

TEMA 4

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE HOLZER - VAN DEN DUGEN EN LA  
SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TORSIÓN DE LA MECÁNICA DE  
SÓLIDOS.

4.1- Desarrollo del Método de Holzer – Van den Dungen para problemas de torsión.

Los problemas de torsión en la mecánica de sólidos también se modelan mediante líneas, donde los valores de las variables de estado, torque y rotación, en una sección transversal solo dependen de lo que ocurre en secciones vecinas. Este tipo de problemas puede estudiarse mediante matrices de transferencia, las cuales dependerán de la geometría asociada a cada línea y de las cargas torsionales en ellas contenidas.

Supóngase un sistema unidimensional como el mostrado en la figura N° 4.1. En este sistema existen cambios en la geometría y cargas torsionales externas aplicadas. Puede dividirse el sistema en elementos, los cuales tienen la característica de ser prismáticos, de un mismo material y libres de cargas torsionales externas. Los extremos de cada elemento se conectan a los llamados nodos, que representan los planos donde comienzan y terminan los elementos. Esta primera consideración indica que deben colocarse nodos donde existan cambios en la geometría de la sección transversal, cambios de material y/o presencia de torques concentrados, para así cumplir con la condiciones anteriores.

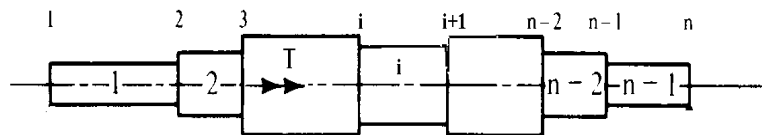


Figura N° 4.1. Sistema unidimensional bajo carga torsional.

Considérese el elemento  $i$  entre los nodos  $i$  e  $i+1$  en la condición deformada. Figura N° 4.2. Esta condición final es la geometría del mismo después de la aplicación de las cargas torsionales en el sistema original, por lo tanto se indican las rotaciones de las secciones extremas respecto a un sistema de referencia fijo y las cargas torsionales que ejercen sobre él los elementos a la izquierda y a la derecha. (Las rotaciones antihorarias hacia la derecha positivas y los vectores torques saliendo del elemento positivas).

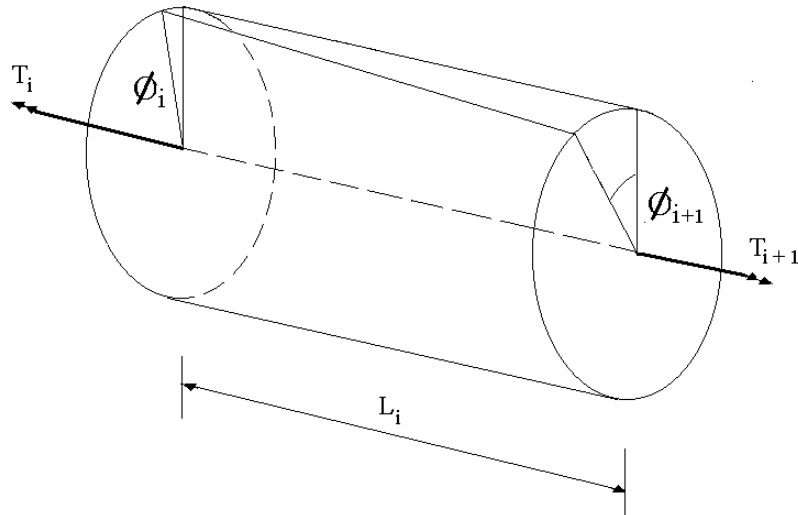


Figura N° 4.2. Elemento unidimensional deformado por torsión.

La ecuación de equilibrio de fuerzas axiales indica que  $T_{i+1} = T_i$ . La ecuación que relaciona las rotaciones de las secciones extremas del elemento es  $\phi_{i+1} = \phi_i + \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$ .

Ecuaciones que pueden expresarse en forma matricial así:

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \quad (4.1)$$

con

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{GJ} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} \phi \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad \mathbf{z}_{i+1} = \begin{bmatrix} \phi \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_{i+1} \quad (4.2)$$

Donde se han agregado la tercera fila y la tercera columna por conveniencia computacional.

