

*Modelos de Ruptura Espontánea de  
Supersimetría*

*Br. Gabriel Abellán*

Tutor: Anamaría Font

Trabajo Especial de Grado



Caracas, 6 de julio del 2011





Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

# MODELOS DE RUPTURA ESPONTÁNEA DE SUPERSIMETRÍA

Br. Gabriel Abellán

Anamaría Font, Tutor

Caracas, 6 de julio del 2011

# Modelos de Ruptura Espontánea de Supersimetría

Copyright © 2011

Universidad Central de Venezuela

# MODELOS DE RUPTURA ESPONTÁNEA DE SUPERSIMETRÍA

Br. Gabriel Abellán

Trabajo Especial de Grado presentado  
ante la ilustre Facultad de Ciencias de la  
Universidad Central de Venezuela como  
requisito parcial para optar al título de:

**Licenciado en Física.**

---

Anamaría Font, Tutor

Fecha

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por el Br. Gabriel Abellán titulado: “**Modelos de Ruptura Espontánea de Supersimetría**” para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

---

Anamaría Font, Tutor

Fecha

---

Salvatore De Vincenzo

Fecha

---

Jorge Ovalle

Fecha

Caracas, 6 de julio del 2011

*A mi padre, quien siempre me apoyó en este sueño.*

# Agradecimientos

Esta historia comenzó hace ya algún tiempo, gracias a una serie de eventos afortunados: algunos libros, algunas conversaciones. No es sencillo agradecer porque siempre falta alguien y nunca es posible expresar fielmente cuán agradecido se está. Considerando esto, pido excusas a los que no estén en esta corta lista y a los que están también si mis palabras no son suficientes.

Primero los que se fueron: a mi amada hermana y mi abuela *Rosa María*, más de una vez las he sentido conmigo.

A mis padres: imagino que no es fácil ser padre, pero tampoco lo es ser hijo. He hecho lo mejor que he podido.

A mi familia: A mi abuela *Carmen* por mostrarme lo sencillo que es decir la verdad a veces. Al recuerdo de mi abuelo *Octaviano*, en ti comenzó todo. A mi tía *Bache* por ser como es. A mi tío *Fernando* por su pureza. A *Carmen*, porque aunque no nos una la sangre, sí nos une el cariño; gracias por tu apoyo incondicional.

A la familia *Bor* por mostrarme que existe otra manera de querer. A *María* por tratarme como un hijo sin merecerlo y al *Sr. Rómulo* por mostrarme un ejemplo viviente de cómo ser cuando envejezca. Gracias también a *Lesbia* quien me dio la facilidad de culminar este trabajo en su casa; sin su ayuda hubiese sido todo más difícil.

A mis profesores: *Alfredo Marcano* por tener siempre el consejo justo, gracias. A *Salvatore De Vincenzo* de quien siempre recordaré las pizarras más ordenadas que puedan escribirse, sus cursos son fuente de motivación. A *José Antonio López* por mostrarme que existe alguien que encontró el equilibrio, siempre recordaré nuestras conversaciones de física. Gracias a todos.



Una mención especial a la profesora *Anamaría Font* quien me acompañó sin saberlo a lo largo de un período difícil. Sin ella, sin su tesón y empuje, este trabajo no existiría. Gracias por su paciencia y por sus oportunas palabras. Usted enseña con el ejemplo.

A una ironía de la vida, al *dr. Plácido Mora Casanova*.

A mis amigos: *Oscar Barré*, por ser la primera persona con quien conversé apasionadamente de física. A *Ernesto Rengel* de quien aprendí el gusto por Quiroga y por el álgebra; nunca olvidaré la construcción de los números enteros... simplemente hermoso. A *Angel Rincón* por mostrarme que sí es posible que la amistad brote de donde menos lo esperas. A *Alejandro Febres* con quien compartí muchas horas de estudio, de conversación y de música. Me honra haberlos conocido.

A mi querida *Universidad Central de Venezuela*, nada que hagamos por ti será suficiente. A la *Coral de la Facultad de Ciencias* que ha sido como mi segunda casa y me ha proporcionado una invaluable experiencia de vida.

A *Marisabel* quien me dio los días más felices de mi vida.

# Resumen

## Modelos de Ruptura Espontánea de Supersimetría

Gabriel Abellán

Anamaría Font, Tutor

*Universidad Central de Venezuela*

Este trabajo es una presentación pedagógica y sistemática, con detalles y ejemplos, del tema de supersimetría y su ruptura espontánea. Estudiaremos en primer lugar el modelo Wess-Zumino y veremos el álgebra de supersimetría. A continuación se discutirá la ruptura espontánea de supersimetría y en particular la ruptura por términos  $F$ . Ilustraremos estos conceptos con una discusión detallada del modelo original de O’Raifeartaigh. Luego se demostrará la degeneración del estado de vacío a nivel árbol, y se determinará la forma canónica de los modelos de tipo O’Raifeartaigh. Finalmente se estudiará la simetría  $R$  y discutiremos algunos resultados y ejemplos que relacionan simetría  $R$  con la ruptura espontánea de supersimetría.

---

Anamaría Font  
Tutor

---



---

# ÍNDICE GENERAL

<b>Índice General</b>		<b>ix</b>
<b>1. Introducción</b>		<b>1</b>
<b>2. Modelo Wess-Zumino</b>		<b>7</b>
2.1. Lagrangiano del Modelo Wess-Zumino . . . . .		8
2.2. Transformaciones del Modelo Wess-Zumino . . . . .		10
2.3. Invariancia de la Acción . . . . .		11
2.4. Representación On-shell del Modelo Wess-Zumino . . . . .		13
2.5. Superpotencial y Potencial Escalar . . . . .		14
2.6. Extensión a Varios Multipletes . . . . .		15
<b>3. Algebra Supersimétrica</b>		<b>18</b>
3.1. Conmutador de dos Transformaciones de Supersimetría . . . . .		18
3.2. Algebra Supersimétrica $\mathcal{N} = 1$ . . . . .		21

