j} f_m \in W_{-m}$ e lo cual se concluye la ortonormalidad entre cojuntos diferentes.

Veamos ahora que B es completo suponga que $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ es ortogonal a B; se tiene entonces que z es ortogonal a $W_{-1} \cup W_{-2} \cup \cdots W_{-p} \cup V_{-p}$; como $W_{-p} \oplus V_{-p} = V_{-p+1}$ esto implica que z es ortogonal a V_{p+1}, siguiendo este procedimiento concluimos que z es ortogonal a $W_{-1} \oplus V_1 = \ell^2(\mathbb{Z})$, de lo cual se deduce que $z \equiv 0$. ∎

Se puede hacer la división infinitamente, lo cual lleva a la siguiente definición

Definición 36 *Sea* $f_\ell \in \ell^2(\mathbb{Z})$, *para* $\ell \in \mathbb{N}$ *sea*

$$B = \{R_{2^\ell k} f_\ell : k \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}\}\,.$$

Si B *es un sistema ortonormal completo de* $\ell^2(\mathbb{Z})$, *diremos que* B *es un sistema homgéno de ondículas para* $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 10 *Supóngase que para cada* $\ell \in \mathbb{N}, u_\ell, v_\ell \in \ell^1(\mathbb{Z})$

$$A_\ell(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{u}_\ell(\theta) & \hat{v}_\ell(\theta) \\ \hat{u}_\ell(\theta+\pi) & \hat{v}_\ell(\theta+\pi) \end{bmatrix}$$

es unitaria para todo $\theta \in [0,\pi)$. *Defina* $f_1 = u_1, g_1 = v_1$ *inductivamente* $f_\ell = g_{\ell-1} * V^{\ell-1}(u_\ell)\,, g_\ell = g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(v_\ell)\,; \forall \ell \in \mathbb{N}$

$$B = \{R_{2^\ell k} f_\ell\}_{k\in\mathbb{Z},\ell\in\mathbb{N}}\,,$$

es un conjunto ortonormal completo.

Demostración

Para demostrar la ortonormalidad de B se una la misma argumetación que en las pruebas anteriores y la observación de que para cada dos elementos de B existe p suficientemente grande tal que el sistema de ondícula de p-ésimo paso contiene a dichos dos elementos. Para probar la completitud de B supongamos que $\langle z, R_{2^\ell k} f_\ell \rangle = 0\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \ \forall \ell \in \mathbb{N}$; esto implica que z es ortogonal a $W_{-j}; \forall \in \mathbb{N}$ y por cada z pertenece a $v_{-j}; \forall_j \in \mathbb{N}$ (**Ejercicio**). En efecto, veamos primero que $z \in V_{-1}$; como $\ell^2(\mathbb{Z}) = V_{-1} \oplus W_{-1}$, existe $v_{-1} \in V_{-1}$ y $w_{-1} \in W_{-1}$ tales que $z = v_{-1} + w_{-1}$ y como $V_{-1} \perp W_{-j}$ se tiene que $\langle v_{-1}, w_1 \rangle = 0$, entonces

$$\langle w_{-1}, w_{-1} \rangle = \langle v_{-1} + w_{-1}, w_{-1} \rangle = \langle z, w_{-1} \rangle = 0$$

lo cual implica $w_{-1} = 0$ y por lo tanto $z = v_{-1} \in V_{-1}$ (inductivamente en ℓ). Como $z \in \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} V_\ell = \{0\}$, concluimos que $z = 0$, lo cual implica que B es completo. ∎

Nótese que es posible escojer $u_\ell = u_1, v_\ell = v_1$ para todo ℓ en $\mathbb{N}$. En este caso veremos que tenemos filtros repetidos.

La notación más estandar para ondículas es

$$\begin{aligned} \psi_{-j,k} &= R_{2^j k} f_j \\ \varphi_{-j,k} &= R_{2^j k} g_j \end{aligned}$$

En esta notación, el sistema de ondícula de p-ésimo paso toma la forma

$$B = \{\psi_{-j,k} : k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

En este caso φ, la ondícula padre, desaparece de escena, dejando solamente a ψ. La ondícula madre y sus descendientes.

Ejercicios

1. Sea z en $\ell^2(\mathbb{Z})$. Demuestre que

   $$(U(z))^{\sim}(\theta) = \hat{z}(2\theta),$$

   para todo θ.

2. Sea H un espacio de Hilbert y $\{a_k\}_{k \in BBz} \cup \{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$V = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k)\, a_k : z = (z(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

$$W = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\, b_k : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

Demuestre que

$$V \perp W,$$

es decir, para todo $v \in V$ y $w \in W$, $\langle w, w \rangle = 0$.

Sugerencia: Primero demuestre que $\langle v, b_k \rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 4

Ondículas en $\mathbb{R}$

4.1 $L^2(\mathbb{R})$, Convolución y Transformada de Fourier

Consideraremos ahora el espacio de las funciones cuadrado (Lebesgue)integrable en $\mathbb{R}$ a valores en $\mathbb{C}$,

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}.$$

$L^2(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial en $\mathbb{C}$ con las operaciones de suma punto a punto y multiplicación por escalar (**Ejercicio**).

Para $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, definimos

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre $L^2(\mathbb{R}$ (**Ejercicio**).

Además $L^2(\mathbb{R}$ es un espacio normado con norma,

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Más aún, $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con este producto interno.

Otro espacio importante para nosotros es el espacio de las funciones (Lebesgue) integrables,

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$$

Con esta norma $L^1(\mathbb{R})$ es un espacio normado completo (de Banach).

En este caso no hay ninguna relación de contención entre $L^2(\mathbb{R})$ y $L^1(\mathbb{R})$.

Ahora consideramos la convolución para $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,

Definición 37 *Dadas* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, *para cada* x *en* $\mathbb{R}$ *definimos*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy$$

$f * g$ *se denomina la* **convolución** *de* f *y* g.

Como en el caso $\ell^2(\mathbb{Z})$, $f * g$ no necesariamente pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ para f, g en $L^2(\mathbb{R})$, sino a $L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\, dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2\, dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|^2\, dy\right)^{1/2} = \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Sin embargo tenemos el siguiente resultado,

Lema 37 *i) Supongamos* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. *Entonces para todo* x *en* $\mathbb{R}$ *se tiene que*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy$$

converge absolutamente y

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

ii) Supóngase que $f \in L^2(\mathbb{R})$ *y* $g \in L^1(\mathbb{R})$, *entonces* $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ *con*

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_1$$

El siguiente resultado da las propiedades básicas de la convolución,

Lema 38 *Sean* $f, g, h \in \ell^1(\mathbb{R})$, *se tiene*

i) $(f * g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \quad , \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$

ii) $(f * g) = g * f$

iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$

Para definir la **transformada de Fourier** sobre $L^2(\mathbb{R})$, vamos a considerar la familia de funciones

$$F_\xi(x) = e^{ix\xi}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dada f en $L^2(\mathbb{R})$ estudiaremos el producto $\langle f, F_\xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{F_\xi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx$. Puede suceder que esta integral no converja absolutamente para f en $L^2(\mathbb{R})$ y algún $\xi \in \mathbb{R}$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, se tiene que para cada $\xi \in R$.

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \, \|f\|_1$$

lo cual nos permite hacer la siguiente definición

Definición 38 *Supongamos* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $\xi \in \mathbb{R}$ *definimos*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

la **transformada de Fourier** *de* f.

Supongamos que $f \in L^2(\mathbb{R})$, sabemos que no podemos definir $\hat{f}$ puntualmente. Por lo que utilizamos el siguiente procedimiento,

Definición 39 *Supongamos* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *y* $\xi \in \mathbb{R}$ *y sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones tales que* $f_n, \hat{f}_n \in L^1()$ *y* $f_n f$ *en* $L^2(\mathbb{R})$ *si* $n \to \infty$ *definimos* $\hat{f}$ *como el límite en* L^2 *de la sucesión* $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Se puede probar que esta definición es independiente de la sucesión aproximante $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (**Ejercicio**). Además, las dos definicciones coinciden cuando $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (**Ejercicio**).

Usualmente si $f \in L^2(\mathbb{R})$ tomamos para cada $N \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |x| \leq N \\ 0 & \text{si} \quad |x| > N \end{cases}$$

Se tiene entonces que $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ para todo n (**Ejercicio**) y por lo tanto la podemos usar como la sucesión aproximante de f para definir $\hat{f}$, y entonces

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)e^{-ix\xi}dx,$$

en sentido de norma L^2.

La transformada inversa de Fourier se define de una manera similar,

Definición 40 *Para $g \in L^1(\mathbb{R})$ definimos la* **transformada inversa de Fourier** $g^\vee$ *como*

$$g^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

Note que

$$g^\vee(x) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-x)$$

En este contexto se tiene también en versión de transformada inversa de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$como el límite en norma L^2 de las transformadas inversas de Fourier de una sucesión aproximante,

$$g^\vee(x) = \lim_{n\to\infty} g_n^\vee(x).$$

Entonces se tiene,

Teorema 11 *La transformada de Fourier $^\wedge : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ es sobreyectiva con inversa la transformada inversa de Fourier,*

$$f(x) = (\hat{f})^\vee(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \quad , x \in \mathbb{R},$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$. También se tiene que

$$(f^\vee)^\wedge = f.$$

Más aún, se tiene que

i) Identidad de Parseval: $\left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle = 2\pi \langle f, g\rangle$ *para* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

ii) Identidad de Plancherel: $\left\| \hat{f} \right\| = \sqrt{2\pi}\, \|f\|$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$.

La fórmula de inversión de Fourier tiene esencialmente la misma interpretación que el contexto discreto. Cuando ξ crece en magnitud, $e^{i\xi}$ como frecuencias puras, son cada vez más rápidamente oscilantes. La fórmula de inversión dice que estas diferentes frecuencias pueden ser "sumadas" con pesos $\hat{f}(\xi)$ para recuperar la función f, si se tiene la frecuencia $e^{ix\xi}$ en la reconstrucción de f .

Definición 41 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $y \in \mathbb{C}$ definimos la* **traslación** R_y *por*

$$(R_y f)(x) = f(x - y)$$

y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$$

Se tiene entonces las siguientes propiedades

Lema 39 *Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y $x, y, \xi \in \mathbb{R}$, se tiene que*

i) $(\tilde{f})^\wedge(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$

ii) $(R_y f)^\wedge(\xi) = e^{-iy\xi}\hat{f}(\xi)$

iii) $\langle R_x f, Ryg\rangle = \langle f, R_{y-x} g\rangle$

iv $\langle f, R_y g\rangle = (f * \tilde{g})(y)$

La transformada de Fourier diagonaliza todas los operadores acotados invariantes por traslación. Una transformación lineal $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ se dice **invariante por traslación** si para todo $y \in \mathbb{R}$ y toda f en $L^2(\mathbb{R})$,

$$T(R_y f) = R_y(T(f)).$$

Como en el caso discreto se tiene que cada transformada lineal acotada, invariante por traslación, $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ es un operador de convolución es decir existe $b \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$T(f) = b * f \quad , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Aplicando inversión de Fourier obtenemos que

$$T(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{b}(\xi)\hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x} d\xi.$$

Así que T lo que hace es susstituir los "coeficientes" $\hat{f}(\xi)$ en la fórmula de inversión de Fourier por $\hat{b}(\xi)\hat{f}(\xi)$; es decir que T actua como un operador diagonal respecto al sistema $\{F_\xi\}_{\xi\in\mathbb{R}}$. En este este sentido diremos que la transformada de Fourier diagonaliza operadores invariante por traslación.

Un ejemplo de transformación lineal invariante por traslación lineal invariante por traslación es la derivada ya que

$$\frac{d}{dx}\left[(R_y f)(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x-y)\right] = \left(\frac{df}{dx}\right)(x-y) = R_y\frac{df}{dx}(x),$$

aunque la derivada no está definida en todo $L^2(\mathbb{R})$ ni es un operador acotado. En particular, si derivamos formalmente dentro de la integral con respecto a x se que

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\xi\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi,$$

Así que el operador derivada corresponde al multiplicador de Fourier $i\xi$ y la derivada es diagonalizada por el sistema de Fourier. Esta es la razón por la cual prevalecen las técnicas de Fourier en el estudio de ecuaciones diferenciales.

Definición 42 *Dada* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *y* $t\in\mathbb{R}, t>0$, *definimos* $f_t:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *por*

$$f_t(x) = \frac{1}{t}f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Lema 40 *Sea* f *en* $L^2(\mathbb{R})$ *y* $t>0$, *entonces se tiene que*

$$(f_t)^\wedge(\xi) = \hat{f}(t\xi),$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}$.

Ejercicios

1. Defina suma y multiplicación sobre $L^2(\mathbb{R})$ por

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x)\end{aligned}$$

   Demuestre que $L^2(\mathbb{R})$ con estas operaciones es un espacio vectorial

2. Demuestre que $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\bar{g}(x)\,dx$ es un producto interno sobre $L^2(\mathbb{R})$

3. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Demuestre que $\hat{f}$ es continua en cero de las dos siguientes maneras

   i) (Método elemental) Escriba

   $$\hat{f}(\zeta) - f(0) = \int_R \hat{f}(x)\left(e^{-ix\zeta} - 1\right) dx$$

   fije $\zeta \neq 0$ y tome

   $$A(\zeta) = \left\{ x \in R : |x| \leq \frac{1}{\sqrt{|\zeta|}} \right\} \text{ y } B(\zeta) = \left\{ x \in R : |x| > \frac{1}{\sqrt{|\zeta|}} \right\}$$

   sobre la region $A(\zeta)$ use la desigualdad

   $$\left| e^{-ix\zeta} - 1 \right| \leq |x\zeta| \leq \sqrt{|\zeta|}$$

   sobre $B(\zeta)$ use que $\left| e^{-ix\zeta} - 1 \right| \leq$

   Deje ζ tender a cero.

   ii) Aplicando el teorema de convergencia dominada a $\int_R f(x)\left(e^{-ix\zeta} - 1\right) dx$

   (a) Sea $\mathcal{X} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{X}$ es multiplicativa, no identicamente cero y diferenciable en 0. Demuestre que $\mathcal{X}(x)= e^{cx}$ para algún $c \in \mathbb{C}$

   Sugerencia: use la definición de derivada para demostrar que X es derivable en cada punto de R con $\mathcal{X}'(x) = \mathcal{X}(x) - \mathcal{X}'(0)$.

4.2 Ondículas y Análisis Multiresolución.

Nuestro objetivo en esta sección es construir un sistema de ondículas, es decir un conjunto ortonormal completo en $L^2(\mathbb{R})$ que consiste de traslaciones y dilataciones de una función ψ. Vamos a necesitar algunas notaciones.