La ecuación indica que el vector de estado del nodo  $i+1$  es el vector de estado del nodo  $i$  premultiplicado por la matriz cuadrada  $\mathbf{L}_i$  de  $3 \times 3$ , la cual depende solo de las propiedades mecánicas y geométricas del elemento, que son generalmente conocidas. Esta matriz  $\mathbf{L}$  se denomina *matriz de transferencia para elemento unidimensional torsional*. Para cada elemento del sistema de la figura N° 4.1, existe una matriz de transferencia.

Para varios elementos consecutivos, en los cuales no exista ningún torque, puede repetirse el proceso anterior, obteniéndose expresiones de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i+1} &= \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \\ \mathbf{z}_{i+2} &= \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{z}_{i+3} = \mathbf{L}_{i+2} \mathbf{z}_{i+2} = \mathbf{L}_{i+2} \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i$$

Hasta ahora, el vector de estado es el mismo a la izquierda y a la derecha del nodo. Sin embargo, si un nodo tiene un torque externo concentrado  $T$ , esto cambia. La figura 4.3 muestra esta situación. Esta segunda condición indica que debe colocarse un nodo donde exista un torque concentrado.

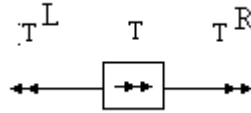


Figura N° 4.3. Nodo con torque concentrado.

En este caso, las rotaciones a la izquierda y a la derecha del nodo son iguales (el nodo se considera de dimensiones despreciables, por lo que no existe rotación relativa entre sus extremos por la presencia del torque)

$$\phi^R = \phi^L \quad (4.4)$$

pero el equilibrio requiere:

$$T^R = T^L - T \quad (4.5)$$

que expresadas matricialmente son

$$\mathbf{z}^R = T_j \mathbf{z}^L \quad (4.6)$$

con

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_j \quad \mathbf{z}^R = \begin{bmatrix} \phi \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_R \quad \mathbf{z}^L = \begin{bmatrix} \phi \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_L \quad (4.7)$$

donde los superíndices  $L$  y  $R$  designan la situación a la izquierda y a la derecha del nodo  $j$ .

Denominándose  $T_j$  *matriz de torque puntual*. Por lo tanto la transferencia de la izquierda a la derecha a través de un nodo cargado se consigue premultiplicando por la matriz puntual.

En este caso la ecuación se transforma en

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{L}_{n-2} \dots \mathbf{L}_j T_j \mathbf{L}_{j-1} \dots \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (4.8)$$

Este producto puede tomar en cuenta cualquier cantidad de torques puntuales, mediante la incorporación de todas las matrices puntuales ubicadas correctamente.

Por ejemplo:

$$\mathbf{A} = T_n \mathbf{L}_{n-1} T_{n-1} \mathbf{L}_{n-2} \dots \mathbf{L}_j T_j \mathbf{L}_{j-1} \dots T_3 \mathbf{L}_2 T_2 \mathbf{L}_1 T_1 \quad (4.9)$$

es una matriz cuadrada de  $3 \times 3$  obtenida por la multiplicación de la cadena de matrices de  $3 \times 3$

Por lo tanto la ecuación toma la forma

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{A} \mathbf{z}_1 \quad (4.10)$$

Las primeras dos ecuaciones del sistema de ecuaciones anterior tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \phi_n &= a_{11}\phi_1 + a_{12}T_1 \\ T_n &= a_{21}\phi_1 + a_{22}T_1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

que corresponden a dos ecuaciones con cuatro incógnitas, que son las condiciones de los extremos  $\phi_n$ ,  $\phi_l$ ,  $T_n$  y  $T_l$ . Sin embargo, en la práctica siempre dos de estas condiciones se conocen. Si un eje tiene sus dos extremos fijos, las dos rotaciones  $\phi_n$  y  $\phi_l$  son nulas. Si uno de los extremos está fijo, la rotación correspondiente a él es nula, y del otro extremo se conoce el torque aplicado. Por lo tanto el sistema de ecuaciones anterior permite conocer las otras dos incógnitas.

Esto significa que pueden solucionarse problemas de torsión con solo multiplicar cadenas de matrices de  $3 \times 3$  y resolver el sistema de ecuaciones.