<i>Índice General</i>	x
<b>4. Ruptura Espontánea de Supersimetría</b>	<b>22</b>
4.1. Algebra y Hamiltoniano . . . . .	23
4.2. Estado de Vacío y Ruptura de Supersimetría . . . . .	24
4.3. Potencial Escalar y Ruptura de Supersimetría . . . . .	25
4.4. Masa de Fermiones . . . . .	30
4.5. Modelo de O’Raifeartaigh . . . . .	33
<b>5. Propiedades Generales de Ruptura Espontánea de Supersimetría</b>	<b>42</b>
5.1. Degeneración del Estado de Vacío . . . . .	42
5.2. Modelos de O’Raifeartaigh Generalizados . . . . .	46
<b>6. Simetría R y Ruptura Espontánea de Supersimetría</b>	<b>51</b>
6.1. Simetría R en modelos Wess-Zumino . . . . .	51
6.2. Simetría R y Ruptura Espontánea de Supersimetría en Modelos Wess-Zumino . . . . .	54
6.3. Otros Modelos con Ruptura Espontánea de Supersimetría . . . . .	62
6.3.1. Modelo de O’Raifeartaigh Modificado. . . . .	63
6.3.2. Modelo de Komargodski-Shih . . . . .	66
6.3.3. Modelo de Shih . . . . .	69
<b>7. Conclusiones</b>	<b>77</b>
<b>A. Notación y Convenciones</b>	<b>81</b>
<b>B. Espinores - Definiciones e Identidades</b>	<b>82</b>
<b>Apéndices</b>	<b>81</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>86</b>

# CAPÍTULO 1

## Introducción

La motivación del presente trabajo es el estudio de supersimetría, en particular el estudio de la ruptura espontánea de supersimetría a nivel clásico.

Supersimetría es una simetría que vincula grados de libertad bosónicos (espín entero) con grados de libertad fermiónicos (espín semientero). Esta simetría se realiza mediante transformaciones que dejan invariante a la acción y además forman un grupo.

Los primeros trabajos en supersimetría datan de comienzos de los años setenta. La idea de estudiar transformaciones que vinculan a bosones y fermiones era de interés para grupos de investigación muy diversos. Por ejemplo en 1971 se investiga sobre supersimetría en dos dimensiones [1]. Ese mismo año se considera la superextensión del álgebra de Poincaré [2]. Luego en el año 1972, se intenta explicar la ausencia de masa del neutrino interpretándolo como un fermión de Goldstone relacionado a supersimetría [3]. En 1974 Wess y Zumino definen las transformaciones de supersimetría actuando sobre un multiplete de campos conformado por dos escalares reales, un fermión Majorana, y campos auxiliares. Así mismo escriben un Lagrangiano no trivial, con interacciones, con supersimetría realizada linealmente [4, 5]. En la formulación moderna el multiplete Wess-Zumino, también llamado multiplete quirral, está formado

por un campo escalar complejo  $A$ , un fermión de Weyl  $\psi$  y un campo escalar auxiliar complejo  $F$  [6]. Como veremos, la invariancia del Lagrangiano impone la igualdad de las masas del campo escalar  $A$  y el campo fermiónico  $\psi$  en el multiplete. También se mostrará que la constante de acoplamiento de las interacciones cuárticas del campo  $A$  y de las interacciones tipo Yukawa entre  $A$  y  $\psi$  son iguales.

A partir de los trabajos de Wess y Zumino el estudio de supersimetría ha sido importante para la física de partículas y altas energías por varias razones. A nivel teórico podemos señalar que al ser una simetría adicional, proporciona nuevos criterios para seleccionar los Lagrangianos posibles. Además pronto se demostró que en una teoría supersimétrica hay correcciones radiativas que se cancelan, en particular las correcciones a un lazo de masas de escalares [4, 7]. Inmediatamente se apreció la relevancia de este resultado en la fenomenología del Modelo Estándar en el cual es necesario prevenir el problema de la jerarquía que afecta a la masa  $m_H$  del bosón de Higgs. En el Modelo Estándar  $m_H$  debe estar en el rango de valores consistente con la ruptura de simetría electrodébil, es decir debe ser del orden de 100 GeV, lo que se violaría de existir correcciones radiativas. Por lo tanto, supersimetría permite explicar que el valor de  $m_H$  no sea de un orden mayor, determinado por la escala en la que ocurrirán nuevos efectos debidos a otras interacciones relevantes a altas energías.

En el año 1977 se considera la extensión supersimétrica mínima del Modelo Estándar [8], en el cual a cada partícula se le asocia una compañera supersimétrica para formar un multiplete quirral o un multiplete de calibre. Concretamente, a los quarks y leptones de espín  $\frac{1}{2}$  se le asocian bosones de espín 0 llamados squarks y sleptones; por ejemplo al quark top y al electrón corresponden el stop y el selectrón. A los bosones de calibre de espín 1 se le asocian fermiones de espín  $\frac{1}{2}$  llamados gauginos; por ejemplo a los gluones y al fotón, corresponden respectivamente los gluinos y el fotino. La pareja del Higgs de espín 0 es el Higgsino de espín  $\frac{1}{2}$ . Sin embargo, debido a que supersimetría impone que las masas de los bosones y fermiones en un multiplete son iguales, las partículas supersimétricas deberían observarse a la misma escala de

energía en la cual están sus compañeras del Modelo Estándar. Inmediatamente se hizo evidente que las partículas supersimétricas no eran observadas experimentalmente. Para solucionar esta discrepancia, se pensó en algún mecanismo de ruptura de supersimetría que le permita a los campos en un multiplete tener masas distintas. Una simetría puede romperse de forma explícita o espontánea. Teóricamente se prefiere la ruptura espontánea debido a que el Lagrangiano sigue siendo simétrico mientras que el vacío rompe la simetría. De esta manera se mantienen todas las características útiles de supersimetría, como por ejemplo la cancelación de las correcciones radiativas a masas de escalares que depende de la igualdad de las constantes de acoplamiento y no de la igualdad de las masas. Ya en 1974 se había comenzado a estudiar mecanismos de ruptura espontánea de supersimetría [9, 10]. En este trabajo estudiaremos en detalle la ruptura espontánea de supersimetría que ocurre cuando el campo auxiliar  $F$  adquiere un valor de expectación distinto de cero. Los modelos donde ocurre este tipo de ruptura de supersimetría se conocen como modelos de O’Raifeartaigh, quien fue el que inicialmente los estudió en 1975 [11].

