

MÉTODO DE HOLZER - VAN DEN DUGEN EN EL ANÁLISIS DE PÓRTICOS.

Jorge David Cruz M.

Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Mecánica.
Departamento de Diseño. e-mail: jorge.cruz@ucv.ve

RESUMEN

Este trabajo muestra la aplicación del método de Holzer – Van den Dungen en su forma matricial en el cálculo de pórticos planos. Se presenta el desarrollo del método, las matrices de transferencia para cargas longitudinales y transversales en elementos de ejes rectos; las matrices de rotación, las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio de nodos a los cuales concurren elementos con orientaciones diferentes.

Palabras claves: Matriz de transferencia, cargas longitudinales y transversales, matriz de rotación.

ABSTRACT

This paper shows the application of the method of Holzer - Van den Dungen in matrix mode to calculate plane frames. The development of the method, the longitudinal and transversal loads transfer matrix in elements of straight axis appears, with the rotation matrix, the equations of compatibility and equilibrium of nodes to which elements with different directions concur.

Key words: Longitudinal and transversal loads transfer matrix loads, rotation matrix.

INTRODUCCIÓN

Según Dimarogonas (1996), Holzer, Güembel y Tolle desarrollaron entre 1907 y 1921 el método conocido como método de Holzer para el cálculo de de frecuencias naturales torsionales de ejes y en 1928 Van den Dungen lo amplió para vibraciones laterales de barras. Este método toma en cuenta el hecho de que una gran cantidad de problemas de ingeniería, y en especial aquéllos que se modelan por líneas, el comportamiento de cada sección transversal está influenciado solamente por el comportamiento de las secciones vecinas. Esta forma de modelar el problema permite obtener las respuestas estáticas y dinámicas sin necesidad de establecer las ecuaciones que lo gobiernan. Según Dimarogonas (1996), Thomson desarrolló el método en forma matricial y lo denominó *método de la matriz de transferencia*.

En este paper se muestra cómo el método de la matriz de transferencia puede utilizarse en la resolución de pórticos estructurales.

LIMITACIONES

Las limitaciones del desarrollo que se presenta a continuación, son las habituales en los modelos lineales de la mecánica de sólidos:

- Las secciones transversales son planas y permanecen planas después de la deformación.
- El material es lineal y elástico, y se considera que se mantienen estas propiedades durante toda la historia de carga del pórtico.
- Uno de los ejes centroidales principales de inercia de cada una de las secciones transversales está contenido en el plano del pórtico.
- Las deformaciones son pequeñas.
- Se desprecian las deformaciones por corte.
- El pórtico se considera libre de esfuerzos residuales y de imperfecciones.
- Las juntas son rígidas.

MATRIZ DE TRANSFERENCIA EN PÓRTICOS

Los pórticos estructurales se modelan mediante líneas, donde los valores de las variables de estado (fuerza axial, fuerza cortante, momento flector, desplazamientos y rotación) en una sección transversal solo dependen de lo que ocurre en las secciones transversales vecinas. Este tipo de problemas puede

estudiarse mediante matrices de transferencia, las cuales dependerán de la orientación asociada a cada línea y de las cargas en ellas contenidas.

Supóngase el pórtico bidimensional mostrado en la figura N° 6.1. En éste existen cambios de orientación y cargas aplicadas. El pórtico puede dividirse en elementos, los cuales tienen la característica de ser prismáticos, de eje recto y la función de carga que los solicita, si la hay, debe ser continua. Los extremos de los elementos están conectados a los nodos, que representan los planos donde comienzan y terminan los elementos. Lo anterior indica que deben colocarse nodos donde existan cambios en la geometría de la sección transversal, cambios de material, presencia de cargas concentradas (axial, transversal o momento flector), cambios en la función de carga externa y/o cambios en la orientación de los elementos.

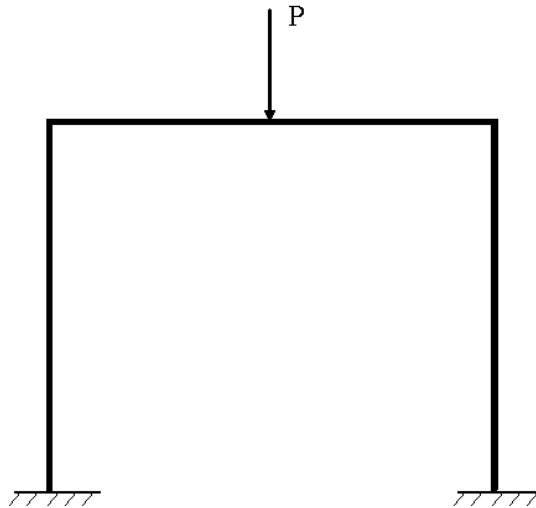


Figura N° 6.1. Pórtico.

Para describir completamente la situación de cada sección, se requiere conocer la magnitud de seis cantidades, denominadas *variables de estado* que son: el desplazamiento δ en la dirección axial de la sección, el desplazamiento y en la dirección normal, la rotación θ que gira la sección transversal respecto a su orientación original, la fuerza axial A , el momento flector M , y la fuerza cortante V .

La figura N° 6.2 muestra un elemento i del sistema entre los nodos i e $i+1$ en su condición deformada con la convención de signos habitual. Los desplazamientos axiales δ_i y δ_{i+1} medidos desde las posiciones iniciales de las respectivas secciones se han omitido por claridad del dibujo. Las *variables de estado* forman el vector $\mathbf{z}_i = [\delta \ y \ \theta \ A \ M \ V]$ que describe el estado del sistema en el nodo i , y se denomina *vector de estado*. Nótese que estas variables de estado están asociadas con la orientación indeformada del elemento. Esto conduce a la necesidad de establecer dos sistemas de referencia, el primero, que en la literatura se llama global y respecto al cual se establecen las coordenadas de los nodos y la orientación de los elementos, y el segundo denominado local, que es solidario con cada elemento y en el que uno de los ejes, generalmente el eje x , se hace coincidir con el eje axial del elemento.