En el caso de un elemento cargado con un torque distribuido de función continua a lo largo del mismo, como el mostrado en la figura N° 4.4, las ecuaciones se obtienen mediante la elaboración del diagrama de cuerpo libre de la figura N° 4.5. Esta tercera condición indica que al inicio y al final de la carga distribuida continua debe considerarse un nodo. En otras palabras, la presencia de una carga distribuida continua define un elemento.

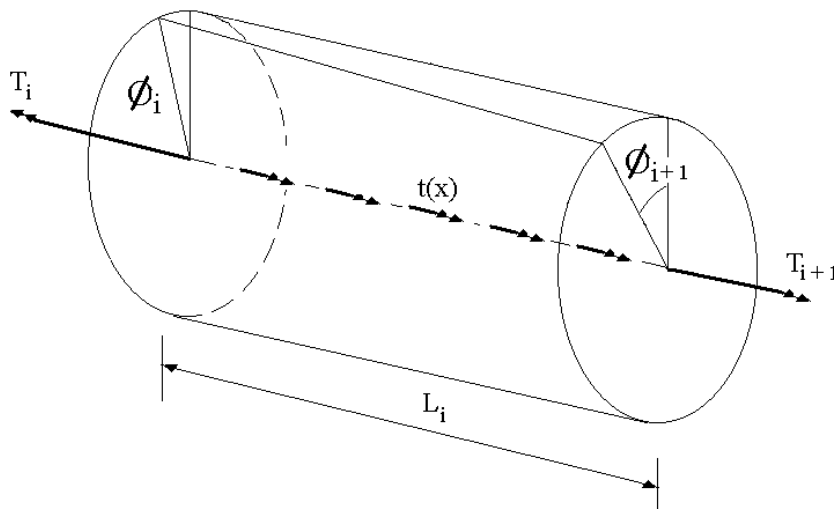


Figura N° 4.4. Elemento con carga torsional distribuida.

De la figura N° 4.5 se obtienen la ecuación de equilibrio y la relación de rotaciones para la fracción de elemento considerado.

$$Torque = T_i - \int_0^x t(x) dx$$

$$\phi_x = \phi_i + \frac{T_i x}{GJ} - \int_0^x \frac{\int_0^x t(x) dx}{GJ} dx \quad (4.12)$$

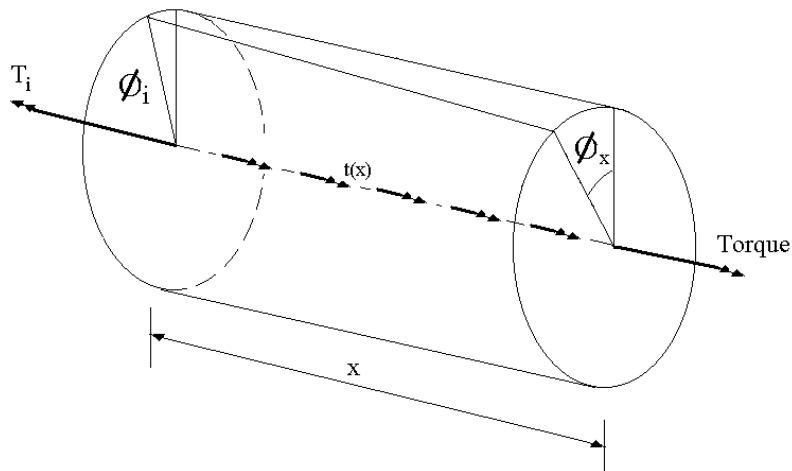


Figura N° 4.5. Diagrama de cuerpo libre de una fracción del elemento  $i$ .

Para luego integrarse sobre todo el elemento, resultando

$$T_{i+1} = T_i - \int_0^{L_i} t(x) dx$$

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \frac{T_i L_i}{GJ} - \int_0^{L_i} \frac{\int_0^x t(x) dx}{GJ} dx \quad (4.13)$$

Expresándolas en forma matricial:

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{t}_i \mathbf{z}_i \quad (4.14)$$

con

$$t_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{GJ} & -\int_0^{L_i} \frac{\int_0^x t(x)xdx}{GJ} dx \\ 0 & 1 & -\int_0^{L_i} t(x)dx \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad z_i = \begin{bmatrix} \phi \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad z_{i+1} = \begin{bmatrix} \phi \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_{i+1} \quad (4.15)$$

## 4.2.- EJEMPLOS

### 2.2.1.- Ejemplo de Torsión N° 1.

Considérese como primer ejemplo el caso de un eje fijo en el extremo izquierdo y con dos torques como se muestra en la figura N° 4.6.

