TEORIA DE LA PROBABILIDAD: NOCIONES FUNDAMENTALES

Guillermo Ramirez, Maura Vásquez y Adelmo Fernández*

2011

*Escuela de Estadística y Ciencias Actuariales de la Universidad Central de Venezuela

Índice general

Capítulo 1

Sucesos y Probabilidad

1.1. Introducción

La teoría de la probabilidad constituye el basamento teórico de mayor importancia para la Estadística. Su origen se remonta a la segunda mitad del siglo XVII en un campo completamente desvinculado de ella: los juegos de azar. Debido a la tolerancia y al prestigio del que disfrutaban varias formas de juego para recreación de la nobleza de Inglaterra y Francia, durante ese período se suscitó un interés intenso por los juegos de azar, lo que en forma accidental llevó al desarrollo de la teoría de la probabilidad.

El estudio de las probabilidades se inicia con un célebre intercambio de correspondencia entre los matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665), que comenzó en 1654 a raíz de algunas consultas relacionadas con el azar, que les hiciera un personaje de la época llamado Chevalier De Mere, quien gozaba fama de jugador empedernido. Es así como Pascal y Fermat se decidieron a elaborar los principios fundamentales de la teoría de la probabilidad.

El primer trabajo importante sobre esta teoría fue publicado en 1657 por Christian Huyghens (1629-1665) y se llamó De Ratiociniis in ludo aleae. Más tarde se publicaron dos obras claves para su posterior desarrollo: Ars Conjectandi del matemático suizo Jacobo Bernoulli (1655-1705) y Theorie Analytique des Probabilites del matemático francés Pierre Simon de Laplace (1749-1827).

1.2. Naturaleza de la teoría de la probabilidad

En general ocurre que todos los fenómenos están relacionados, más o menos estrechamente, con un conjunto numeroso de otros hechos. Las ciencias estudian un número limitado de relaciones, ya que en principio es imposible llegar a conocer toda la diversidad de relaciones existente en cualquier fenómeno dado. De este modo, en cada etapa del desarrollo del conocimiento quedan sin estudiar una multitud de relaciones propias a ciertos fenómenos. En algunos casos se conoce lo suficientemente bien el fenómeno investigado como para justificar predicciones exactas sobre el resultado de una observación individual; sin embargo, en la mayoría de los casos nuestro conocimiento carece de la precisión necesaria para realizar predicciones exactas sobre las observaciones individuales.

Podemos distinguir así entre fenómenos determinísticos (causales o regulares), en los cuales las condiciones o causas determinan perfectamente los resultados o efectos, y fenómenos aleatorios (casuales o accidentales), en los cuales las mismas condiciones o causas pueden dar lugar a diferentes resultados o efectos. Ahora bien, la aleatoriedad no es únicamente de carácter teórico, también puede presentarse aleatoriedad de carácter práctico, manifestada en la imposibilidad real de controlar todas las relaciones que influyen en un determinado fenómeno.

La teoría de la probabilidad se ocupa de elaborar modelos matemáticos para el estudio de los fenómenos aleatorios, y debido a que estos fenómenos implican un estado de incertidumbre que no permite predicciones exactas de cada observación, un ingrediente básico para el modelo debe ser un indicador o medida de tal incertidumbre, que se denomina probabilidad.

En los últimos años los métodos probabilísticos han penetrado con gran amplitud en los distintos campos de la ciencia y la técnica, contribuyendo ampliamente a su desarrollo.

1.3. Concepciones de la probabilidad

La formulación del concepto de probabilidad se debe a la necesidad de distinguir entre los posibles resultados del fenómeno, de acuerdo con su grado de incertidumbre. En esta sección presentaremos brevemente los diferentes criterios existentes en cuanto a la interpretación del concepto de probabilidad.

Concepción Clásica

La concepción clásica propuesta por Laplace es la más antigua y tiene su origen en el primer campo de aplicación de las probabilidades, que como se mencionó antes fue los juegos de azar. Como en los fenómenos aleatorios relacionados con juegos de azar existen ciertas condiciones de simetría, parece natural suponer que todos los posibles resultados tienen la misma probabilidad de aparecer. Esta concepción supone entonces que el número de posibles resultados de un fenómeno aleatorio es finito, que estos no pueden ocurrir simultáneamente y que además son igualmente probables. Con estas condiciones se llega a una definición bastante obvia de la probabilidad, estableciendo que la probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de casos favorables y el total de casos posibles. Es de sealarse que el supuesto de equiprobabilidad depende de un análisis a priori, de manera que en aquellos casos en los cuales no pueda asegurarse la uniformidad de probabilidades, este enfoque no sería aplicable.

Es evidente pues, la limitación que introduce esta interpretación en la clase de situaciones aleatorias que podrían estudiarse. Sin embargo, es un enfoque muy útil siempre que se utilice apropiadamente.

Concepción Frecuentista

Mientras las probabilidades continuaron aplicándose al estudio de problemas relacionados con los juegos de azar, la definición Laplaciana no fue sometida a crítica alguna. A principios del siglo XX, Richard Von Mises (1883-1953) y otros matemáticos contemporáneos revisaron los fundamentos teóricos y propusieron la concepción frecuentista. Para esta concepción, la probabilidad es una abstracción de la frecuencia relativa. Si un fenómeno aleatorio puede repetirse en iguales condiciones todas las veces que deseemos, la probabilidad de cualquier suceso será el límite al cual tiende su frecuencia relativa. Como es obvio, no podemos repetir infinitas veces un experimento, así que en la práctica debemos contentarnos con una estimación cercana de la probabilidad.

A continuación mencionaremos algunas limitaciones de este enfoque:

En primer lugar, no resulta de gran utilidad tener que esperar por las observaciones empíricas de un suceso en el mundo real, para definir el concepto abstracto de probabilidad de un suceso. Esto significa confundir el aspecto teórico del modelo con su identificación e interpretación en el mundo real, cosa que debe evitarse siempre en un modelo matemático. Es decir, no debe confundirse el problema Qué es la probabilidad? con el problema Cómo se calcula la probabilidad?. De tal manera que las observaciones reales no deben utilizarse para definir un concepto abstracto, aunque ellas nos sugieran la conveniencia de una definición.

Un problema más serio de esta definición, es el hecho de que la probabilidad sería entonces un límite matemático cuya existencia no puede demostrarse ni siquiera en el sencillo caso del lanzamiento de una moneda. Por otro lado, Cuál debe ser el número de repeticiones?, cien?, mil?, un millón?. Por estas razones, no es conveniente adoptar la concepción frecuentista como definición de probabilidad. Sin embargo, las interesantes y convenientes propiedades de la frecuencia relativa pueden utilizarse para sugerir una definición formal de la probabilidad. De hecho, éste será el camino que seguiremos aquí para construir la teoría.

Concepción Subjetiva

Es evidente que la concepción frecuentista resulta insuficiente cuando se trata de fenómenos no repetibles. Esta limitación, junto a la restricción que significa la equiprobabilidad de la concepción clásica, ha impulsado el nacimiento de la visión subjetiva. Entre los precursores de esta interpretación puede citarse a Bruno De Finetti (1906-1985), pero su principal abanderado fue Leonard J. Savage (1917-1971) con su obra The Foundations of Statistics publicada en 1954.

Este enfoque sostiene que toda proposición tiene una probabilidad numéricamente medible basada en el grado de confianza personal que acerca de ella tiene un individuo. Se admite entonces que diferentes personas razonables pueden diferir en sus apreciaciones, aún cuando se les ofrezca la misma evidencia.

Los subjetivistas afirman que pueden aplicar las probabilidades a todos los problemas que un clasicista o un objetivista estudia, y a muchos más. Cuando exista la condición de simetría, el subjetivista reconocerá un razonamiento a priori y coincidirá con el clasicista, y cuando el fenómeno pueda repetirse un gran número de veces obtendrá las mismas respuestas que el objetivista.

Las probabilidades subjetivas son probabilidades condicionales, en el sentido de que están afectadas por la experiencia e información de cada persona. El proceso de ordenar todas las posibles alternativas en una escala de imposibilidad-seguridad está basado en el conocimiento y evaluación de la situación por parte de cada persona en particular.

Concepción Lógica

Este enfoque es sugerido y motivado por los principios de la lógica matemática, en la cual una proposición A implica o niega otra proposición B. En el contexto probabilístico se dice que entre las proposiciones A y B existe un cierto grado de implicación. Dada entonces la información proposicional A, se entiende por probabilidad de B, el grado de implicación proporcionado por A. La diferencia de esta interpretación y la anterior es que tal medida, convencionalmente representada en la escala (0,1), es única. Se supone entonces que existe un único grado de implicación entre A y B lógicamente determinado.

Puede decirse que la probabilidad lógica es la intensidad racional de convicción de una cierta proposición, implicada por la información dada. Si una persona no concuerda con ella, es porque está equivocada. Nuevamente se trata de probabilidades condicionales, condicionadas por la información disponible.