Supersimetría proporciona una extensión consistente del Modelo Estándar de las interacciones fundamentales. Como hemos mencionado, resuelve el problema de la jerarquía de escalas. Además, los datos experimentales indican que, a diferencia del Modelo Estándar sin supersimetría, en la extensión supersimétrica mínima la unificación de las constantes de acoplo, considerada originalmente en [12], ocurre a energías del orden de  $10^{16}$  GeV [13]. Supersimetría también predice la existencia de neutralinos, partículas estables mezclas de fotino y Higgsino, que podrían ser parte de la materia oscura del universo [14]. Sin embargo, supersimetría debe romperse de tal manera que las partículas adicionales adquieran masas que deben ser del orden de 1 TeV para mantener la estabilidad de la masa del Higgs [14]. Este rango de energías ha comenzado a ser explorado en el acelerador LHC del CERN, en el cual está programado realizar varios experimentos donde se pretende verificar la existencia de supersimetría en la naturaleza.

Recientemente también ha habido un renacimiento de la investigación teórica en supersimetría, estimulado por el trabajo de Intriligator, Seiberg y Shih donde se demuestra que los modelos de tipo O’Raifeartaigh pueden describir la ruptura espontánea de supersimetría en teorías de calibre fuertemente acopladas [15]. Además, la ruptura se realiza en un vacío metaestable con un tiempo de vida suficientemente largo. Posteriormente estos autores consideraron en más detalle la relación entre ruptura de supersimetría, vacíos metaestables y la llamada simetría R [16]. La simetría R es una simetría  $U(1)$  global que aparece frecuentemente en los modelos de tipo O’Raifeartaigh. En 1993 Nelson y Seiberg demostraron que en un modelo genérico, donde no hay cancelaciones arbitrarias de parámetros, es necesaria la existencia de la simetría R para que proceda la ruptura espontánea de supersimetría [17]. Por otra parte, para generar masas para los gauginos, la simetría R también debe romperse y esto no sucede típicamente en modelos con supersimetría rota en un vacío estable. Esta dificultad se resuelve en los modelos con vacíos metaestables.

En esta tesis estudiaremos aspectos generales de ruptura de supersimetría en modelos de tipo O’Raifeartaigh, incluyendo las implicaciones de la simetría R. También discutiremos dos clases de ejemplos con ruptura de supersimetría en un vacío metaestable. En un caso la ruptura de la simetría R es explícita [16]. En otro caso la simetría R se rompe espontáneamente [18].

Seguidamente realizamos un resumen del contenido de cada capítulo. En el capítulo 2 se estudiará el Lagrangiano del modelo Wess-Zumino, sus transformaciones y la invariancia de la acción. Se pasará de la llamada representación *off-shell* a la representación *on-shell* eliminando los campos auxiliares  $F$  de dinámica trivial. Luego mostraremos que existe una función definida en términos de los campos escalares  $A$  llamada superpotencial [19], la cual determina completamente los términos de interacción del Lagrangiano. En particular veremos que los términos  $F$  y el potencial escalar están dados en función del superpotencial. Se mostrará que el potencial escalar es una función semipositiva definida lo cual tendrá consecuencias que se analizarán posterior-



mente al estudiar la ruptura de supersimetría. Todo esto se hará tanto para un único multiplete como para varios. En el capítulo 3 se obtendrá el conmutador de dos transformaciones de supersimetría y se estudiará el álgebra de sus generadores. Se señalará la relación entre el álgebra de supersimetría y el álgebra de Poincaré, mostrando que ambas forman parte de un álgebra más grande conocida como álgebra  $\mathcal{N} = 1$  [20].

A continuación en el capítulo 4 trataremos lo referente a ruptura espontánea de supersimetría y en particular la ruptura por términos  $F$ . Para ello señalaremos el vínculo que existe entre el álgebra supersimétrica y el Hamiltoniano. Estudiaremos las consecuencias de ruptura de supersimetría en términos del álgebra y en términos de la teoría de campos mostrando que la ruptura ocurre debido a que alguno de los campos auxiliares  $F$  adquiere un valor de expectación distinto de cero. Cuando supersimetría no se rompe, es decir el valor de expectación de vacío de todos los campos  $F$  es cero, el valor de expectación de los campos  $A$  es tal que el potencial escalar se anula y el vacío es estable porque el potencial es semipositivo definido. Cuando supersimetría se rompe es necesario estudiar los extremos del potencial escalar y analizar su estabilidad, determinada por los autovalores de la matriz de masas cuadradas bosónicas. También estudiaremos las masas fermiónicas y veremos que a consecuencia de la ruptura de supersimetría aparece un fermión de masa nula análogo al bosón de Goldstone, llamado fermión de Goldstone o Goldstino [3, 21]. Finalmente se estudiará el modelo de O’Raifeartaigh que es el ejemplo clásico de ruptura espontánea de supersimetría por términos  $F$ .

Posteriormente en el capítulo 5 estudiaremos propiedades generales de los modelos de tipo O’Raifeartaigh en los cuales ocurre ruptura espontánea de supersimetría por un valor de expectación de términos  $F$ . En particular veremos que a nivel árbol el vacío está degenerado a lo largo de una dirección conocida como dirección plana del potencial escalar. Además se determinará la forma canónica de los modelos de O’Raifeartaigh. Por último en el capítulo 6 se introducirá el concepto de simetría R y se mostrará su estrecha relación con la ruptura espontánea de supersimetría. Los resultados se

ilustrarán con varios ejemplos.

En el apéndice se han recopilado todas las convenciones de unidades y las propiedades de espinores utilizadas.

## CAPÍTULO 2

### Modelo Wess-Zumino

En este capítulo se mostrarán el Lagrangiano y las transformaciones de supersimetría propuestas por Wess y Zumino. Además se calculará la variación del Lagrangiano y se demostrará que es una derivada total con lo cual podemos concluir que la acción es invariante

El modelo Wess-Zumino [4] fue propuesto con la finalidad de vincular mediante una transformación, campos fermiónicos de espín  $\frac{1}{2}$  con campos bosónicos de espín 0. Esta transformación debe dejar invariante a la acción y además debe formar un grupo al ser aplicada a los campos contenidos en el Lagrangiano.

Los campos que conforman el modelo, denotados por  $A$ ,  $\psi$ ,  $F$ , son:

1.  $A$ : Campo escalar complejo (espín 0).
2.  $F$ : Campo auxiliar escalar complejo.
3.  $\psi$ : Campo espinorial en la representación Weyl  $(\frac{1}{2}, 0)$  (espín  $\frac{1}{2}$ ).

Las convenciones de espinores son las de Lykken [22] y se incluyen al final en un apéndice.