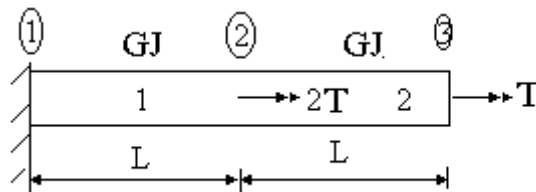


Figura N° 4.6. Eje solicitado por dos torques.

Para este ejercicio se tienen 3 nodos (indicados por números inscritos en círculos) y dos elementos, (indicados por los números). El primer nodo al inicio del sistema. (Extremo izquierdo). El segundo nodo lo determina la presencia del torque concentrado de magnitud 2T. El tercer nodo, el extremo final. (Extremo derecho).

En este caso se tienen dos matrices de transferencia iguales, correspondientes a cada uno de los elementos de longitud L, y una matriz de torque puntual. Estas son:

$$L_1 = L_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{GJ} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1 \quad (4.16)$$

Los vectores de estado son:

$$z_1 = \begin{bmatrix} \phi \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_1 \quad z_3 = \begin{bmatrix} \phi \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_3 \quad (4.17)$$

Con  $\phi_1 = 0$  y  $T_3 = T$  como condiciones de borde.

Y el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{L}_2 \mathbf{T}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (4.18)$$

Cuyo resultado es

$$T_1 = 3T \quad (4.19)$$

$$\phi_3 = 4TL/GJ$$

Una forma alterna de resolver este problema es considerar el torque del extremo derecho como una matriz de torque puntual en lugar de una condición de contorno. En este caso tendría que adicionarse la matriz de torque puntual

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_2 \quad (4.20)$$

Las condiciones de borde se transforman en  $\phi_1 = 0$  y  $T_3 = 0$ .

El sistema de ecuaciones es

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{T}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{T}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (4.21)$$

Obteniéndose el mismo resultado anterior.

#### 4.2.2.- Ejemplo de Torsión N° 2.

Nótese que si el problema es hiperestático, figura N° 4.7, solo cambian las condiciones de contorno y por ello las incógnitas a determinar. En un caso como el ejemplo anterior, pero con los dos extremos fijos, las condiciones conocidas son  $\phi_1 = 0$  y  $\phi_3 = 0$ . Las variables a determinar son las dos reacciones en los extremos.

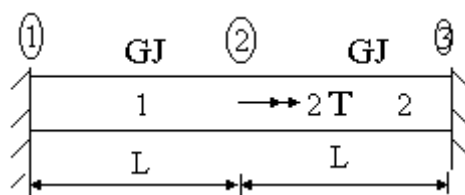


Figura N° 4.7. Barra doblemente fija.

Y el sistema de ecuaciones a resolver es el mismo

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{L}_2 \mathbf{T}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (4.22)$$

Y el resultado es

$$T_1 = T \quad (4.23)$$

$$T_3 = -T$$

### 4.3.- ELABORACIÓN DE LOS DIAGRAMAS DE TORQUE Y DE ÁNGULO DE TORSIÓN.

Observando la ecuación (4.10)

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{A} \mathbf{z}_1 \quad (4.10)$$

se ve que luego de resolver el sistema de ecuaciones, las variables de estado de la sección 1 son todas conocidas. Por lo tanto, pueden calcularse las variables de estado en cualquier sección transversal mediante el producto de todas las matrices de transferencia involucradas entre la sección inicial y la sección de interés. Como este proceso se puede repetir para cualquier número de secciones transversales, podemos utilizar los valores de las variables de estados de dichas secciones transversales para construir las gráficas de torque y del ángulo de torsión.

Como ilustración del procedimiento se muestra el ejemplo de la figura N° 4.8. Este sistema corresponde a un eje doblemente fijo con sección transversal variable, solicitado por los torques allí indicados. El sistema tiene la geometría indicada en la figura y el módulo elástico cortante es  $G = 7 * 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ .