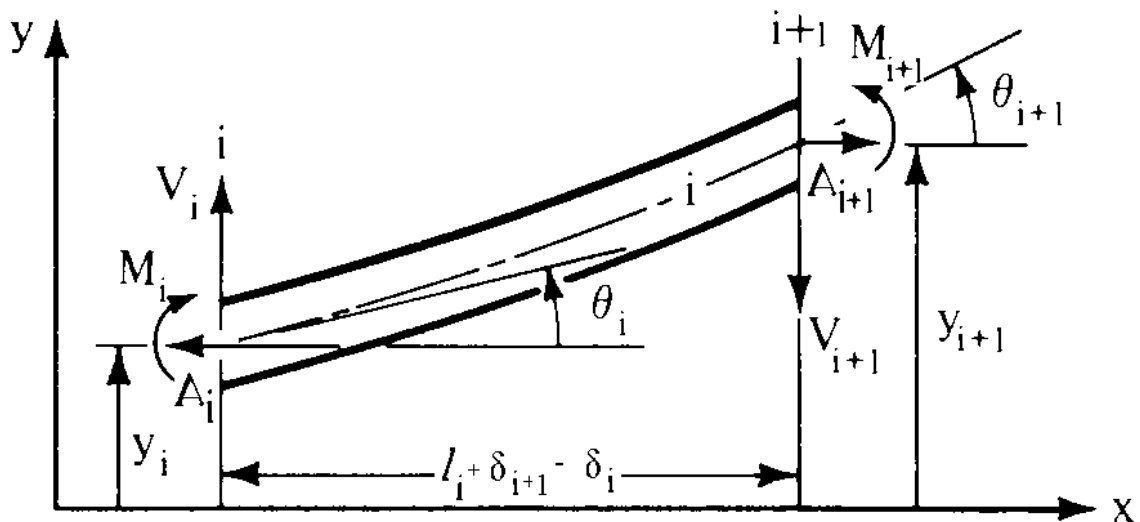


Figura N° 6.2. Elemento de la estructura en condición deformada.

Supóngase que en el nodo i el vector de estado es:

$$\mathbf{Z}_i = [\delta_i \ y_i \ \theta_i \ A_i \ M_i \ V_i] \quad (6.1)$$

de valores desconocidos. Si entre los nodos i e $i+1$ hay fuerzas distribuidas longitudinales representadas por una función $f_i(x)$, un cambio de temperatura uniforme ΔT_i y fuerzas distribuidas transversales representadas por una función continua y creciente de grado n de la forma $p_{xi} = p_i x^n / l_i^n$ (siendo p_i la intensidad máxima de la carga sobre el elemento) que soliciten al elemento entre los nodos i e $i+1$, por la teoría simple de viga-columna, las variables de estado del nodo $i+1$ en función de las del nodo i serán: (las cargas longitudinales y transversales no se muestran en la figura N° 2)

$$\begin{aligned} \delta_{i+1} &= \delta_i + \frac{F_i l_i}{E_i A_i} - \int_0^{l_i} \frac{\int_0^x f_i(x) dx}{EA} dx + \alpha_i l_i \Delta T_i \\ y_{i+1} &= y_i + l_i \theta_i + \frac{l_i^2}{2E_i I_i} M_i + \frac{l_i^3}{6E_i I_i} V_i + \frac{n! p_i x^{n+4}}{(n+4)! E I_i^n} \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \frac{l_i}{E_i I_i} M_i + \frac{l_i^2}{2E_i I_i} V_i + \frac{n! p_i x^{n+3}}{(n+3)! E I_i^n} \\ F_{i+1} &= F_i - \int_0^{l_i} f_i(x) dx \\ M_{i+1} &= M_i + l_i V_i + \frac{n! p_i x^{n+2}}{(n+2)! l_i^n} \\ V_{i+1} &= V_i + \frac{n! p_i x^{n+1}}{(n+1)! l_i^n} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Las tres últimas ecuaciones expresan el equilibrio de fuerzas y momentos, y las tres primeras, el desplazamiento longitudinal, el desplazamiento transversal y la rotación de la curva elástica debido a estos momentos y fuerzas.

Este conjunto de ecuaciones puede escribirse en forma matricial así:

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \quad (6.3)$$

con

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & \frac{l}{EA} & 0 & 0 & - \int_0^{L_i} \frac{f(x)dx}{EA} + \alpha_i l_i \Delta T_i \\
 0 & 1 & l & 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & \frac{n! px^{n+4}}{(n+4)! EIL^n} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & \frac{n! px^{n+3}}{(n+3)! EIL^n} \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & - \int_0^{L_i} f(x)dx \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & \frac{n! px^{n+2}}{(n+2)! L^n} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{n! px^{n+1}}{(n+1)! L^n} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \quad
 \mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \\ A \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_i
 \quad
 \mathbf{z}_{i+1} = \begin{bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \\ A \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_{i+1} \quad (6.4)$$

donde el subíndice i indica las propiedades l, E, A, I del elemento i . La fila 7 se ha agregado por conveniencia computacional. Es importante notar que la matriz de transferencia L_i fue obtenida conforme a un sistema de referencia local, es decir, uno de los ejes es el eje axial del elemento y el otro es perpendicular a dicho eje.

La ecuación (6.3) indica que el vector de estado del nodo $i+1$ es igual al vector de estado del nodo i premultiplicado por la matriz cuadrada \mathbf{L}_i de 7×7 , la cual depende solo de las propiedades del elemento que generalmente son conocidas y de las cargas que lo solicitan. Esta matriz \mathbf{L}_i se denomina **matriz de transferencia**. Por cada elemento viga-columna existe una matriz de transferencia.

Si los elementos $i+1$ e $i+2$ tienen la misma orientación, la repetición del proceso previo conduce a las ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \quad (6.5)$$

$$\mathbf{z}_{i+2} = \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \quad (6.6)$$

$$\mathbf{z}_{i+3} = \mathbf{L}_{i+2} \mathbf{z}_{i+2} = \mathbf{L}_{i+2} \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \quad (6.7)$$

En el caso de los nodos donde concurren dos elementos con orientaciones diferentes, como el mostrado en la figura N° 6.3, se requiere una matriz de transferencia mediante la cual se relacione el vector de estado correspondiente al nodo, respecto a los sistemas de referencia locales asociados a las direcciones de dichos elementos.

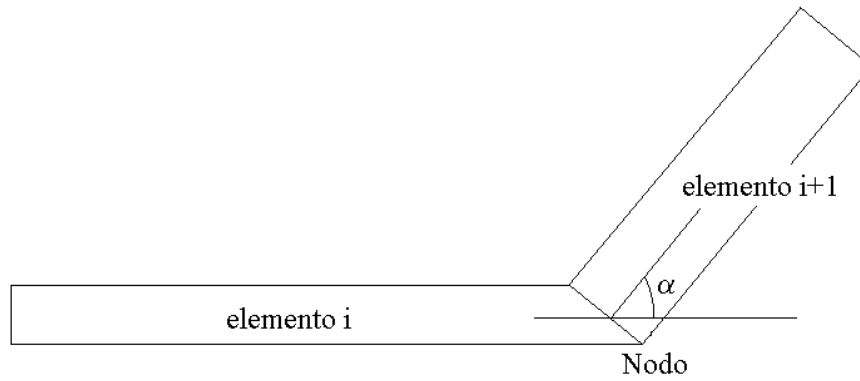


Figura N° 6.3.

