



Identificación de Óptimos en Problemas Mixtos Enteros:

Un enfoque por Búsqueda Directa.

Ebert Brea

`ebertbrea@gmail.com; ebert.brea@ucv.ve`

Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ingeniería

Escuela de Ingeniería Eléctrica

Problema

Problema 1 (Minimización entera mixta restrictiva)

$$\min_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (1)$$

donde \mathbf{x} representa el conjunto de n variables reales independientes, \mathbf{y} representa el conjunto de m variables enteras independientes, y $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$.

Problema 2 (Minimización entera mixta irrestricta)

$$\min_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m)} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2)$$

donde \mathbf{x} y \mathbf{y} tienen el mismo significado presentado en el Problema 1, y $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}$ la función objetivo.

Antecedentes

El término de *Búsqueda Directa* fue acuñado, por primera vez, por Hooke y Jeeves (1961), quienes lo definieron como:

Usamos la frase “búsqueda directa” para describir el examen secuencial de soluciones de pruebas, envolviendo comparación de cada solución de prueba con la “mejor” obtenida hasta ese momento, junto con una estrategia para determinar lo que la próxima solución de prueba será. La frase implica nuestra preferencia, basada en experiencia, para la búsqueda de las siguientes estrategias, las cuales no emplean técnicas clásicas de análisis, excepto donde exista una demostrable ventaja en hacerla así.

Antecedentes

Método Simplex de Nelder y Mead (1965) no debe confundirse con el método Simplex de programación lineal desarrollado por Dantzig.

El método de Nelder y Mead surgió de la idea original de Spendley *et al.* (1962), quienes propusieron el empleo de secuencias de diseños de experimentos basado en la estructura del simplex con el fin de identificar el óptimo de una función objetivo con ruido.

Aplicaciones para optimización de funciones objetivos con ruido han demostrado su eficiencia en la identificación de óptimos (Humphrey y Wilson, 2000).

Brea (2004) demostró su eficiencia a problemas de optimización linealmente restringidos, y cuando la función objetivo presenta ruido. Sin embargo, pudieran existir casos en donde la convergencia es realmente lenta (Brea y Cheng, 2004).

Definiciones

Definición 1 (Vector precedente o igual) *Sea una función $f(\mathbf{w}) : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ y sean \mathbf{a} y \mathbf{b} dos vectores cualesquiera definidos en un dominio \mathcal{W} . Se dice que \mathbf{a} precede o es igual a \mathbf{b} , y es denotado por $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$, si $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{b})$.*

Definición 2 (Vector entero mixto) *Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m$ dos subvectores que conforma el vector $\mathbf{v} = [\mathbf{x} : \mathbf{y}]^t$. Se define como un vector entero mixto en el espacio euclidiano entero mixto de dimensión $n + m$, para indicar la dimensión de la componente real y entera respectivamente, al vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m$.*

Definiciones

Definición 3 (simplex entero mixto) *Un simplex entero mixto en el espacio euclidiano de dimensión $n \times n$ se define como un conjunto de diferentes puntos $\mathbf{v}_i = [\mathbf{x}_i : \mathbf{y}_i]^t$ para todo $i = 1, \dots, \nu$, donde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ corresponde al i -ésimo subvector real de dimensión n , $\mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^n$ denota cada i -ésimo subvector entero de dimensión n , $\nu = n + 1$ representa el número de vértices del simplex entero mixto, y cada uno es representado por un vector columna de dimensión $2n$. Un simplex entero mixto puede ser representado en notación matricial como*

$$S_{\nu}^{[q]} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_{\nu} \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_{\nu} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Operaciones subsimplex real



Centroide $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{\nu-1} \sum_{i=1}^{\nu-1} \mathbf{x}_i$

Reflexión $\mathbf{x}_r = \bar{\mathbf{x}} + \alpha_r(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_\nu)$

Expansión $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_r + \beta_r(\mathbf{x}_r - \bar{\mathbf{x}})$

Contracción $\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_r - \gamma_r(\mathbf{x}_r - \bar{\mathbf{x}})$