Una característica importante de los modelos supersimétricos es la igualdad de los grados de libertad bosónicos y fermiónicos. Podemos mostrar esto con los tres campos del modelo Wess-Zumino. Siendo complejos los campos escalares, cada uno aporta dos grados de libertad para un total de cuatro grados de libertad bosónicos. El campo espinorial está en la formulación Weyl y tiene dos componentes que también son complejas y por lo tanto hay cuatro grados de libertad fermiónicos, el mismo número de grados de libertad bosónicos. Más adelante notaremos que el campo  $F$  aparece sin derivar en el Lagrangiano y por lo tanto no tiene dinámica. De hecho la ecuación de movimiento del campo  $F$  se puede resolver y permite sustituir a  $F$  en términos de  $A$  tanto en el Lagrangiano como en las transformaciones. La representación que conserva el  $F$  explícito se llama off-shell mientras que la representación donde no aparece  $F$  se llama on-shell. En la representación on-shell se mantiene la igualdad de grados de libertad bosónicos y fermiónicos. El campo  $A$  aporta dos grados de libertad, mientras que la ecuación de movimiento del campo espinorial restringe el número de grados de libertad a dos, el mismo número de grados de libertad bosónicos.

## 2.1. Lagrangiano del Modelo Wess-Zumino

El Lagrangiano Wess-Zumino para un multiplete  $(A, \psi, F)$ , está compuesto por cuatro términos: cinético  $\mathcal{L}_{kin}$ , de masas  $\mathcal{L}_m$ , del campo auxiliar  $\mathcal{L}_F$  y de interacción  $\mathcal{L}_g$ . A lo largo de este capítulo y los siguientes, se utilizará el convenio de suma sobre índices contraídos. El Lagrangiano total  $\mathcal{L}$  es:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_g. \quad (2.1)$$

Los términos son respectivamente:

$$\mathcal{L}_{kin} = \partial^\mu A^* \partial_\mu A + i\psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} + F^* F, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_m = -m \left( AF + \frac{1}{2} \psi\psi \right) - m \left( A^* F^* + \frac{1}{2} \bar{\psi}\bar{\psi} \right), \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_F = -\lambda F - \lambda^* F^*, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_g = -g \left( A^2 F + A\psi\psi \right) - g \left( (A^*)^2 F^* + A^* \bar{\psi}\bar{\psi} \right). \quad (2.5)$$

Se puede ver que en el término cinético (2.2), el campo  $F$  aparece sin derivadas lo cual dice que este campo no propaga, es decir no tiene dinámica. En (2.5) el parámetro  $g$  es la constante de acoplo de las interacciones tipo Yukawa entre bosones y fermiones. Más adelante veremos que  $g$  es la constante de acoplo de las interacciones cuárticas del campo  $A$ . Por otra parte en (2.3)  $m$  es el parámetro de masas de los fermiones y veremos al estudiar la representación on-shell, que es también el parámetro de masas de los bosones. En general  $m$  y  $g$  pueden considerarse reales debido a que siempre es posible redefinir los campos de manera que absorban la fase de las constantes en caso de que fueran complejas. El hecho de que las masas de bosones y fermiones sean las mismas, así como las constantes de acoplo de las interacciones sean iguales, es muy importante y comprobaremos más adelante que la invariancia de la acción depende fundamentalmente de ello. El parámetro  $\lambda$  en el término auxiliar  $\mathcal{L}_F$  (2.4) es en general complejo. De esta forma el Lagrangiano total  $\mathcal{L}$  (off-shell) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial^\mu A^* \partial_\mu A + i\psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} + F^* F - F \left( \lambda + mA + gA^2 \right) - F^* \left( \lambda^* + mA^* + gA^{*2} \right) \\ & - \frac{1}{2} m \left( \psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi} \right) - g \left( A\psi\psi + A^* \bar{\psi}\bar{\psi} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

## 2.2. Transformaciones del Modelo Wess-Zumino

Las transformaciones propuestas por Wess y Zumino que dejan invariante la acción y que actúan sobre los campos en (2.6) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \delta A &= \sqrt{2}\xi\psi, \\
 \delta F &= -i\sqrt{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi}, \\
 \delta\psi &= -\sqrt{2}\xi F - i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu A,
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

donde  $\xi$  es el parámetro de la transformación y un espinor Weyl en la representación  $(\frac{1}{2}, 0)$ . Las matrices de Pauli  $\sigma^\mu$  se definen en el apéndice, así como las propiedades de los espinores Weyl. Es importante notar que la variación de los campos escalares  $A$  y  $F$  está relacionada con el campo espinorial  $\psi$  y viceversa. Esto es precisamente una característica de supersimetría.

Una manera de motivar la estructura de las transformaciones es a través del análisis dimensional. Utilizamos unidades naturales  $c = \hbar = 1$ . Al ser  $c$  adimensional,  $x$  y  $t$  tienen las mismas unidades. Por otra parte  $\hbar$  adimensional implica que la acción es adimensional y además  $t$  tiene unidades de inverso de energía  $E$ . Si consideramos la relación entre masa y energía  $E = mc^2 = m$ , energía se mide en unidades de masa. De lo dicho anteriormente se concluye que  $x$  y  $t$  tienen unidades de inverso de masa y  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tiene unidades de masa. Además, el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  debe tener unidades de masa con exponente 4 ya que la acción  $S = \int d^4x \mathcal{L}$  es adimensional y  $d^4x$  tiene unidades de distancia a la potencia 4.

Los resultados anteriores permiten determinar la dimensión de masas de los campos que aparecen en un multiplete Wess-Zumino. Al revisar el término cinético (2.2) se comprueba que debido a la aparición dos veces de  $\partial_\mu$ , el campo  $A$  tiene unidades  $[A] = [m]$ . Las unidades del campo  $F$  son  $[F] = [m]^2$  mientras que  $\psi$  tiene unidades  $[\psi] = [m]^{3/2}$ . Al inspeccionar las transformaciones (2.7) se deduce que el parámetro de la transformación  $\xi$  tiene dimensiones  $[\xi] = [m]^{-1/2}$ . De esta manera tomemos la

transformación  $\delta A$  en (2.7), del lado izquierdo las unidades son  $[m]$  al igual que en el lado derecho en virtud de lo discutido anteriormente. Se concluye que el balance de unidades es correcto.