Para este fin se presenta la figura N° 6.4. En ella se tienen dos sistemas de referencia denominados XY y X'Y' ambos con un origen de coordenadas común en O, que se considera como la posición de un punto de un sólido deformable antes de la deformación. El punto luego de la deformación pasa a la posición b. Las componentes del desplazamiento del punto respecto a los dos sistemas de referencia se relacionan mediante las ecuaciones

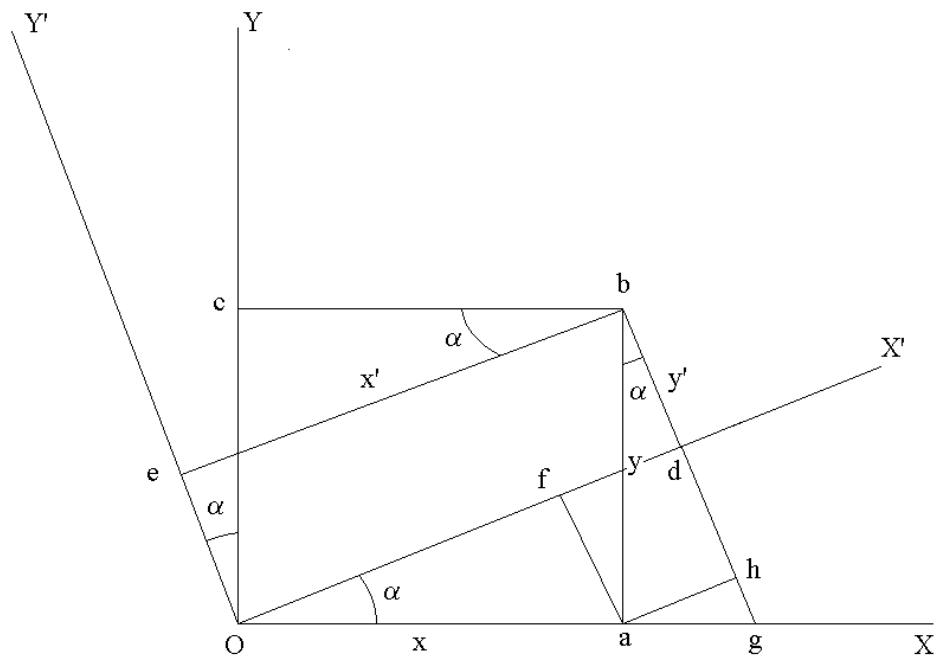


Figura N° 6.4. Componentes del desplazamiento de un punto respecto a dos sistemas de coordenadas.

$$x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \quad (6.8)$$

$$y' = y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha \quad (6.9)$$

Que expresadas en forma matricial conducen a la conocida matriz de rotación expresada por la ecuación (6.10).

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

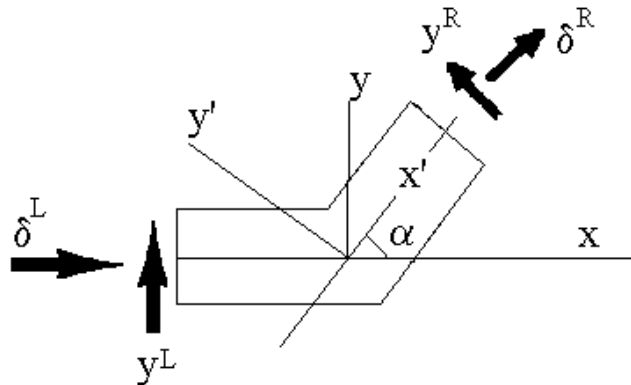


Figura N° 6.5. Componentes del desplazamiento de un nodo respecto a dos sistemas de referencia orientados en las direcciones longitudinales de los elementos que concurren a dicho nodo.

Como el desplazamiento del nodo es único, la transformación anterior permite relacionar las componentes de dicho desplazamiento del nodo respecto a los dos sistemas de referencia locales, cada uno de ellos asociado a la orientación de cada elemento, ambos con origen en el nodo, y que se diferencian exclusivamente en la rotación α . En este caso, estas componentes del desplazamiento son los desplazamientos axiales y transversales de las secciones de los elementos que concurren al nodo. Pudiendo expresarse en forma matricial así

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ y \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ y \end{Bmatrix}_L \quad (6.11)$$

Por la consideración de junta rígida se tiene

$$\theta_R = \theta_L \quad (6.12)$$

ampliándose la transformación anterior a

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_L \quad (6.13)$$

que en forma compacta se expresa así

$$\mathbf{z d}_R = \mathbf{R d} * \mathbf{z d}_L \quad (6.14)$$

con

$$\mathbf{z d}_R = \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_R \quad \mathbf{R d} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z d}_L = \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_L \quad (6.15)$$

Donde \mathbf{z}_R y \mathbf{z}_L son las componentes del desplazamiento y la rotación del nodo según la orientación de los sistemas de referencia locales asociados con cada uno de los elementos que concurren al nodo. \mathbf{R}_d es la matriz de transferencia de desplazamiento.

Similarmente se realiza la transformación de fuerzas axiales y cortantes en los elementos que concurren al nodo, la cual se presenta en forma gráfica en la figura N° 6.6.

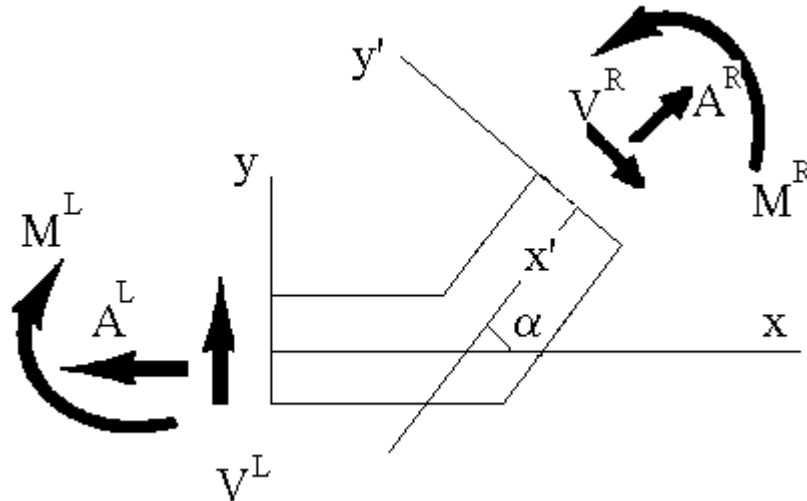


Figura N° 6.6. Fuerzas sobre el nodo de los elementos que concurren en él.