Encogimiento $\mathbf{x}_i := (1 - \delta_r)\mathbf{x}_1 + \delta_r\mathbf{x}_i, \quad \forall i = 2, \dots, \nu$

Operaciones subsimplex entero



Centroide $\bar{y} = \frac{1}{\nu-1} \sum_{i=1}^{\nu-1} y_i.$

Reflexión $y_r = y_\nu + \alpha_e \mu \operatorname{sgnd}(\bar{y} - y_\nu).$

Expansión $y_e = y_r + \beta_e \mu \operatorname{sgnd}(\bar{y} - y_\nu).$

Contracción $y_c = y_r - \gamma_e \mu \operatorname{sgnd}(\bar{y} - y_\nu),$

donde

$$\operatorname{sgnd}(k) = \begin{cases} 1, & \forall k > 0, \\ 0, & \forall k = 0, \\ -1, & \forall k < 0. \end{cases}$$

Construcción simplex encogido



Proposición 1 (Construcción de un simplex entero encogido) Sea un q -ésimo simplex entero jerarquizado $S_\nu^{[q]} = [\mathbf{y}_1^{[q]} : \mathbf{y}_2^{[q]} : \dots : \mathbf{y}_\nu^{[q]}]$ definido solamente en el espacio euclidiano de los números enteros $\mathbb{Z}^{n \times (n+1)}$. Sea también $0 < \delta_e < 1$ el coeficiente de encogimiento entero. Además, sea

$$D^{[q]} = [\mathbf{d}_1^{[q]} : \mathbf{d}_2^{[q]} : \dots : \mathbf{d}_{\nu-1}^{[q]}], = \lceil \delta_e A_1^{[q]} \rceil \quad (4)$$

una matriz, donde $A_1^{[q]}$ es la matriz de arista de $S_\nu^{[q]}$ con respecto al vértice $\mathbf{y}_1^{[q]}$, y el operador $\lceil \cdot \rceil$ aproxima cada elemento de la matriz $A_1^{[q]}$ al próximo entero por encima.

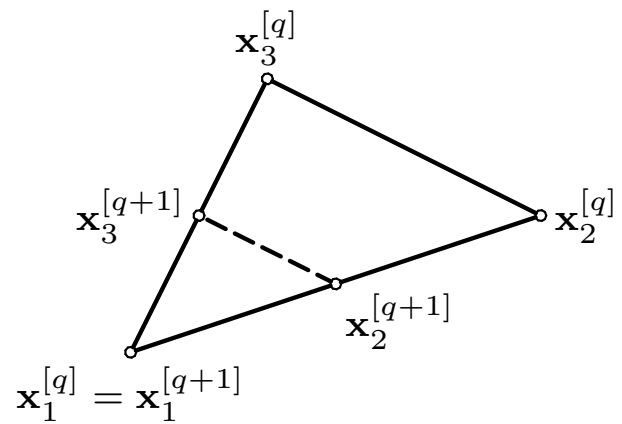
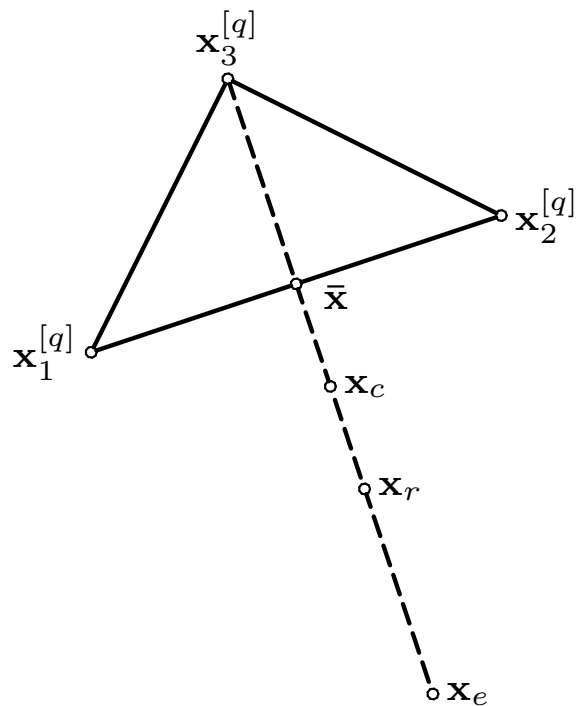
i) La matriz formada por

$$\tilde{S}_\nu^{[q+1]} = [\mathbf{y}_1^{[q]} : \mathbf{y}_1^{[q]} + \mathbf{d}_1^{[q]} : \mathbf{y}_1^{[q]} + \mathbf{d}_2^{[q]} : \dots : \mathbf{y}_1^{[q]} + \mathbf{d}_{\nu-1}^{[q]}], \quad (5)$$