Definición 43 *Supóngase que* $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ *y* $j, k \in \mathbb{Z}$*, definimos* $\psi_{j,k} \in L^2(\mathbb{R})$ *por*

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k).$$

El factor $2^{j/2}$ en la definición de $\psi_{j,k}$ es incluido para que todas la $\psi_{j,k}$ tengan la misma norma en $L^2(\mathbb{R})$, en efecto,

$$\begin{aligned} \|\psi_{j,k}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left|2^{j/2}\psi(2^j x-k)\right|^2 dx = 2^j \int_{\mathbb{R}} \left|\psi(2^j x-k)\right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\psi(y|^2\, dy = \|\psi\|_2^2\,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

Además, se puede escribir

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(x) &= 2^{j/2}\psi(2^j x-k) = 2^{j/2}\psi(2^j(x-2^{-j}k)) \\ &= 2^{-j/2}\psi_{2-j}(x-2^{-j}k). \end{aligned}$$

Definición 44 *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una función. El soporte de f, denotado por sop(f) es la clausura del conjunto*

$$\{x\in\mathbb{R} : f(x)\neq 0\}.$$

Diremos que f tiene soporte compacto si sop(f) es compact, es decir acotado. En otras palabras f tiene soporte compacto si existe $r<\infty$ tal que sop$(f)\subset[-r,r]$.

Supongamos que ψ tiene soporte compacto, digamos $\psi(x)=0$ para todo x tal que $|x|>r$, el radio r del intervalo es una medida del ancho de la función. Entonces $\psi_{j,0}$ tiene ancho $r/2^j$, ya que $\psi_{j,0}(x)=2^{j/2}\psi(2^i x)=0$ si $\left|2^j x\right|>r$, es decir si $|x|<\frac{r}{2^j}$. Así el efecto de la dilatación es comprimir ó dilatar el ancho, por un factor de 2^j.

Consideremos el efecto de la traslación en $\psi_{j,k}$ se tiene que $\psi_{j,k}$ es $2^{-j/2}$ veces la trasladada de $\psi_{j,0}$ en $2^{-j}k$. En particular si $\psi(x)\neq 0$ solamente en $|x|>r$, se tiene que $\psi_{j,k}(x)\neq 0$ solo para $2^j\left|x-2^{-j}k\right|<r$, lo cual es equivalente a $2^{-j}k-\frac{r}{2^j}<x<2^{-j},k+\frac{r}{2^j}$ Asi, se tiene que $\psi_{j,k}$ tiene el mismo ancho $\frac{r}{2^j}$ que $\psi_{j,k}$ es centrado en $2^{-j}k$ en lugar de cero.

Definición 45 *Un sistema de ondícula $L^2(\mathbb{R})$ es un conjunto ortonormal completo en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma*

$$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}\,,$$

para alguna ψ en $L^2(\mathbb{R})$. Las funciones $\psi_{j,k}$ son llamadas ondículas. La función ψ es llamada la ondícula madre.

Si $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de ondículas, entonces cada f en $L^2(\mathbb{R})$ puede ser escrita como

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \, \psi_{j,k}. \tag{4.2}$$

Esta identidad es denominada la **identidad de ondícula** y la función de $L^2(\mathbb{R})$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$ que manda f en $\{\langle f, \psi_{j,k}\rangle\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ se denomina la **transformada discreta de ondícula**.

La identidad de ondícula debería ser interpretada de la siguiente manera. Normalmente la ondícula madre ψ es concentrada cerca del origen, si suponemos que ψ tiene "ancho" alrededor de 1, se tendría que $\psi_{j,k}$ estará centrada en el punto $2^{-j}k$ y tiene ancho 2^{-j} Así que $\psi_{j,k}$ sería la ondícula madre ψ vista a escala 2^j. Como los coeficientes de ondículas $\langle f, \psi_{j,k}\rangle$ es el peso del término $\psi_{j,k}$ en la identidad de ondícula;$\langle f, \psi_{j,k}\rangle$ se pueden considerar como el valor que mide cuanto hay de f cerca de $2^{-j}k$ en la escala 2^{-j}. Podemos pensar la identidad de ondícula como la representación de f en sus componentes a diferentes escalas 2^{-j} y centradas en diferentes posiciones $2^{-j}k$, para $j, k \in \mathbb{Z}$.

Antes de considerar la construcción de sistemas discretas de ondículas discutiremos una formula que es similar a la identidad de ondículas, excepto que envuelve una integral en lugar de una suma e incluye todas las posibles traslaciones y dilataciones positivas.

Lema 41 *(Formula de Calderón) Suponga que $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es tal que*

$$\int_0^\infty (\hat{\psi})(s)^2 \frac{ds}{s} = 1$$

y

$$\int_0^\infty \left|\hat{\psi}(-s)\right|^2 \frac{ds}{s} = 1.$$

Para $t > 0, y \in \mathbb{R}$, defina $\psi_t(x) = \left(\frac{1}{t}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right)$

$$\psi_t^y(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\psi\left(\frac{x-y}{t}\right).$$

Entonces para toda f en $L^2(\mathbb{R})$, se tiene que

i) $f(x) = \int_0^\infty (\psi_t * \tilde{\psi} * f)(x) \frac{dt}{t}$ *ó, equivalentemente*

ii) $f(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_t^y\rangle \, \psi_t^y(x) dy \frac{dt}{t^2}$

La identidad i) es conocida como la **fórmula de Calderón**. La identidad ii) es un análogo continuo de la identidad de ondícula. Esta identidad dice que cada f en $L^2(\mathbb{R})$ se puede escribir como una suposición integral de las funciones básicas $\{\psi_t^y\}_{t>0,y\in\mathbb{R}}$. Razonando como en la discusión para la identidad de ondículas, las funciones ψ_t^y se pueden considerar que tienen escala t estan concentradas en y. La función que manda en el conjunto de coeficiente $\{\langle f, \psi_t^y\rangle\}_{t>0,y\in\mathbb{R}}$ es denominada la **trasformada ondícula contínua**. Se podría esperar que la identidad de ondículas en $\mathbb{R}$ se podría obtener con argumentos análogos a los que usamos en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$, usando la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$ en lugar de versiones anteriores. Desafortunadamente estos argumentos no funcionan en el caso de $L^2(\mathbb{R})$. Veamos la razón. En los casos $\ell^2(\mathbb{Z}_N), \ell^2(\mathbb{Z})$ la estructura de traslación en la base de ondícula era compatible con el conjunto entre parentesis. En particular pudimos verificar que $\{R_{2k}u\}_k$ es ortonormal si y sólo si $u*\tilde{u}+(u*\tilde{u})^* = 2\delta$, donde δ estaba en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ó $\ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces se podía aplicar la transformada de Fourier y obtener la condición correcta. En $L^2(\mathbb{R})$ no hay un elemento que corresponda a δ, una función que sea 1 en el origen y cero en otras partes es equivalente a la función o en $L^2(\mathbb{R})$ además en $L^2(\mathbb{R})$ estamos trabajando con un conjunto de trasaciones discretas; pero el espacio entre parentisis no es discreto. La condición de que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ produce solamente un conjunto discreto de condiciones el cual no corresponde a ninguna función. En vez de usar los argumento de la teoría discreta de ondícula, encontraremos una manera de usar los resultados en $\ell^2(\mathbb{Z})$ para construir ondículas en $L^2(\mathbb{R})$. La idea básica es construir una sucesión creciente de subespacios $\{V_j\}$ y dividir cada uno en dos partes. En el caso de $L^2(\mathbb{R})$ la sucesión de subespacios $\{V_j\}$ será infinita en ambas direcciones, es decir $\{V_j\}_{J\in\mathbb{Z}}$. Stéphome Mallat (1989) determinó las condiciones que la sucesión de subespacios $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ debe satisfacer para permitir construir un sistema de ondículas.

Definición 46 *Un Análisis Multirresolución con función escala φ es una sucesión $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ que tienen las siguientes propiedades*

i) $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es creciente, es decir,* $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$.

ii) Existe una función φ, denominada la **función escala**, *tal que el conjunto $\{\varphi(. - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal completo* *en el subespacio V_0 y además*

$$V_0 = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k) \varphi(. - k) : z = (z(k))_{K \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

iii) (Propiedad de dilatación). Para cada j en $\mathbb{Z}$, V_j consiste de las dilataciones por 2^j de los elementos de V_0, es decir, $f(.) \in V_0$, si y sólo si, $f\left(2^j\right) \in V_j$

iv) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j) = \{0\}$

v) (Densidad) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$

En esta sección demostraremos que un Análisis Multirresolución en $L^2(\mathbb{R})$ genera un sistema de ondículas en $L^2(\mathbb{R})$. De la condición de dilatación se tiene que (Ejercicio) para cada $j \in \mathbb{Z}$

$$V_j = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k) \varphi_{j,k} : z = (z(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

El enlace entre teoría de ondícula en $\mathbb{R}$ y teoría de ondícula en $\mathbb{Z}$ es la siguiente observación. Como $\varphi \in V_0 \subset V_1$ y $\{\varphi_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal completo para V_1 (Ejercicio), se tiene que para $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi_{1,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} \varphi(2x - k),$$

para alguna sucesión $u = (u(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (en realidad $u(k) = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle ; \forall k \in \mathbb{Z}$). Este es el origen del nombre $''funciónescala''para\varphi$ (también conocida como la ondícula padre) y sugiere la siguiente terminología.

Definición 47 *Si $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es un Análisis Multirresolución en $L^2(\mathbb{R})$ con función escala φ la ecuación*

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k), \tag{4.3}$$

es denominada **la ecuación escala**, *identidad de escala ó la ecuación de refinamiento. La sucesión $u = (u(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ es denominada la sucesión de escala.*

Se tiene el siguiente resultado.

Lema 42 *Si $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un Análisis Multirresolución en $L^2(\mathbb{R})$ con función escala φ y sucesión de escala u. Se tiene entonces que*

$$\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

es un conjunto ortonormal completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Demostración Reemplazando x por $x-k$ en la ecuación de escala, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(x-k) &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} u(\ell)\sqrt{2}\varphi(2(x-k)-\ell) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} u(\ell)\sqrt{2}\varphi(2x-2k-\ell)\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} u(m-2k)\sqrt{2}\varphi(2x-m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u(m-2k)\varphi_{1,m}(x).\end{aligned}$$

Es decir

$$\varphi_{0,k}(x) = \varphi(x-k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u(m-2k)\varphi_{1,m}(x)$$

de lo cual se obtiene que

$$\begin{aligned}\langle\varphi(\cdot),\varphi(\cdot-k)\rangle &= \langle\varphi_{0,0},\varphi_{0,k}\rangle = \left\langle \sum_{j\in\mathbb{Z}} u(j)\varphi_{1,j}, \sum_{m\in\mathbb{Z}} u(m-2k)\varphi_{1,m}\right\rangle\\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} u(j)\sum_{m\in\mathbb{Z}}\overline{u(m-2k)}\,\langle\varphi_{1,j},\varphi_{1,m}\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u(j)\overline{u(j-2k)}\end{aligned}$$

ya que $\{\varphi(\cdot-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$. De lo anterior se tiene que $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal. ∎

Este resultado sugiere el siguiente punto de vista. Sabemos que sucesiones del tipo $\{R_{2k}u\}$, aparecen en la teoría de $\ell^2(\mathbb{Z})$ y permiten dividir este espacio en dos partes ortogonales entre si. La sucesión u corresponde a $V_0\subset V_1$, debería haber una sucesión V, complementaria a u que corresponda a la parte de V_1 que es ortogonal a V_0 y estas dos sucesiones u y v deberían dar una división ortogonal de V_1. La misma división debería funcionar para cada V_j por la propiedad de dilatación. El conjunto de subespacios completamentarios debería producir un conjunto ortonormal completo en $\ell^2(\mathbb{R})$, de manera similar al caso $\mathbb{Z}_n$ o K. El lema siguiente dice que dada una sucesión u en $\ell^2(K)$ tal que $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal, existe una sucesión complementara V en $\ell^2(K)$ tal que $\{R_{2k}u\}_{k\in K}\cup\{R_{2k}V\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Lema 43 *Sea* $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *es ortonormal. Defina* V *en* $\ell^2(\mathbb{Z})$ *como*

$$V(k) = (-1)^{k-1}\tilde{u}(-k-1) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}.$$

Se tiene entonces que

$$\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}V\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

es un conjunto ortonormal completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$*.*

Demostración

Como $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene que $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Sea

$$m_0(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)e^{ik\theta}.$$

Note que $m_0(\theta) = \hat{u}(\theta)$. Esto es lo mismo que $\hat{u}\,(\theta)$ en secciones anteriores. Vamos a cambiar la notación acá para evitar confusiones y para adaptarnos a la nomenclatura clásica. El hecho que $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal es equivalente a que

$$|m_0(\theta)|^2 + |m_0(\theta+\pi)|^2 = 2 \quad c.s.$$

Definimos

$$m_1\,(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v\,(k)\,e^{ik\theta} \qquad (\text{note que } m_1\,(\theta) = \hat{v}\,(\theta))\,.$$

se tiene entonces que

$$m_1\,(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{k-1}\,\overline{u\,(1-k)^{e^{ik\theta}}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^{-j}\,\overline{u\,(s)}e^{i(1-j)\theta}$$

Escribiendo $(-1)^{-j} = (-1)^j = \left(e^{-i\pi}\right)^j = e^{-i\pi j}$, obtenemos

$$m_1\,(\theta) = \overline{\sum_{s\in\mathbb{Z}} e^{-i\theta}u\,(j)\,e^{ij(\theta+\pi)}} = e^{i\theta}\overline{m_0\,(\theta+\pi)}$$

Entonces la matriz

$$A\,(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} m_0\,(\theta) & m_1\,(\theta) \\ m_0\,(\theta+\pi) & m_1\,(\theta+\pi) \end{bmatrix}$$

es unitaria. (**Ejercicio**). De lo cual se sigue el resultado deseado utilizando uno de los resultados anteriores de la teoría de $\ell^2(\mathbb{Z})$.∎

El siguiente resultado muestra que la división anterior de $\ell^2\,(\mathbb{Z})$ produce una división de V_1. Mientras la sucesión de escala u corresponde a φ la sucesión V corresponderá a la ondícula madre ψ. ∎

Lema 44 *Sea* $\{V_j\}_{j\in-\mathbb{Z}}$ *un Análisis de Multiresolución con función escala* φ. *Sea*

$$v = (-1)^{k-1}\,\tilde{u}\,(k-1)\,,$$

definimos

$$\psi\,(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v\,(k)\,\varphi_{1,k}\,(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v\,(k)\,\sqrt{2}\varphi\,(2x-k)$$

se tiene entonces que

$$\{\psi\,(.-k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \text{ es un cojunto ortonormal en } \ell^2\,(\mathbb{R})$$

Defina

$$W_0 = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} z\,(k)\,\psi\,(x-k) : z = (\mathbb{Z}\,(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2\,(\mathbb{Z})\right\}.$$

Entonces

$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$

Demostración

De manera similar a la prueba anterior obtenemos que

$$\psi\,(x-k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} V\,(m-2k)\,\varphi_{1,m}\,(x)$$

y

$$\langle\psi,\psi_{0,k}\rangle = \langle v, R_{2k}v\rangle = \begin{cases} 1, \text{ si } k=0 \\ 0, \text{ si } k \neq 0\end{cases}$$