Al igual que en la concepción frecuentista, se concibe la probabilidad como objetiva, es decir, independiente de las experiencias y sentimientos individuales. Al igual que en la concepción subjetiva, se trata de grados de creencia sobre una proposición en particular; sin embargo, en la subjetiva esta apreciación es personal, mientras que en la lógica es racional e inducida lógicamente. En este sentido puede decirse que la probabilidad lógica es intermedia entre la subjetiva y la frecuentista. Como promotores de esta corriente cabe mencionar a Francis Edgeworth (1845-1926), John Keynes (1883-1946), Harold Jeffreys (1891-1989) y Rudolph Carnap (1891-1970).

A pesar de que existen varias concepciones diferentes acerca de la interpretación de la probabilidad, prácticamente no hay desacuerdo en relación con los fundamentos matemáticos de la teoría. Cada enfoque tiene sus ventajas y desventajas, y deberá aplicarse uno u otro dependiendo de la situación planteada. En la elaboración de la teoría no nos preocuparemos demasiado por la interpretación, y sólo utilizaremos la concepción frecuentista para motivar el desarrollo matemático.

1.4. La teoría de la probabilidad como teoría axiomática

Cuando un fenómeno aleatorio se observa una sola vez resulta imposible predecir su resultado. Sin embargo, si el fenómeno se observa un gran número de veces manteniendo constante las condiciones pertinentes, aparece un fenómeno extraordinariamente importante: a pesar del comportamiento irregular de los resultados individuales, comienza a observarse una cierta estabilidad en el comportamiento de los resultados globales. Esta regularidad, denominada regularidad estadística, constituye la base empírica de la teoría de la probabilidad según el enfoque frecuentista, siendo de suma importancia su manifestación experimental: a medida que aumentamos el número de veces que se observa el fenómeno, la frecuencia relativa de un suceso en particular (cociente entre el número de veces que el suceso ocurre y el número de observaciones del fenómeno) muestra una marcada tendencia a permanecer más o menos constante. Esto sugiere que de continuar indefinidamente la serie de observaciones, la frecuencia relativa alcanzaría un cierto valor ideal o límite que nos daría una idea de cun probable es que ocurra tal suceso.

Con base en estas consideraciones, podemos decir que la teoría de las probabilidades se ocupa de la construcción de modelos matemáticos (probabilísticos) que permiten estudiar los fenmenos que presentan regularidad estadística.

Modelos Matemáticos

Un modelo matemático es una representación abstracta y simplificada de un cierto tipo de fenómenos reales. En un modelo matemático podemos distinguir dos aspectos:

i Una estructura teórica sugerida por ideas intuitivas y formalizada en un proceso de conceptualización, constituida por conceptos primitivos, axiomas, definiciones y teoremas. Es lo que se conoce como teoría matemática del modelo.

ii Una estructura aplicada que consiste en la traducción de los resultados de la estructura teórica a la realidad concreta de partida en un proceso de desconceptualización. Se establece así una analogía entre los aspectos básicos del fenómeno y los elementos básicos de la estructura teórica.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Realidad}} \arrow[r, "Conceptualizacion"] & \boxed{\text{Axiomatica}} \arrow[d] \\
\boxed{\text{Aplicaciones}} \arrow[u] & \boxed{\text{Teoria Matematica}} \arrow[l, "Desconceptualizacion"']
\end{tikzcd}$$

Un modelo matemático no es correcto o incorrecto, verdadero o falso; lo que interesa saber es si un determinado modelo matemático es adecuado o no para un determinado fenómeno. La existencia de una correspondencia válida entre los aspectos teóricos y los empíricos, y una correspondencia entre las conclusiones teóricas y los resultados prácticos, conforman los criterios de adecuación o validez de dicho modelo. Tal determinación puede convertirse en una materia bastante delicada y pertenece a la estructura aplicada del modelo. En otras palabras, cualquier proposición en la estructura teórica es verdadera en el sentido matemático de la palabra si ha sido correctamente deducida a partir de los axiomas, pero no demuestra nada sobre los fenómenos reales. Estas proposiciones pueden ser contrastadas con los resultados empíricos, lo que requiere cierto grado de familiaridad con el área del problema en estudio, así como experiencia en la aplicación de modelos bajo circunstancias similares.

La estructura teórica adecuada para la construcción de modelos matemáticos que permitan estudiar los fenómenos aleatorios que presentan regularidad estadística, la constituye la teoría de la probabilidad. La estructura aplicada de dichos modelos la constituye la Estadística.

La teoría de la probabilidad, como teoría matemática, es un contenido lógico-formal constituido por conceptos primitivos, axiomas, definiciones y teoremas.

Conceptos Primitivos

En todo método axiomático existen ciertos conceptos de partida no susceptibles de definición formal, que se introducen en la teoría para evitar el argumento circular en el cual se define un concepto a partir de otro que no se ha definido. Estos conceptos iniciales se denominan conceptos primitivos o primarios. Por ejemplo, en la Geometría Euclidiana los conceptos primitivos son *punto* y *recta*, en la Teoría de Conjuntos lo son *elemento* y *conjunto*.

Axiomas

Se entiende por axiomas, aquellas proposiciones elementales en las que se postulan relaciones entre los conceptos intuitivos sugeridos por los hechos experimentales. Un conjunto axiomático debe reunir las siguientes condiciones:

i Consistencia: Al operar con los conceptos y definiciones no se debe llegar a contradicciones.

ii Completitud: No debe requerirse nuevos axiomas para demostrar algún teorema o propiedad.

iii Independencia: Ningún axioma debe ser consecuencia lógica de los otros.

Definiciones
Son conceptos formales que se introducen en función de los conceptos primitivos contenidos en los axiomas y de otras definiciones previas.

Teoremas
Son proposiciones que se derivan directamente a partir de los axiomas y definiciones, o indirectamente basándose en teoremas previamente demostrados.

1.5. Experimento aleatorio, espacio muestral y suceso

En esta sección comenzaremos el proceso de construcción de la teoría, estableciendo en primer lugar los conceptos intuitivos sugeridos por la realidad empírica.

Experimento aleatorio
En general, un experimento es la acción de observar o producir los resultados de un fenómeno con el objeto de estudiar la relación que existe entre ellos. Experimentos aleatorios son aquéllos que reúnen las siguientes características:

i Pueden repetirse un número ilimitado de veces sin cambiar esencialmente sus condiciones.

ii No es posible predecir un resultado particular del experimento, pero sí se puede describir el conjunto de todos los resultados posibles.

iii A medida que el experimento se repite, los resultados individuales ocurren en forma irregular, pero en los resultados comienza a aparecer un modelo definido de comportamiento. Esta regularidad, denominada regularidad estadística, hace posible la construcción de un modelo matemático preciso con el cual analizaremos el experimento.

Es importante señalar que la idea de experimento aleatorio es una abstracción teórica que se hace de las características básicas de los fenómenos reales que deseamos estudiar.

Espacio muestral
Dado un cierto experimento aleatorio ε (epsilon), denominaremos espacio muestral al conjunto no vacío Ω (omega) de todos los resultados diferentes, posibles y razonables del experimento. A los elementos del espacio muestral los llamaremos puntos muestrales.
Un espacio muestral debe ser tal que:

i Todo elemento del espacio corresponde al menos a un posible resultado.

ii Todo resultado del experimento corresponde a uno y solo un elemento del espacio. Es decir, cada posible resultado del experimento queda completamente descrito por uno y solo un punto muestral.

En general ocurre que el espacio muestral no es único, sino que pueden existir diferentes espacios muestrales asociados con el mismo experimento. En tales casos la adopción de uno u otro depende del objetivo del modelo. Por ejemplo, en el sencillo caso del lanzamiento de un dado, un espacio muestral podría referirse a cada una de los seis posibles resultados: $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ o bien a la condición de paridad del resultado: $\Omega_2 = \{\text{resultado par, resultado impar}\}$.

El espacio muestral constituye la base matemática fundamental de la teoría, ya que permite la incorporación de la teoría de conjuntos como lenguaje apropiado para plantear y resolver los problemas de probabilidades.

Suceso
Denominaremos suceso a cualquier característica del resultado de un experimento aleatorio. Un suceso queda determinado por su ocurrencia o no ocurrencia, es decir, tiene sentido hablar de un cierto suceso si para cada resultado del experimento el suceso ocurre o no ocurre.
Si consideramos al espacio muestral como conjunto universal, los diferentes sucesos podrán expresarse como subconjuntos de Ω.
Es conveniente distinguir entre sucesos elementales y sucesos compuestos: los sucesos elementales son aquellos subconjuntos de Ω constituidos por un solo punto muestral y los sucesos compuestos son agregados de puntos muestrales.
Diremos que ha ocurrido un suceso A cuando el resultado de una prueba particular, digamos w, pertenece al conjunto que representa al suceso A, que también denotaremos por A. En otras palabras, la relación "ocurrencia del

suceso A"del lenguaje de sucesos, se transforma en la relación "pertenencia del elemento w al conjunto A"del lenguaje conjuntista:

$$\boxed{\text{A ocurre} \Leftrightarrow \text{w} \in \text{A}}$$

Esta correspondencia puede establecerse de un modo formal a través del Teorema de Stone, que afirma que Para toda álgebra de sucesos se puede encontrar un álgebra de conjuntos isomorfa a ella. Como consecuencia de esta correspondencia existe una equivalencia de definiciones entre la Teoría de la Probabilidad y la Teoría de Conjuntos a la cual conviene acostumbrarse:

Probabilidad	Conjuntos
Suceso imposible	Conjunto vacío (ϕ)
Suceso seguro	Conjunto universo (Ω)
Suceso (A o B)	Conjunto unión (A $\cup$ B)
Suceso (A y B)	Conjunto intersección (A $\cap$ B)
Suceso (no A)	Complemento de A ($\bar{A}$)
Suceso (o A o B)	Conjunto suma booleana (A $\oplus$ B)
Sucesos excluyentes	Conjuntos disjuntos
Implicación de sucesos	Inclusión de conjuntos

Por lo dicho anteriormente es conveniente hacer una revisión general sobre conjuntos y la derivación de una serie de propiedades de interés que utilizaremos más adelante. Antes de presentar tal revisión, vamos a formular una serie de preguntas que servirán para repasar y afianzar lo discutido hasta este momento.