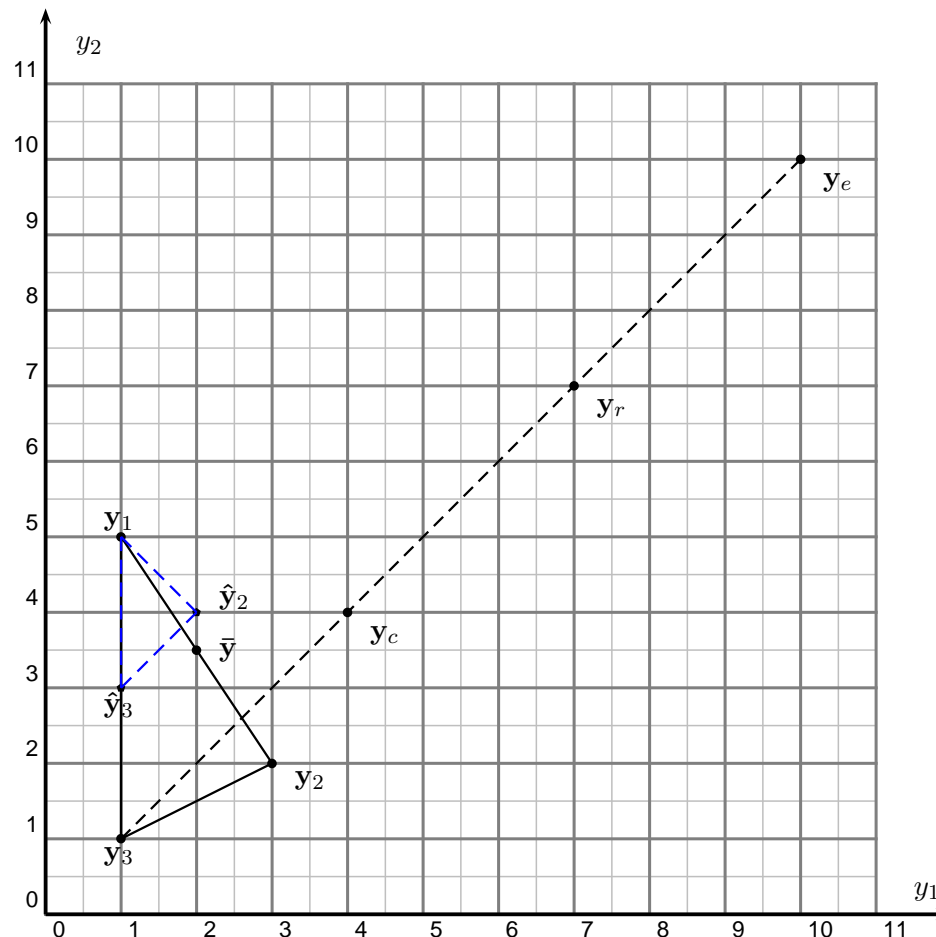
es un simplex compuesta de elementos enteros.

ii) Las aristas del simplex $\tilde{S}_\nu^{[q+1]}$ con respecto al vértice $\mathbf{y}_1^{[q]}$ nunca son mayores a las aristas del simplex $S_\nu^{[q]}$ con respecto al vértice $\mathbf{y}_1^{[q+1]}$, en consecuencia el nuevo simplex es igual o menor en tamaño.