Por equilibrio se encuentra

$$\begin{aligned} A^R &= A^L \cos \alpha - V^L \operatorname{sen} \alpha \\ V^R &= A^L \operatorname{sen} \alpha + V^L \cos \alpha \\ M^R &= M^L \end{aligned} \quad (6.16)$$

Y en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} A \\ M \\ V \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ M \\ V \end{Bmatrix}_L \quad (6.17)$$

En forma compacta

$$\mathbf{z}_R = \mathbf{R}_f * \mathbf{z}_L \quad (6.18)$$

con

$$\mathbf{z}_R = \begin{Bmatrix} A \\ M \\ V \end{Bmatrix}_R ; \quad \mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{z}_L = \begin{Bmatrix} A \\ M \\ V \end{Bmatrix}_L \quad (6.19)$$

La ecuación anterior expresa las componentes de la fuerza que actúan en un lado del nodo orientadas según el sistema de referencia local asociado al elemento situado en ese mismo lado del nodo, en función de las componentes de la fuerza que actúa en el otro lado del nodo orientadas de acuerdo al sistema de referencia asociado con el elemento de este otro lado del nodo.

Reuniendo todas las variables de estado y las matrices de rotación anteriormente halladas, se obtiene la siguiente expresión, que relaciona las variables de estado de ambos lados de un nodo que une elementos con orientaciones diferentes.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{z}\mathbf{d}_R \\ \mathbf{z}\mathbf{f}_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}\mathbf{f} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{z}\mathbf{d}_L \\ \mathbf{z}\mathbf{f}_L \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

que expandida es

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \\ A \\ M \\ V \\ 1 \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & -\text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \\ A \\ M \\ V \\ 1 \end{Bmatrix}_L \quad (6.21)$$

y de manera compacta se expresa

$$\mathbf{z}_R = \mathbf{R}\mathbf{z}_L \quad (6.22)$$

Nótese que el ángulo es positivo en sentido anti-horario, midiéndose a partir del eje x correspondiente al elemento que “llega” al nodo. Para este cálculo los dos ejes se colocan en un mismo origen (sobre el nodo). Ver figura N° 6.7.

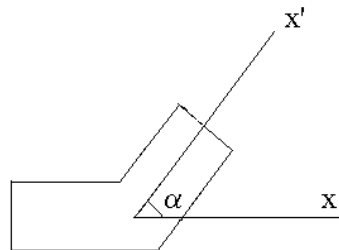


Figura N° 6.7. Detalle del cálculo del ángulo entre elementos.

Para el caso de un nodo con una carga axial P_A , una transversal P_T y un momento flector M_0 , con los sentidos indicados en la figura N° 6.8, la matriz de transferencia que se obtiene por consideraciones de equilibrio es la indicada por la ecuación 6.23.

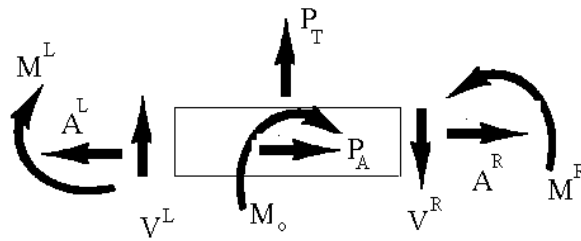


Figura N° 6.8. Nodo sometido a cargas concentradas.

La matriz de cargas puntuales es

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \\ A \\ M \\ V \\ 1 \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -P_A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & M_o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & P_T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \\ A \\ M \\ V \\ 1 \end{Bmatrix}_L \quad (6.23)$$

De lo anterior se concluye que en un pórtico como el de la figura N° 6.1, el sistema de ecuaciones que lo modela es de la forma

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{L}_{n-1} * \mathbf{L}_{n-2} * \mathbf{R}_{n-2} * \dots * \mathbf{L}_{i+1} * \mathbf{R}_{i+1} * \mathbf{P}_i * \mathbf{L}_i * \dots * \mathbf{L}_1 * \mathbf{z}_1 \quad (6.24)$$

o

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{A} * \mathbf{z}_1 \quad (6.25)$$

con

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_{n-1} * \mathbf{L}_{n-2} * \mathbf{R}_{n-2} * \dots * \mathbf{L}_{i+1} * \mathbf{R}_{i+1} * \mathbf{P}_i * \mathbf{L}_i * \dots * \mathbf{L}_1 \quad (6.26)$$

que consiste en la multiplicación de matrices cuadradas de $7 * 7$ en las que sus términos son propiedades geométricas, cargas y orientaciones de los elementos del pórtico. Esto conduce a un sistema de 6 ecuaciones y 12 variables de estado que corresponden a los desplazamientos, rotaciones, fuerzas y momentos en las secciones inicial y final del pórtico. De estas doce variables de estado, cualesquiera que sean las condiciones de contorno, siempre 6 de ellas son conocidas, por lo que el sistema de ecuaciones obtenido es determinado.

NODOS CON MÁS DE DOS ELEMENTOS

Otros casos que pueden presentarse son los pórticos en los que a un nodo concurren más de dos elementos, (nodos 2 y 5 del pórtico de la figura N° 6.9). Una manera de resolver estos casos es descomponer la estructura en subestructuras. A cada una de estas subestructuras se le aplica el método de la matriz de transferencia, y a las ecuaciones obtenidas se les adicionan las de compatibilidad y equilibrio de los nodos comunes, obteniéndose nuevamente un sistema determinado de ecuaciones. Para ilustrar el procedimiento se presenta el pórtico de la figura N° 6.9. En la figura N° 6.10 se muestran las subestructuras.

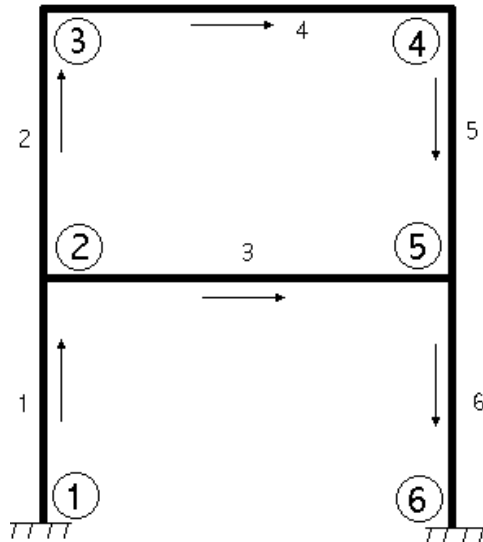


Figura N° 6.9. Pórtico de dos pisos. Las flechas indican la orientación de los elementos.