Preguntas de Repaso

1. *¿Qué es la teoría de la probabilidad?*

2. *¿En qué campo tiene su origen?*

3. *¿Qué matemáticos franceses iniciaron su estudio formal?*

4. *¿Cuál es la diferencia entre fenómenos determinísticos y fenómenos aleatorios?*

5. *Describa brevemente las cuatro concepciones existentes sobre la probabilidad?*

6. *¿Qué se entiende por regularidad estadística?*

7. *¿Qué es un modelo matemático?*
8. *¿Cuáles son sus elementos integrantes?*
9. *¿Qué entiende usted por experimento aleatorio, espacio muestral y suceso?*
10. *¿Cómo se explica la correspondencia entre los conceptos de suceso y conjunto?*

1.6. Revision general de la teoría de conjuntos

En general un conjunto es una colección de objetos bien definidos. Cada uno de estos objetos lo denominaremos elemento o punto. Como ya se dijo, elemento y conjunto constituyen los conceptos primitivos de esta teoría. El conjunto que incluye todos los elementos en consideración se denomina conjunto o espacio universal, lo denotaremos por Ω y sirve como referencia para la definición de cualquier conjunto. Para denotar conjuntos utilizaremos letras mayúsculas del comienzo del alfabeto: A, B, C,... con o sin subíndice. Para denotar elementos de un conjunto utilizaremos letras minsculas del final del alfabeto: x, y, z,... Si un punto w pertenece a un conjunto A escribimos w $\in$ A, y si no pertenece escribimos w $\notin$ A.

Un conjunto A puede representarse por extensión, enumerando todos sus elementos: A = x, y, z,..., o bien por comprensión, estableciendo una propiedad que deben cumplir los elementos: A = {x$\in$ Ω: x cumple la propiedad P}.

Definicion 1.6.1 (Subconjunto)**.** *Se dice que un conjunto A es subconjunto de B, y escribimos $A \subset B$, si todo elemento de A es también elemento de B. De modo que:*

$$A \subset B \iff (\forall \omega \in A \Rightarrow \omega \in B) \tag{1.1}$$

Definicion 1.6.2 (Igualdad de conjuntos)**.** *Se dice que los conjuntos A y B son iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$, y escribimos $A = B$. En otras palabras, A y B son iguales si tienen los mismos elementos. Es decir:*

$$A = B \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A) \tag{1.2}$$

Definicion 1.6.3 (Conjunto vacío)**.** *Se denomina conjunto vacío, y lo denotamos por $\emptyset$, al conjunto que no tiene elementos. Se demuestra (por reducción al absurdo) que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, es decir:*

$$\emptyset \subset A, \quad \forall A \subset \Omega \tag{1.3}$$

Definicion 1.6.4 (Complemento de un conjunto)**.** *El complemento de un conjunto A con respecto al conjunto Ω, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a Ω y no pertenecen a A, y lo denotamos por $\bar{A}$:*

$$\bar{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} \tag{1.4}$$

Definicion 1.6.5 (Unión de conjuntos)**.** *La unión de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B, y lo denotamos por $A \cup B$:*

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\} \tag{1.5}$$

Definicion 1.6.6 (Intersección de conjuntos)**.** *La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B, y lo denotamos por $A \cap B$:*

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\} \tag{1.6}$$

Definicion 1.6.7 (Diferencia de conjuntos)**.** *La diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B, y lo denotamos por $A - B$:*

$$A - B = A \cap \bar{B} = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\} \tag{1.7}$$

Definicion 1.6.8 (Suma booleana de conjuntos)**.** *La suma booleana de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B, pero no a ambos, y lo denotamos por $A \oplus B$:*

$$A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (B - A) \cup (A - B) \tag{1.8}$$

Definicion 1.6.9 (Conjuntos disjuntos)**.** *Se dice que los conjuntos A y B son disjuntos si no tienen elementos comunes, es decir, si $A \cap B = \emptyset$.*

Las operaciones conjuntistas unión, intersección y complementación satisfacen una serie de propiedades que serán presentadas como teoremas, cuyas demostraciones se dejan como ejercicio.

Teorema 1.6.1 (Conmutatividad).

$$A \cup B = B \cup A \tag{1.9}$$
$$A \cap B = B \cap A \tag{1.10}$$

Teorema 1.6.2 (Asociatividad).

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{1.11}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{1.12}$$

Teorema 1.6.3 (Distributividad).

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1.13}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{1.14}$$

Teorema 1.6.4 (Complemento del complemento).

$$(\bar{\bar{A}}) = A \tag{1.15}$$

Teorema 1.6.5.

$$A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cup \emptyset = A \tag{1.16}$$
$$A \cap \Omega = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \tag{1.17}$$

Teorema 1.6.6.

$$A \cup A = A \qquad A \cup \bar{A} = \Omega \tag{1.18}$$
$$A \cap A = A \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset \tag{1.19}$$

Teorema 1.6.7.

$$\forall A, B \subset \Omega : A \subset (A \cup B) \ \wedge \ (A \cap B) \subset A \tag{1.20}$$

Teorema 1.6.8.

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) \tag{1.21}$$

Teorema 1.6.9.

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \tag{1.22}$$
$$\emptyset = (A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) \tag{1.23}$$

Teorema 1.6.10.

$$\begin{aligned} Si\ A \subset B\ entonces\ A \cup B &= B \quad (1.24) \\ A \cap B &= A \quad (1.25) \end{aligned}$$

Teorema 1.6.11 (Leyes de De Morgan)**.**

$$\overline{(A \cup B)} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \quad (1.26)$$

$$\overline{(A \cap B)} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \quad (1.27)$$

Para visualizar todas estas propiedades es conveniente el uso de los Diagramas de Venn con los cuales se representa gráficamente cualquier conjunto con referencia al conjunto universal Ω. Es aconsejable además, conocer bien las demostraciones de los teoremas, ya que ello facilita el dominio de los conceptos y propiedades.

Las definiciones y teoremas anteriores pueden generalizarse para un número arbitrario de conjuntos. En ese caso se acostumbra denotar los conjuntos utilizando subíndices. A un conjunto cuyos elementos son conjuntos lo denominamos clase, y lo representamos con letras caligráficas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

Escribiremos $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, donde I se denomina conjunto índice. Por lo general el conjunto I es un conjunto finito o infinito de números naturales:

$$\mathcal{A} = \{A_i : i = 1, 2, ...n\} = \{A_1, A_2, ...A_n\}$$

$$\mathcal{B} = \{B_i : i = 1, 2, ...\} = \{B_1, B_2, ...\}$$

Las uniones e intersecciones de tales conjuntos vienen denotadas por:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,\ \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$$

las cuales quedarían definidas en forma análoga al caso de dos conjuntos.

Por ejemplo:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{w \in \Omega : w \in A_i \; para \; algun \; i \in \{1, 2...n\}\}$$

y:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{w \in \Omega : w \in A_i \; para \; todo \; i \in \{1, 2...n\}\}$$

además, en forma análoga al teorema 1.6.7, se tendrá que:

$(A_j \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i) \wedge (\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset Aj) \quad para \; todo \; j \in \{1, 2...n\}$

y en forma análoga al teorema 1.6.11:

$$\overline{(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i \qquad \text{y} \qquad \overline{(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$$

Antes de pasar a considerar las sucesiones de conjuntos, vamos a introducir los conceptos de conjuntos equipotentes, finitos, infinitos y conjunto de las partes.

Definicion 1.6.10 (Conjuntos equipotentes)**.** *Un conjunto A es equipotente a un conjunto B, lo que se denota por $A \sim B$, si existe una función biyectiva entre ambos.*

Definicion 1.6.11 (Conjunto finito y Conjunto infinito)**.** *Un conjunto A es finito si y sólo si es vacío o $A \sim$ 1, 2, ... n para algn $n \in \mathbb{N}$. En caso contrario es infinito*

Definicion 1.6.12 (Conjunto infinito numerable y Conjunto infinito no numerable)**.** *Un conjunto infinito A es numerable si y sólo si $A \sim \mathbb{N}$, en caso contrario es no numerable.*

En resumen, si A es un conjunto cualquiera, entonces de acuerdo con su número de elementos:

$$\text{A puede ser ...} \begin{cases} \text{Finito} \\ \text{Infinito} \begin{cases} \text{Numerable} \\ \text{No numerable} \end{cases} \end{cases}$$

Definicion 1.6.13 (Conjunto Numerable)**.** *Un conjunto A es numerable si es finito o infinito numerable.*

Ejemplos:

a) El conjunto A = {a, b, c, d} es un conjunto finito que consta de 4 elementos en virtud de que podemos establecer una función biyectiva f : A $\rightarrow$ {1, 2, 3, 4}. Por ejemplo: f(a)=1, f(b)=2, f(c)=3, f(d)=4. Además, por ser finito es numerable.

b) El conjunto de los números pares positivos, P = {2, 4, 6, ...} es un conjunto infinito numerable ya que podemos establecer una función biyectiva f : P $\rightarrow \mathbb{N}$, f(x) = (x/2).

c) Son conjuntos infinitos numerables: el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales y el conjunto formado por cualquier sucesión de números reales.

d) Son conjuntos infinitos no numerables: el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales, el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, los intervalos de la forma [a,b], (a,b], (a,b), [a,b), [a, $+\infty$), (a,$+\infty$), (-∞,b] y (∞,b).

