



GUÍA N°3 : LIMITES Y CONTINUIDAD

1. Utilizando la definición de límite, resuelva los siguientes problemas:

a) Si $\lim_{x \rightarrow 7} (2x-5) = 9$, ¿qué valor debe tomar δ , para que la distancia entre $f(x)$ y 9 sea inferior a 0.01? (Sol. $\delta=0.005$)

b) Hallar la relación entre δ y ε , para que se cumpla que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x - 2} = 11$. (Sol. $\delta=\varepsilon/3$)

c) Hallar el valor de $\delta > 0$ para que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$, siendo $\varepsilon=0.01$. (Sol. $\delta=0.005$)

2. Hallar la relación entre δ y ε para que se verifique que:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (5x - 11) = 4$ (Sol. $\delta=\varepsilon/5$)

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$ (Sol. $\delta=\varepsilon$)

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = 5$ (Sol. $2\delta=\varepsilon$)

3. Verifique si existen los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{\sqrt{x}-2}$ (Sol. No existe)

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+7}{x-1}$ (Sol. No existe)

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{2x+15}$ (Sol. Sí existe)

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{cotg} x}$ (Sol. No existe)

4. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^3 + x}{x^2 - 2x}$ (Sol. $-1/2$)

- b) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^3 - b^3}{x - b}$ (Sol. $3b^2$)
- c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 7x^2 + 15x - 9}$ (Sol. 1/2)
- d) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$ (Sol. -1/56)
- e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a\sqrt{ax}}{\sqrt{ax} - a}$ (Sol. $3a$)
- f) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ (Sol. $3a$)
- g) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h}$ (Sol. 12)
- h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(b+x)^2 - b^2}{x}$ (Sol. $2b$)
- i) $\lim_{x \rightarrow 100} \frac{\log^3 x - 2\log^2 x + \log x - 2}{\log^3 x - 2\log^2 x + 2\log x - 4}$ (Sol. 5/6)
- j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{4x} - a^{3x} - 3a^{2x} + 5a^x - 2}{a^{4x} - 2a^{3x} + 2a^x - 1}$ (Sol. 3/2)

5. Calcule los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{4x^3 + x}$ (Sol. 1/2)
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 + 1)(5x + 3)}{(2x^3 - 1)(x + 4)}$ (Sol. 0)
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5 + \sqrt{x^4 - 3x + 1}}{x - 1 + \sqrt[3]{4x^6 + 3x - 2}}$ (Sol. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$)
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 2} \right)$ (Sol. -4)

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x(x+a)} - x] \quad (\text{Sol. } \frac{1}{2}a)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} \quad (\text{Sol. } 3)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}] \quad (\text{Sol. } 1)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2-2} - (x+3)] \quad (\text{Sol. } -3)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \right] \quad (\text{Sol. } -1/2)$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \right] \quad (\text{Sol. } -1/4)$$

6. Calcule los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} \right) \quad (\text{Sol. } 0)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec x - \operatorname{tg} x) \quad (\text{Sol. } 0)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg} x} \quad (\text{Sol. } 2)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{1 - \cos x} \right) \quad (\text{Sol. } 0)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} \quad (\text{Sol. } -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \pi/3} \left(\frac{2 \cos^2 x + \cos x - 1}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1} \right) \quad (\text{Sol. } -3)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{Sol. } -1)$$

7. Calcule los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen} 2x}{x} \right)$ (Sol. 2)
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{tg} 2x}{\text{tg} 3x} \right)$ (Sol. 2/3)
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \text{tg} \left(\frac{\pi x}{2} \right)$ (Sol. 2/π)
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$ (Sol. ½)
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \text{sen} x}{1 - \cos x} \right)$ (Sol. 2)
- f) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{1 - \text{sen} x}} \right)$ (Sol. $\sqrt{2}$)
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} (\text{tg} 2x \cdot \text{cosec} 4x)$ (Sol. ½)
- h) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{\text{sen} x - \cos x}{1 - \text{tg} x} \right)$ (Sol. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$)
- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{tg} x - \text{sen} x}{\text{sen}^3 x} \right)$ (Sol. ½)
- j) $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \left(\frac{\text{tg} x + \text{tg} 2x}{\cos x + \cos 2x} \right)$ (Sol. $-\frac{8\sqrt{2}}{3}$)
- k) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\text{tg}(x+h) - \text{tg}(x)}{h} \right)$ (Sol. $\text{sec}^2 x$)
- l) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\text{cotg}(x+h) - \text{cotg}(x)}{h} \right)$ (Sol. $-\text{cosec}^2 x$)

8. Calcule los siguientes límites:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$ (Sol. e^{-1})

- b) $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{5}{h}}$ (Sol. e^5)
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (Sol. e^2)
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$ (Sol. e^3)
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n$ (Sol. e^4)
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}$ (Sol. e^6)
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (Sol. e)
- h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (Sol. ∞)
- i) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+mx)^{\frac{n}{x}}$ (Sol. e^{mn})
- j) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{3}{x}}$ (Sol. e^{-6})
- k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^x$ (Sol. e^2)
- l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$ (Sol. e^{-2})

9. Calcule los siguientes límites:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2b}{3n+2b-2}\right)^{2n}$ (Sol. $e^{4/3}$)
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[2]{1+4x}$ (Sol. e^2)

- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[2]{\frac{2a+x^2}{2a-x^2}}$ (Sol. $\sqrt[2]{e}$)
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1+5x}$ (Sol. e^5)
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{x}$ (Sol. 1/3)
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+ax^2} - \sqrt[3]{1-bx^2}}{x}$ (Sol. 0)
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsen x \cdot \operatorname{tg}^2 x}{x \operatorname{sen}^2 x} \right)$ (Sol. 1)
- h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x \sqrt{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x} - x\sqrt{x}}{x\sqrt{\operatorname{tg} x}} \right)$ (Sol. $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$)
- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos^3 x} \right)$ (Sol. 2/3)
- j) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x-2\operatorname{sen} x}{4x-\operatorname{sen} x} \right)$ (Sol. 1/3)
- k) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-\cos 2x}{x \operatorname{sen} x} \right)$ (Sol. 2)
- l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{4} x \right)}{\operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen} 2x)^2}$ (Sol. 1/16)

10. Continuidad:

A. Estudie la continuidad de las funciones en los puntos indicados

a) $F(x) = \frac{x+3}{x^2+x-6}$ en el punto $x = -3$ (Discont. evitable)

b) $Q(x) = \frac{2x^2+x-3}{x-1}$ en el punto $x = 1$ (Discont. evitable)

c) $H(x) = \frac{9x^2 - 4}{3x - 2}$ en el punto $x=2/3$ (Discont. evitable)

B. Determine las discontinuidades y clasifíquelas

a) $F(x) = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}$ (Sol. $x=2$, evitable; $x=-2$, esencial)

b) $F(x) = \frac{x-1}{x^2 - 4x - 5}$ (Sol. $x=-1$, esencial; $x=5$, esencial)

c) $F(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 5x + 2}$ (Sol. $x=2$, $x=1/2$, esenciales)

C. Determine los intervalos de continuidad de cada una de las siguientes funciones:

a) $F(x) = \frac{1+x^3}{1+x^2}$ (Sol. $(-\infty, +\infty)$)

b) $F(x) = \frac{3x-5}{2x^2 - x - 3}$ (Sol. $(-\infty, -1) \cup (-1, 3/2) \cup (3/2, +\infty)$)

c) $H(x) = \sqrt{2x-3} + x^2$ (Sol. $(3/2, +\infty)$)

d) $T(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4 - 16}$ (Sol. $(-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3)$)