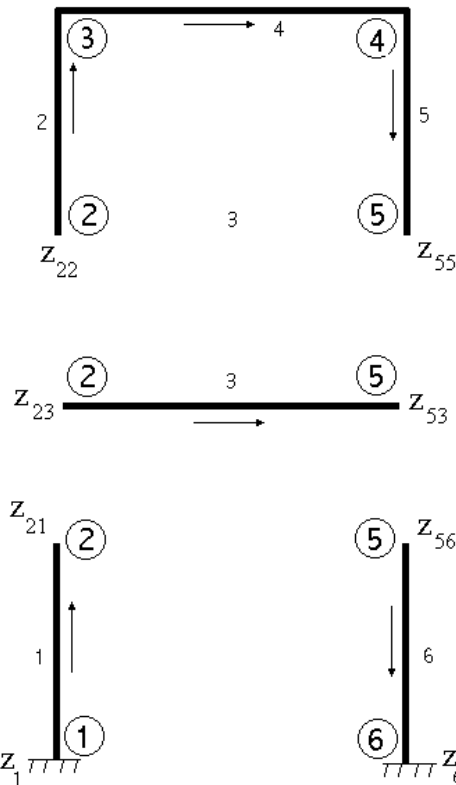


Figura N° 6.10. Despiece del pórtico en subsistemas.

Las ecuaciones para cada subestructura son

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}_{55} &= \mathbf{L}_5 * \mathbf{L}_4 * \mathbf{L}_2 * \mathbf{z}_{22} \\
 \mathbf{z}_{53} &= \mathbf{L}_3 * \mathbf{z}_{23} \\
 \mathbf{z}_{21} &= \mathbf{L}_1 * \mathbf{z}_1 \\
 \mathbf{z}_6 &= \mathbf{I}_6 * \mathbf{z}_{56}
 \end{aligned}
 \tag{6.27}$$

a las cuales se le agregan las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de las juntas 2 y 5, que relacionan las variables de estado \mathbf{z}_{21} \mathbf{z}_{22} y \mathbf{z}_{23} , y los vectores de estado \mathbf{z}_{55} \mathbf{z}_{53} y \mathbf{z}_{56} . En los vectores de estado escritos

de la forma z_{ij} se ha utilizado la convención siguiente: el primer subíndice (i) expresa el número del nodo y el segundo (j) indica a cual elemento que concurre el nodo corresponden el vector de estado.

Para el establecimiento de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de los desplazamientos del nodo se elabora la figura N° 6.11 que corresponde a un nodo genérico al cual “llegan” dos elementos y “salen” dos elementos. Lo que se obtendrá a continuación puede extrapolarse al caso de que sea un número mayor o menor de elementos que concurren al nodo.

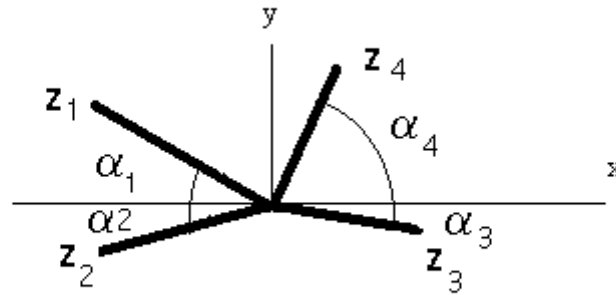


Figura N° 6.11. Nodo con cuatro barras concurrentes.

Los elementos que “llegan” al nodo son los que su sección final se une al nodo, mientras que los que “salen” del nodo son aquellos que su sección inicial está unida al nodo. Para el caso de la figura se considera que los elementos 1 y 2 llegan al nodo y los elementos 3 y 4 salen.

Para el equilibrio se pueden realizar dos sumatorias de fuerzas en dos direcciones ortogonales, que por costumbre se han indicado en la figura como las direcciones horizontal x y vertical y .

Las fuerzas del elemento 1 que actúan sobre el nodo y referidas a la orientación del elemento son z_{L1}^1 . Dichas fuerzas se pueden expresar en la direcciones xy mediante la rotación de ejes anteriormente indicada, esto es

$$z_{R1}^1 = \mathbf{Rf}_1 * z_{L1}^1 \quad (6.28)$$

$$z_{R1}^1 = \begin{Bmatrix} A \\ M \\ V \end{Bmatrix}_R ; \quad \mathbf{Rf}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & 0 & -\text{sen} \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \alpha_1 & 0 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix}; \quad z_{L1}^1 = \begin{Bmatrix} A \\ M \\ V \end{Bmatrix}_L \quad (6.29)$$

Recuérdese que el ángulo es entre el eje del elemento y la dirección del eje sobre el cual se desean proyectar las fuerzas y/o desplazamientos, ambos situados sobre el mismo origen. Ver figura N° 6.7.

En forma análoga para el elemento 2

$$z_{R2}^2 = \mathbf{Rf}_2 * z_{L2}^2 \quad (6.30)$$

$$z_{R2}^2 = \begin{Bmatrix} A \\ M \\ V \end{Bmatrix}_R ; \quad \mathbf{Rf}_2 = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha_2) & 0 & -\text{sen}(-\alpha_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(-\alpha_2) & 0 & \cos(-\alpha_2) \end{bmatrix}; \quad z_{L2}^2 = \begin{Bmatrix} A \\ M \\ V \end{Bmatrix}_L \quad (6.31)$$

Las fuerzas del nodo en las direcciones xy sobre los elementos 3 y 4 que salen del nodo son respectivamente

(6.32)

$$\mathbf{zf}_R^3 = \mathbf{Rf}_3 * \mathbf{zf}_L^3$$

$$\mathbf{zf}_R^3 = \begin{Bmatrix} A \\ M \\ V \end{Bmatrix}_R ; \quad \mathbf{Rf}_3 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & 0 & -\text{sen } \alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \alpha_3 & 0 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{zf}_L^3 = \begin{Bmatrix} A \\ M \\ V \end{Bmatrix}_L \quad (6.33)$$

$$\mathbf{zf}_R^4 = \mathbf{Rf}_4 * \mathbf{zf}_L^4 \quad (6.34)$$

$$\mathbf{zf}_R^4 = \begin{Bmatrix} A \\ M \\ V \end{Bmatrix}_R ; \quad \mathbf{Rf}_4 = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha_4) & 0 & -\text{sen}(-\alpha_4) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(-\alpha_4) & 0 & \cos(-\alpha_4) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{zf}_L^4 = \begin{Bmatrix} A \\ M \\ V \end{Bmatrix}_L \quad (6.35)$$

El equilibrio del nodo es

$$\mathbf{zf}_R^1 + \mathbf{zf}_R^2 = \mathbf{zf}_L^3 + \mathbf{zf}_L^4 \quad (6.36)$$

Ecuación que puede ser expandida a una sumatoria de fuerzas de los elementos que concurren al nodo.