El siguiente teorema, que solamente enunciaremos, muestra las propiedades más importantes relacionadas con la numerabilidad de los conjuntos.

Teorema 1.6.12. *Sobre la numerabilidad de conjuntos, se cumple que:*
i.- Todo conjunto infinito contiene un conjunto numerable
ii.- Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable
iii.- La unión de conjuntos numerables es un conjunto numerable

Definicion 1.6.14 (Conjunto de las partes)**.** *Dado un conjunto A, se define como conjunto de las partes de A, que representamos por $\mathcal{P}(A)$, a la clase formada por todos los subconjuntos de A. Es decir:*

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\} \tag{1.28}$$

Ejemplos:

a) Si A = {a, b}, entonces $\mathcal{P}$(A) = { $\emptyset$, {a}, {b}, {a,b} }

b) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Para continuar con esta revisión, haremos algunas consideraciones sobre sucesiones de conjuntos. Al igual que en el caso de números reales y funciones, una sucesión de conjuntos será una ordenación sistemática de conjuntos.

Definicion 1.6.15 (Sucesión de conjuntos)**.** *Dado el conjunto universal* Ω*, se define una sucesión de conjuntos en* Ω*, como una función* $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ *tal que* $f(n) = A_n$*, al cual denominamos término n-ésimo de la sucesión. Una sucesión es denotada mediante* $\{A_n\}$*.*

Nótese que si una clase de conjuntos es numerable, sus elementos pueden ser dispuestos en una sucesión.

Definicion 1.6.16 (Limite de una sucesión de conjuntos)**.** *Dada una sucesión de conjuntos* $\{A_n\}$*, se define como límite superior de la sucesión, al conjunto:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{A_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

y como límite inferior al conjunto:

$$\lim_{n\to\infty} \inf\{A_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Si ambos límites coinciden, se dice que la sucesión tiene límite y escribimos:

$$lim\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \inf\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sup\{A_n\}$$

Teorema 1.6.13. *Si* $\{A_n\}$ *es una sucesión de conjuntos, entonces se cumple que:*

$$\lim_{n\to\infty} \inf\{A_n\} \subset \lim_{n\to\infty} \sup\{A_n\}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} w \in \liminf\{A_n\} &\Rightarrow w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\ &\Rightarrow w \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \textit{para algun } n \\ &\Rightarrow w \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \textit{para el mismo } n \textit{ y para cualquier otro} \\ &\Rightarrow w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \\ &\Rightarrow w \in \limsup\{A_n\} \end{aligned}$$

□

Definicion 1.6.17. *Si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos, se dice que:*
i.- $\{A_n\}$ *es monótona creciente si* $A_n \subset A_{n+1}$
ii.- $\{A_n\}$ *es monótona decreciente si* $A_n \supset A_{n+1}$
iii.- $\{A_n\}$ *es monótona si es monótona creciente o monótona decreciente.*

Teorema 1.6.14. *Si $\{A_n\}$ es una sucesión monótona de conjuntos, entonces tiene límite y además:*
i.- $lim\{A_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *si la sucesión es creciente*
ii.- $lim\{A_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *si la sucesión es decreciente*

Demostración. ▷
i.- Si $\{A_n\}$ es creciente $\Rightarrow \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \Rightarrow \liminf\{A_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
y como además $\limsup\{A_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
entonces $lim\{A_n\} = \liminf\{A_n\} = \limsup\{A_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ □

La demostración del apartado ii.- es análoga y se deja como ejercicio.

Teorema 1.6.15. *Si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos cualesquiera, entonces existe una sucesión $\{B_n\}$ de conjuntos tal que:*

i.- Son disjuntos
ii.- $B_i \subset A_i \quad \forall i$
iii.- $\cup B_i = \cup A_i$

Demostración. $\triangleright$
Definamos los conjuntos B_i de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&B_1 = A_1\\
&B_2 = A_2 - A_1 = A_2 \cap \bar{A}_1\\
&B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2) = A_3 \cap (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)\\
&\quad\vdots\\
&B_i = A_i - (\bigcup_{h=1}^{i-1} A_h) = A_i \cap (\bigcap_{h=1}^{i-1} \bar{A}_h)\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

i Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $i < j$:

$$\begin{aligned}
B_i \cap B_j &= [A_i \cap (\bigcap_{h=1}^{i-1} \bar{A}_h)] \cap [A_j \cap (\bigcap_{h=1}^{j-1} \bar{A}_h)]\\
&= [A_i \cap \bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{i-1}] \cap [A_j \cap \bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_i \cdots \cap \bar{A}_{j-1}]\\
&= (A_i \cap \bar{A}_i) \cap (A_j \cap \bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{j-1}]\\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

así que los B_i son disjuntos.

ii

$$\begin{aligned}
\text{Sea } w \in B_i &\Rightarrow w \in A_i \cap (\bigcap_{h=1}^{i-1} \bar{A}_h)\\
&\Rightarrow w \in A_j \wedge w \notin A_h \text{ para h = 1, 2 \ldots i-1}\\
&\Rightarrow w \in A_i\\
&\Rightarrow B_i \subset A_i
\end{aligned}$$

iii Este apartado se demuestra por inducción y se deja como ejercicio.

□

Concluiremos nuestra revisión con ciertos aspectos relacionados con la imagen inversa de un conjunto, función compuesta e imagen directa de un conjunto.

Definicion 1.6.18. *Sean Ω y Ω' dos espacios no vacíos, y sea f: $\Omega \to \Omega'$ una función entre ellos. Para cualquier subconjunto A' de Ω', se define como imagen inversa de A' al conjunto:*

$$f^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : f(w) \in A'\}$$

de modo que:

$$\omega \in f^{-1}(A') \;\Leftrightarrow\; f(\omega) \in A'$$

Más generalmente, si $\mathcal{A}'$ es una clase de subconjuntos de Ω', denotaremos por $f^{-1}(\mathcal{A}')$ a la clase de imágenes inversas de los conjuntos de $\mathcal{A}'$:

$$f^{-1}(\mathcal{A}') = \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$$

que es una clase de subconjuntos de Ω.

Es importante observar que esta relación inversa será una función entre $\mathcal{P}(\Omega')$ y $\mathcal{P}(\Omega)$, que no debe confundirse con la función inversa de f en el sentido usual, la cual solamente existe si f es biyectiva. Estamos utilizando en realidad la notación f^{-1} con tres significados diferentes: Como la función inversa, cuyo argumento lo constituyen puntos ω' de Ω'; como imagen inversa de conjuntos, cuyo argumento lo constituyen subconjuntos A' de Ω'; y como imagen inversa de clases, cuyo argumento lo constituyen clases $\mathcal{A}'$ de subconjuntos A' de Ω'. Preferimos utilizar la misma notación en los tres casos y que sea el contexto el que permita identificar el significado, y no crear notaciones diferentes que pueden resultar un tanto engorrosas.

Teorema 1.6.16. *Sean Ω y Ω' dos espacios no vacíos, y sea f: $\Omega \to \Omega'$ una función entre ambos conjuntos, entonces:*
i.- $f^{-1}(\Omega') = \Omega$ *y* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
ii.- $f^{-1}(\bar{A}') = \overline{f^{-1}(A')}$
iii.- Si $A'_1, A'_2 \ldots$ *son subconjuntos de* Ω' *entonces:*

$$f^{-1}(\cup A'_i) = \cup f^{-1}(A'_i) \quad y \quad f^{-1}(\cap A'_i) = \cap f^{-1}(A'_i)$$

iv.- Si $A' \subset B'$ *entonces* $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

Demostración. $\triangleright$

i $f^{-1}(\Omega') = \{w \in \Omega : f(w) \in \Omega'\} = \Omega$ ya que $f(w) \in \Omega' \quad \forall w \in \Omega$
Por otro lado:
$f^{-1}(\emptyset) = \{w \in \Omega : f(w) \in \emptyset\} = \emptyset$ ya que no existe $w \in \Omega$ tal que $f(w) \in \emptyset$

ii $w \in f^{-1}(\bar{A}') \Leftrightarrow f(w) \in \bar{A}' \Leftrightarrow f(w) \notin A' \Leftrightarrow w \notin f^{-1}(A') \Leftrightarrow w \in \overline{f^{-1}(A')}$.

iii $w \in f^{-1}(\cup A'_i) \Leftrightarrow f(w) \in A'_i$ *para algun* $i \Leftrightarrow w \in f^{-1}(A'_i)$ *para algun* i
$\Leftrightarrow w \in \cup f^{-1}(A'_i)$

$\square$

Las demostraciones del resto de los apartados se dejan como ejercicio.