Además

$$\langle\psi_{0,j};\psi_{0,k}\rangle = \langle\psi;\psi_{0,k-j}\rangle$$

De lo cual se deduce que $\{\psi\,(.-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $\ell^2\,(\mathbb{Z})$. Tambien tenemos que (**Ejercicio**)

$$\langle\varphi,\varphi_{0,k}\rangle = \langle u, R_{2k}v\rangle = 0, \forall k\in\mathbb{Z}$$

y

$$\langle\varphi_{0,j},\varphi_{0,k}\rangle = 0, \forall k,j\in\mathbb{Z}$$

Lo anterior implica que V_0 y W_0 son ortogonales. Como $\psi_{0,k}\in V_1$ para cada $k\in\mathbb{Z}$, se tiene que $W_0\subset V_1$ y por ende $V_0\oplus W_0\subset V_1$. Veamos que $V_1\subset W_0\oplus V_0$. Por una parte se tiene que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{u}\,(2k-j)\,u\,(m-2k)+\sum_{k\in Z}\tilde{v}\,(2k-j)\,v\,(m-2k) = \begin{cases} 1, \text{ si } m=j \\ 0, \text{ si } m\neq j\end{cases}$$

De lo cual se que

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{u}(2k-j)\,\varphi_{0,k} \quad + & \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{v}(2k-j)\,\psi_{0,k} \\
= & \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{u}(2k-j) \sum_{m\in\mathbb{Z}} u(m-2k)\,\varphi_{1,k} \\
& \qquad + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{v}(2k-j) \sum_{m\in\mathbb{Z}} V(m-2k)\,\varphi_{1,k} \\
= & \quad \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{u}(2k-j)\,u(m-2k) \right. \\
& \qquad \left. + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{v}(2k-j)\,V(m-2k)\varphi_{1,m} = \varphi_{1,j} \right.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Entonces $\varphi_{1,j} \in V_0 \oplus W_0$, para todo $j \in \mathbb{Z}$; de lo cual se deduce que $V_1 \subset V_0 \oplus W_0$. Por dilatación cada V_j se puede dividir ortogonalmente como

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}.$$

Este proceso nos permite construir una base de ondículas para $L^2(\mathbb{R})$.$\blacksquare$

Teorema 12 *(Mallat) Sea $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ un Análisis de Multiresolución con función de escala φ y sucesión de escala $u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Defina v por*

$$v(k) = (-1)^{k-1}\,\tilde{u}(k-1)$$

y

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\,\varphi_{1,k}(x).$$

Se tiene entonces que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de ondículas en $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración

Para $j \in \mathbb{Z}$ defina

$$W_j = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\,\psi_{j,k} : z = (z(k))_{k\in K} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

$\{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ tiene la propiedad de dilatación (**Ejercicio**), es decir, $f(.) \in W_0 \Leftrightarrow f\left(2^j.\right) \in W_j$

Además $V_1 = V_0 \oplus W_0$ y $V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \forall j \in \mathbb{Z}$.

El conjunto $B = \{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal ya que si j es fijo $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal y si se tiene $\psi_{j,m}$ y $\psi_{\ell,k}$ con $j \neq \ell$ se puede asumir que $j > \ell$ y como

$$\psi_{\ell,m} \in W_\ell \subseteq V_{\ell+1} \subset \cdots \subset V_j \perp W_j,$$

se tiene que $\langle \psi_{\ell,m}, \psi_{j,k}\rangle = 0$.

Demostremos ahora la completitud de B. Vamos a usar las propiedades $iv)$ y $v)$ de A.M.R que hasta el momento no habíamos usado.

Vamos a usar el siguiente resultado (**Ejercicio**).

Sea $g \in V_j$ para algún $j \in \mathbb{Z}$ y suponga que para todo $\ell \leq j-1$ $g \perp W_\ell$, entonces $g = 0$.

Supongamos que $f \in L^2(\mathbb{R})$ es ortogonal a cada elemento de B, se sigue que $f \perp w_j$ para cada $j \in \mathbb{Z}$. Necesitamos probar que $f \equiv 0$, para $j \in \mathbb{Z}$ sea $p_j(f)$ la proyección de f sobre V_j, es decir

$$P_j(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \varphi_{j,k}$$

$P_j(f) \in V_j$ y $(f - P_j(f))$ es ortogonal a V_j para $e \leq j-1$, $W_e \subseteq V_{e+1} \subseteq V_j$, asi que $(f - p_j(f))$ es ortogonal a cada W_e. Como $F \perp W_e$ para linealidad del producto escalar se tiene que $P_j(f) \perp W_e$ para $e \leq j-1$, y por el ejercicio propuesto

$$P_s(f) = 0, \text{ para toda } j \in \mathbb{Z}.$$

Además $P_j(f)$ es la mejor aproximación a f en V_j, es decir, para todo h en V_j

$$\|f\| = \|f - P_j(f)\| \leq \|f - h\|.$$

Por la propiedad de densidad existe una sucesión $\{h_n\} \subset \bigcup_{j\in_j}$ tal que

$$\|f - h_n\| \overrightarrow{n \to \infty} 0,$$

lo cual implica que

$$\|f\| = 0$$

y por ende $f = 0$ c.s.

Lo cual completa la demostración. ∎

Ejercicios

1. Para $j,k\in\mathbb{Z}$ definamos $\psi_{j,k}$ por

$$\psi_{j,k}(x)=\begin{cases} -2^{j/2}, \text{ si } k/2^j\leq x\leq k/2^j+1/2^{j+1} \\ 2^{j/2}, \text{ si } \left(k/2^j\right)+\frac{1}{2^{j+1}}\leq x\leq (k+1)/2^j \\ 0; \text{ si } x<k/2^j \text{ó } x\geq (k+1)/2^j \end{cases}$$

Demuestre que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$

Sugerecia: Use la propiedad de que si dos intervalos diádicos se interpretan, entonces uno es subconjunto del otro.

2. Defina φ por

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, 0\leq x<1 \\ 0, \text{ si } x<0\text{ó } x\geq 1 \end{cases}$$

y

$$\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi\left(2^jx-k\right)$$

i) Demuestre que $\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}$ si $x\in I_{j,k}$ y $\varphi_{j,k}(x)=0$ si $x\in I_{j,k}$

ii) Para $j\in\mathbb{Z}$ y $f\in L^2(\mathbb{R})$, defina $P_j(f)$ por

$$P_j(f)=\sum_{k\in Z}\langle f,\varphi_{j,k}\rangle\varphi_{j,k}.$$

Demuestre que para $x\in I_{j,k}$

$$P_j(f)(x)=2^j\int_{I_{j,k}}f(x)\,dx$$

3. i) Sea $\varphi,\psi\in L^2(\mathbb{R})$ tales que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\varphi}\left(2^{-j}\xi\right)\hat{\psi}\left(2^{-j}\xi\right)=1,$$

para todo $\xi\neq 0,\xi\in\mathbb{R}$

Demuestre que para $f\in L(\mathbb{R})$ se tiene que

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\tilde{\varphi}_{2^{-j}}*\psi_{2^{-j}}*f$$

ii) Suponga que

a) $\hat{\varphi}(\xi) = 0$, al menos en $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$ y
b) $\hat{\varphi}(\xi) \neq$ para todo $\xi \in [-5/3, -3/5] \cup \left[\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right]$

Sea
$$B(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2$$

Demuestre usando $a)$ que esta suma es finita en cada ξ y usando $b)$ que $B(\xi) \neq 0$ para $\xi \neq 0$.

Demuestre que $B\left(2^j \xi\right) = B(\xi)$, para toda $j \in \mathbb{Z}$.

Sea $\hat{\psi}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) |B(\xi)|$.

Demuestre que ψ y φ asi defina satisfacen que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)} \hat{\varphi}\left(2^{-j}\xi\right) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R},\ \xi \neq = 0.$$

4. (**Teorema del Muestreo de Shannon**) Sea $h \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$sop\ \hat{h} \subseteq [-b, b]$$

y $\left(\hat{h}\right)^{\vee}(x) = h(x), x \in \mathbb{R}$

i) Demuestre que para $|\xi| \leq b$

$$h(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\pi}{b} h(n\pi/b) e^{-in\pi\xi/b}$$

Sugerencia: Desarrolle $\hat{h}$ en términos de la base $\left\{e^{-in\pi t/b}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y note que

$$\left\langle \hat{h}, e^{-int\pi/b} \right\rangle = \frac{1}{2b} \int_{-b}^{b} \hat{h}(t) e^{in\pi t/b}$$

ii) Demuestre que

$$h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n\pi/b) \frac{\sin(bx - n\pi)}{bx - n\pi}$$

Sugerencia: Aplique inversión de Fourier

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

5. (Identidad de la Phi transformada) Sean φ, ψ como $i)$ del ejercicio anterior tales que $sop\,(\hat{\varphi})$ y $sop\left(\hat{\psi}\right) \subset \left[-2, -\frac{1}{2}\right] \cup [1/2, 2]$.

   Defina $\varphi_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$ por
$$\varphi_{j,k}\,(x) = 2^{j/2}\varphi\left(2^j x - k\right) \text{ y } \psi_{j-k}\,(x) = 2^{j/2}\psi\left(2^j x - k\right)$$

   i) Demuestre que $\hat{\psi}_{j,k} = 2^{-j/2} e^{-ik2^{-j\xi}} \hat{\psi}_{2^{-j}}$

   ii) para $f \in L^2\,(\mathbb{R})$ demuestre que $\langle f, \varphi_{j,k}\rangle = 2^{-j/2} f * \tilde{\varphi}_{2^{-j}}\left(2^{-j}k\right)$

   iii) para $f \in L^2\,(\mathbb{R})$ demuestre que
$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle\, \psi_{j,k}$$

   Sugerencia: Aplique inversión de Fourier para escribir
$$f = \left(\left(f * \tilde{\varphi}_{2^{-j}}\right)^{\wedge} \hat{\psi}_{2^{-j}}\right)^{\vee},$$
   note que
$$sop\,(f * \tilde{\varphi}_{2^{-j}})^{\wedge} \subseteq \left\{\xi : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\right\} \subseteq \left\{\xi : -2^j\pi \leq \xi \leq 2^j\pi\right\}$$

   Observación: Esta fórmula es similar a la fórmula de ondícula, pero no proviene de un sistema ortonormal.

6. Para $j \in \mathbb{Z}$ sea
$$V_j = \left\{f \in L^2\,(\mathbb{R}) : sop\left(\hat{f}\right) \subseteq \left[-2\pi, 2^j\pi\right]\right\}$$

   Demuestre que $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un Análisis Multiresolución.

   Sugerencia: Es fácil ver que cada V_j es un subespacio de $L^2\,(\mathbb{R})$. Para las otras propiedades defina
$$\mathcal{X}_{[-\pi,\pi]}\,(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ si } -\pi \leq \xi \leq \pi \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

   Sea $\varphi\,(x) = \left(\mathcal{X}_{[-\pi,\pi]}\right)^{\vee}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ si $f \in V_0$ podemos expandir $\hat{f}$ como una serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\, e^{-ik\xi} \mathcal{X}_{[-\pi,\pi]}(\xi),$$

para alguna sucesión $(a(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Note que

$$((x-k))^{\wedge}(\xi) = e^{-ik\xi} \mathcal{X}_{[-\pi,\pi]}(\xi)$$

Por inversión de Fourier se deduce que

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\, \varphi(x-k)$$

4.3 Construcción de Análisis de Multiresolución.

Vamos a discutir ahora como los Análisis de Multiresolución pueden ser construidos. Comenzamos con un ejemplo de vital importancia como es el **Análisis de Multiresolución de Haar**

Para cada $j,k \in \mathbb{Z}$, sea $I_{j,k}$ el intervalo $\left[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\right]$. Los intervalos $I_{j,k}$ son llamados intervalos diádicos.

Para cada $j \in \mathbb{Z}$ sea

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R} : \text{ para toda } k \in \mathbb{Z} \text{ ,} f \text{ es constante en} I_{j,k} \right\}$$

Note que $I_{j+1,k} \subset I_{j,e} \quad \forall j,k,\ell \in \mathbb{Z}$ por lo tanto si $f \in V_j, \quad f \in V_{j+1}$, es decir, $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es creciente.

Tomenos

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{si } x < 0 \text{ó } x \geq 1 \end{cases}$$

se tiene que $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{\varphi_{1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal y cada $f \in V_0$ se puede escribir como

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k \varphi(x-k),$$

donde C_k es el valor de f en el intervalo $[k, k+1]$. La propiedad de dilatación se sigue directamente de la definición de V_j.

Si $f \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$, entonces f es constante en los intercalos $\left[0, 2^{-j}\right)$ y $\left[-2^{-j}, 0\right)$ para toda $j \in \mathbb{Z}$, lo cual implica que f es constante en $[0,\infty)$ y $(-\infty, 0)$ (haciendo tender j a $-\infty$). Como $f \in L^2(\mathbb{R})$ se debe tener que las dos constantes sean cero.

La propiedad de densidad es cierta, pero es más complicada verificarla y se seguirá de un resultado más general que veremos luego.

Se tiene entonces que $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ definido arriba es un Análisis de Multiresolución con función escala φ. Aplicaremos el resultado anterior para encontrar el sistema de ondícula correspondiente para $L^2(\mathbb{R})$. Encontremos los coeficientes $(u(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ en la ecuación de escala

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k).$$

Notemos que $\varphi(2x-k) = \begin{cases} 1, & \text{si } \frac{k}{2} \leq x < \frac{(k+1)}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$ de lo cual se obtiene que

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1),$$

es decir,

$$u(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad u(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad u(j) = 0; \quad \text{si } j \neq 0, 1.$$

Sustituyendo u en la fórmula

$$v(k) = (-1)^{k-1}\tilde{u}(k-1) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}$$

tenemos que

$$V(k) = \begin{cases} -1/\sqrt{2}; & \text{si } k = 0 \\ 1/\sqrt{2}; & \text{si } k = 1 \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Como

$$\psi(x) = -\varphi(2x) + \varphi(2x-1) = \begin{cases} -1; & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 1; & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces

$$\psi_{j,k}(x) = \begin{cases} -2^{j/2}; & \text{si } k/2^j \leq x < \frac{k+1/2}{2^j} \\ 2^{j/2}; & \text{si } \frac{k+1/2}{2^j} \leq x < \frac{k+1}{2^j} \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ son denominadas las **funciones de Haar** (1910). Este fué el primer ejemplo concreto de ondícula que se conoció.

Note que los coeficientes de u y v para el sistema de Haar son los generadores del sistema de Haar para $\ell^2(\mathbb{Z})$. Esto no es sorprendente ya que según uno de los resultados anteriores la sucesión de escala u de un Análisis de Multiresolución es tal que $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Vamos a estudiar ahora el problema inverso, es decir, dada una sucesión u se desea obtener una función que satisfaga la relación

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k)$$

tal que φ es la función escala para un AMR $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Desafortunadamente, el ejemplo siguiente muestra que esto no es siempre posible.

Ejemplo: Sea $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ definido por

$$u(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}; & \text{si } k = 0 \text{ó } k = 3 \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

$\{R_{2k}u\}$ es ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Sea $\varphi(x) = \begin{cases} 1/3; & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases}$ se tiene que

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-3)$$

y por lo tanto φ es solución de

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k).$$

Sin embargo el conjunto $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ no es ortogonal ($\langle\varphi,\varphi_{0,1}\rangle = 2/9$), así que φ no es la función escala de ningún Análisis de Multiresolución. ∎

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente resultado.