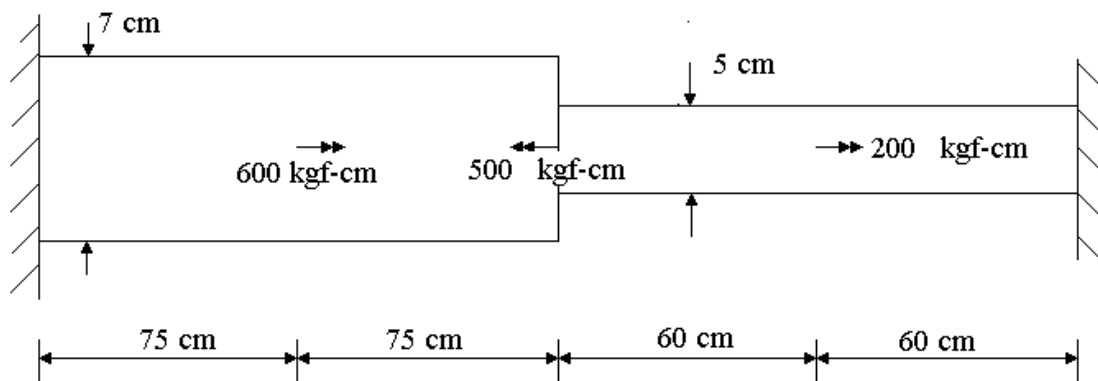


Figura N° 4.8. Eje doblemente fijo con cambio de sección transversal.

La discretización del eje se muestra en la figura N° 4.9.



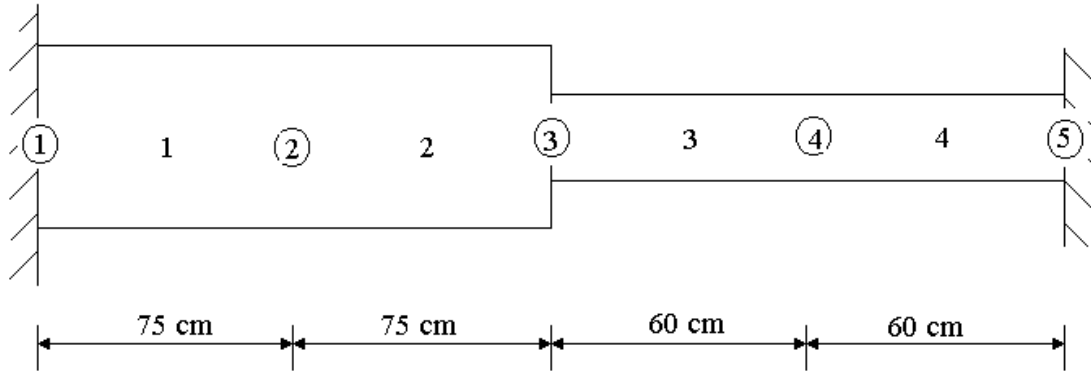


Figura N° 4.9. Discretización del eje de la figura N° 4.8. Los números inscritos en círculos corresponden a los nodos, los otros números corresponden a los elementos.

La resolución de este problema tiene por sistema de ecuaciones

$$\mathbf{z}_5 = \mathbf{L}_4 \mathbf{T}_4 \mathbf{L}_3 \mathbf{T}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{T}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1 \quad (4.24)$$

con

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{GJ} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1,2} \quad \mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{GJ} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3,4} \quad (4.25)$$

con

$$\left( \frac{L}{GJ} \right)_{1,2} = \left( \frac{75}{7 * 10^5 * \frac{\pi * 7^4}{32}} \right) = 4.55 * 10^{-7} \text{ 1/kg-cm} \quad (4.26)$$

$$\left( \frac{L}{GJ} \right)_{3,4} = \left( \frac{60}{7 * 10^5 * \frac{\pi * 5^4}{32}} \right) = 1.40 * 10^{-6} \text{ 1/kg-cm}$$

y

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -600 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_2 \quad \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3 \quad \mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -200 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_4 \text{ (kgf-cm)} \quad (4.27)$$

Las condiciones de borde son  $\phi_1 = 0$  y  $\phi_5 = 0$ .