Definicion 1.6.19 (Función compuesta)**.** *Sean Ω, Ω' y Ω'' tres espacios no vacíos. Sean las funciones $f : \Omega \to \Omega'$ y $g : \Omega' \to \Omega''$. Se define como función compuesta de f y g a la función:*

$$\begin{aligned} h = g \circ f : \Omega \to \Omega'' \quad & \textit{tal que :} \\ h(w) = g(f(w)) \quad & \forall w \in \Omega \end{aligned}$$

Teorema 1.6.17. *Sean Ω, Ω' y Ω'' tres espacios no vacíos. Sean las funciones $f : \Omega \to \Omega'$ y $g : \Omega' \to \Omega''$. Sea $h = g \circ f$ la función compuesta de f y g, entonces:*

$$h^{-1}(A'') = f^{-1}(g^{-1}(A'')) \qquad \forall A'' \in \Omega''$$

(Es importante observar el orden de la composición de las funciones en h y en h^{-1})

Definicion 1.6.20 (Imagen directa de un conjunto)**.** *Sean Ω y Ω' dos espacios no vacíos, y sea f: $\Omega \to \Omega'$ una función entre ellos. Para cualquier subconjunto A de Ω se define como imagen directa de A al conjunto:*

$$\bar{f}(A) = \{f(w) \in \Omega' : w \in A\}$$

de modo que:

$$w' \in \bar{f}(A) \Rightarrow \exists w \in A : f(w) = w'$$

Resulta conveniente señalar que esta relación es una función entre $\mathcal{P}(\Omega)$ y $\mathcal{P}(\Omega')$, por lo que se le denomina función de conjunto, diferenciándola así de las funciones puntuales.

Teorema 1.6.18. *Sean Ω y Ω' dos espacios no vacíos, y sea f: $\Omega \to \Omega'$ una función entre ambos conjuntos, entonces:*
i.- $\bar{f}(\emptyset) = \emptyset$ *y* $\bar{f}(\Omega) \subset \Omega'$
ii.- $\bar{f}(\bar{A}) \subset \overline{\bar{f}(A)}$
iii.- Si $A \subset B$ *entonces* $\bar{f}(A) \subset \bar{f}(B)$
iv.- Si $A_1, A_2 \ldots$ *son subconjuntos de* Ω *entonces:*

$$\bar{f}(\cup A_i) = \cup \bar{f}(A_i) \quad y \quad \bar{f}(\cap A_i) \subset \cap \bar{f}(A_i)$$

v.- $A \subset f^{-1}(f(A)) \qquad \forall A \subset \Omega$
vi.- $\bar{f}(f^{-1}(A')) \subset A' \qquad \forall A' \subset \Omega'$

Demostración. $\triangleright$

i Por definición:
$\bar{f}(\emptyset) = \{f(w) \in \Omega' : w \in \emptyset\} = \emptyset$ ya que $\nexists w \in \Omega : f(w) \in \Omega'$
Por otro lado, como $\bar{f}(\Omega) = \{f(w) \in \Omega' : w \in \Omega\}$, entonces:
$w' \in \bar{f}(\Omega) \Rightarrow w' \in \Omega'$, así que $\bar{f}(\Omega) \subset \Omega'$
La igualdad se cumple si y solo si f es sobreyectiva.
(Todos los $w' \in \Omega'$ son imágenes de algún $w \in \Omega$)

ii

$$\begin{aligned} w' \in \bar{f}(\bar{A}) &\Leftrightarrow \exists w \in \bar{A} : f(w) = w' \\ &\Leftrightarrow w \notin A : f(w) = w' \\ &\Rightarrow w' \notin \bar{f}(\bar{A}) \\ &\Rightarrow w' \in \overline{\bar{f}(A)} \end{aligned}$$

La igualdad se cumple solamente si f es biyectiva.

iii Si $w' \in \bar{f}(A) \Rightarrow \exists w \in A : f(w) = w' \Rightarrow w \in B \wedge f(w) = w' \Rightarrow w' \in \bar{f}(B)$
Por tanto: $\bar{f}(A) \subset \bar{f}(B)$

iv

$$\begin{aligned} w' \in \bar{f}(\cup A_i) &\Leftrightarrow \exists w \in (\cup A_i) : f(w) = w' \\ &\Leftrightarrow \exists w \in A_i \text{ para algun i: } f(w) = w' \\ &\Leftrightarrow w' \in \bar{f}(A_i) \text{ para algun i} \\ &\Leftrightarrow w' \in \cup \bar{f}(A_i) \end{aligned}$$

El resto de las demostraciones se dejan como ejercicio. □

Para demostrar estos resultados deben tenerse muy en cuenta las siguientes implicaciones:

- $w \in A \Rightarrow f(w) \in \bar{f}(A)$
- $w' \in \bar{f}(A) \Rightarrow \exists w \in A : f(w) = w'$
- $w' \in A' \Rightarrow \exists w \in \Omega : f(w) = w'$ solo si f es sobreyectiva
  (En general, no todos los $w' \in \Omega'$ son imágenes de algun $w \in \Omega$)
- $f(w) \in \bar{f}(A) \Rightarrow w \in A$ solo si f es inyectiva
  (En general, no todos los $w' \in \Omega'$ son imágenes de un único $w \in \Omega$)

1.7. Ejercicios 1.1

1. Demuestre que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier subconjunto.

2. Demuestre que si $C_1, C_2, \ldots C_n$ es una colección de conjuntos disjuntos y A es un conjunto cualquiera, entonces $A \cap C_1, A \cap C_2 \ldots A \cap C_n$ también es una colección de conjuntos disjuntos.

3. Demuestre que si $C_1, C_2, \ldots C_n$ es una colección de conjuntos disjuntos y A es un conjunto cualquiera, entonces $A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap C_i)$

4. Demuestre el teorema 1.6.13, apartado ii.

5. Demuestre que si $\{A_n\}$ es una sucesión monótona de conjuntos, entonces: $lim\{\Omega - A_n\} = \Omega - lim\{A_n\}$

6. Demuestre que:

   i) $A - lim\,sup\{B_n\} = lim\,inf\{A - B_n\}$

   ii) $A - lim\,inf\{B_n\} = lim\,sup\{A - B_n\}$

7. Calcule los límites de las siguientes sucesiones de conjuntos:

   i) $A_n = \begin{cases} B & \text{si n es par} \\ C & \text{si n es impar} \end{cases}$

ii) $A_n = \begin{cases} \{x \in \mathcal{R} : -n < x < n\} & \text{si n es par} \\ \{x \in \mathcal{R} : 0 < x < 1/n\} & \text{si n es impar} \end{cases}$

iii) $A_n = \{x \in \mathcal{R} : b - 1/n < x \leq b\}$

iv) $A_n = \{x \in \mathcal{R} : b < x \leq b + 1/n\}$

v) $A_n = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1/n\}$

vi) $A_n = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1/n\}$

8. Demuestre el teorema 1.6.15, apartados i y iv.

9. Sean Ω y Ω' dos espacios no vacíos, y sea f: $\Omega \to \Omega'$ una función entre ambos conjuntos. Demuestre que si $A'_1, A'_2, \ldots$ son subconjuntos disjuntos de Ω', entonces $f^{-1}(A'_1), f^{-1}(A'_2), \ldots$ son conjuntos disjuntos de Ω.

10. Demuestre el teorema 1.6.17, apartados i, ii, iii, v y vi.

1.8. Sigma-álgebra

Antes de determinar los axiomas que nos permitirán desarrollar nuestra teoría, debemos precisar la clase de los sucesos posibles asociados al experimento aleatorio, es decir, precisar cuáles subconjuntos del espacio muestral correspondiente consideraremos como sucesos, a los cuales asignaremos un cierto número real que indicará su probabilidad de ocurrir. En principio pareciera que todos los posibles subconjuntos del espacio muestral podrían considerarse como sucesos posibles, lo que realmente ocurre si Ω es numerable; sin embargo, si el espacio muestral es no numerable, no todos sus posibles subconjuntos podrán considerarse como sucesos posibles. De tal manera que es preciso definir la clase de subconjuntos de Ω que constituirá la clase de todos los sucesos posibles asociados al experimento aleatorio en cuestión. Esta clase la denominaremos "sigma-álgebra"(σ-álgebra) asociada al espacio muestral Ω.

En lugar de precisar los conjuntos que constituyen la σ-álgebra, estableceremos algunas propiedades que deben ser razonablemente exigidas: Es natural, por ejemplo, que Ω esté incluido en la σ-álgebra, ya que se trata del suceso seguro. Lo mismo vale para el suceso imposible. Por otro lado si A

es un suceso cualquiera, resulta obvio que también su contrario es un suceso asociado al experimento aleatorio que ocurre cuando no ocurre A. Similarmente, si A y B son dos sucesos cualesquiera, es lógico exigir que $A \cup B$ y $A \cap B$ también sean sucesos y por tanto pertenezcan a la σ-álgebra.