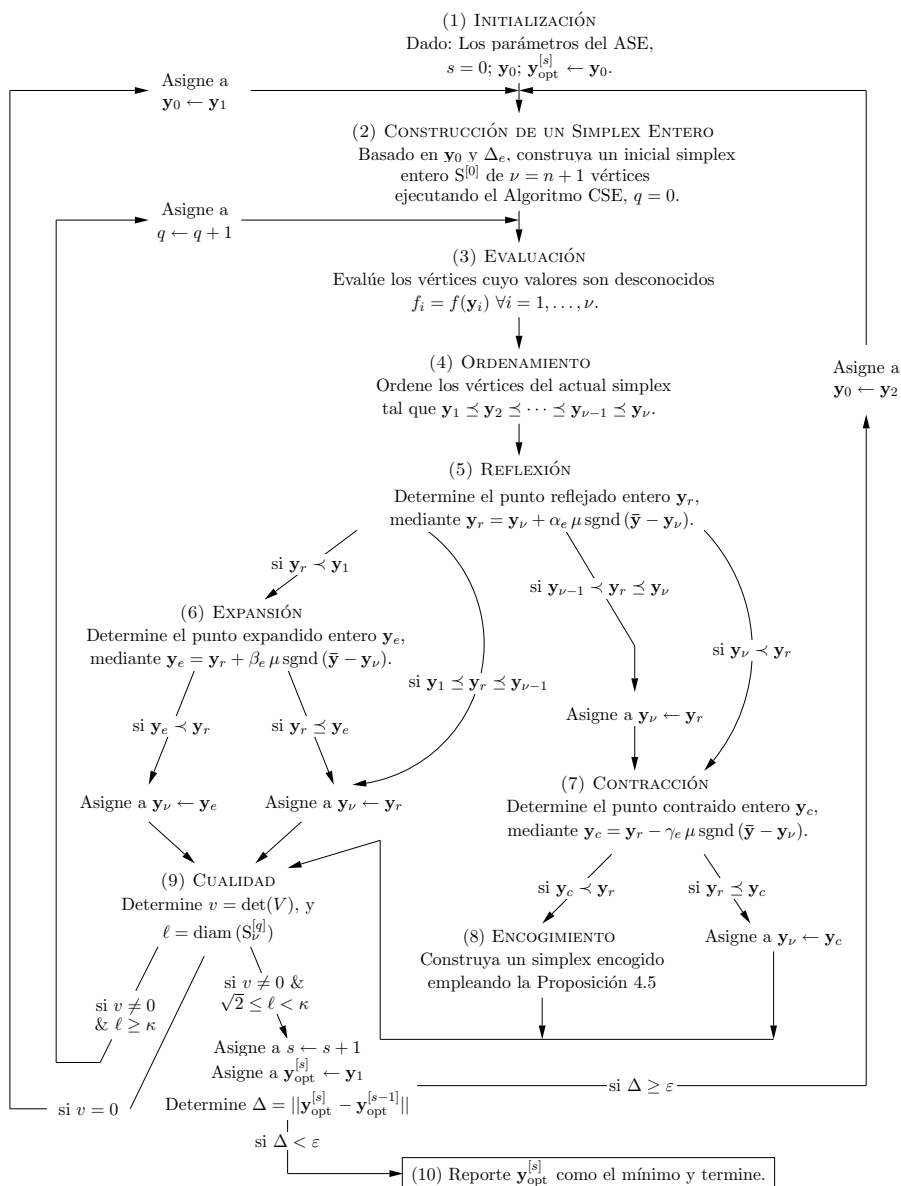
Operaciones subsimplex real

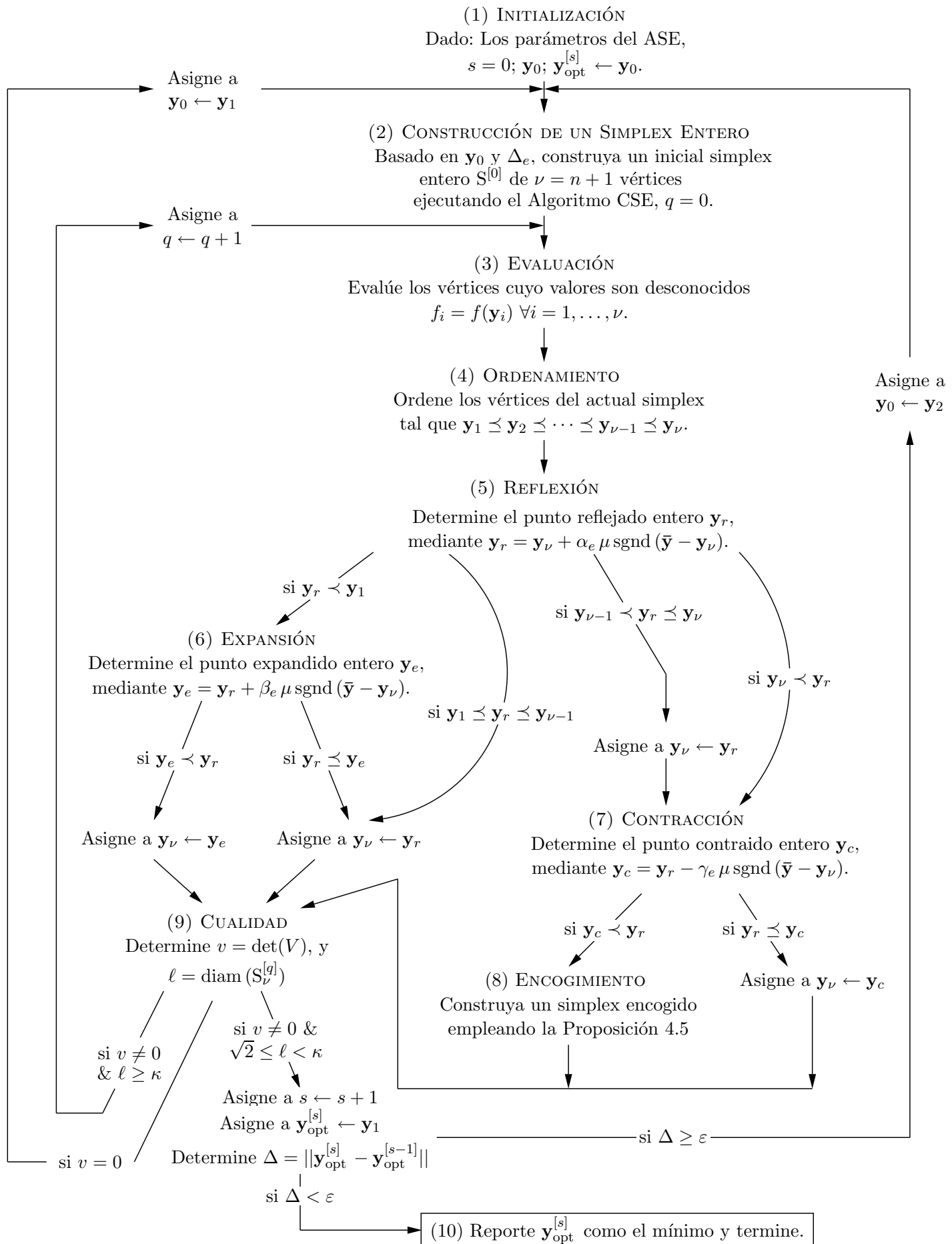


Operaciones subsimplex entero



Algoritmo





Ejemplos numéricos

Los ejemplos numéricos fueron, en algunos casos, reformulados al caso entero de los problemas planteados por Moré *et al.* (1981) y Schittkowski (1987).

Parámetros:

$$\Delta_e = -2, \alpha_e = 2, \beta_e = \gamma_e = 1, \delta_e = 0,5 \text{ y } \mu = 1$$

$$S_{\nu}^{[q]} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} + \Delta_e & y_{13} & \cdots & y_{1,n+1} \\ y_{21} & y_{21} & y_{23} + \Delta_e & \cdots & y_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & y_{n3} & \cdots & y_{n,n+1} + \Delta_e \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Ejemplos numéricos

Cuadrática $f(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n y_i^2$

Rosenbrock $f(\mathbf{y}) = (y_2 - y_1^2)^2 + (1 - y_1)^2$

Brown badly scaled $f(\mathbf{y}) = (y_1 - 5)^2 + (y_2 - 2)^2 + (y_1 y_2 - 10)^2$