### 2.3. Invariancia de la Acción

Wess y Zumino verificaron que al someter el Lagrangiano (2.6) a las transformaciones de supersimetría (2.7), se obtiene una derivada total y por tanto la variación de la acción es de la forma:

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu K^\mu. \quad (2.8)$$

Por el teorema de Gauss, integrando en todo el espacio-tiempo y pidiendo que los campos se anulen en el infinito, como es usual, se concluye que la acción es invariante. Se realizará a continuación la variación de cada uno de los cuatro términos del Lagrangiano.

Como ejemplo del tipo de manipulaciones que deben realizarse, haremos con cierto detalle el cálculo de  $\delta \mathcal{L}_{kin}$  dado por:

$$\delta \mathcal{L}_{kin} = \delta (\partial^\mu A^* \partial_\mu A) + \delta (i\psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) + \delta (F^* F). \quad (2.9)$$

Utilizando las transformaciones de supersimetría (2.7) se desarrolla cada uno de los sumandos y se obtiene:

$$\delta (\partial^\mu A^* \partial_\mu A) = \sqrt{2} \partial_\mu A \bar{\xi} \partial^\mu \bar{\psi} + \sqrt{2} \partial^\mu A^* \xi \partial_\mu \psi, \quad (2.10)$$

$$\delta (F^* F) = -i\sqrt{2} \partial_\mu \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \xi F - i\sqrt{2} \partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\xi} F^*, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \delta (i\psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) &= i\partial_\mu (\psi \sigma^\mu \delta \bar{\psi}) - i\partial_\mu \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu (-\sqrt{2}\xi F - i\sqrt{2}\sigma^\nu \bar{\xi} \partial_\nu A) \\ &\quad - i\partial_\mu \psi \sigma^\mu (-\sqrt{2}\bar{\xi} F^* - i\sqrt{2}\bar{\sigma}^\nu \xi \partial_\nu A^*). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sustituyendo estos resultados en (2.9) y agrupando convenientemente, se encuentra:

$$\delta \mathcal{L}_{kin} = X + X^\dagger + i\partial_\mu (\psi \sigma^\mu \delta \bar{\psi}), \quad (2.13)$$

donde  $X$  es

$$X = \sqrt{2}\xi\partial_\mu\psi\partial^\mu A^* - \sqrt{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\xi\partial_\nu A^*. \quad (2.14)$$

Al reescribir el último término de  $X$  como una derivada total, es necesario incluir un nuevo término que incluye al tensor  $\partial_\mu\partial_\nu$  y como éste es un tensor simétrico, se simetriza  $\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu$ . Haciendo uso de las relaciones (B.23) y (B.25) y simplificando, se obtiene:

$$X = \partial_\mu \left( 2i\sqrt{2}\psi\sigma^{\mu\nu}\xi\partial_\nu A^* \right). \quad (2.15)$$

Utilizando este resultado, sustituyendo  $\delta\bar{\psi}$  en (2.13) y simplificando, se llega al resultado final:

$$\delta\mathcal{L}_{kin} = \partial_\mu \left( 2i\sqrt{2}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\xi\partial_\nu A - i\sqrt{2}\psi\sigma^\mu\bar{\xi}F^* + \sqrt{2}\psi\xi\partial^\mu A^* \right). \quad (2.16)$$

Al realizar la variación de los otros términos del Lagrangiano  $\mathcal{L}$  (2.1), se encuentra:

$$\delta\mathcal{L}_m = \partial_\mu \left[ i\sqrt{2}m \left( \psi\sigma^\mu\bar{\xi}A + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\xi A^* \right) \right], \quad (2.17)$$

$$\delta\mathcal{L}_F = \partial_\mu \left[ i\sqrt{2} \left( \lambda\psi\sigma^\mu\bar{\xi} + \lambda^*\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\xi \right) \right], \quad (2.18)$$

$$\delta\mathcal{L}_g = \partial_\mu \left[ i\sqrt{2}g \left( \psi\sigma^\mu\bar{\xi}A^2 + \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\xi A^{*2} \right) \right]. \quad (2.19)$$

Se ha comprobado que las variaciones de los términos del Lagrangiano  $\mathcal{L}$  (2.1) son derivadas totales y por lo tanto la acción es invariante.

Se recordará que en la sección 2.1 se mencionó la importancia de que los parámetros de la masa  $m$  para bosones y fermiones y las constantes de acoplo  $g$  de las interacciones sean iguales. Para mostrar esto explícitamente supongamos un Lagrangiano de masas  $\mathcal{L}'_m$  con dos parámetros de masas diferentes, esto es:

$$\mathcal{L}'_m = - \left( m_1 A F + \frac{m_2}{2} \psi \psi \right) + c.h. \quad (2.20)$$

donde  $c.h$  quiere decir conjugado hermítico. Al tomar su variación y sustituir las transformaciones se obtiene:

$$\delta\mathcal{L}'_m = - \left[ (m_1 - m_2) \sqrt{2}\xi\psi F - i\sqrt{2}m_1\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi}A - i\sqrt{2}m_2\psi\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu A \right] + c.h. \quad (2.21)$$



Observamos que solo si  $m_1 = m_2$  es posible cancelar el primer término y combinar el segundo y el tercero como una derivada total. De forma análoga, es necesario que la constante de acoplo  $g$  sea la misma en los términos de  $\mathcal{L}_g$  para poder escribir  $\delta\mathcal{L}_g$  como una derivada total. De esta manera demostramos que la invariancia de la acción requiere la igualdad de los parámetros de masas y de las constantes de acoplamiento. La igualdad de la masa de bosones y fermiones así como el hecho de que las constantes de acoplo de las interacciones sean también iguales es una característica esencial de los modelos supersimétricos.

## 2.4. Representación On-shell del Modelo Wess-Zumino

Como ya se mencionó, la expresión del Lagrangiano en (2.6) se denomina off-shell, porque incluye al campo auxiliar  $F$  que no tiene dinámica. En esta sección se hallarán las ecuaciones de movimiento de los campos y se tomará la ecuación de movimiento del campo auxiliar  $F$  y con ella se construirá la representación on-shell del modelo Wess-Zumino de supersimetría.