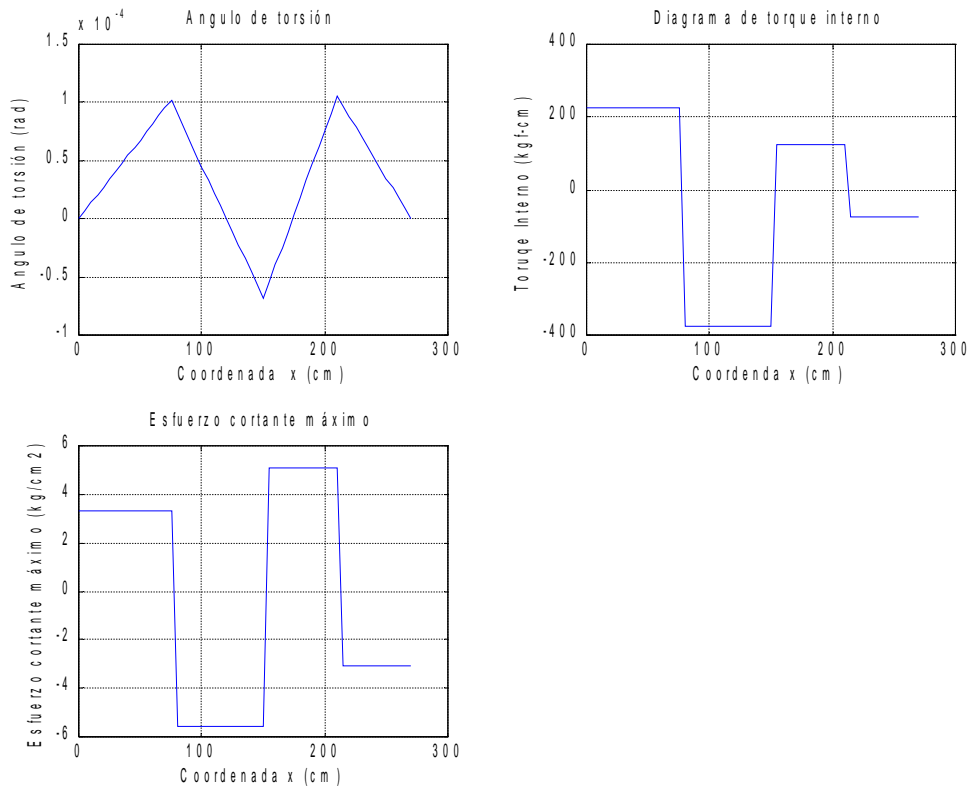


Figura N° 4.10. Diagramas de ángulo de torsión, torque interno y esfuerzo cortante máximo.

#### 4.4.- SÓLIDOS INTERCONECTADOS CON ENGRANAJES.

Considérese el caso de dos sólidos interconectados mediante dos engranajes rígidos, como el que se muestra en la figura N° 4.11. Debido al torque aplicado en la sección  $B$  el sistema se deforma y el engranaje  $D$  actúa como una restricción elástica (resorte torsional) sobre la sección  $C$  del eje  $AC$  a través del engranaje colocado en dicha sección, debido a que el sólido  $DE$  se encuentra fijo en la sección  $E$ . Esto significa que la sección  $C$  puede rotar pero no libremente, es decir, cuando la sección rota aparece un torque contrario al ángulo de giro y proporcional a dicho ángulo.