Teorema 13 *Sea $u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Para $\xi \in \mathbb{R}$ defina*

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi}. \tag{4.6}$$

Supongamos que $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) = \sqrt{2},$$

y que para algún $\varepsilon > 0$
$$\sum_{k in \mathbb{Z}} |k|^{\varepsilon} |u(k)| < \infty$$
y
$$\inf_{|\xi| \leq \pi/2} |m_0(\xi)| > 0.$$
Se tiene entonces que el producto infinito
$$\prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$$
converge uniformemente sobre conjuntos acotados de $\mathbb{R}$ *a una función* $\hat{\varphi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$*. Si tomamos* $\varphi = (\hat{\varphi})^{\vee}$*, entonces*
$$\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{R}}$$
es un conjunto ortonormal en $L^2(\mathbb{R}); \varphi$ *satisface la relación de escala.*

Si definimos
$$V_j = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{j,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\},$$
entonces $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es un Análisis de Multiresolución con función escala* φ*.*

El teorema anterior comienza con una sucesión $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que sus trasladadas pares forman un conjunto ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$ y satisface otras condiciones extras y produce un Análisis de Multiresolución con sucesión escala u. Así tenemos un método de construir ondículas.

El teorema anterior será demostrado a través de una serie de lemas. Veamos que las condiciones impuestas sobre u son razonables. Recuérdese, que aplicando transformada de Fourier a $\varphi(\cdot - k)$ tenemos,
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(2x-k)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{2}e^{-ik\xi/2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{-iy\xi/2}dy = \frac{1}{2}e^{-ik\xi/2}\hat{\varphi}(\xi/2).$$

Supongamos que tenemos la relación de escala, aplicando transformada de Fourier a la relación de escala se obtiene,
$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)e^{-ik\xi/2}\hat{\varphi}(\xi/2).$$

Lo cual es, dicho en la notación del teorema,

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2)$$

reemplazando, ξ por $\xi/2$, obtenemos

$$\hat{\varphi}(\xi/2) = m_0(\xi/4)\hat{\varphi}(\xi/4)$$

sustituyendo arriba tenemos

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)m_0(\xi/4)\hat{\varphi}(\xi/4)$$

iterando el proceso tenemos en el paso $n \in \mathbb{N}$ que

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)m_0(\xi/4)\cdots m_0(\xi/2^n)\hat{\varphi}(\xi/2^n).$$

Lo cual sugiere hacer tender n a infinito y obtener

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(0)\prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j). \tag{4.7}$$

Si $\hat{\varphi}(0) = 0$ se tendría que $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ para todo ξ lo cual implicaría que $\varphi \equiv 0$ que no es una función escala. Así, debemos asumir, para obtener una solución no trivial, que $\hat{\varphi}(0) \neq 0$.

Si todo esto funcionara, se tendría que si la solución φ de la ecuación escala existe, es única, salvo un factor multiplicativo y está determinada explícitamente por m_0 y por lo tanto por u. Para que tenga sentido la convergencia del producto infinito y la continuidad de $\hat{\varphi}$ en cero, se necesitan algunas condiciones adicionales sobre u.

Obsérve que como requerimos para una solución no trivial φ que $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ obtenemos $\hat{\varphi}(0) = m_0(0)\hat{\varphi}(0)$, y por tanto

$$m_0(0) = 1,$$

y esto es equivalente, por la definición de m_0 a

$$\sum_{k\in} u(k) = \sqrt{2},$$

que es una restricción nueva en u que no aparece en el contexto de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Además garantiza que el término $m_0(\xi/2^j)$ converge a 1 cuando $j \to \infty$, que es esencial para la convergencia del producto $\prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$.

Note que con m_0 es una función 2π-periódica en $\mathbb{R}$, tenemos que

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}(-\xi),$$

donde $\hat{u}$ denota la transformada de Fourier de u en $\ell^2(\mathbb{Z})$. Para $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ las sumas parciales de la serie (4.6) son continuas y convergen uniformemente a m_0 (**Ejercicio**), entonces m_0 es continua.

Recuerde del capítulo anterior, que $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal si y sólo si,

$$|\hat{u}(\theta)|^2 + |\hat{u}(\theta+\pi)|^2 = 1,$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$, lo cual es equivalnete a

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1, \tag{4.8}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Lo que implica trivialmente que $|m_0(\xi)| \leq 1$. Por lo tanto,

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq |\hat{\varphi}(\xi/2^n)|.$$

Supondremos que $\hat{\varphi}$ es continua en cero, lo cual es cierto si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Sea v la "compañera" de u definida por $v(k) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}$, tal que u, v generan una base de ondículas de primer paso. Definimos

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\varphi_{1,k}(x). \tag{4.9}$$

Tomando transformada de Fourier a ambos lados de esta ecuación obtenemos,

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)e^{-ik\xi/2}\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}).$$

Definiendo,

$$m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)e^{-ik\xi},$$

esta última ecuación es equivalente a

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1(\xi/2)\hat{\psi}(\xi/2).$$

Iterando el argumento obtenemos,

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1(\xi/2)\prod_{j=2}^{\infty} m_0(\xi/2^j), \tag{4.10}$$

usando la normalización que $\hat{\varphi}(0) = 1$.

Note la similitud de las ecuaciones (4.7) y (4.10) con las relaciones obtenidas par φ, ψ en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Observe que m_1 es 2π-periódica y que

$$m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{v}(-\xi),$$

donde $\hat{v}$ denota la transformada de Fourier de v en $\ell^2(\mathbb{Z})$. Luego

$$m_1(\xi) = e^{-i\xi}\overline{m_0(\xi + \pi)}.$$

Esto suguiere que en vez deempezar con u podemos empezar con m_0 la construcción del análisis de Mulitiresolución.

Sabemos que si $\{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base de ondículas de primer paso de $\ell^2(\mathbb{Z})$ y ello es equivalente a que la matriz

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) \\ m_0(\xi+\pi) & m_1(\xi+\pi) \end{bmatrix}$$

es unitaria para todo ξ. En particular se tiene que las columnas tienen longitud 1 lo cual significa que

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_1(\xi)|^2 = 1, \, \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Como $m_0(0) = 1$, se debe tener $m_1(0) = 0$. Tomando $\xi = 0$ en

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1(\xi/2)\hat{\psi}(\xi/2),$$

obtenemos que

$$\hat{\psi}(0) = 0,$$

es decir

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0.$$

Es de esta **propiedad de cancelación** de donde proviene el nombre de ondículas (walvelets), ya que esta propiedad dice ψ está oscilando en un cierto sentido.

En los resultados anteriores se ha asumido que $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$, es decir, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)| < \infty$. Esta información es suficientete para garantizar la continudad de m_0, pero no es suficiente para dar algunas estimaciones que se necesitaron en la prueba del teorema. Es por eso que se hace una suposición , más fuerte,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{\varepsilon} |u(k)| < \infty, \text{ para algún } \varepsilon > 0$$

Lema 45 *Sea* $u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ *tal que para algún* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{\varepsilon} |u(k)| < \infty$$

Entonces existe $c > 0$ *tal que,* $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u(k)e^{-ik\xi}$*, verifica*

$$|m_0(\xi) - m_0(0)| \leq C\,|\xi|^{\varepsilon},$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Demostración

Vamos a suponer que $\xi \neq 0$, ya que en ese caso no hay nada que probar. Usaremos la desigualdad $\left|e^{-i\theta} - 1\right| \leq |\theta|, \forall\theta \in \mathbb{R}$ (verificarlo).

Si tomamos $S = \{k \in \mathbb{Z} : |k| \leq 1/|\xi|\}$y $T\{k \in \mathbb{Z} : |k| > 1/|\xi|\}$, tenemos que $|m_0(\xi) - m_0(0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left|\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u(k)e^{-ik\xi} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\right|$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)| \left|e^{-ik\xi} - 1\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in S} u(k)\,|k\xi| + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in T} |u(k)|\,2 \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in S} |u(k)|\,|k\xi|^{\varepsilon} + \sqrt{2} \sum_{k\in T} |u(k)|\,|k\xi|^{\varepsilon} \leq \sqrt{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)|\,|k|^{\varepsilon}\,|\xi|\,,^{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Tomando $C = \sqrt{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)|\,|k|^{\varepsilon}$ queda demostrado el lema. ∎

Nota: Para m_0 se supone que $0 < \varepsilon < 1$, lo cual no quita generalidad al resultado.

La condición $|m_0(\xi) - m_0(0)| < c\,|\xi|^{\varepsilon}$, es dominada una **condición de Lipschitz** de orden ε en cero. Esta condición es suficiente para permitir la convergencia del producto infinito que aparece en el teorema.

Lema 46 *Supongamos que* $m_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *satisface que* $m_0(0) = 1$, $|m_0(\xi)| \leq 1$ *y*

$$|m_0(\xi) - m_0(0)| \leq C\,|\xi|^{\varepsilon}$$

para toda $\xi \in \mathbb{R}$ *. Si definimos*

$$G_n(\xi) = \prod_{i=1}^{n} m_0(\xi/z^j) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

se tiene entonces que $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *converge uniformemente sobre conjuntos acotado de* $\mathbb{R}$ *.*

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|G_{n+1}(\xi) - G_n(\xi)| = \prod_{j=1}^{n} m_0(\xi/2^j) \left| m_0(\xi/2^{n+1}) - 1 \right|$$

$$\leq \left| m_0(\xi/2^{n+1}) - 1 \right| \leq C \left| \xi/2^{n+1} \right|^{\varepsilon}.$$

Por lo tanto si $m > n$, por la desigualdad triangular, se tiene que

$$|G_m(\xi) - G_n(\xi)| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |G_{j+1}(\xi) - G_j(\xi)| \leq C \sum_{j=1}^{m-1} \left| \frac{\xi}{2^{(j+1)}} \right|^{\varepsilon}$$

$$\leq C |\xi|^{\varepsilon} \sum_{j=n}^{m} \frac{1}{2^{(j+1)\varepsilon}} \leq C 2^{-n\varepsilon} |\xi|^{\varepsilon} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j\varepsilon}} \leq C' 2^{-n\varepsilon} |\xi|^{\varepsilon}$$

donde C' es una constante que depende de ε. La desigualdad anterior muestra que la sucesión $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy sobre conjuntos acotado de $\mathbb{R}$ y por lo tanto es uniformemente convergente sobre conjuntos acotados de $\mathbb{R}$. ∎

Se tiene entonces que bajo las hipótesis del teorema , m_0 satisface las condiciones de los dos resultados anteriores y por lo tanto el producto infinito es convergente y se puede obtener que

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(0) \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j),$$

pasando al limite cuando n tiende a infinito.

Vamos ahora a resolver el problema de obtener la ortonormalidad de $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{R}} = \{\varphi_{1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ lo cual no es trivial,como lo evidencia el ejemplo anterior. Comenzaremos con un criterio para ortogonalidad.

Lema 47 *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces el conjunto $\{\varphi_{1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ si y sólo si*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 = 1. \quad c.s$$

Demostración

Por la identidad de Parseval tenemos que

$$\langle \varphi, \varphi_{0,k} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi+2\pi\ell}^{\pi+2\pi\ell} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi,$$

haciendo el cambio de variable $y = \xi - 2\pi\ell$ y observando que $e^{ik(y+2\pi\ell)} = e^{iky}$, obtenemos

$$\langle \varphi, \varphi_{0,k} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{e \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(y + 2\pi e)|^2 e^{ik\xi} dy.$$

Definamos g como $g(y) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(y + 2\pi\ell)|^2$, se tiene que g es $2\pi-$periódica y $g \in L^1[-\pi, \pi]$. (tomando $k = 0$ en la fórmula d arriba) tenemos que esto es cierto si y sólo si el coeficiente cero de Fourier de g see anula. Por unicidad de series de Fourier para funciones en $L^1[-\pi, \pi]$ obtenemos que $g(y) = 1$ c.s., es decir, $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal si y sólo si

$$1 = g(y) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(y + 2\pi\ell)|^2 \quad c.s.$$

que es lo queriamos demostrar. ∎

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que si $\hat{\varphi}$ se define como en el teorema, el conjunto $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal. Trataremos de obtener φ como un límite en $L^2(\mathbb{R})$ de una sucesión $\{\varphi^n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(\mathbb{R})$ tal que $\left\{\varphi_{0,k}^n\right\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{\varphi^n(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal para cada n en $\mathbb{N}$.

Lema 48 *Sea $m_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función $2\pi-$periódica tal que*

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad ,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Defina

$$\hat{\varphi}_0 = \chi_{[-\pi,\pi]},$$

y para $n \geq 1$ defina inductivamente

$$\hat{\varphi}_n(\xi) = m_0(\xi/2)\hat{\varphi}_{n-1}(\xi/2).$$

Entonces para cada $n \geq 1$,

$$\hat{\varphi}^n(\xi) = \chi_{[-2^n\pi, 2^n\pi]}(\xi) \prod_{j=1}^{n} m_0(\xi/2^j)$$

y $\left\{\varphi_{0,k}^n\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$, es un conjunto ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración

Vamos a usar inducción para probar la ortonormalidad de $\left\{\varphi_{0,k}^n\right\}$. Si $n = 0$, se tiene que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 = 1$$

ya que dado $\xi \in \mathbb{R}$, existe un único $k \in \mathbb{Z}$ tal uqe $\xi + 2\pi k \in [-\pi, \pi]$, lo cual hace que la suma anterior sólo tenga un término diferente de cero (igual a 1) para cada ξ.

Supongamos que la hipótesis es cierta para $n-1$, se tendrá que

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}^{n-1}(y + 2\pi\ell)\right|^2 = 1,$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Entonces, partiendo la suma en términos pares e impares obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}^n(\xi + 2\pi\ell)|^2 \quad &= \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |m_0(\xi/2 + 2\pi\ell)|^2 \left|\hat{\varphi}^{n-1}(\xi/2 + 2\pi\ell)\right|^2 \\ &\quad + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |m_0(\xi/2 + 2\pi\ell)|^2 \left|\hat{\varphi}^{n-1}(\xi/2 + 2\pi\ell + \pi)\right|^2,\end{aligned}$$

como m_0 es $2\pi-$periódica obtenemos que ésto es igual a

$$|m_0(\varphi/2)|^2 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}^{n-1}(\xi/2 + 2\pi\ell)\right|^2 + |m_0(\xi/2 + \pi)|^2 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}^{n-1}(\xi/2 + 2\pi\ell + \pi)\right|^2$$

$$= |m_0(\xi/2)|^2 + |m_0(\xi/2 + \pi)|^2 = 1,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Para probar que

$$\hat{\varphi}^n(\xi) = \chi_{[-2^n\pi, 2^n\pi]}(\xi) \prod_{i=1}^{n} m_0(\xi/2^i)$$

se usa la definición de $\hat{\varphi}^n$ y un argumento inductivo para terminar la prueba del lema.