Para hallar las ecuaciones de movimiento a partir del Lagrangiano, se utiliza la ecuación de Euler-Lagrange. Considerando  $\Phi$  un campo cualquiera, ésta es:

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0. \quad (2.22)$$

Aplicando (2.22) a cada uno de los campos del Lagrangiano (2.6), se obtiene:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^* + mF + g(2FA + \psi\psi) = 0, \quad (2.23)$$

$$F - \lambda^* + mA^* + gA^{*2} = 0, \quad (2.24)$$

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - m\psi - 2gA\psi = 0. \quad (2.25)$$

Puede verse que la ecuación de movimiento del campo  $F$  no tiene derivadas y por esto se dice que es no dinámico o no propaga. Ahora, sustituyendo la ecuación para el

campo no dinámico  $F$  (2.24) en el Lagrangiano off-shell (2.6), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial^\mu A^* \partial_\mu A + i\psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - \left| \lambda + mA + gA^2 \right|^2 \\ & - \frac{1}{2} \left[ (m + 2gA) \psi\psi + (m + 2gA^*) \bar{\psi}\bar{\psi} \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

En esta expresión puede comprobarse que la masa de los campos  $A$  y  $\psi$  es igual, observando los términos cuadráticos de los campos. Se verifica que la constante de acoplo  $g$  del término cuártico en  $A$  es la constante de acoplo de la interacción tipo Yukawa entre  $A$  y  $\psi$ . También se observa un término que depende únicamente del campo  $A$  y que es claramente un potencial para este campo.

## 2.5. Superpotencial y Potencial Escalar

El Lagrangiano on-shell (2.26) puede escribirse convenientemente definiendo una función que depende únicamente del campo escalar  $A$ . Esta función permite hacer un estudio detallado de las propiedades e interacciones de un sistema supersimétrico y generalizar al caso de varios multipletes.

Se define la función superpotencial  $W$  para un multiplete:

$$W = \lambda A + \frac{1}{2} mA^2 + \frac{1}{3} gA^3. \quad (2.27)$$

Recordamos que los parámetros  $m$  y  $g$  son reales mientras que  $\lambda$  es complejo. Calculando la primera derivada de  $W$  respecto al campo  $A$  y tomando su complejo conjugado es posible obtener la ecuación de movimiento del campo auxiliar  $F$ , es decir:

$$\left( \frac{\partial W}{\partial A} \right)^* = \lambda^* + mA^* + gA^{*2} = F. \quad (2.28)$$

Además si se calcula la segunda derivada de  $W$  respecto a  $A$ , obtenemos el término que se acopla a  $\bar{\psi}\bar{\psi}$  del Lagrangiano (2.26), a saber:

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial A^2} \right)^* = m + 2gA^*. \quad (2.29)$$

Por otra parte observamos en (2.26) un término que depende exclusivamente del campo  $A$ , este término se conoce como potencial escalar  $V(A, A^*)$  y se escribe:

$$V(A, A^*) = \left| \lambda + mA + gA^2 \right|^2. \quad (2.30)$$

Notamos que de lo hallado en (2.28) es posible escribir el potencial escalar en términos del campo  $F$  y por tanto del superpotencial  $W$ . Esto es,

$$V(A, A^*) = FF^* = \left( \frac{\partial W}{\partial A} \right)^* \frac{\partial W}{\partial A}. \quad (2.31)$$

El potencial escalar es una función semipositiva definida y es importante para el estudio que se hará posteriormente de la ruptura espontánea de supersimetría y el espectro de masas de las partículas involucradas en la teoría.

Tal como se expresó antes, lo notable de los resultados (2.29) y (2.31) es que se puede reescribir completamente el Lagrangiano on-shell (2.26) en términos del superpotencial  $W$ , es decir:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu A^* \partial_\mu A + i\psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - V(A, A^*) - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial A^2} \psi \psi + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial A^2} \right)^* \bar{\psi} \bar{\psi} \right]. \quad (2.32)$$

De esta manera es posible estudiar las propiedades de un Lagrangiano supersimétrico, estudiando las propiedades del superpotencial de la teoría. Buena parte del trabajo posterior será orientado en este sentido.

## 2.6. Extensión a Varios Multipletes

Todo el trabajo previo se ha realizado considerando un único multiplete  $(A, \psi, F)$ , sin embargo es posible extender la formulación de manera tal que se incluyan varios multipletes en la teoría. Se desea escribir los resultados de las secciones anteriores tomando en consideración la extensión a varios multipletes. Los multipletes se denotan  $(A_i, \psi_i, F_i)$ , donde  $i = 1 \dots N$  y  $N$  es algún entero positivo fijo.

Al incluir varios multipletes, los términos del Lagrangiano  $\mathcal{L}$  se generalizan de la forma:

$$\mathcal{L}_{kin} = \partial^\mu A_i^* \partial_\mu A_i + i\psi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i + F_i^* F_i, \quad (2.33)$$

$$\mathcal{L}_m = -m_{ij} \left( A_i F_j + \frac{1}{2} \psi_i \psi_j \right) - m_{ij} \left( A_i^* F_j^* + \frac{1}{2} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \right), \quad (2.34)$$

$$\mathcal{L}_F = -\lambda_i F_i - \lambda_i F_i^*, \quad (2.35)$$

$$\mathcal{L}_g = -g_{ijk} (F_i A_j A_k + A_i \psi_j \psi_k) - g_{ijk} (F_i^* A_j^* A_k^* + A_i^* \bar{\psi}_j \bar{\psi}_k). \quad (2.36)$$

Las transformaciones que dejan invariante la acción son:

$$\begin{aligned} \delta A_i &= \sqrt{2} \xi \psi_i, \\ \delta F_i &= -i\sqrt{2} \partial_\mu \psi_i \sigma^\mu \bar{\xi}, \\ \delta \psi_i &= -\sqrt{2} \xi F_i - i\sqrt{2} \sigma^\mu \bar{\xi} \partial_\mu A_i. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Para calcular las variaciones de los términos del Lagrangiano extendido se utilizan métodos similares a los utilizados para un multiplete. Los resultados son:

$$\delta \mathcal{L}_{kin} = \partial_\mu \left( 2i\sqrt{2} \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\xi} \partial_\nu A_i - i\sqrt{2} \psi_i \sigma^\mu \bar{\xi} F_i^* + \sqrt{2} \psi_i \xi \partial^\mu A_i^* \right), \quad (2.38)$$

$$\delta \mathcal{L}_m = i\sqrt{2} m_{ij} \partial_\mu \left( \psi_i \sigma^\mu \bar{\xi} A_j + \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \xi A_j^* \right), \quad (2.39)$$

$$\delta \mathcal{L}_F = \partial_\mu \left[ i\sqrt{2} \lambda_i \left( \psi_i \sigma^\mu \bar{\xi} + \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \xi \right) \right], \quad (2.40)$$

$$\delta \mathcal{L}_g = \partial_\mu \left[ i\sqrt{2} g_{ijk} \left( \psi_i \sigma^\mu \bar{\xi} A_j A_k + \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \xi A_j^* A_k^* \right) \right]. \quad (2.41)$$

Hay que resaltar el hecho de que al igual que es necesario suponer para un solo multiplete la igualdad de los parámetros de masa y de las constantes de acoplo, para poder escribir las variaciones de los términos del Lagrangiano extendido como derivadas totales, es necesario imponer que tanto  $m_{ij}$  como  $g_{ijk}$  sean simétricos en todos sus índices.