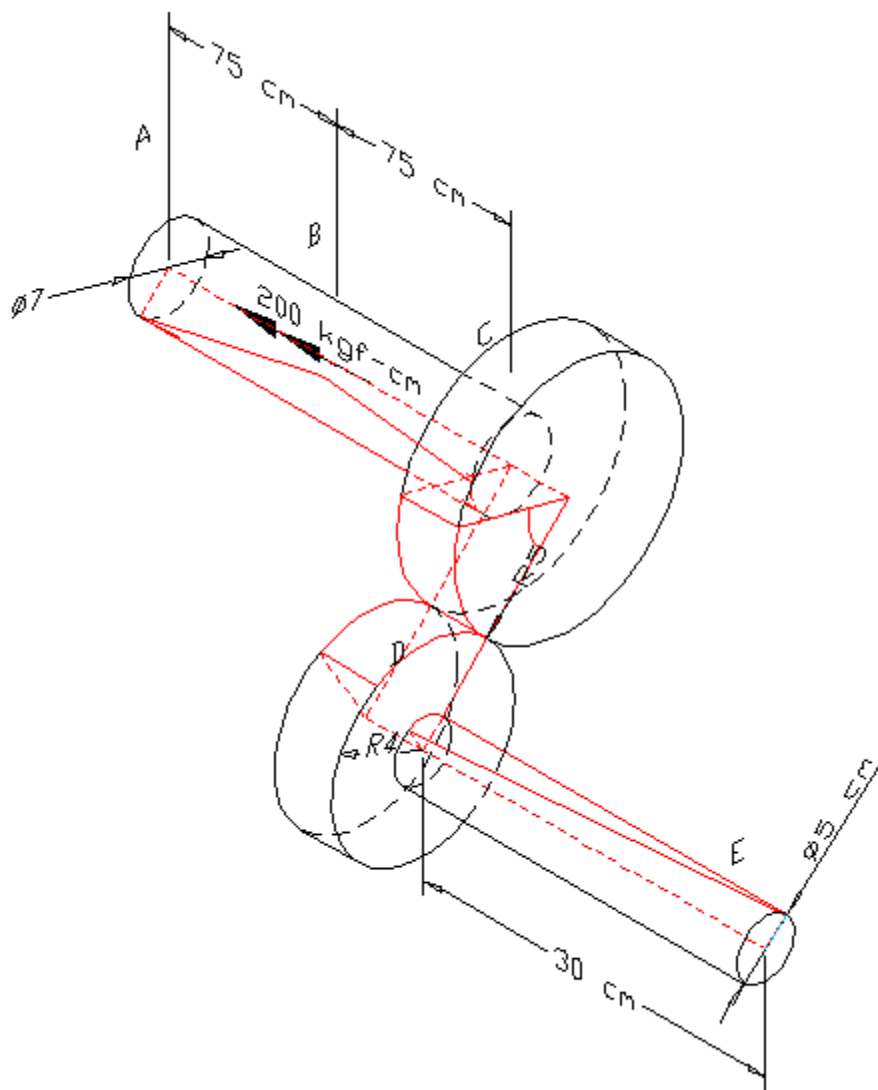


Figura N° 4.11. Sólidos interconectados con engranajes.

Elaborando los diagramas de cuerpo libre de los dos sólidos con sus respectivos engranajes, tenemos los esquemas mostrados en la figura N° 4.12. En dicha figura aparece la fuerza  $F$  de interacción entre los dos engranajes, que por principio de acción y reacción son iguales. Cada una de estas fuerzas  $F$  multiplicada por el radio de cada engranaje corresponden a los torques a que están sometidos cada uno de los sólidos en las secciones  $C$  y  $D$ .

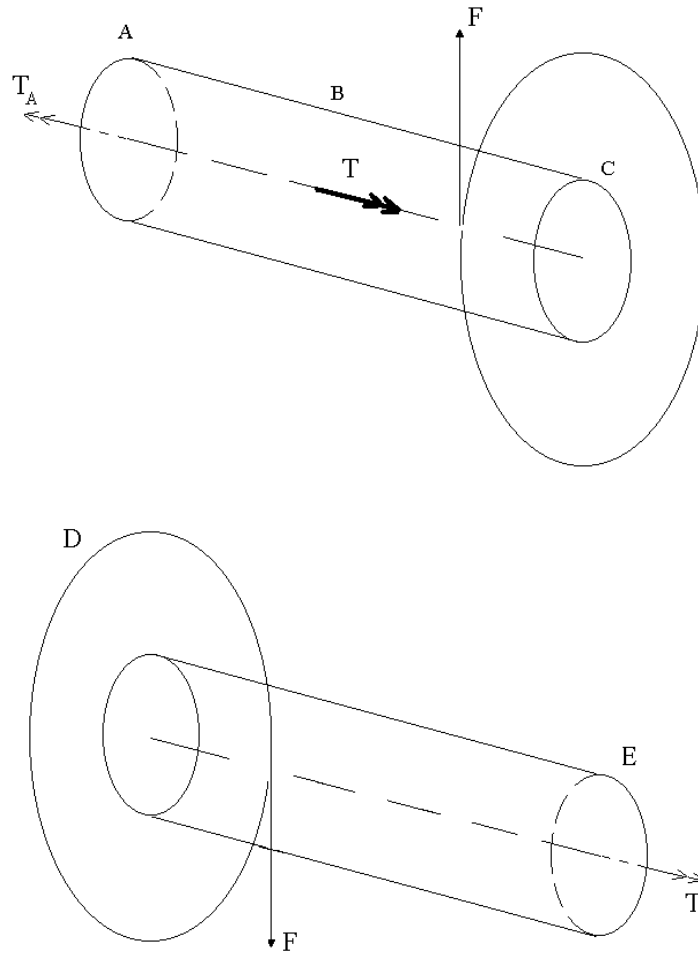


Figura N° 4.12. Diagramas de cuerpo libre de los ejes de la figura N° 4.11.