La compatibilidad se expresa en forma análoga basándose en la misma figura N° 11. Descomponiendo los desplazamientos de las secciones de los elementos que concurren al nodo

$$\mathbf{zd}_R^1 = \mathbf{Rd}_1 * \mathbf{zd}_L^1 \quad (6.37)$$

$$\mathbf{zd}_R^1 = \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_R ; \quad \mathbf{Rd}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \text{sen } \alpha_1 & 0 \\ -\text{sen } \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{zd}_L^1 = \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_L \quad (6.38)$$

$$\mathbf{zd}_R^2 = \mathbf{Rd}_2 * \mathbf{zd}_L^2 \quad (6.39)$$

$$\mathbf{zd}_R^2 = \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_R ; \quad \mathbf{Rd}_2 = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha_2) & \text{sen}(-\alpha_2) & 0 \\ -\text{sen}(-\alpha_2) & \cos(-\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{zd}_L^2 = \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_L \quad (6.40)$$

$$\mathbf{zd}_R^3 = \mathbf{Rd}_3 * \mathbf{zd}_L^3 \quad (6.41)$$

$$\mathbf{zd}_R^3 = \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_R ; \quad \mathbf{Rd}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_3) & \text{sen}(\alpha_3) & 0 \\ -\text{sen}(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{zd}_L^3 = \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_L \quad (6.42)$$

2)

$$\mathbf{zd}_R^4 = \mathbf{Rd}_4 * \mathbf{zd}_L^4 \quad (6.43)$$

$$\mathbf{z}_R^4 = \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_R \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha_4) & \text{sen}(-\alpha_4) & 0 \\ -\text{sen}(-\alpha_4) & \cos(-\alpha_4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_L^4 = \begin{Bmatrix} \delta \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}_L \quad (6.44)$$

Por lo que las ecuaciones de compatibilidad son

$$\mathbf{z}_R^1 = \mathbf{z}_R^2 = \mathbf{z}_R^3 = \mathbf{z}_R^4 \quad (6.45)$$

Estas ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad conjuntamente con las ecuaciones de las subestructuras forman un sistema de ecuaciones determinado.

EJEMPLOS

Considérese el pórtico de la figura N° 6.12 con la carga mostrada. Este ejercicio, resuelto por el Método de la Pendiente-Deflexión, está tomado de Wang (1953).

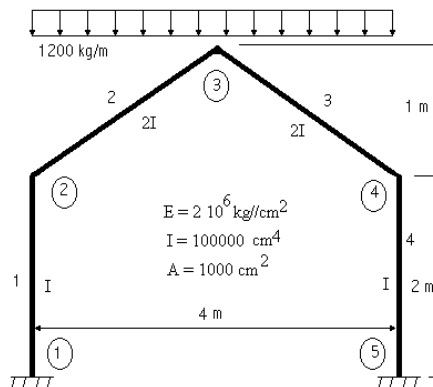


Figura N° 6.12. Pórtico a dos aguas.

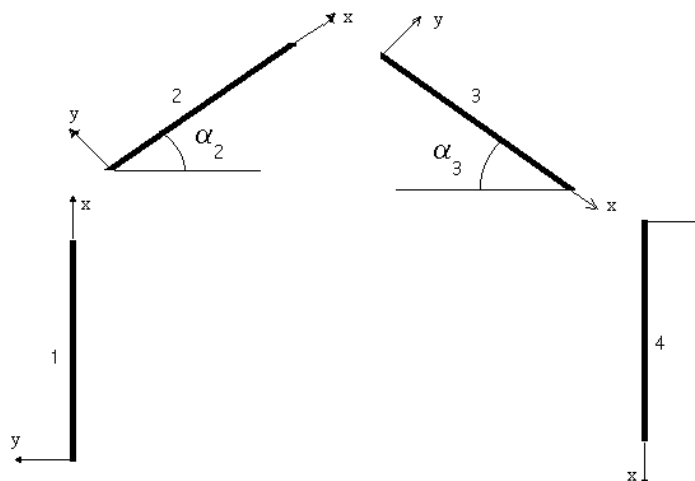


Figura N° 6.13. Orientación de los sistemas de referencia locales del pórtico de la figura N° 12.

Las ecuaciones del sistema están representadas por

$$\mathbf{z}_5 = \mathbf{L}_4 * \mathbf{R}_4 * \mathbf{L}_3 * \mathbf{R}_3 * \mathbf{L}_2 * \mathbf{R}_2 * \mathbf{L}_1 * \mathbf{z}_1 \quad (6.46)$$

donde

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l/EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l & 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

Con $l = 200\text{cm}$, $I = 100000\text{ cm}^4$; $A = 10000\text{ cm}^2$.

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{l}{EA} & 0 & 0 & -\frac{ql^2}{2EA} \\ 0 & 1 & l & 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & \frac{pl^4}{24EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & \frac{pl^3}{6EI} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -ql \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & \frac{pl^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & pl \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

con $q = -12 \cos \alpha_2 * \sin \alpha_2$; $p = -12 \cos^2 \alpha_2$; $l = 223.6\text{ cm}$; $I = 200000\text{ cm}^4$, $A = 1000\text{ cm}^2$.
Siendo $\alpha_2 = \arctan(1/2)$.

$$\mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{l}{EA} & 0 & 0 & -\frac{ql^2}{2EA} \\ 0 & 1 & l & 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & \frac{pl^4}{24EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & \frac{pl^3}{6EI} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -ql \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & \frac{pl^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & pl \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

con $q = 12 \cos \alpha_3 * \sin \alpha_3$; $p = -12 \cos^2 \alpha_3$; $l = 223.6\text{ cm}$; $I = 200000\text{ cm}^4$, $A = 1000\text{ cm}^2$.
Siendo $\alpha_3 = \arctan(1/2)$.

Para las matrices de rotación, los ángulos que se indican en la figura N° 6.15, que son los que se sustituirán en las matrices de rotación

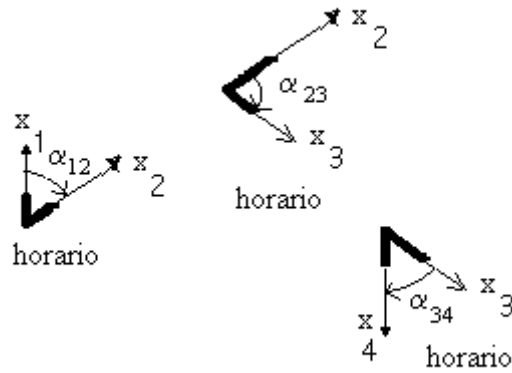


Figura N° 6.14. Sentidos de los ángulos para las matrices de rotación.