Al incluir varios multipletes el superpotencial se escribe:

$$W = \lambda_i A_i + \frac{1}{2} m_{ij} A_i A_j + \frac{1}{3} g_{ijk} A_i A_j A_k. \quad (2.42)$$

La simetría de los tensores  $m_{ij}$  y  $g_{ijk}$  también puede concluirse de observar los términos con los que están contraídos en el superpotencial  $W$ .

Por último escribimos el Lagrangiano on-shell eliminando los campos  $F_i$  con sus correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange. Se obtiene que:

$$F_i^* = \frac{\partial W}{\partial A_i} = \lambda_i + m_{ij}A_j + 2g_{ijk}A_jA_k. \quad (2.43)$$

Sustituyendo en el Lagrangiano off-shell, comprobamos que es posible escribir el Lagrangiano on-shell en términos del superpotencial  $W$ . El resultado es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu A_i^* \partial^\mu A_i + i\psi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i - V(A_i, A_i^*) \\ & - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} \psi_i \psi_j + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} \right)^* \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \right], \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde ahora el potencial escalar  $V(A_i, A_i^*)$  se expresa:

$$V(A_i, A_i^*) = \sum_i F_i^* F_i = \sum_i \frac{\partial W}{\partial A_i} \left( \frac{\partial W}{\partial A_i} \right)^*. \quad (2.45)$$

Utilizando (2.43), la expresión explícita del potencial en términos de los campos escalares está dada por:

$$V(A_i, A_i^*) = \sum_i |\lambda_i + m_{ij}A_j + 2g_{ijk}A_jA_k|^2. \quad (2.46)$$

Notamos que el potencial escalar se escribe en términos de  $W$  y que es semipositivo definido. Más adelante este hecho será importante al estudiar la ruptura espontánea de supersimetría.

## CAPÍTULO 3

## Algebra Supersimétrica

En este capítulo se determinará el álgebra de los generadores de las transformaciones de supersimetría. Para ello calcularemos el conmutador de dos transformaciones, con lo cual se obtiene el tipo de estructura que satisfacen los generadores. Se menciona para finalizar la relación del álgebra de supersimetría con el álgebra de Poincaré.

### 3.1. Conmutador de dos Transformaciones de Supersimetría

Hemos visto en el capítulo 2 la estructura de las transformaciones del modelo Wess-Zumino. Si consideramos ahora que las transformaciones se obtienen a partir de un generador que pertenece a un álgebra, el conmutador de dos transformaciones debe corresponder a otra transformación generada por otro elemento del álgebra. Más aun, para que el álgebra sea cerrada, este elemento debe ser igual para todos los campos del multiplete. El conmutador de dos transformaciones sobre un campo  $\Phi$  está dado por:

$$[\delta_1, \delta_2]\Phi = (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\Phi, \quad (3.1)$$

donde se entiende  $\delta_1\delta_2\Phi = \delta_1(\delta_2\Phi)$ .

Para los campos  $A$ ,  $\psi$ ,  $F$  de un multiplete Wess-Zumino, el conmutador se calcula utilizando las transformaciones (2.7). Aplicando éstas al campo  $A$  se obtiene:

$$[\delta_1, \delta_2]A = -2i \left( \xi_2 \sigma^\mu \bar{\xi}_1 - \xi_1 \sigma^\mu \bar{\xi}_2 \right) \partial_\mu A. \quad (3.2)$$

De manera análoga para el campo  $\psi$  el resultado es:

$$[\delta_1, \delta_2]\psi = -2i \left( \xi_2 \sigma^\mu \bar{\xi}_1 - \xi_1 \sigma^\mu \bar{\xi}_2 \right) \partial_\mu \psi. \quad (3.3)$$

Por último, para el campo  $F$  se encuentra:

$$[\delta_1, \delta_2]F = -2i \left( \xi_2 \sigma^\mu \bar{\xi}_1 - \xi_1 \sigma^\mu \bar{\xi}_2 \right) \partial_\mu F. \quad (3.4)$$

Hemos comprobado que al aplicar dos transformaciones supersimétricas sobre cualquier campo  $\Phi$  de un multiplete Wess-Zumino, obtenemos un mismo operador aplicado sobre el campo, es decir:

$$[\delta_1, \delta_2]\Phi = -2i \left( \xi_2 \sigma^\mu \bar{\xi}_1 - \xi_1 \sigma^\mu \bar{\xi}_2 \right) \partial_\mu \Phi. \quad (3.5)$$

Podemos ver que existe una relación con el grupo de Poincaré, debido a que el conmutador es proporcional a la derivada que es la realización del operador momento  $P_\mu$  que satisface  $[P_\mu, \Phi] = -i\partial_\mu \Phi$ . Utilizando esta relación podemos reescribir la expresión (3.5), el resultado es:

$$[\delta_1, \delta_2]\Phi = 2 \left( \xi_2 \sigma^\mu \bar{\xi}_1 - \xi_1 \sigma^\mu \bar{\xi}_2 \right) [P_\mu, \Phi]. \quad (3.6)$$

Se observa que el conmutador de dos transformaciones es una traslación con parámetro  $a^\mu = 2 \left( \xi_2 \sigma^\mu \bar{\xi}_1 - \xi_1 \sigma^\mu \bar{\xi}_2 \right)$ .