Por la identidad de Parseval se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}^n(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi = \left\langle \hat{\varphi}^n, \hat{\varphi}_{0,k}^n \right\rangle = \begin{cases} 2\pi, \text{si } k = 0 \\ 0, \text{si } k \neq 0 \end{cases},$$

si se pudiera tomar el límite cuando n tiende a infinito dentro de la integral obtendríamos

$$\langle \hat{\varphi}, \hat{\varphi}_{ok} \rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \hat{\varphi}^n, \hat{\varphi}^n_{o,k} \right\rangle = \begin{cases} 2\pi, \text{si } k = 0 \\ 0, \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

y aplicando la identidad de Parseval otra vez obtendríamos la ortonormalidad de $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Lamentablemente no siempre se tiene que el límite de la integral es la integral del límite, como lo muestra el contraejempo. El siguiente resultado muestra que la suposición $\inf\limits_{|\xi|\le\pi/2} |m_0(\xi)| > 0$, es suficiente para asegurar que el límite de la integral del límite. □

Lema 49 *Sea $m_0 : \mathbb{R} \to, 2\pi-$periódica, Lipschitz en cero,*

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \text{ y } m_0(0) = 1$$

y

$$\inf_{|\xi|\le\pi/2} |m_0(\xi)| > 0.$$

Definimos $\hat{\varphi}$, por $\hat{\varphi}(\xi) = \prod\limits_{j=1}^{n} m_0(\xi/2^j)$, y tomemos $\varphi = (\hat{\varphi})^{\vee}$, se tiene entonces que $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{R}}$ es ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración

La convergencia puntual de $\prod\limits_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^i)$ sigue de un lema anterior. Así se tiene que $\hat{\varphi}$ está bien definida. Definimos

$$\hat{\varphi}^n(\xi) = \chi_{[-2^n\pi, 2^n\pi]}(\xi) \prod_{j=1}^{n} m_0(\xi/2^j).$$

Entonces $\{\hat{\varphi}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ converge puntualmente a $\hat{\varphi}$. Como $|m_0(\xi)| \le 1$, se tiene que si $|\xi| \le 2^n\pi$

$$|\varphi(\xi)| \le |\hat{\varphi}^n(\xi)|.$$

Por lo tanto

$$\int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi \le \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} |\hat{\varphi}^n(\xi)|^2 \, d\xi \le \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}^n(\xi)|^2 \, d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\varphi^n(x)|^2 \, dx = 2\pi$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi = \lim_{n\to\infty} \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi \le 2\pi,$$

es decir, $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$. Si pudieramos probar que existe $C_1 > 0$ tal que $|\hat{\varphi}^n(\xi)| \leq C_1 |\hat{\varphi}(\xi)|$ ello nos permitiría aplicar el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue para obtener que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}^n(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} |\hat{\varphi}^n(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi = 0$$

Veamos que existe $C_1 > 0$. Note que si $|\xi| > 2^n\pi$ esto es cierto ya que $|\hat{\varphi}^n(\xi)| = 0$.

Si $|\xi| \leq 2^n\pi$, se tiene que

$$\left|\hat{\varphi(\xi)}\right| = \prod_{j=1}^{n} |m_0(\xi/2^j)| \prod_{j=n+1}^{\infty} \left|m_0(\xi/2^j)\right| = |\hat{\varphi}^n(\xi)| \prod_{j=n+1}^{\infty} \left|m_0(\xi/2^j)\right|,$$

como

$$\prod_{j=n+1}^{\infty} \left|m_0(\xi/2^j)\right| = \prod_{j=1}^{\infty} \left|m_0(2^{-n}\xi/2^j)\right| = \left|\hat{\varphi}(2^{-n}\xi)\right|,$$

bastaría probar que $|\hat{\varphi}(2^{-n}\xi)| \geq 1/C_1 > 0$ (con C_1 independiete de n) para todo $\xi \in [-2^n\pi, 2^n\pi]$, o equivalentemente.

$$\left|\hat{\varphi}(2^{-n}\xi)\right| \geq 1/C_1 > 0$$

para todo $\xi \in [-\pi, \pi]$.

Usando la codición de Lipschitz y el hecho que $m_0(0) = 1$ se obtiene que existe una constante C_2 tal que para todo ξ

$$|m_0(\xi) - 1| \leq C_2 |\xi|^{\varepsilon}$$

Tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{C_2\pi^{\varepsilon}}{2N^{\varepsilon}} \leq \frac{1}{2},$$

para $|\xi| \leq \pi$ se tiene que

$$\left|m_0(\xi/2^j) - 1\right| \leq C_2 \frac{|\xi|^{\varepsilon}}{2^{j\varepsilon}} \leq C_2 \frac{\pi^{\varepsilon}}{2^{j\varepsilon}}.$$

Para $j > N$

$$C_2\pi^{\varepsilon}/2^{j\varepsilon} \leq C_2\pi^{\varepsilon}/2^{N\varepsilon} < 1/2.$$

Para $0 \leq x \leq 1/2, \quad 1 - x \geq e^{-2x}$, así que por la desigualdad triangular obtenemos

$$\left|m_0(\xi/2^j)\right| \geq 1 - \left|1 - m_0(\xi/2^j)\right| \geq 1 - C_2 \frac{\pi^{\varepsilon}}{2^{i\varepsilon}} \geq C_2 \frac{\pi^{\varepsilon}}{2^{i\varepsilon}} \geq e^{-2C_2\pi^{\varepsilon}/2^{j\varepsilon}}.$$

Tomando $C_3 = \inf_{|\xi| \leq \frac{\pi}{2} n} |m_0(\xi)| > 0$, se tiene entonces que para $|\xi| \leq \pi$,

$$|\hat{\varphi}(\xi)| = \prod_{j=1}^{N} \left| m_0(\xi/2^j) \right| \prod_{j=N+1}^{\infty} \left| m_0(\xi/2^j) \right| \geq C_3^N \prod_{j=N+1}^{\infty} e^{-2C_2 \pi^{\varepsilon}/2^{j\varepsilon}}$$

$$= C_3^N e^{-2C_2\pi^{\varepsilon} \sum_{j=N+1}^{\infty} 2^{-j\varepsilon}} \equiv \frac{1}{C_1} > 0,$$

ya que la serie es convergente. Ahora, aplicando la fórmula de inversión de Fourier y la identidad de Plancharel obtenemos que

$$\|\varphi^n - \varphi\|_2 \to 0,$$

si $n \to \infty$. Por la desigualdad triangular tenemos que

$$|\|\varphi\|_2 - 1| = |\|\varphi\|_2 - \|\varphi_n\|_2| \leq \|\varphi - \varphi_n\|_2$$

tomando límite cuando n tiende a infinito obtenemos que $\|\varphi\| = 1$ y $\|\varphi_{0,k}\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Supongamos que $k \neq 0$, se tiene entonces que

$$\langle \varphi, \varphi_{0,k} \rangle = \langle \varphi - \varphi^n, \varphi_{0,k} \rangle + \langle \varphi^n, \varphi_{0,k} \rangle$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\langle \varphi - \varphi^n, \varphi_{0,k} \rangle \to, 0$$

y por la ortogonalidad de $\left\{ \varphi_{0,k}^n \right\}_{h \in \mathbb{Z}}$ se tiene que $\left\langle \varphi^n, \varphi_{0,k}^n \right\rangle = 0$ y por lo tanto

$$\langle \varphi^n, \varphi_{0,k} \rangle = \left\langle \varphi^n, \varphi_{0,k} - \varphi_{0,k}^n \right\rangle,$$

lo cual converge a cero cuando n tiende a infinito.

Haciendo tender n a infinito tenemos que

$$\langle \varphi^n,_{0,k} \rangle = 0, \qquad \forall k = 0,$$

lo cual prueba la ortogonalidad de $\left\{ \varphi_{0,k}^n \right\}_{h \in \mathbb{Z}}$ y se completa la demostración del lema. ∎

Nótese que en el ejemplo visto tenemos que

$$m_0(\xi) =$$

Hasta acá tenemos las propiedades $i), ii)$ y $iii)$ de un análisis de Multiresolución. Los siguientes dos lemas nos permitiran establecer las propiedades $iv)$ y $v)$ del análisis de Multiresolución. De hecho el siguiente resultado dice que la propiedad $iv)$ es redundante que es consecuencia de $ii)$ y $iii)$.

Lema 50 *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ y para cada $j \in \mathbb{Z}$, $\{\varphi_{j.k}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal. Defina $\{V_j\}_{j\in Z}$ por*

$$V_j \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{j,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Se tiene entonces que

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

Demostración

Supongamos $f \in \bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in L^2(\mathbb{R})$ sea $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{\{x:|x|>R\}} |f(x)|^2 \, dx < \varepsilon^2.$$

Sea $g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } |x| \leq R \\ 0 & \text{si } |x| > R \end{array} \right.$.

Se tiene entonces que

$$\|f - g\|_2 \leq \varepsilon.$$

Para $j \in \mathbb{Z}$, sea P_j la proyección ortogonal sobre V_j,luego

$$||P_j(h)||^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |< h, \varphi_{j,k} >|^2 \leq ||h||^2$$

para toda $h \in L^2(\mathbb{R})$. Como $P_j(f) = f$, ya que $f \in V_j$, se tiene que

$$\|f - P_j(g)\|_2 = \|P_j(f - g)\|_2 \leq \|f - g\| < \varepsilon,$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Como $g(x) = 0, |x| > R$, tenemos

$$|\langle g, \varphi_{j,k} \rangle|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[-R,R]}\overline{\varphi_{j,k}(x)}dx \right|^2 \leq ||f||^2||\chi_{[-R,R]}\overline{\varphi_{j,k}}||^2,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Sin embargo,

$$||\chi_{[-R,R]}\overline{\varphi_{j,k}}||^2 = \int_{-R}^{R} |2^{j/2}\varphi(2^jx-k)|^2dx = \int_{-k-2^jR}^{R+2^jR} |\varphi(y)|^2dy,$$

por el cambio de variable $y = 2^jx - k$. Ahora sea $J \in \mathbb{Z}$ suficientemente negativo tal que $2^JR < 1/2$. Entonces para $j < J$, tenemos

$$\begin{aligned} ||P_j(h)||^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle g, \varphi_{j,k}\rangle|^2 \leq ||f||^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-k-2^jR}^{k+2^jR} |\varphi(y)|^2dy \\ &= ||f||^2 \int_{\mathbb{R}} \chi_{\cup[-k-2^jR,k+2^jR]}(y)|\varphi(y)|^2dy, \end{aligned}$$

como los intervalos $[-k-2^jR, k+2^jR]$ non disjuntos, ya que $2^jR < 1/2$, para $j < J$. Sea

$$h_j(y) = \chi_{\cup[-k-2^jR,k+2^jR]}(y)\varphi(y)|^2.$$

Entonces $h_j(y) \to 0$ c.s. si $j \to -\infty$. Note que cada h_j verifica $|h_j(y)| \leq |\varphi(y)|^2$, y $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(y)|^2dy \leq \infty, yaque \varphi \in L^2(\mathbb{R})$. por tanto por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\cup[-k-2^jR,k+2^jR]}(y)|\varphi(y)|^2dy \to 0,$$

si $j \to -\infty$. Así podemos tomar j tal que $||P_j(h)|| < \varepsilon$. Luego,

$$||f|| \leq ||f_{Pj}(g)|| + ||P_j(g)|| < +\varepsilon = 2\varepsilon,$$

y como > 0 es arbitrario, esto prueba que $||f| = 0.$■

Finalmente se ytiene la propiedad v) que no es inmediata,

Lema 51 *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{\varphi}$ esta acotada, es continua en 0 y $\hat{\varphi}(0) = 1. Además supongamos que para cada j \in$ $\mathbb{Z}$, $\{\varphi_{j.k}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal. Defina $\{V_j\}_{j\in Z}$ por*

$$V_j \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{j,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Se tiene entonces que

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$$

es denso en $L^2(\mathbb{R})$.

4.4 Ondículas con soporte compacto y su cálculo

Comencemos por resumir lo que se hizo en la sección anterior,

Resumen Suponga que tenemos $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Definimos m_0 por

$$m_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum u(k)\xi$$

Si $u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ que satisface

i) $\{R_{2,k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$ o equivalentemente

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\Pi)|^2 = 1 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

ii) $m_0(0) = 1$ o equivalentemente $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) = \sqrt{2}$.

iii) Para algún $\varepsilon > 0 \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{\varepsilon} |u(k)| < \infty$.

iv) $\inf_{|\xi \leq \Pi/2|} |m_0(\xi)| > 0$,

Se tendrá entonces que

$$\prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j) \to \hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$$

y $\varphi = (\hat{\varphi})^{\vee}$ es la función escala del análisis de Multiresolución $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Defina una sucesión $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ $v(k) = (-1)^{k-1}u(1-k)$, y definimos una función ψ por $\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\varphi_{1,k}$. Entonces ψ es una ondícula madre y $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ es un conjunto ortonormal completo en $L^2(\mathbb{R})$.

Se tiene el siguiente resultado de Wiener

Teorema 14 *Supóngase que m_0 es un polinomio trigonométrico*

$$m_0(\xi) = \sum_{k=-N_1}^{N^2} u(k)e^{-ik\xi}$$

con $N_2, N_2 \leq 0$ Si $m_0(0) = 1$ y $\hat{\varphi}(\xi) = \prod\limits_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^i)$, entonces $\varphi = (\hat{\varphi})^v$ tiene soporte compacto con sop$(\varphi) \subseteq [-N_1, N_2]$.

En particular ψ también satisface que sop$(\psi) \subseteq [-N_1, N_2]$

Ejemplo Par hallar una ondícula con soporte compacto vamos a comenzar con la identidad

$$(sen^2(\xi/2)+\cos^2(\xi/2))^5 = 1 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

aplicando Binomio de Newton tenemos que

$$\begin{aligned}\cos^{10}(\xi/2)+5\cos^8(\xi/2)sen^2(\xi/2) &+ 10\cos^6(\xi/2)sen^4(\xi/2)\\ &+ 10\cos^4(\xi/2)sen^6(\xi/2)+5\cos s^2(\xi/2)sen^8(\xi/2)+sen^2(\xi/2)=1,\end{aligned}$$

Definimos m como

$$m(\xi)=\cos^{10}(\xi/2)+5\cos^8(\xi72)sen^2(\xi/2)+10\cos^6(\xi/2)sen^4(\xi/2)$$

dado que $\cos^{10}(\theta+\Pi/2)=sen(\theta)$ y $sen(\theta+\frac{\Pi}{2})=\cos(\theta)$, se tiene que

$$m_0(\xi+\pi)=\cos^{10}\left(\frac{\xi+\pi}{2}\right)+5\cos^8\left(\frac{\xi+\pi}{2}\right)sen^2\left(\frac{\xi+\pi}{2}\right)+10\cos^6\left(\frac{\xi'+\pi}{2}\right)sen^4\left(\frac{\xi+\pi}{2}\right)$$

$$=sen^{10}(\xi/2)+5sen^8(\xi/2)\cos^2(\xi/2)+10sen^6(\xi/2)\cos^4(\xi/2)$$

y por la identidad anterior esto nos dice que

$$m_0(\xi)+m_0(\xi+\pi)=1, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Deseamos encontrar un polinomio trigonométrico

$$m_0(\xi)=\sum_{-N_1}^{N_2}u(k)e^{-ik\xi}$$

tal que

$$|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\Pi)|^2=1$$

Existe un resultado general (Féjer-Riez) que permite encontrar tal polinomio trigonometrico. Sin embargo en este ejemplo encontraremos m_0 explícitamente. Note que

$$m_0(\xi)=\cos^6(\xi/2)[\Big(\cos^2(\xi/2)-\sqrt{10}sen^2(i/2)\Big)$$

$$+(5+2\sqrt{10})\cos^2(\xi/2)sen^2(\xi/2)i\sqrt{5+2\sqrt{10}}\cos(\xi/2)sen(\xi/2)],$$

se tendrá que

$$|m_0(\xi)|^2=m_(\xi);\forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Para ver que en realidad m_0 es un polinomio trigonométrico usamos identidades trigonométricas y la fórmula de Euler y obtenemos que

$$m_0(\xi) = \left[e^{i\xi/2} \left(\frac{e^{\xi/2} + e^{-i\xi/2}}{2} \right) \right]^3$$

$$\times \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\xi) - \sqrt{10}(1/2 - 1/2\cos(\xi) + \frac{i\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{2} sen(\xi) \right]$$

$$= \frac{1}{8}(e^{i\xi}+1)^3 \left[\frac{1-\sqrt{10}}{2} + \frac{1-\sqrt{10}}{4}(e^{i\xi} + e^{-i\xi}) \right]$$

Si realizamos la última multiplicación obtendremos una expresión del tipo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi},$$

para algún $u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}}$.