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{12}) & \sin(\alpha_{12}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_{12}) & \cos(\alpha_{12}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_{12}) & 0 & -\sin(\alpha_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha_{12}) & 0 & \cos(\alpha_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{23}) & \sin(\alpha_{23}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_{23}) & \cos(\alpha_{23}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_{23}) & 0 & -\sin(\alpha_{23}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha_{23}) & 0 & \cos(\alpha_{23}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

$$\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{34}) & \sin(\alpha_{34}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_{34}) & \cos(\alpha_{34}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_{34}) & 0 & -\sin(\alpha_{34}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha_{34}) & 0 & \cos(\alpha_{34}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

con $\alpha_{12} = -\arctan(1/2)$; $\alpha_{23} = -2 * \arctan(2)$ y $\alpha_{34} = -\arctan(1/2)$

Las condiciones de contorno son

$$\delta_1 = 0; y_1 = 0; \theta_1 = 0; \delta_5 = 0; y_5 = 0; \theta_5 = 0. \quad (6.53)$$

La solución del sistema de ecuaciones conduce a los resultados indicados en la figura N° 6.16.

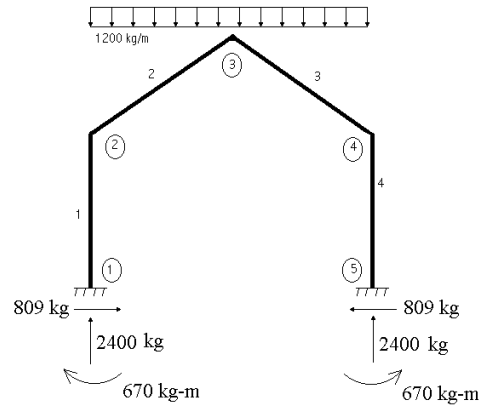


Figura N° 6.15. Sentido de las reacciones.

N° 2.

Para ilustrar el caso de más de dos elementos concurrendo a un nodo considérese el pórtico de la figura N° 6.16. Este ejercicio, resuelto por el Método de la Distribución de Momentos, aparece en Hsieh (1973)

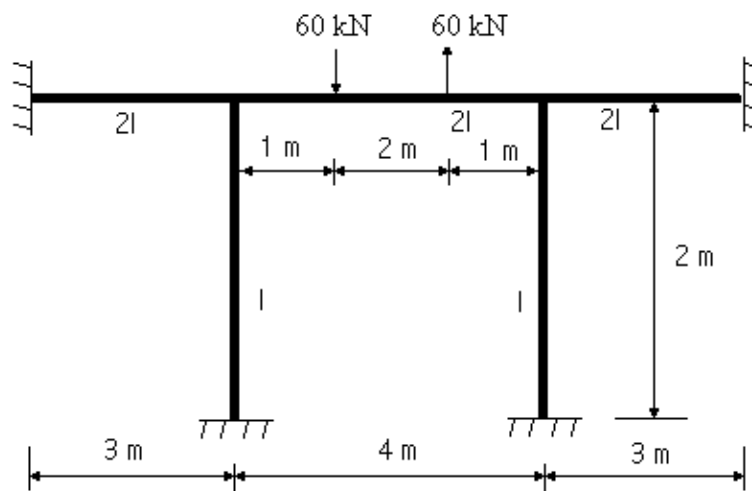


Figura N° 6.16. Pórtico de tres tramos.

La estructura se discretiza como se muestra en la figura N° 6.17.

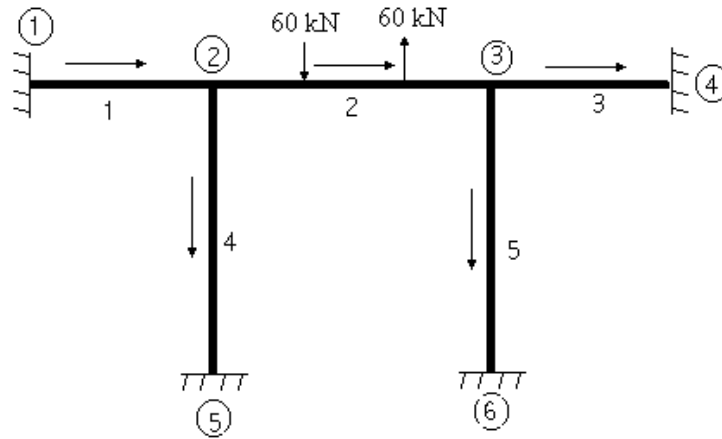


Figura N° 6.17. Discretización del pórtico de la figura N° 6.16. Las flechas paralelas a los elementos indican el sentido de avance de la transferencia.

Las subestructuras a considerar se muestran en la figura N° 6.18, y los sistemas de referencia locales en la figura N° 6.19.

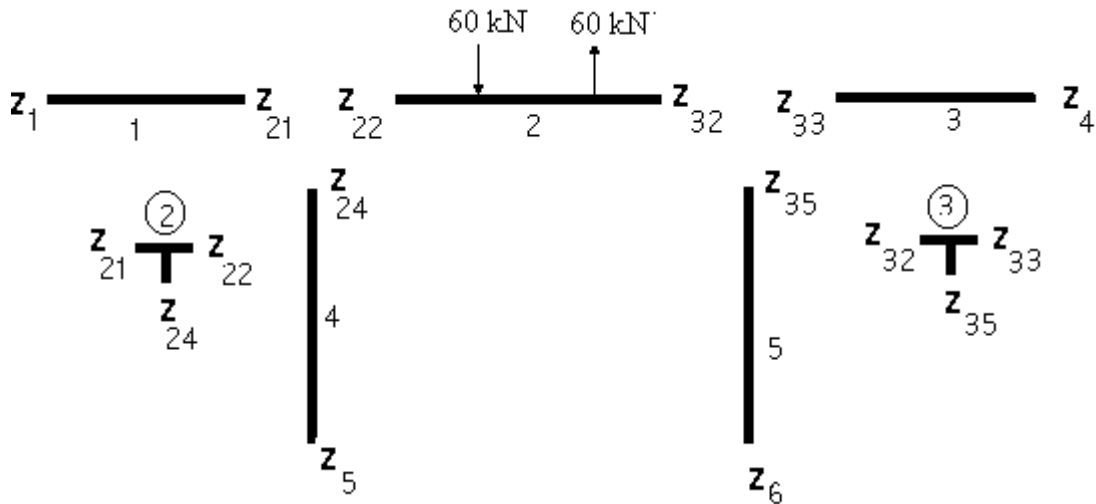


Figura N° 6.18. Subsistemas del pórtico de la figura N° 6.17.