Definicion 1.8.1 (σ-álgebra)**.** *Sea Ω el espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio. Se define como σ-álgebra asociada a Ω, a la clase no vacía $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω que cumple las siguientes propiedades:*

i) Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

ii) Si $A_1, A_2 \cdots \in \mathcal{A} \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathcal{A}$

Estas dos propiedades son suficientes para asegurar que aquellos conjuntos de nuestro interés pertenezcan a $\mathcal{A}$, así como aquéllos obtenidos mediante operaciones realizadas con otros sucesos. Esta afirmación será demostrada en los próximos teoremas. Si sustituimos la propiedad ii por otra propiedad que establece la misma afirmación, pero sólo para una colección finita de sucesos de $\mathcal{A}$, obtenemos un Algebra de Boole.

A la estructura constituida por el par (Ω, $\mathcal{A}$) la denominaremos “Espacio Probabilizable”asociado al experimento aleatorio.

Teorema 1.8.1. *Sea (Ω, $\mathcal{A}$) un espacio probabilizable asociado a un cierto experimento aleatorio, entonces se cumple que $\Omega \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Como $\mathcal{A}$ es no vacía, existe un $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow$ por la propiedad ii que $A \cup \bar{A} \cup A \cup \bar{A} \cdots = \Omega \in \mathcal{A}$ □

Corolario 1.8.1.1. $\emptyset \in \mathcal{A}$

Este Teorema 1.8.1 es algunas veces incluido en la definición de σ-álgebra. Sin embargo, como hemos visto, puede desprenderse lógicamente de las dos propiedades iniciales, siempre que se exija que $\mathcal{A}$ sea no vacía.

Teorema 1.8.2. *Sea (Ω, $\mathcal{A}$) un espacio probabilizable asociado a un cierto experimento aleatorio, y sea $A_1, A_2 \dots A_n$ una colección finita de sucesos de $\mathcal{A}$, entonces* $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \in \mathcal{A}$

Demostración. Como $A_1, A_2..A_n \in \mathcal{A}$, entonces la colección infinita $A_1, A_2...$ donde $A_i = \emptyset \; \forall i > n$ también pertenece a $\mathcal{A}$ por el corolario anterior. Por la propiedad ii:

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup (\bigcup_{i>n}^{\infty} A_i) = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \in \mathcal{A}$$

□

Este teorema demuestra que toda σ-álgebra es también un Algebra de Boole. Lo recíproco, no es necesariamente cierto.

Teorema 1.8.3. *Sea (Ω, $\mathcal{A}$) un espacio probabilizable asociado a un cierto experimento aleatorio y sea $A_1, A_2 \ldots$ una colección infinita de sucesos de $\mathcal{A}$, entonces $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Como $A_1, A_2 \cdots \in \mathcal{A}, \Rightarrow \bar{A}_1, \bar{A}_2 \cdots \in \mathcal{A} \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i) \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i)} = (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathcal{A}$ □

Corolario 1.8.3.1. *Si $A_1, A_2 \ldots A_n \in \mathcal{A}$, entonces $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \in \mathcal{A}$.*

Corolario 1.8.3.2. *Si $AyB \in \mathcal{A}$, entonces $(A - B) \in \mathcal{A}$.*

Sigma-álgebra generada por una clase inicial

En el caso particular de un espacio muestral finito, $\Omega = \{w_1, w_2 ... w_n\}$, es claro que la clase de todos los posibles subconjuntos de Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$, es finita y además es un Algebra de Boole. Por otro lado, si consideramos la clase formada por todos los puntos muestrales, $\mathcal{F}_0 = \{\{w_1\}, \{w_2\}, ...\{w_n\}\}$, se desprende que cualquiera de los conjuntos del Algebra de Boole $\mathcal{P}(\Omega)$ puede ser obtenido mediante un número finito de aplicaciones de las propiedades del álgebra. Este procedimiento constituye la forma más simple de generación de un álgebra a partir de una clase inicial $\mathcal{F}_0$, y se dice que $\mathcal{P}(\Omega)$ puede generarse a partir de $\mathcal{F}_0$. A continuación presentamos la formalización de esta idea.

Definicion 1.8.2 (σ-álgebra generada por una clase inicial)**.** *Sea Ω el espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio. Sea $\mathcal{F}_0$ una clase no* *vacía de subconjuntos de Ω. Se define como σ-álgebra generada por la clase inicial $\mathcal{F}_0$, a la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}_0$:*

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) = \bigcap \mathcal{A}_i$$

siendo $\mathcal{A}_i$ una σ-álgebra sobre Ω. Ocurre por lo tanto, que cualquier otra σ-álgebra sobre Ω que contenga a $\mathcal{F}_0$, digamos $\mathcal{B}$, es tal que $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{B}$.

Ejemplo 1.8.1. *Sea Ω el espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio. Sea A un conjunto no vacío de Ω. Entonces la σ-álgebra generada por la clase inicial $\mathcal{F}_0 = \{A\}$ es:*

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) = \{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$$

Ejemplo 1.8.2. *Sea Ω el espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio. Sean A y B subconjuntos no vacíos de Ω. Entonces la σ-álgebra generada por la clase inicial $\mathcal{F}_0 = \{A,\ B\}$ es:*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) = &\{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}, B, \bar{B}, (A \cup B), \overline{(A \cup B)}, (\bar{A} \cup \bar{B}),\\ &(A \cap B), (A \cup \bar{B}), (\bar{A} \cap B), (\bar{A} \cup B), (A \cap \bar{B}),\\ &(A \oplus B), \overline{(A \oplus B)}\}\end{aligned}$$

Sigma-álgebra de Borel

El ejemplo más conocido e importante de espacio muestral lo constituye el conjunto de los números reales (en el capítulo 3 se justificará esta afirmación). Este espacio es infinito no numerable y tiene la particularidad de que en él existen ciertos subconjuntos que no son de utilidad para la construcción de modelos probabilísticos, es decir, existen ciertos subconjuntos de $\mathcal{R}$ que no pueden ser considerados como sucesos (la Teoría de la Medida de Lebesgue nos permite demostrar que existen conjuntos de números reales que no son medibles). De hecho ocurre, que los subconjuntos de $\mathcal{R}$ de nuestro interés son los intervalos de cualquier tipo (abiertos, cerrados, semiabiertos, semicerrados, degenerados, finitos, infinitos), y aquellos conjuntos obtenidos al realizar un conjunto numerable de operaciones conjuntistas (uniones, intersecciones, complementos,...) con ellos. En otras palabras, la clase de sucesos posibles definida sobre el espacio muestral $\Omega = \mathcal{R}$, es la σ-álgebra generada por ciertos intervalos,a la cual llamaremos σ-álgebra de Borel.

Definicion 1.8.3 (σ-álgebra de Borel). *Sea el espacio muestral Ω =$\mathcal{R}$. Se define como σ-álgebra de Borel, a la σ-álgebra generada por la clase inicial: $\mathcal{F}_0 = \{(-\infty, x] : x \in \mathcal{R}\}$ la cual denotaremos por $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$. A todo elemento de esta σ-álgebra lo denominaremos boreliano.*

Obtendremos la misma σ-álgebra si consideramos como clase inicial, la clase de todos los intervalos del tipo (x, ∞), o bien, (x, y), [x, y], [x y) o (x, y]. De aquí se desprende que no existe una correspondencia biunívoca entre la clase inicial $\mathcal{F}_0$ y la σ-álgebra generada $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$.

Ahora bien, en vista de que $\mathcal{F}_0$ es no numerable, es imposible explicitar todos los elementos de $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$. Desde el punto de vista conceptual el problema no es diferente al caso en el cual $\mathcal{F}_0$ es finita, lo que cambia es la probabilidad práctica de lograrlo. Es importante sin embargo, estar en capacidad de decidir si un determinado subconjunto de $\mathcal{R}$ es un boreliano o no. A tal efecto presentamos el siguiente teorema:

Teorema 1.8.4. *Sea el espacio probabilizable real ($\mathcal{R}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$). Los siguientes conjuntos son borelianos:*

i) *Intervalos del tipo* $(x, y]$

ii) *Intervalos degenerados* $\{x\}$

iii) *Intervalos abiertos* (x, y)

iv) *Intervalos semicerrados* $[x, y)$

v) *Intervalos cerrados* $[x, y]$

vi) *Intervalos infinitos del tipo* (x, ∞)

vii) *Intervalos infinitos del tipo* $[x, \infty)$

viii) *Intervalos infinitos del tipo* $(-\infty, x]$

ix) *Conjuntos numerables de números reales*

con $x, y \in \mathcal{R}$, tales que $x < y$.

Demostración

i) Como $(x, y] = (-\infty, y] - (-\infty, x]$ *y además* $(-\infty, y]$, $(-\infty, x] \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$, *entonces* $(x, y]$ *es un boreliano, en virtud del corolario 1.8.3.2*

ii) Como $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(x - 1/n, x]$ *y además* $(x - 1/n, x] \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}\ \forall n$, *entonces* x *es un boreliano, en virtud del teorema 1.8.3*

iii) Como $(x, y) = (x, y] - \{y\}$ *y además* $(x, y]$, $\{y\} \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$, *entonces (x, y) es un boreliano, en virtud del corolario 1.8.3.2*

Las demostraciones restantes son similares y se dejan como ejercicio

1.9. Función de Probabilidad

En nuestro proceso de desarrollo de la Teoría de Probabilidades como una teoría axiomática, tenemos que hasta ahora hemos construido un espacio probabilizable $(\Omega, \mathcal{A})$ asociado a un experimento aleatorio determinado. Para completar la construcción del modelo matemático para tal fenómeno aleatorio, queda por especificar la medida de ocurrencia o probabilidad que hemos de asignar a cada uno de los sucesos correspondientes. El espacio probabilizable es la estructura que nos permitirá introducir esta medida de probabilidad.