Power singular $f(\mathbf{y}) = (y_1 + 10y_2)^2 + 5(y_3 - y_4)^2 + (y_2 - 2y_3)^4 + 10(y_1 - y_4)^2$

Ejemplos numéricos

EB-2D $f(\mathbf{y}) = (y_1 - y_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$

EB-3D $f(\mathbf{y}) = 2^{(y_1 - y_2 + y_3)^2} + (y_1 - y_2 + y_3)^2$

PUR-T1-6 $f(\mathbf{y}) = 100(y_2 - y_1^3)^2 + (1 - y_1)^2$

SUR-T1-8 $f(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{10} (e^{-iy_1/10} - e^{-iy_2/10} - y_3(e^{-i/10} - e^{-i}))^2$

Ejemplos numéricos

Cuadro 1. Resumen de resultados

Problema	Solución				
	d	NE	y_0^t	Experimental	Teórica
Cuadrática	2	43	(10,10)	f=0 @ (0,0)	f=0 @ (0,0)
Cuadrática	10	484	(10, ..., 10)	f=0 @ (0, ..., 0)	f=0 @ (0, ..., 0)
Cuadrática	20	1344	(10, ..., 10)	f=0 @ (0, ..., 0)	f=0 @ (0, ..., 0)
Rosembrock	2	114	(10,10)	f=4 @ (3,6)	f=0 @ (1,1)
Rosembrock	2	53	(-5,10)	f=0 @ (1,1)	f=0 @ (1,1)
Rosembrock	2	135	(-10,20)	f=0 @ (1,1)	f=0 @ (1,1)

Ejemplos numéricos

Cuadro 2. Resumen de resultados

Problema	Solución				
	d	NE	y_0^t	Experimental	Teórica
Brown badly	2	80	(10,10)	$f=0 @ (5,2), \alpha = 1$	$f=0 @ (5,2)$
Brown badly	2	266	(20,20)	$f=0 @ (5,2), \alpha = 1$	$f=0 @ (5,2)$
Power Singular	4	96	(5,...,5)	$f=0 @ (3,0,1,2), \alpha = 1$	$f=0 @ (0,...,0)$
EB-2D	2	58	(10,10)	$f=0 @ (0,0)$	$f=0 @ (0,0)$
EB-3D	3	98	(10,10,10)	$f=1 @ (5,11,6)$	$f=1 @ (a,a+b,b)$
EB-3D	3	92	(5,5,5)	$f=1 @ (2,4,2)$	$f=1 @ (a,a+b,b)$
PUR-T1-6	2	121	(10,10)	$f=1 @ (2,8)$	$f=0 @ (1,1)$
SUR-T1-8	3	131	(10,10,10)	$f=0 @ (1,10,1)$	$f=0 @ (1,10,1)$

Referencias

- Brea, E. 2004. *Nelder-Mead Optimization Under Linear Constraints*. PhD thesis, University of Southampton. PhD thesis.
- Brea, E. y Cheng, R. C. H. 2004. Slow convergence of the Nelder-Mead method when constraints are present: An example. January 2004. Pre-Print, School of Mathematics, University of Southampton.
- Hooke, R. y Jeeves, T. A. 1961. "Direct Search" Solution of Numerical and Statistical Problems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 8(2):212–229.
- Humphrey, D. G. y Wilson, J. R. 2000. A revised simplex procedure for stochastic simulation response surface optimization. *INFORMS Journal on Computing*, 12(4):272–283.

Referencias

- Moré, J. J., Garbow, B. S., y Hillstom, K. E. 1981. Testing unconstrained optimization software. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 7(1):17–41.
- Nelder, J. A. y Mead, R. 1965. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7:308–313.
- Schittkowski, K. 1987. *More test examples for nonlinear programming codes*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems; 282. Springer-Verlag, Berlin ; New York.
- Spendley, W., Hext, G. R., y Himsforth, F. R. 1962. Sequential application of simplex designs in optimisation and evolutionary operation. *Technometrics*, 4(4):441–461.



¡Realmente gracias por su
participación!