Los coeficientes $u(k)$ serán todos reales. Las condiciones $i) - iv)$ son satisfechas por $(u(k))$ (**Ejercico**), $m_0(0) = 1$ y m es suma de términos de la suma es mayor que cero para todo ξ tal que $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, lo cual permite verificar la conclusió $\inf_{|\xi|\leq\pi/2} |m_0(\xi)| > 0$.

De esta manera se obtiene una función escala φ y una ondícula ψ con soporte en $[-4, 1]$ (tratar de dibujare a ψ en Matlab).

Vamos a ver como se hacen los cálculos con esta ondícula. Quedará claro que en realidad sólo se necesitan las sucesiones u y v.

Lema 52 *Sea $\{V_j\}_{j\mathbb{Z}}$, un análisis de Multiresolución con funci{on escala φ y sucesión de escala $u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}}$. Supongamos $v = (v(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ definida por $v(k) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}y\psi$ definida por $\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\varphi_{1,k}$. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y para cada $j \in \mathbb{Z}$ definamos las sucesiones $x_j = (x_j(k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $x_j = (x_j(k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $y_j = (y_j(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ por*

$$x_j(k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \, ; \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$y_j(k) = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \, ; \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces

$$x_j = D(y_{j+1} * \tilde{v})$$

$$y_j = D(y_{j+1} * \tilde{u})$$

donde D es el operador de submuestreo y las sucesiones y la convolución estan en $\ell^2(\mathbb{Z})$. Además

$$y_{j+1} = U(y_j) * u + U(x_j) * v,$$

donde U es el operador de sobremuestreo en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

El lema anterior nos regresa a la nomenclatura del bancos de filtros de la teoria discreta $\ell^2(\mathbb{Z}$. En efecto el lema dice que para pasar de y_{j+1} a x_j y y_j aplicamos un segmento de la fase de análisis del banco de filtro y recíprocamente para recobrar y_{j+1} a partir de x_j y y_j debemos aplicar un segmento de la fase de síntesis (reconstrucción) del banco de filtros. Como los desarrollos de ond{ıculas en general tienen infinitos términos, se debe aproximar en algún nivel. Del hecho que un análisis de Multiresolución $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ tiene la propiedad que $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, se tiene que dada f en $L^2(\mathbb{R})$ se puede escojer m tal que

$$\|P_m(f) - f\| < \varepsilon,$$

donde $P_m(f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{m,k}\rangle \varphi_{m,k}$, es la proyección de f en V_m. El próoximo resultado nos dice como aproximar la sucesión $y_m = (\langle f, \varphi_{m,k}\rangle)_{k\in\mathbb{Z}}$ para m suficientemente grande.

Lema 53 *Supongamos que $0 < \varepsilon \leq 1$ y $f \in L^2(\mathbb{R})$ satisface una condición de Lipschitz de orden ε, es decir existe una coonstante $C_1 < \infty$ tal que para todo $x, y, \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(y)| < C_1 |x-y|^\varepsilon$ .Sea$\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1 \text{ y } \int_{\mathbb{R}} |x|^\varepsilon |\varphi(x)|\, dx = C_2 < \infty.$$

Entonces que

$$\left| 2^{m/2} \langle f, \varphi_{m,k}\rangle - f(2^{-m}k)\right| \leq C_1 C_2 2^{-m\varepsilon},$$

o equivalentemente

$$\left| \langle f, \varphi_{mk}\rangle - 2^{-m/2} f(2^{-m}k)\right| \leq C_1 C_2 2^{-m(\varepsilon+1/2)}$$

Apéndices

Apéndice A

Números Complejos y Algebra Lineal.

A.1 Números Complejos

A.1.1 Definición de los Números Complejos

Definición 48 *Un cuerpo $\mathbb{F}$, es un conjunto con una operación de suma $+$ y multiplicación $\cdot$ que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *A] Clausura por la adición: Para todo $x, y \in \mathbb{F}$ $x + y$ esta definido y es un elemento de $\mathbb{F}$.*
2. *A] Conmutatividad de la adición: $x + y = y + x$ para todo $x, y \in \mathbb{F}$.*
3. *A] Asociatividad de la adición: $x+(y+z) = (x+y)+z$, para toda $x, y, z \in \mathbb{F}$.*
4. *A] Existencia de una identidad aditiva: Existe un elemento en $\mathbb{F}$, denotado por 0, tal que $x + 0 = x$ para todoa $x \in \mathbb{F}$.*
5. *A] Existencia de un inverso aditivo: Para cada $x \in \mathbb{F}$ existe un elemento en $\mathbb{F}$, denotado por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.*
6. *M] Clausura por la multiplicación: Para toda $x, y \in \mathbb{F}$, $x \cdot y$ esta definido y es un elemento de $\mathbb{F}$.*
7. *M]Conmutatividad de la multiplicación: $x \cdot y = y \cdot z$ para todo $x, y \in \mathbb{F}$.*
8. *M] Asociatividad de la multiplicación: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{F}$.*
9. *M] Existencia de un identidad para la multiplicación: Existe un elemento en $\mathbb{F}$, denotado por 1, tal que $1 \neq 0$ y $x \cdot 1 = x$ para toda $x \in \mathbb{F}$.*

10. *M] Existencia de un inverso multiplicativo: Para cada* $x \in \mathbb{F}$ *existe un elemento en* $\mathbb{F}$*, denotado por* x^{-1}*, tal que* $x \cdot x^{-1} = 1$.

11. *D] Propiedad distributiva:* $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$*, para todo* $x, y, z \in \mathbb{F}$.

El cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ se define asumiendo la existencia de un número generalizado i que satisface $i^2 = -1$. Entonces $\mathbb{C}$ esta definido como el conjunto de todos los números $\mathbb{Z}$ de la forma $z = x + iy$ donde $x, y \in \mathbb{R}$ y a $\mathbb{C}$ lo proveemos de las siguientes operaciones de adición y multiplicación para $x_1,\ x_2, y_1, y_2, \in \mathbb{R}$

$$(\mathrm{x}_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

El único problema acá es que nada tiene sentido si el número i no existe. La manera más simple de evitar este problema es definir

$$\tilde{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

con operaciones $+$ y $\cdot$ definidos en $\tilde{C}$ por

$$(\mathrm{x}_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Si consideramos

$$\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

se tiene que $\mathbb{R} \times \{0\}$ es una copia de $\mathbb{R}$ en $\tilde{C}$ note que

$$(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0).$$

Se tiene así que la ecuación

$$z^2 = (-1, 0) \text{ tiene solución } (0, 1) \text{ en } C$$

a pesar de que esa ecuación no tiene resolución en $\mathbb{R} \times \{0\}$. Como hemos identificado $(-1, 0)$ con -1 diremos que la ecuación $z^2 = -1$ tiene resolución en $\tilde{C}$. Ahora simplemente definimos

$$i = (0, 1)$$

Para $x \in \mathbb{R}$ escribiremos x en lugar de $(x, 0)$. Para $y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$iy = y_i = (y, 0).(0, 1) = (0, y),$$

lo cual nos permite obtener

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

De ahora en adelante $\tilde{C}$ será denominado $\mathbb{C}$ y notaremos los elementos de $\mathbb{C}$ de manera usual, es decir

$$z = x + iy, \text{ donde } x, y \in \mathbb{R}$$

Llamaremos x la parte real de z, y la parte imaginaria de z.

Definición 49 *Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se define el complejo conjugado $\overline{z}$ de z como*

$$\overline{z} = x - iy$$

El módulo $|\cdot|$ de z se define como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se tiene entonces el siguiente resultado

Lema 54 *Supongase que $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces se tiene que*

i) $\overline{\overline{z}} = z$.

ii) $\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2}; \mathrm{Im}\ z = \frac{z+\overline{z}}{2i}$.

iii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$.

iv) $|\overline{z}| = |z|\,; |zw| = |z|\,|w|\,.$

v) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|\,; |Im\ z| \leq |z|\,.$

A.1.2 Series Complejas, Fórmula de Euler y raices de la unidad

Empezaremos con la definición de convergencia de una serie de números complejos.

Definición 50 *Una serie de números complejos es una expresión de la forma*

$$\sum_{n=M}^{\infty} z_n,$$

donde cada z_n es un número complejo y $M \in \mathbb{Z}$.

Para $k \geq M$ se define la k-ésima suma parcial de la serie por

$$s_k = \sum_{n=M}^{k} z_n.$$

Si la sucesión $\{s_k\}_{k=M}^{\infty}$ converge a un límite $s \in \mathbb{C}$, diremos que la serie $\sum_{n=M}^{\infty} z_n$ converge a s y escribiremos

$$\sum_{n=M}^{\infty} z_n = s.$$

Definición 51 *Una serie $\sum_{n=M}^{\infty} z_n$ se dice absolutamente convergente si $\sum_{n=M}^{\infty} |z_n|$ es convergente.*

Definición 52 *Una serie geométrica es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

para algún $z \in \mathbb{C}$.

Nota que la suma parcial s_k de la serie geometríca es $s_k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{k-1} + z^k$. Este es uno de los pocos casos en que la suma parcial puede ser evaluada explícitamente:

$$s_k = \frac{1 - z^{k+1}}{(1-z)}, \quad \text{si } z \neq 1,$$

ya que multiplicando s_k por $(1-z)$ se obtiene,

$$(1-z)s_k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^k - (z + z^2 + \cdots + z^k + z^{k+1}) = 1 - z^{k+1}$$

Usando esta expresión de s_k se obtiene el siguiente resultado,

Lema 55 *La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge absolutamente a $\frac{1}{1-z}$ si $|z| < 1$, y diverge si $|z| \geq 1$.*

Ahora consideraremos expansiones en series de potencia.

Definición 53 *Dado un número $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo. Una expansión en serie de potencia alrededor de z_0 es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$

Del cálculo elemental se conoce que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;\; ; \;\; cos\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \;\; ; \;\; e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

en el sentido de que cada suma de estas series converge absolutamente en cada $x \in \mathbb{R}$ y coincide con la correspondiente función en cada $x \in \mathbb{R}$. Reemplazando x por $|z|$ se tiene que las series complejas

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \;\; ; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(zn)!} \;\; \text{y} \;\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

convergen absolutamente y por ende convergen para cada $z \in \mathbb{C}$,

Definición 54 *Para todo $z \in \mathbb{C}$ se define*

$$sen\, z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \;\; ; \;\; \cos\, z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \;\; ; \;\; y\; e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Las propiedades del seno, el coseno y el exponencial real se extiende al caso complejo, en particular se tiene que

$$\cos(-z) = \cos\, z \;\; \text{y} \;\; \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z,$$

lo cual nos permite obtener el siguiente resultado importante,

Teorema 15 *(Fórmula de Euler). Para cada z en $\mathbb{C}$ se tiene que*

$$e^{iz} = \cos(z) + i\; sen\, z.$$

Demostración

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \cdots \\
&= \left(1 + \frac{i^2 z^2}{2} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^6 z^6}{6!}\right) + iz + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^5 z^5}{5!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) \\
&= \cos z + i \ \mathrm{sen} z. \blacksquare
\end{aligned}$$

De la fórmula de Euler se obtiene los siguientes resultados

$\mathrm{e}^{i\pi} = -1$; $e^{-iz} = \cos z - i \,\mathrm{sen}\, z$

$\cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2}$; $\mathrm{sen}\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $\mid e^{i\theta} \mid = 1.$

Para todo $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

En particular se tiene que para θ en $\mathbb{R}$ y n en $\mathbb{Z}$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Suponga que $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, entonces el punto $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y2}}\right)$ tiene distancia 1 desde el origen en $\mathbb{R}^2$ por lo tanto existe un angulo θ tal que $\cos\, \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y2}}$ y $\mathrm{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y2}}$,de lo cual se deduce que

$$z = |z| \, \frac{x+iy}{|z|} = |z| \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = |z| \left(\cos\, \theta + i \ \ \mathrm{sen}\ \theta\right) = |z| \, e^{i\theta}$$

si ponemos $r = |z|$, se tiene que

$$z = re^{i\theta} = r\left(\cos\theta + \mathrm{sen}\ \theta\right).$$

Asi , se tiene que $re^{i\theta}$ representa en $\mathbb{C}$ el mismo punto con coordenadas polares (r, θ) en $\mathbb{R}^2$ por esta razón llamamos $z = re^{i\theta}$ la **representación polar** de $z \cdot \theta$ se denominará el argumento de z. La representación polar hace que el cálculo de potencias enteras positivas de números complejo sea facil ya que para cada n en $\mathbb{N}$ se tiene que

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n \left(e^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta},$$

A.2 Algebra Lineal

A.2.1 Espacios Vectoriales y Bases

Definición 55 *Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, es un conjunto con una operación de suma vectorial $+$ y multiplicación escalar $\cdot$ que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *A] Clausura por la adición: Para todo $u, v \in V$ $u + v$ esta definido y es un elemento de V.*

2. *A] Conmutatividad de la adición: $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$.*

3. *A] Asociatividad de la adición: $u + (v + w) = u + (v + w)$, para toda $u, v, w \in V$.*

4. *A] Existencia de una identidad aditiva: Existe un elemento en V, denotado por 0, tal que $u + 0 = u$ para todoa $u \in V$.*

5. *A] Existencia de un inverso aditivo: Para cada $u \in V$ existe un elemento en V, denotado por $-u$, tal que $u + (-u) = 0$.*

6. *M] Clausura por la multiplicación escalar: Para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ y $u \in V$, $alpha \cdot u$ esta definido y es un elemento de V.*

7. *M] Asociatividad de la multiplicación escalar: $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $u \in V$.*

8. *M] Existencia de un identidad para la multiplicación escalar: $1 \cdot u = u$ para toda $u \in V$, donde 1 es elemento identidad multiplicativa de $\mathbb{F}$.*

9. *D] Primera propiedad distributiva: $\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ y $u, v \in V$.*

10. *D] Segunda propiedad distributiva: $(\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot v)$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ y $u, v \in V$.*

Definición 56 *Dado V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y sea $\{v_i\}_{i=1}^n$ $n \in \mathbb{N}$ un conjunto finito de V, una combinación lineal de $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un vector de la forma*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{F}$$

Definición 57 *Dado V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $U \subset V$ el espacio generado por U en V, span(U), es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de U.*

$$span(U) = \{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j,\ \alpha_j \in \mathbb{F},\ u_j \in U\}.$$

Definición 58 *Dado V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y sea $\{v_i\}_{i=1}^n$ $n \in \mathbb{N}$ un conjunto finito de V. Decimos que $\{v_i\}_{i=1}^n$ $n \in \mathbb{N}$ son* **linealmente dependientes** *si existe $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ no todos ceros, tal que*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

Decimos que $\{v_i\}_{i=1}^n$ $n \in \mathbb{N}$ son **linealmente independientes** *si*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

se verifica sólo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Un conjunto infinito $U \subset V$ es linealmente independiente si todo subconjunto finito de U es linealmente independiente y decimos que U es linealmente dependiente si U tiene un subconjunto finito que es linealmente dependiente.