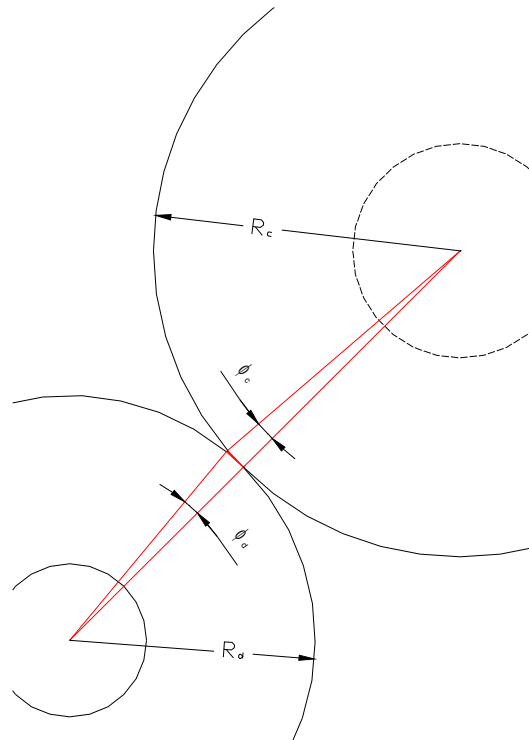


Figura N° 4.13. Relación cinemática en los engranajes.

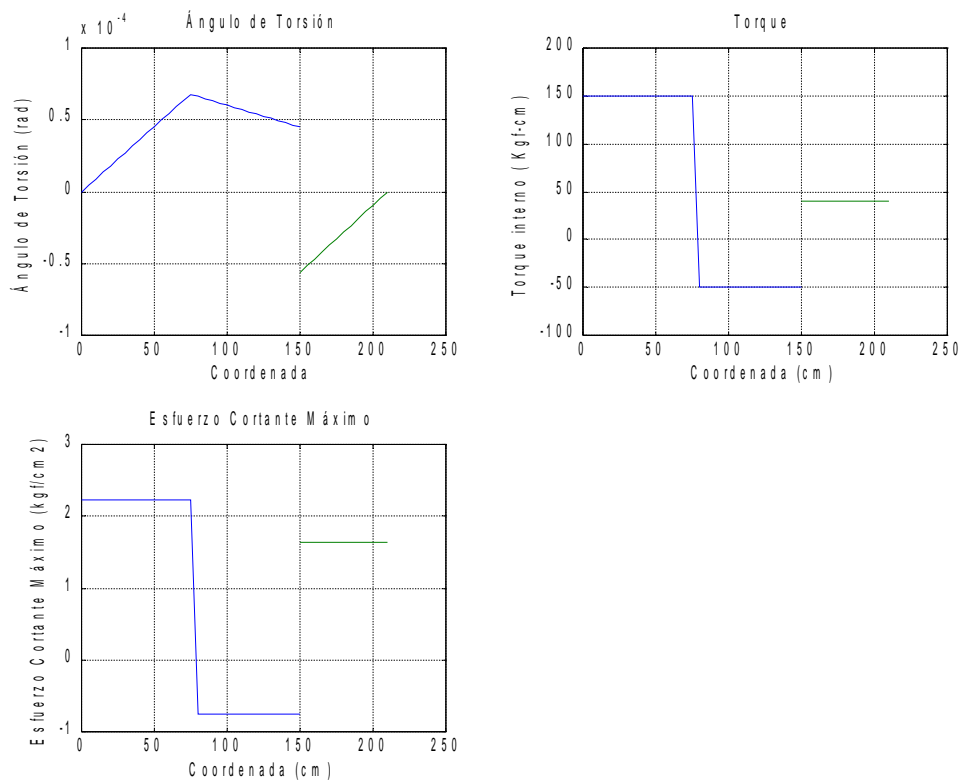


Figura N° 4.14. Diagramas de Ángulo de torsión, Torque Interno y Esfuerzo del problema de la figura N° 4.12.