La definición axiomática de la probabilidad, como dijimos anteriormente, será sugerida por las propiedades básicas de las frecuencias relativas. Ahora bien, cuáles de ellas podemos seleccionar como axiomas?, cuántas serán suficientes o independientes?. Tal escogencia ameritaría un proceso de ensayo y error, y el estudio de diferentes esquemas alternativos.

Un conjunto de axiomas que posee gran estabilidad y que ha sido ampliamente aceptado es el propuesto por el matemático ruso Andrei Kolmogorov (1903-1987) en 1930 y que presentamos a continuación.

Definicion 1.9.1 (Función de Probabilidad). *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio probabilizable asociado a un cierto experimento aleatorio. Se define como función de probabilidad sobre ese espacio, a la función* $P : \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ *tal que:*
Axioma 1: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
Axioma 2: $P(\Omega) = 1$
Axioma 3: Si $A_1, A_2 \ldots$ *es una colección infinita de sucesos mutuamente excluyentes de* $\mathcal{A}$, *entonces:* $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Estos tres axiomas son los únicos necesarios para generar todas las demás propiedades que queremos que posea la función de probabilidad.

El significado intuitivo de este número $P(A)$ es que en una larga serie de repeticiones del experimento, es prácticamente seguro que la frecuencia relativa del suceso A, f(A), será aproximadamente igual a $P(A)$. Queda claro entonces que f(A) y P(A) no son la misma cosa, pero puede decirse que f(A) es una aproximacin experimental de P(A), o que P(A) es una abstracción teórica de f(A). La relación matemática exacta entre ambos conceptos constituye una de las versiones de la denominada "Ley de los Grandes Números". Obsérvese además, que por tratarse de una definición matemtica, nada se dice de cómo se calcula la probabilidad, solo se especifica las propiedades que cumple.

A la estructura constituida por la terna (Ω, $\mathcal{A}$, P) la denominaremos espacio probabilizado asociado al experimento aleatorio y constituye la estructura básica de los modelos de probabilidad.

A continuación presentaremos una serie de teoremas, consecuencia lógica de los axiomas, que además de constituir resultados matemáticamente correctos, son también intuitivamente adecuados. Para todos estos teoremas supondremos un espacio probabilizado (Ω, $\mathcal{A}$, P) asociado a un cierto experimento aleatorio.

Teorema 1.9.1. *$P(\emptyset) = 0$.*

Demostración. Consideremos la colección infinita de sucesos $A_1, A_2 \dots$, donde $A_i = \emptyset \quad \forall i = 1, 2 \dots$.
Como los A_i son disjuntos, y además la unión $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, entonces por el axioma 3, $P(\emptyset) = P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \lim \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) = \lim \sum\limits_{i=1}^{n} P(\emptyset)$.
Como la suma $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ debe ser convergente, deberá ocurrir que $\lim \sum\limits_{i=1}^{n} P(\emptyset)$ $< \infty$, siendo $P(\emptyset) \geq 0$. Ahora bien, si $P(\emptyset) = k \geq 0$, entonces lim = lim nk $= \infty$, lo que es un absurdo, así que tendrá que ocurrir que $P(\emptyset) = 0$.

$\square$

Este resultado es lógico, ya que la probabilidad es una medida de ocurrencia, y al suceso que nunca ocurre debería corresponderle el menor valor, el cero.

Teorema 1.9.2. *Si* $A_1, A_2 \ldots A_n$ *es una colección finita de sucesos mutuamente excluyentes de* $\mathcal{A}$*, entonces* $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Demostración. Consideremos la colección infinita $A_1, A_2 \ldots A_n \ldots$ en la cual $A_i = \emptyset \quad \forall i > n$.
Como los A_i, son disjuntos, y además la unión:
$(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup (\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup \emptyset = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$
entonces:

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 0 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \end{aligned}$$

□

Teorema 1.9.3. *Si* $A \in \mathcal{A}$ *entonces* $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Demostración. Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ ya que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra. Además A y $\bar{A}$ son mutuamente excluyentes, y tales que $A \cup \bar{A} = \Omega$. Entonces:
$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$, de donde: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. □

Corolario 1.9.3.1. *Si* $A \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A) \leq 1$.

Al suceso imposible le corresponde el cero y al suceso seguro le corresponde el uno: $A = \emptyset \Rightarrow P(A) = 0$ y $A = \Omega \Rightarrow P(A) = 1$. Sin embargo, las proposiciones recíprocas: $P(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$ y $P(A) = 1 \Rightarrow A = \Omega$ no son verdaderas.

Tenemos entonces que asignarle una probabilidad a un suceso, es asociarle un número entre 0 y 1. Los extremos corresponden al suceso imposible y al suceso seguro respectivamente. De esta manera, la probabilidad induce un orden en la σ-álgebra A, mediante la relación “ser más probable que ”.

Teorema 1.9.4. *Si* $A \, y \, B \in \mathcal{A}$ *entonces* $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Demostración. Por el teorema 1.5.9 tenemos que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ siendo $(A \cap B)$ y $(A \cap \bar{B})$ mutuamente excluyentes. Entonces $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$, de donde $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ □

Corolario 1.9.4.1. *Si* $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$.

Corolario 1.9.4.2. *Si* $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$.

En cuanto a este último corolario podemos decir, que si la ocurrencia del suceso B implica la ocurrencia del suceso A, resulta natural que la probabilidad de B sea menor que la de A

Teorema 1.9.5. *Si* A *y* $B \in \mathcal{A}$ *entonces* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración. Como $A \cup B = A \cup (B - A)$, donde A y $(B - A)$ son disjuntos, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. □

Teorema 1.9.6. *Si* A, B *y* $C \in \mathcal{A}$ *entonces* $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Este teorema se demuestra escribiendo $A \cup B \cup C$ como $(A \cup B) \cup C$, y aplicando el teorema anterior.

La forma general de la probabilidad de la unión de conjuntos viene dada por el siguiente teorema conocido como fórmula de Poincaré:

Teorema 1.9.7. *Si* $A_1, A_2 \ldots A_n \in \mathcal{A}$, *entonces:* $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum\limits_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$

A continuación presentaremos el concepto de partición de un espacio muestral y un teorema relacionado, que servirán de base para la demostración del teorema de la probabilidad total que se estudiará en el capítulo 3.

Definicion 1.9.2 (Partición del espacio muestral)**.** *Se dice que la colección de sucesos de* $\mathcal{A}$*:* $C_1, C_2 \ldots C_n$ *constituye una partición del espacio muestral* Ω *si:*

i) Los C_i *son mutuamente excluyentes:* $C_i \cap C_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$.

ii) La probabilidad de cada C_i *es positiva:* $P(C_i) > 0$ *para todo* i.

iii) La unión de los C_i cubre a Ω: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i = \Omega$

Teorema 1.9.8. *Si $C_1, C_2 \ldots C_n$ es una partición del espacio muestral Ω y $A \in \mathcal{A}$, entonces $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A \cap C_i)$.*

Demostración. Como $A = A \cap \Omega = A \cap (\cup C_i) = \cup(A \cap C_i)$, donde los $(A \cap C_i)$ son disjuntos, entonces $P(A) = \sum P(A \cap C_i$. □

Teorema 1.9.9. *Si $A_1, A_2 \ldots A_n$ es una colección finita de sucesos cualesquiera de $\mathcal{A}$, entonces $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_n)$.*

Demostración. Por el teorema 1.5.13. sabemos que dada una sucesión de conjuntos cualesquiera $A_1, A_2, ...A_n$, existe una sucesión $B_1, B_2, ...B_n$ tal que: □

Teorema 1.9.10. $P(lim\{A_n\}) = lim\{P(A_n)\}$

Demostración.

i) En primer lugar consideraremos que la sucesión $\{An\}$ es creciente. Por el teorema 1.5.13. sabemos que existe una sucesión de conjuntos disjuntos $\{B_n\}$ tal que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A_n$ por tratarse de una sucesión creciente. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(lim\{A_n\}) &= P(lim\{\bigcup_{i=1}^{n} B_i\}) &&= P(\{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) &&= lim \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \\ &= lim\, P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) &&= lim\, P(A_n) \end{aligned}$$

ii) En el caso en el cual la sucesión $\{A_n\}$ es decreciente, la sucesión de los complementos $\{\bar{A}_n\}$ será creciente. Aplicando lo demostrado en la parte i a la sucesión $\{\bar{A}_n\}$, y luego de un sencillo manejo algebraico, se obtiene el resultado deseado.

□

Es importante aclarar, que la monotonía se interpreta aquí como inclusión de conjuntos, lo que en la terminología probabilística indica implicación de sucesos.