Definición 59 *Dado V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, un subconjunto U de V es una* **base** *de V si es linealmente independiente y span$(U) = V$.*

Lema 56 *Dado V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, un subconjunto U de V es base para V si y sólo si para cada $v \in V$, $v \neq 0$, existe una única $m \in \mathbb{N}$, $\{u_i\}_{i=1}^n \subset U$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{F}$ tal que,*

$$v \sum_{j=1}^{n} \propto_j u_j.$$

Ejemplo: Base canónica o Euclídea para $\mathbb{R}^n$ y para $\mathbb{C}^n$.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$$

Si V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ tiene una base finita diremos que V es finito dimensional. Si una base de V tiene n elementos, todas las bases de V tiene n elementos y n es la dimensión de V.

Notación: Supóngase que V es espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, $S = \{v_i\}_{i=1}^n$ base (ordenada) de V para cada v en V existe $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}$, tal que v=$\sum_{1=1}^n \alpha_i V_i$.

Denotaremos $[v]_S$ el vector en $\mathbb{F}^n$ con componentes $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, es decir

$$[v]_S = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Así pues, $[v]_s$ es la representación de v con respecto a S, es decir, respecto a la base $S = \{v_i\}_{i=1}^n$, $[v]_s = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ significa que

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Notaremos que$[v]_S$ depende del orden de los elementos de S.

En el sentido abstracto una base puede ser tan buena como cualquier otra. Sin embargo en casos particulares la elección de la base con la cual trabajar puede ser de vital importancia.

A.2.2 Transformaciones Lineales, Matrices y Cambio de Bases.

Las **transformaciones lineales** son las funciones que se consideran en el Algebra Lineal por su condición de mantener la estructura lineal de los espacios vectoriales.

Definición 60 *Sean U, V dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$. Una transformación lineal T es una funci$T : U \to V$ que verifica:*

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + (v),\ \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ u, v \in V.$$

Definición 61 *Dado $m, n \in \mathbb{N}$. Una matriz A, $n \times m$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$*

es un arreglo rectangular de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m,n}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{F}$ *para toda* i, j, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Denotamos $A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

Un caso interesante es el caso de las matrices $n \times 1$ *que corresponden a los vectores.*

Definición 62 *(Suma de matrices) Dadas*
$A \;\; = [a_{ij}] \;\; m \times n$,
$B = [b_{ij}] \;\; m \times n$ *matrices sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{F}$
definimos la suma $A + B = C = [c_{ij}] \;\; m \times n$,
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *para* i, j, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Definición 63 *(Multiplicación de matrices) Dadas* $A \;\; = [a_{ij}] \;\; m \times \ell$,
$B = [b_{ij}] \;\; \ell \times n$ *matrices sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{F}$
definimos el producto, $AB = C = [c_{ij}] \;\; m \times n$

$$c_{ij=} \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj},$$

para i, j, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Un caso especial, muy importante, es que A sea una matriz $m \times n$ y $x = B \in \mathbb{F}^n$ sea una matriz $n \times 1$, es decir un vector n-dimensional entonces $y = Ax = AB \in \mathbb{F}^m$ es una una matriz $m \times 1$, es decir un vector m-dimensional. La i-ésima componente de Ax,

$$(Ax)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k.$$

Lema 57 *Dados* U, V *espacios vectoriales finito-dimensionales, sea* $R = \{u_i\}_{i=1}^n$ *una base de* U *y* $S = \{v_i\}_{i=1}^m$ *base de* V*. Dada una matriz* $A \;\; m \times n$*, se define* $T_A : U \to V$ *como sigue. Para* $u \in U$, $T_A(u)$ *es el elemento de* V *cuya representación* $[T_A(u)]_S$ *(con respecto a* S*) es* $A[u]_R$*; es decir,*

$$[T_A(u)]_S = A\,[u]_R\,.$$

T_A *es lineal.*

Lema 58 *(Matriz asociada con una transformación lineal.) Dados U, V espacios vectoriales finito-dimensionales, sea $R = \{u_i\}_{i=1}^n$ una base de U y $S = \{v_i\}_{i=1}^m$ base de V. $T : U \to V$ una transformación lineal y como $T(u_j) \in V$ existen unos escalares únicos $\alpha_{i,j}, i = 1, 2, \cdots, m$ y $j = 1, 2, \cdots, n$*

$$T(u_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,k} v_i,$$

Sea A una matriz $m \times n$, cuya k-ésima columna consiste en los escalares $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \cdots, \alpha_{m,k}$ del desarrollo de $T(u_k)$,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots\ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots\ldots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \ldots\ldots & \alpha_{m,n}. \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces que

$$[T(u)]_S = A\,[u]_R\,.$$

Más aún, A es única.

Definición 64 *Sean U, V conjuntos y T:$U \to V$,, una función. T se dice uno-a-uno o injectiva si $T(u_1) = T(u_2)$ implica que $u_1 = u_2$. T se dice sobreyectiva o sobre si para todo $v \in V$ existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. T es invertible o biyectiva si es uno-a-uno y sobre.*

Definición 65 *Sean U, V espacios vectoriales, y T:$U \to V$, una transformación lineal, definimos*

$$ker(T) = \{u \in U : T(u) = 0\}\,,$$

y

$$rango(T) = \{T(u) : u \in U\}\,.$$

Entonces T es sobre si $rango(T) = V$ y T es inyectiva si $ker(T) = 0$.

La matriz identidad $n \times n$ es la matriz

$$I = [a_{ij}]\,,$$

con $a_{i,i} = 1$, para $i = 1, 2, \cdots, n$ y $a_{i,j} = 0$, si $i \neq j$.

Obsérvese que $Ix = x,\ \ x \in \mathbb{C}^n$.

Definición 66 *Una matriz* $A =^{\cdot} n \times n$ *se dice invertible si existe una matriz* $n \times n$*, que denotamos por* A^{-1} *tal que* $AA^{-1} = I$ *y* $A^{-1}A = I$*.*

Lema 59 *Sean* U, V *espacios vectoriales* n*-dimensionales* $T : U \to V$ *una transformación lineal,* R *una base de* U *y* S *una base de* V*. Sea* A_T *la matriz que representa a* T *con respecto a* R *y* S*, entonces* T *es invertible si y sólo si* A_T *es invertible.*

Lema 60 *Supongase que* A *es una matriz* $n \times n$*. Entonces* A *es invertible si y sólo si rango* $A = n$*.*

Si tenemos dos bases para el mismo espacio vectorial, ¿como se puede obtener la representación de un vector con respecto a una de las bases si se conoce la representación con respecto a la otra.?

Definición 67 *Sea* V *un espacio vectorial* n*-dimensional sobre* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*. Sea* $R = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} y S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *dos bases de* V *. Como* S *es una base para* V*, existen escalares únicos* $\alpha_{i,j}, i, j = 1, 2, \cdots, n$*, tal que*

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{1,1}v_1 + \alpha_{2,1}v_2 + \cdots + \alpha_{n,1}v_n \\ u_2 &= \alpha_{1.2}v_1 + \alpha_{2,2}v_2 + \cdots + \alpha_{n,2}v_n \\ &\vdots \\ u_n &= \alpha_{1,n}v_1 + \alpha_{2,n}v_2 + \cdots + \alpha_{n,n}v_n. \end{aligned}$$

Sea A *la matriz* $n \times n$ *cuya* k*-ésima columna consiste de los coeficientes* $\alpha_{i,k}, i = 1, 2, \cdots, n$*, en la representación de* u_k

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & & \alpha_{n,n} \end{bmatrix},$$

entonces

$$[x]_S = A\,[x]_R\,,$$

para todo $x \in V$*. Hay una única matriz con esta propiedad y se llama* **matriz de cambio de base** *de* R *a* S*.*

Definición 68 *Dado* V *un espacio vectorial finito dimensional sobre* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ *con base* R*. Denotaremos por* $A_{T,R}$ *la matrix que representa* T *con respecto a* R *y* R*.*

$$[T(x)]_R = A_{T,R}\,[x]_R\,.$$

El ejemplo más simple es el siguiente. Sea A una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ y definimos la transformación lineal asociada $T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ como $T_A(z) = Az$. Entonces en la base euclidea $E = \{e_i\}_{i=1}^n$

$$[T_A(z)]_E = T_A(z) = Az = A\,[z]_E\,,$$

es decir,

$$A_{T_{A,E}} = A.$$

Lema 61 *Sea V un espacio vectorial finito-dimensional R, S bases de V, $T : V \to V$ transformación lineal. Sea $A_{T,R}$, $A_{T,S}$ las matrices que representan a T con respecto a R y S y sea P la matrix de cambio de base de R a S, se tiene entonces que*

$$A_{T,R} = P^{-1} A_{T,S} P.$$

Este resultado tiene una interpretación natural. Para obtener la acción de T en la base R, primero se cambia a la base S (multiplicando por P), aplica T representado en S (se multiplica por $A_{T,S}$) y entonces se regresas a la base R (multiplicando por P^{-1}).

Definición 69 *Sean A, B dos matrices $n \times n$ diremos que A y B son* **similares** *o que A es similar a B si existe una matrix P tal que*

$$B = P^{-1} A P.$$

El lema anterior nos dice entonces que dos matrices que representan la misma transformación lineal con respecto a bases diferentes son similares. Una preocupación nuestra será elegir la mejor base, de manera que el operador con que trabajemos tenga la matrix que la representa tan simple como sea posible. en lo que sigue discutiremos operadores cuya representación matricial es diagonal.

A.2.3 Diagonalización de Transformaciones Lineales y Matrices.

Si consideramos una transformación lineal $T : V \to V$ y elegimos una base R, entonces podemos representar por $A_{T,R}$. Queremos utilizar $A_{T,R}$ para hacer todos los cálculos con T, así que queremos elegir R de manera que $A_{T,R}$ sea lo más simple posible para realizar cálculos. En la sección anterior vimos que para cualquier otra base S de V, $A_{T,S}$, es similar a $A_{T,R}$; vamos a ver que cualquier matriz A similar a $A_{T,R}$ debe representar a T, con respecto a alguna base de V. Este resultado es corolario del siguiente lema.

Lema 62 *Supóngase que R es una base para un espacio $n-$dimensional V y P es una matriz $n \times n$ invertible, entonces existe una base S para V tal que P es la matriz de cambio de base de R a S.*

Corolario 4 *Supóngase que V es un espacio vectorial con base R y T : $V \to V$. es una transformación lineal. Si B es una matriz similar a $A_{T,R}$, entonces existe una base S de V tal que $B = A_{T,S}$.*

Entonces el problema de encontrar la mejor base para representar una cierta transformación lineal, se transforma en el siguiente: Dada una matriz A ¿cual es la matriz más simple similar a esa matriz A?. Así, una manera de describir nuestro problema es decir que estamos buscando la representante más simple en la clase de equivalencia de todas las matrices relacionadas con A según la relación de similaridad que sabemos es una relación de equivalencia. Para empezar vamos a buscar algunas caracteristicas de la transformación lineal T que deben compartir todas las matrices que la representan. Una de estas caracteristicas " invariantes" son las autovalores.

Definición 70 *Dado V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal. Un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un* **autovalor** *de T si existe un vector $v \neq 0$ en V tal que*

$$T(v) = \lambda v.$$

Cada vector que satisfaga la ecuación anterior es denominado un **autovector** *de T con respecto al autovalor λ.*

El conjunto de todos los autovalores de T con respecto a λ se llama el autoespacio $E_\lambda = E_\lambda(T)$ de T, correspondiente al autovalor λ,

$$E_\lambda = E_\lambda(T) = \{v \in v : T(v) = \lambda v\}$$

Un autovector es una dirección en la cual T actúa como multiplicación por un escalar.

Definición 71 *(Matrices): Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sea A una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$. Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, sea $V = \mathbb{R}$ y si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, sea $V = \mathbb{C}$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un autovalor de A si existe $v \neq 0$ en V tal que*

$$Av = \lambda v$$

Cada vector que satisfaga la ecuación anterior es denominado un autovector de A respecto a λ

$$E_\lambda = E_\lambda(A) = \{v \in V : Av = \lambda v\}$$

El hecho que $v \in E_\lambda(T)$ se puede escribir de varias maneras $T(v) = \lambda v$ es equivalente a $0 = \lambda I - T(v) = (\lambda I - T(v)$ (siendo I es el operador identidad) lo cual es equivalente a decir que $v \in \ker(\lambda I - T)$, es decir

$$E_\lambda(T) = kern(\lambda I - T),$$

De lo cual se deduce que $E_\lambda(T)$ es un subespacio de V y por tanto tiene sentido hablar de su dimensión. Definiremos la **multiplicidad geométrica** de λ (con respecto a T) como la dimensión de $E_\lambda(T)$. Cuando λ no es autovalor de T, entonces $E_\lambda(T) = \{0\}$ y la multiplicidad de λ es cero. Para matrices la definición de multiplicidad geométrica de λ es similar.

El próximo resultado nos muestra que cuando una matriz A representa a una transformación lineal T los autovalores y sus multiplicidades geometricas para la matriz son los mismos que para la transformación.

Lema 63 *Dado V un espacio vectorial con base R, $T : V \to V$ una trnasofromación lineal. Para cada escalar λ es un autovalor de T si y sólo si λ es un autovalor de $A_{T,R}$ y se tiene que*

$$v \in E_\lambda(T) \text{ si y sólo si } [v]_R \in E_\lambda(A_{T,R}).$$

Más aun $\dim E_\lambda(T) = \dim E_\lambda(A_{T,R})$, es decir la multiplicidad geométrica de λ con respecto a T es la misma que con respecto a $A_{T,R}$.

Corolario 5 *Supóngase que A y B son matrices similares. Entonces A y B tiene los mismos autovalores con las mismas multiplicidades geométricas.*

Matrices similares se pueden considerar como diferentes realizaciones de la misma transformación, asi que cada cantidad que dependa solamente de dicha transformación lineal debe ser igual para todas las matrices similares. Esto nos da una manera de entender que características deben tener en común las matrices símilares. Cualquier cantidad determinada por una matriz A que sea similar para toda matriz similar a ella se denomina una **similaridad invariante**. En este nuevo lenguaje el lema anterior diría que los autovalores y sus multiplicidades geométricas son similaridades invariantes.

Un hecho importante de los autovectores de una transformación lineal es que autovectores correspondientes a diferentes autovalores son linealmente independientes. Un hecho más general es el siguiente,

Lema 64 *Sea V espacio vectorial $n-$dimensional sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, $T : V \to V$ una trnaformación lineal con autovectores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_k$. Para $i =$*

$1, 2, \cdots, k$ *supóngase que* $E_{\lambda i}$ *tiene dimensión* m_i *y base* $\{v_{i,j}\}_{j=1}^{m_i}$ *entonces la unión de las base de los* $E_{\lambda i}$*,*

$$A = \{v_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{k}$$

es linealmente independiente. La suma de las multiplicidades geométricas de los autovalores es a lo más n*,*

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \leq n$$

y por lo tanto T *no puede tener más de* n *autovalores distintos.*

Un lema similar se cumple para matrices.