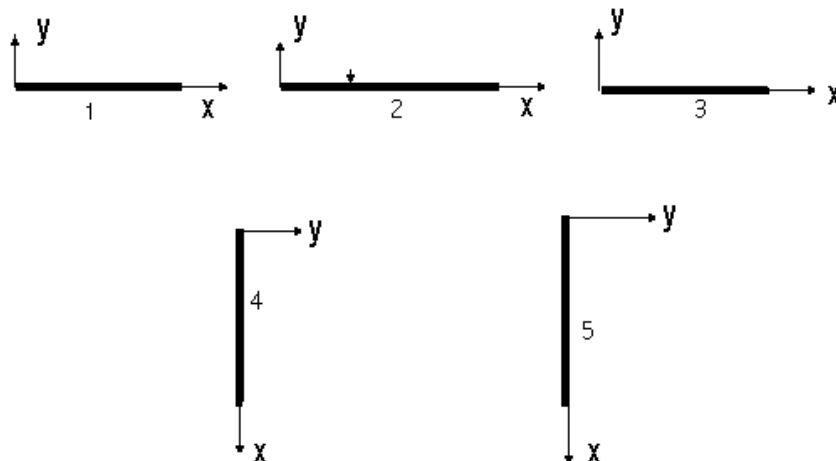


Figura N° 6.19. Sistemas de referencia de cada subsistema.

Las ecuaciones de las subestructuras son

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}_{21} &= \mathbf{L}_1 * \mathbf{z}_1 \\
 \mathbf{z}_{32} &= \mathbf{L}_{2a} * \mathbf{Q}_{21} * \mathbf{L}_{2b} * \mathbf{Q}_{22} * \mathbf{L}_{2b} * \mathbf{z}_{22} \\
 \mathbf{z}_4 &= \mathbf{L}_3 * \mathbf{z}_{33} \\
 \mathbf{z}_5 &= \mathbf{L}_4 * \mathbf{z}_{24} \\
 \mathbf{z}_6 &= \mathbf{L}_5 * \mathbf{z}_{35}
 \end{aligned}
 \tag{6.54}$$

Siendo \mathbf{L}_i la matriz indicada por la ecuación (4) con las correspondientes inercias, áreas y longitudes y \mathbf{Q}_i la matriz de carga puntual indicada por (23) con la carga axial y el momento concentrado nulos.

Las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de desplazamientos en los puntos de unión de los subsistemas corresponden a los nodos 2 y 3. La indicación de los elementos que llegan y salen de los nodos se indican en la figura N° 6.20. Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Rd}_1 * \mathbf{zd}_{21} &= \mathbf{Rd}_2 * \mathbf{zd}_{22} \\
 \mathbf{Rd}_1 * \mathbf{zd}_{21} &= \mathbf{Rd}_4 * \mathbf{zd}_{24} \\
 \mathbf{Rd}_2 * \mathbf{zd}_{32} &= \mathbf{Rd}_3 * \mathbf{zd}_{33} \\
 \mathbf{Rd}_2 * \mathbf{zd}_{32} &= \mathbf{Rd}_5 * \mathbf{zd}_{35} \\
 \mathbf{Rf}_1 * \mathbf{zf}_{21} &= \mathbf{Rf}_2 * \mathbf{zf}_{22} + \mathbf{Rf}_4 * \mathbf{zf}_{24} \\
 \mathbf{Rf}_2 * \mathbf{zf}_{32} &= \mathbf{Rf}_3 * \mathbf{zf}_{33} + \mathbf{Rf}_5 * \mathbf{zf}_{35}
 \end{aligned}
 \tag{6.55}$$



Figura N° 6.20. Indicación de cuales elementos llegan y salen del nodo.

Con $\alpha = 0^\circ$ para los elementos 1, 2 y 3; y $\alpha = +90^\circ$ para los elementos 4 y 5.

A_1	M_1	V_1	A_{21}	M_{21}	V_{21}
431 kg	338 kg-m	-356kg	431 kg	-730 kg-m	-356 kg
A_{22}	M_{22}	V_{22}	A_{24}	M_{24}	V_{24}
0	-1308 kg-m	3654 kg	-4010 kg	578 kg-m	3654 kg
A_{32}	M_{32}	V_{32}	A_{33}	M_{33}	V_{33}
0	1308 kg-m	3654 kg	-431 kg	730 kg-m	-356 kg
A_{35}	M_{35}	V_{35}	A_4	M_4	V_4
4010 kg	578 kg-m	-431 kg	-431 kg	-338 kg-m	-356 kg
A_5	M_5	V_5	A_6	M_6	V_6
-4010 kg	-284 kg-m	-431 kg	4010 kg	-284 kg-m	-431 kg

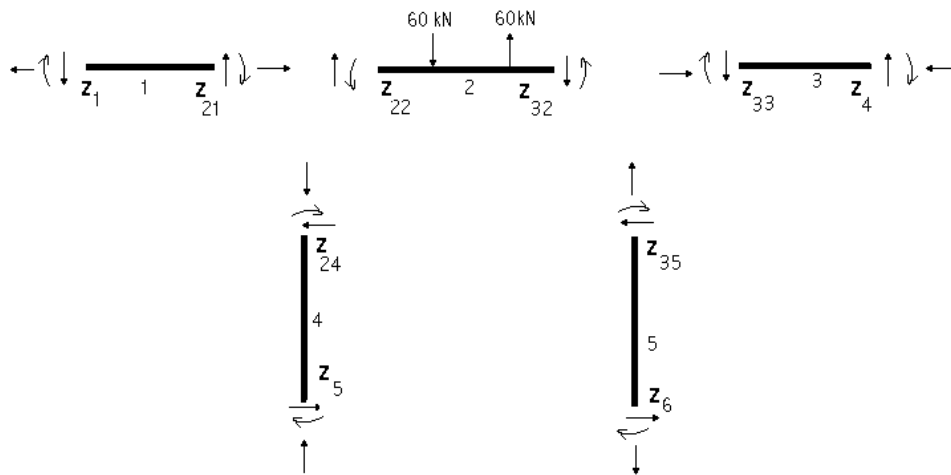


Figura N° 6.22. Sentidos reales de las fuerzas según resultados obtenidos.

CONCLUSIONES

Se obtuvieron las matrices de rotación para poder aplicar el método de la matriz de transferencia en elementos rectos no alineados.

Se obtuvieron las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio basadas en matrices de rotación para los nodos donde concurren más de dos elementos para que el método de la matriz de transferencia pueda ser aplicado a cualquier tipo de pórtico plano de elementos rectos.

Los ejemplos mostrados demuestran la factibilidad de la aplicación del método en los pórticos planos.

REFERENCIAS

Dimarogonas, A. 1996. *Vibrations for Engineers*. Second Edition. Prentice Hall. New Jersey. 825 p.

Hsieh, Y. 1973. *Teoría Elemental de Estructuras*. Pág. 285-287. Prentice Hall Interamericana.

Wang, C. 1953. *Statically Indeterminate Structures*. Pág. 190-195. McGraw-Hill.