1.10. Ejercicios 1.2

1. Asocie a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios un espacio muestral adecuado:

   i) Se lanzan 2 monedas y se observan los resultados. Considere 4 casos según las monedas sean distinguibles o no, y el orden de lanzamiento.

   ii) Se introducen aleatoriamente 2 piezas en 2 cajas diferentes denotadas por 1 y 2. Suponga que las 2 piezas pueden quedar en la misma caja. Considere dos casos según las piezas sean distinguibles o no.

   iii) Se lanzan 2 monedas y se observa el número de caras.

   iv) Se lanza una moneda hasta que aparece cara.

   v) Se observa el tiempo que un bombillo tarda en quemarse.

   vi) Se fabrican piezas hasta obtener 10 no defectuosas. Se cuenta el número de piezas fabricadas.

   vii) Una caja contiene n bombillos de los cuales hay r defectuosos. Se prueban uno a uno hasta obtener el primer defectuoso.

   viii) El mismo experimento anterior, pero se prueban hasta obtener los r defectuosos.

   ix) Se mide con un contador geiger el número de partculas emitidas por una sustancia radioactiva durante un período de tiempo (0, t].

   x) Un termógrafo registra diariamente la temperatura ambiente máxima y la mínima. Observar el termógrafo en el momento t.

2. Demuestre que si el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio tiene n elementos, entonces el número de sucesos posibles es 2^n.

3. Una persona P es seleccionada aleatoriamente de una población dada. Sean los sucesos:
   A = (P es varón)
   B = (P tiene menos de 30 años)
   C = (P habla un idioma extranjero)
   Describa en notación de conjuntos los siguientes sucesos:

   i) P es varón, menor de 30 años y no habla ningún idioma extranjero.

   ii) P es mujer, mayor de 30 años y habla un idioma extranjero.

   iii) P es mujer o menor de 30 años, pero no ambas cosas.

   iv) P es menor de 30 años y habla un idioma extranjero.

4. Sean A, B y C como en el ejercicio anterior. Describa con palabras los siguientes sucesos:

   i) $A \cap (B \cup C)$

   ii) $A \cup (B \cap C)$

   iii) $A - (B \cup C)$

   iv) $A - (B \cap C)$

5. Sean A, B y C subconjuntos de Ω. Describa los siguientes sucesos con las operaciones conjuntistas apropiadas:

   i) Por lo menos k de los sucesos A y B ocurran (k=0,1,2).

   ii) Exactamente k de los sucesos A y B ocurran.

   iii) A lo sumo k de los sucesos A y B ocurran.

   iv) Por lo menos k de los sucesos A, B y C ocurran (k=0,1,2,3).

   v) Exactamente k de los sucesos A, B y C ocurran.

   vi) A lo sumo k de los sucesos A, B y C ocurran.

6. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra definida sobre Ω, y A y B un par de sucesos cualesquiera. Demuestre que A$\oplus$B $\in \mathcal{A}$.

7. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra definida sobre Ω, y $\{A_n\}$ una sucesión de sucesos de $\mathcal{A}$. Demuestre que $\liminf\{A_n\}$ y $\limsup\{A_n\}$ son elementos de $\mathcal{A}$.

8. Discuta la siguiente proposición: "$\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si y solo si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole"

9. Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ σ-álgebras definidas sobre Ω. Verifique si las siguientes clases son también σ-álgebras sobre Ω:

   i) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$

   ii) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$

10. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra definida sobre Ω. Demuestre que la clase $\mathcal{A}^c = \{\bar{A} : A \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra sobre Ω.

11. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra definida sobre Ω y B un suceso cualquiera. Demuestre que la clase $\mathcal{A}^{\mathcal{B}} = \{A \cap B : A \in A\}$ es una σ-álgebra sobre B.

12. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio probabilizable, Ω' un conjunto no vacío y f: $\Omega \to \Omega'$ una función entre ambos conjuntos. Demuestre que la siguiente clase es una σ-álgebra definida sobre Ω':
$$\mathcal{A}' = \{A' \subset \Omega' : f^{-1}(A') \in A\}$$

13. Sea $(\Omega', \mathcal{A}')$ un espacio probabilizable, Ω un conjunto no vacío y f: $\Omega \to \Omega'$ una función entre ambos conjuntos. Demuestre que la siguiente clase es una σ-álgebra definida sobre Ω:
$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A = f^{-1}(A')\ \forall A' \in \mathcal{A}'\}$$

14. Sea el espacio muestral $\Omega = \{$a, b, c$\}$. Encuentre la σ-álgebra generada por la clase inicial F_0 en los siguientes casos:

   i) $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset\}$

   ii) $\mathcal{F}_0 = \{\{\text{a}\}\}$

   iii) $\mathcal{F}_0 = \{\{\text{a,c}\}\}$

   iv) $\mathcal{F}_0 = \{\{\text{a}\}, \{\text{c}\}\}$

   v) $\mathcal{F}_0 = \{\{\text{a}\}, \{\text{b}\}, \{\text{c}\}\}$

15. Encuentre la σ-álgebra generada por la clase inicial $\mathcal{F}_0 = \{\{1,3\}, \{1,2\}\}$, si:

   i) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

ii) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

16. Sean A y B dos sucesos tales que P(A) = 0.6, P(B) = 0.7 y P(A∩B) = 0.4. Calcule:

    i) P(A∪B)
    ii) P(A∩$\bar{B}$)
    iii) P($\bar{A}$∩B)
    iv) P($\overline{A \cap B}$)
    v) P($\overline{A \cup B}$)
    vi) P($\bar{A} \cap \bar{B}$)

17. Sean A, B y C tres sucesos tales que P(A) = P(B) = P(C) = 1/4, P(A∩C) = 1/8 y P(A∩B) = P(B∩C) = 0. Calcule:

    i) La probabilidad de que al menos uno de los sucesos A, B y C ocurra.
    ii) P($\bar{A} \cup (B \cap \bar{C}\ )$)

18. Sean A, B y C sucesos cualesquiera. Exprese en términos de P(A), P(B), P(C), P($A \cap B$), P($A \cap C$), P($B \cap C$) y P($A \cap B \cap C$), las probabilidades de los siguientes sucesos:

    i) Por lo menos k de los sucesos A y B ocurran. (k=0,1,2)
    ii) Exactamente k de los sucesos A y B ocurran.
    iii) A lo sumo k de los sucesos A y B ocurran.
    iv) Por lo menos k de los sucesos A, B y C ocurran. (k=0,1,2,3)
    v) Exactamente k de los sucesos A, B y C ocurran.
    vi) A lo sumo k de los sucesos A, B y C ocurran.

19. Sea (Ω, $\mathcal{A}$) un espacio probabilizable, y sean $P_1, P_2, ...P_n$ funciones de probabilidad definidas sobre $\mathcal{A}$. Demuestre que si $a_1, a_2, ...a_n$ son números reales no negativos tales que $\sum a_i = 1$, entonces la función P^* definida por:

$$P^*(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

es una función de probabilidad sobre $\mathcal{A}$.

20. Demuestre que:

    i) $P(A \oplus B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
    ii) $P(A) = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap B)$
    iii) $P(A - B) \geq P(A) - P(B)$
    iv) $P(A \oplus B) \geq |P(A) - P(B)|$
    v) $P(A \cap B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B})$
    vi) $P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1)$
    vii) $P(A \cap B) \leq min\{P(A), P(B)\}$
    viii) $P(A \cup B) \geq max\{P(A), P(B)\}$
    ix) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow entonces P(A) \leq P(\bar{B})$
    x) $A\, y\, B\ implican\, C \Rightarrow P(\bar{C}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B})$

PERSONAJES DE LA ESTADISTICA

Ronald Aylmer Fisher

R. A. Fisher (1890-1962) nació el 17 de Febrero de 1890 en Londres. Ingresó a la Universidad de Cambridge en 1909, donde estudió Matemáticas, Astronomía y Biología. Se graduó con honores en 1912. Su interés por la teoría de los errores lo llevó a estudiar los problemas teóricos y aplicados de la Estadística. Fue profesor de varias universidades inglesas desde 1915 hasta 1919 cuando aceptó un ofrecimiento para trabajar como investigador en la Estación Experimental Agrícola de Rothamsted. En este instituto de investigaciones produjo la mayoría de sus grandes contribuciones a la Estadística, principalmente en las áreas de diseño y análisis de experimentos y en genética. Publicó un número importante de libros y artículos entre los que podemos destacar: Statistical Methods for Research Workers (1925), The Genetical Theory of Natural Selection (1930), The Design of Experiments (1935) y Statistical Tables (1947). En 1933 sustituyó a Karl Pearson como profesor en el University College, lo que no deja de ser irónico ya que fueron públicas las disputas entre estos dos extraordinarios personajes. Fue admitido en la Royal Statistical Society en 1929 y proclamado Caballero por la Reina de Inglaterra en 1952. En la Universidad de Adelaide continuó sus investigaciones hasta que falleció el 29 de julio de 1962 a la edad de 72 años.

De él se dijo: "... era cálido y afectuoso con sus amigos, pero también era poseedor de un temperamento incontrolable ... un apasionado por la verdad científica ... y enemigo implacable de aquéllos que criticaban sus trabajos. La profundidad de su pensamiento era admirable pero sus escritos resultaban difíciles de comprender para la mayoría de sus estudiantes."