La transformación lineal más facil de trabajar es aquella para la cual se tiene una base de autovectores para todo el espacio. Una transformación lineal de este tipo se llama **diagonalizable**. Una transformación lineal T diagonizable es más simple que una transformación lineal cualquiera ya que la acción de T puede ser divida en las direcciones de los autovectores y en cada una de las direcciones T actua como una multiplicación por un escalar.

Las definiciones para matrices son las siguientes,

Definición 72 *Una matriz* $n \times n$ $A = [a_{ij}]$ *es diagonal cuando* $d_{ij} = 0$ *para* $i \neq j$*. Una matriz es diagonalizable si es similar a una matriz diagonoble.*

La relación entre las dos nociones viene dada por el siguiente resultado.

Lema 65 *Sea* V *un espacio vectorial finito dimensional,* $T : V \to V$ *una transformación lineal.*

i) T *es diagonalizable si y sólo si existe una base* R *de* V *tal que* $A_{T,R}$ *es diagonal.*

ii) Dada una base S *de* V*.* T *es diagonalizable si y sólo si* $A_{T,S}$ *es diagonalizable.*

Evidentemente es más facil calcular con matrices diagonizables que con cualquier otro tipo de matriz. Por ejemplo multiplicar un vector por una matriz general se requiere n^2 multiplicaciones, si la matriz es diagonal, se requieren sólo n multiplicaciones. Así, para una transformación lineal diagonalizable el lema anterior responde nuestra pregunta básica de como elegir una base para simplificar los cálculos con T. Elejimos una base que diagonalice a T. Sin embargo, no es fácil determinar cuando una transformación lineal dada es diagonalizable. Por definición T es diagonalizable si y sólo si T tiene una base de autovalores de T. Si V es n-dimensional esto significa que T es diagonalizable si y sólo si V tiene n autovectores linealmentes independientes, es decir T es diagonalizable si y sólo si $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.

Los mismos criterios valen para matríces . En particular cuando T ó A tiene n autovalores distintos cada $E_{\lambda i}$ tiene dimensión 1 y automaticamente T ó A son diagonalizables. Para verificar que T ó A es diagonalizable cuando hay menos de n autovalores distintos, se deben considerar los autoespacios y determinar si las sumas de sus dimensiones es n.

El próximo resultado nos muestra como diagonalizar matrices diagonalizables, suponiendo que conocemos los autovalores y los autovectores.

Lema 66 *Dada A una matriz $n \times n$ diagonalizable,*

i) Sean $= \{v_i\}_{i=1}^{n}$, n-autovectores linealmente independientes de A y sean $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ autovalores correspondientes. Sea P la matriz con $j-$ésima columna el vector v_j.$SeaD = [d_{ij}]$ matriz diagonal cuya $j-$ésima entrada d_{jj} es λ_j. Se tiene entonces que $P^{-1}AP = D$.

ii) Recíprocamente si $P^{-1}AP = D$, donde D es una matriz diagonal, entonces las columnas de , P son autovectores de A linealmente independientes con autovalores correspondientes iguales a las entradas diagonales de D.

Una matriz real puede no tener autovalores reales, aunque una matriz en $\mathbb{C}$ debe tener autovalores complejos. Aún no sabemos como encontrar los autovalores y autovectores de una matríz cuando estos existen. Para ello necesitamos necesitamos la noción de **determinantes**.

Definición 73 *Dado $A = [a_{i_j}]$ una matriz $n \times n$ para $1 \leq i, j \leq n$ definimos el $(i, j)-$ésimo menor M_{ij} asociado a A como la matriz $(n-1) \times (n-1)$, obtenida de eliminar la $i-$ésima fila y la $j-$ésima columna de A. Se define*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j})$$

Se tiene el siguiente resultados acerca de los determinantes,

Teorema 16 *Dado una matriz A una matriz $n \times n$, se tiene entonces que* *i.)* *A es invertible si y sólo si* $\det A \neq 0$

ii.) *Si B es una matriz* $n \times n$*, se tiene que* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Definición 74 *Dada A una matriz* $n \times n$*, el* **polinomio característico** *de A es el polinomio definido por*

$$\det(\lambda I - A)$$

considerado como polinomio en la variable λ.

El polinomio caracteristico juega un papel importante a través de toda el álgebra lineal pero su principal uso viene dado por el siguiente resultado,

Lema 67 *Sea A una matriz* $n \times n$*, entonces* λ_i *es un autovalor de A si y sólo si* λ_i *es una raíz del polinomio característico de A.*

Se tiene así que para calcular los autovalores de una matriz A basta calcular las raices de su polinomio caracteristico. Por el teorema fundamental del algebra, se tiene que si A es una matriz $n \times n$, existen $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ tales que

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \cdots \cdot (\lambda - \lambda_n),$$

donde algún λ_i se puede repetir.

Dado A una matriz $n \times n$, sean $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ los autovalores distintos de A, se tiene entonces que el polinomio caracteristico de A se puede escribir como

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \cdots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

donde cada m_i es el número de veces que aparece λ_i en la descomposición del teorema fundamental del algebra m_i es denominado la **multiplicidad algebraica** del autovalor λ_i.

Se tiene que para cada autovalor λ_i de A su multiplicidad geométrica es menor o igual a su multiplicidad algebraica. Se tiene así otro criterio para diagonalizabilidad de una matriz A es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad algebraica y la geométrica coinciden. El siguiente resultado dice que el polinomio característico y la multiplicidad algebraica de los autovalores de una matriz son invariantes por semejanza.

Lema 68 *Supóngase que A y B son matrices similares. Se tiene entonces que*

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B).$$

En particular, las multiplicidades algebraicas de los autovalores de A y B son las mismas.

No todas las matrices o transformaciones lineales son diagonalizables. Uno podría preguntarse que cerca de diagonalizar se puede llegar en general una respuesta a esta pregunta es que siempre hay una matriz B la cual tiene los autovalores de A en la diagonal principal (repetidos de acuerdo a sus multiplicidades algebraicas), tiene 0 ó 1 en la diagonal superior (la que está encima de la principal) y ceros en otras partes. Esta matriz B es llamada la forma conónica de Jordan de A; esta matriz es una similaridad invariante de A, en el sentido de que cada matriz es similar a una única matriz de forma canónica de Jordan (salvo permutación de los autovalores) y las matrices son similares si y sólo si ellas tienen la misma forma de Jordan.

A.2.4 Productos Interiores, Bases Ortonormales y Matrices Unitarias

Para $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ el producto interior de x y y es el nmero real

$$x \cdot y = \sum_{j=0}^{n} x_j y_j.$$

En el caso complejo el análogo es el siguiente. Para $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ y $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ en $\mathbb{C}^n$ el producto interior complejo de z y w es el nmero

$$z \cdot w = \sum_{j=0}^{n} z_j \overline{w_j}.$$

Definición 75 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un* **producto interior** *complejo es una aplicación $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{C}$, con las siguientes propeidades:*

1. *I] Aditividad: $< u + v, w >=< u, w > + < v, w >$, para todo $u, v, w \in V$.*
2. *I] Homogeneidad escalar: $< \alpha u, v >= \alpha < u, v >$ para todo $u, v \in V$.*
3. *I] Simetría conjugada: $< u, v >= \overline{< v, u >}$ para todo $u, v \in V$.*
4. *I] Definida positiva: $< u, u >\geq 0$ para toda $u \in V$ y $< u, u >= 0$ si y sólo si $u = 0$.*

Definición 76 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interior complejo. Para $v \in V$ definimos la* **norma** *de v por*

$$||v|| = \sqrt{< v, v >}.$$

Lema 69 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interior complejo.*

i) Desigualdad de Cauchy-Schwartz: Para todo $u, v \in V$

$$| < u, v > | \leq ||u|| ||v||.$$

ii) Desigualdad triangular: Para todo $u, v \in V$

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Definición 77 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interior complejo. Para $u, v \in V$ decimos que u y v son* **ortogonales**, *$u \perp v$, si* $< u, v >= 0$.

Obsérvese que si $u \perp v$

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + < u, v > + < v, u > + ||v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2,$$

que es una versión general del Teorema de Pitǵoras.

Un conjunto $B \subset V$ se dice ortogonal si todo par de elementos distintos de B son ortogonales. B se dice ortonormal si es ortogonal y $||v|| = 1$ para todo $v \in B$.

Lema 70 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interior complejo. Sea $B \subset V$ un conjunto ortogonal y $0 \in B$. Entonces B es un cojunto linealmente independiente.*

Lema 71 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interior complejo y sea $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subset V$ un conjunto ortogonal con $u_j \neq 0$ para todo $j = 1, 2, \cdots, n$. Si $v \in spanB$, entonces*

$$v = \sum_{j=1}^{n} \frac{< v, u_j >}{||u_j||^2} u_j.$$

Definición 78 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interior complejo y sea $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subset V$ un conjunto ortogonal con $u_j \neq 0$ para todo $j = 1, 2, \cdots, n$. Sea $S = spanB$. Para $v \in V$, definimos la* **proyección ortogonal** *de v sobre S,*

$$P_S(v) = \sum_{j=1}^{n} \frac{< v, u_j >}{||u_j||^2} u_j.$$

Lema 72 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interior complejo, sea $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subset V$ un conjunto ortogonal con $u_j \neq 0$ para todo $j = 1, 2, \cdots, n$, $S = spanB$ y P_S la proyección ortogonal de v sobre S, entonces,*

i) *P_S es una transformación lineal.*

ii) *Para todo $v \in V$, $P_S(v) \in S$.*

iii) *Si $s \in S$, entonces $P_S(s) = s$.*

iv) *Propiedad de ortogonalidad: Para todo $v \in V, s \in S$,*

$$(v - P_S(v)) \perp s.$$

v) *Propiedad de mejor aproximación: Para todo $v \in V, s \in S$,*

$$||v - P_S(v)|| \leq ||v - s||,$$

con igualdad si y sólo si $s = P_S(v)$.

Lema 73 *(método de ortogonalización de Gram-Schmidt) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interior complejo, sea $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subset V$ un conjunto linealmente independiente en V. entonces existe un conjunto ortonormal*

$$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$

que tiene la misma cápsula lineal.

Definición 79 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interior complejo. Una base ortonormal de V es un conjunto ortonormal en V que también es una base.*

Lema 74 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interior complejo con una base ortonormal (finita) $R = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$.*

i) *Para todo $v \in V$,*

$$v = \sum_{j=1}^{n} < v, u_j > u_j.$$

ii) *Identidad de Parseval: Para $u, w \in V$,*

$$< u, w >= \sum_{j=1}^{n} < v, u_j > \overline{< w, u_j >}.$$

iii) *Fórmula de Palncherel: Para todo $v \in V$,*

$$||v||^2 = \sum_{j=1}^{n} | < v, u_j > |^2.$$

Definición 80 *Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{C}$.*

La **matriz transpuesta** *A^t de A es la matriz $n \times m$ $B = [b_{ij}]$ definida por $b_{ij} = a_{ji}$, para todo i, j.*

La **matriz conjugada transpuesta** *A^* de A es la matriz $n \times m$ $C = [c_{ij}]$ definida por $c_{ij} = \overline{a_{ji}}$, para todo i, j.*

Lema 75 *Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$.*

$$< Az, w >=< z, A^* w >,$$

para todo $z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^m$. Mas aún, A^* es la única matriz con esa propiedad.

Definición 81 *Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. A es* **unitaria** *si A es invertible y $A^{-1} = A^*$.*

Lema 76 *Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *A es unitaria.*

ii) *Las columnas de A forman una base ortogonal en $\mathbb{C}^n$.*

iii) *Las filas de A forman una base ortogonal en $\mathbb{C}^n$.*

iv) *A preserva el producto interior, $< Az, Aw >=< z, w >$, para todo $z, w \in \mathbb{C}^n$.*

v) *A preserva la norma, $||Az|| = ||z||$, para todo $z \in \mathbb{C}^n$.*

Lema 77 *Sea $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ la base euclídea de $\mathbb{C}^n$ y sea $O = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. Sea U la matrix $n \times n$ cuya j-ésima columna es el vector u_j,*

i) *U es unitaria, U es la matriz de cambio de base de O a E y U^* es la matriz de cambio de base de E a O.*

ii) *Supongamos* $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *que tiene matriz asociada* A *en la base euclídea, entonces la matriz asociada a* T *en la base* O, $A_{T,O} = U^*AU$.

Definición 82 *Sean* $A = [a_{ij}]$ *y* $B = [b_{ij}]$ *matrices* $n \times n$ *sobre* $\mathbb{C}$. *Decimos que* A *y* B *son es* **unitariamente semejantes** *si existe una matriz unitaria* U *tal que*

$$B = U^*AU.$$

Si A *es unitariamente semejante a una matriz diagonal, decimos que* A *es* **unitariamente diagonalizable**.

Definición 83 *Sea* $A = [a_{ij}]$ *una matriz* $n \times n$ *sobre* $\mathbb{C}$. A *se dice* **normal** *si* $A^*A = AA^*$.

Teorema 17 *(Teorema Espectral para matrices) Sea* $A = [a_{ij}]$ *una matriz* $n \times n$ *sobre* $\mathbb{C}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) A *es unitariamente diagonalizable.*

ii) A *es normal.*

iii) *Existe una base ortonormal de* $\mathbb{C}^n$ *que consiste en autovalores de* A.

Definición 84 *Sea* $A = [a_{ij}]$ *una matriz* $n \times n$ *sobre* $\mathbb{C}$. A *se dice* **hermitiana** *si* $A^* = A$.

Lema 78 *Sea* $A = [a_{ij}]$ *una matriz* $n \times n$ *sobre* $\mathbb{C}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) A *es hermitiana.*

ii) A *es normal y todos sus autovalores son reales.*

iii) *Existe una matriz unitaria* U *y una matriz diagonal* D *con entradas rales solamente tal que* $A = U^*DU$.

Referencias Bibliográficas

[1] Borke-Hubbard, B. *The World According to Wavelets.* A. K. Peters, Wellesley, Mass., 1996.

[2] Chui,C. *An Introduction to Wavelets.* Academic Press, Boston, 1992.

[3] Chui,C. ed. *Wavelets: a Tutorial in Theory and Applications.* Academic Press, New York, 1992.

[4] Daubechies,I. *Ten Lectures on Wavelets.* CBMS-NSF Reg. Conf. eries in Appl. Math. 61, SIAM, Philadelphia, 1992.

[5] Hernández, E. & Weiss, G. *A First Course on Wavelets.* CRC Press, Boca Ratón, FL, 1996.

[6] Mallat, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing.* Academic Press, New York, 1998.

[7] Meyer, Y. *Wavelets and Operator.* Cambridge University Press, Cambridge , 1993.

[8] Strichartz, R. *How to make wavelets.* Amer. Math. Mothly, 100 (1993), 539-556.

[9] Wickerhauser, M. *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software.* A. K. Peters, Wellesley, Mass., 1994.

[10] Wojtaszyk,P. *A Mathematical Introduction to Wavelets.* Cambridge University Press, Cambridge , 1997.

La reproducción de los textos fue gracias al patrocinio de

PDVSA