Deseamos ahora calcular el conmutador de dos transformaciones en términos del generador del álgebra de supersimetría. Este generador, denotado  $Q_a$ , es un espinor de Weyl  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

En general la acción de una transformación de supersimetría sobre un campo  $\Phi$  es:

$$\Phi' = e^{i(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})} \Phi e^{-i(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})}, \quad (3.7)$$

donde  $\xi$  es el parámetro de la transformación al igual que en (2.7) y es un espinor de Weyl  $(\frac{1}{2}, 0)$ . Nótese que el operador  $\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}$  es Hermítico. Desarrollando a primer orden (3.7) se obtiene  $\Phi' = \Phi + \delta\Phi$ , donde

$$\delta\Phi = i[\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}, \Phi]. \quad (3.8)$$

La aplicación de dos transformaciones produce:

$$\delta_1 \delta_2 \Phi = i \left[ \xi_1 Q + \bar{\xi}_1 \bar{Q}, i \left[ \xi_2 Q + \bar{\xi}_2 \bar{Q}, \Phi \right] \right]. \quad (3.9)$$

Utilizando este resultado y la identidad de Jacobi se calcula el conmutador de dos transformaciones de supersimetría, el resultado es:

$$[\delta_1, \delta_2] \Phi = \left[ \left[ \xi_2 Q + \bar{\xi}_2 \bar{Q}, \xi_1 Q + \bar{\xi}_1 \bar{Q} \right], \Phi \right]. \quad (3.10)$$

Al igualar con el resultado (3.6) obtenemos:

$$\left[ \left[ \xi_2 Q + \bar{\xi}_2 \bar{Q}, \xi_1 Q + \bar{\xi}_1 \bar{Q} \right], \Phi \right] = 2 \left( \xi_2 \sigma^\mu \bar{\xi}_1 - \xi_1 \sigma^\mu \bar{\xi}_2 \right) [P_\mu, \Phi], \quad (3.11)$$

y por lo tanto

$$\left[ \xi_2 Q + \bar{\xi}_2 \bar{Q}, \xi_1 Q + \bar{\xi}_1 \bar{Q} \right] = 2 \left( \xi_2 \sigma^\mu \bar{\xi}_1 - \xi_1 \sigma^\mu \bar{\xi}_2 \right) P_\mu. \quad (3.12)$$

Desarrollando las contracciones de espinores y comparando ambos lados de (3.12) obtenemos:

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2\sigma_{ab}^\mu P_\mu, \quad (3.13)$$

$$\{Q_a, Q_b\} = 0, \quad (3.14)$$

$$\{\bar{Q}^a, \bar{Q}^b\} = 0. \quad (3.15)$$

Notamos que si bien se comenzó calculando el conmutador de dos transformaciones de supersimetría, el álgebra de los generadores se expresa mediante anticonmutadores. Esto es debido al carácter fermiónico de los generadores  $Q$ .



### 3.2. Álgebra Supersimétrica $\mathcal{N} = 1$

Por último escribimos el álgebra supersimétrica completa [20] :

$$\{Q_a, Q_b\} = 0, \quad (3.16)$$

$$\{\bar{Q}^{\dot{a}}, \bar{Q}^{\dot{b}}\} = 0, \quad (3.17)$$

$$\{Q_a, \bar{Q}^{\dot{b}}\} = 2\sigma_{ab}^{\mu} P_{\mu}, \quad (3.18)$$

$$[Q_a, P_{\mu}] = 0, \quad (3.19)$$

$$[\bar{Q}^{\dot{a}}, P_{\mu}] = 0, \quad (3.20)$$

$$[Q_a, J_{\mu\nu}] = \Sigma_{\mu\nu a}{}^b Q_b, \quad (3.21)$$

$$[\bar{Q}^{\dot{a}}, J_{\mu\nu}] = \bar{\Sigma}_{\mu\nu}{}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \bar{Q}^{\dot{b}}, \quad (3.22)$$

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0, \quad (3.23)$$

$$[J_{\mu\nu}, P_{\rho}] = i(\eta_{\nu\rho} P_{\mu} - \eta_{\mu\rho} P_{\nu}), \quad (3.24)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}). \quad (3.25)$$

Esta es la llamada álgebra supersimétrica  $\mathcal{N} = 1$  porque tiene un solo generador  $Q_a$ . Recordamos que  $P_{\mu}$  y  $J_{\mu\nu}$  son los generadores de traslaciones y de Lorentz respectivamente y que ambos conforman el álgebra de Poincaré que se muestra en (3.23–3.25). El álgebra de los generadores  $Q_a$ , obtenida en la sección anterior se muestra en (3.16–3.18). Por otra parte vemos en (3.19) y (3.20) que el generador de supersimetría  $Q_a$  conmuta con el generador de las traslaciones  $P_{\mu}$ . Para finalizar, los conmutadores (3.21) y (3.22) de los generadores  $Q_a$  y  $\bar{Q}^{\dot{a}}$  con el generador de Lorentz  $J_{\mu\nu}$  significan que  $Q_a$  y  $\bar{Q}^{\dot{a}}$  transforman con las representaciones  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{2})$  del grupo de Lorentz. En efecto,  $\Sigma_{\mu\nu}$  y  $\bar{\Sigma}_{\mu\nu}$ , dados en (B.23) son la realización del grupo de Lorentz en las representaciones  $(\frac{1}{2}, 0)$  y  $(0, \frac{1}{2})$  respectivamente.

Lo que se ha encontrado en este capítulo es que supersimetría es más que una relación entre bosones y fermiones. El álgebra  $\mathcal{N} = 1$  es la generalización del álgebra del grupo de Poincaré incluyendo generadores espinoriales.

## CAPÍTULO 4

# Ruptura Espontánea de Supersimetría

Debido a que supersimetría no es una simetría exacta del espectro de partículas conocido, es necesario estudiar sus mecanismos de ruptura de manera que la teoría pueda encontrar aplicaciones. En el capítulo 2 vimos que supersimetría impone que las masas de bosones y fermiones en un multiplete sean iguales. Por ejemplo un fermión de espín  $\frac{1}{2}$  como el electrón tiene asociada su partícula compañera supersimétrica que es un bosón de espín 0 llamado selectrón. Como ambos tienen igual masa, deberíamos observarlos experimentalmente a la misma escala de energía y esto no ocurre. La única manera de eludir esta predicción es encontrando una forma de romper supersimetría, de manera análoga a como ocurre en la simetría de calibre del modelo electrodébil.

Existen dos formas de romper supersimetría: introduciendo términos en el Lagrangiano que la rompan explícitamente o mediante el mecanismo de ruptura espontánea. El mecanismo de ruptura espontánea se prefiere debido a que el Lagrangiano es invariante y se preservan todas las características útiles de supersimetría. Además se pueden utilizar criterios de simetría para restringir los términos posibles en el Lagrangiano.

En este capítulo estudiaremos la relación del álgebra supersimétrica con el Hamiltoniano. Se caracterizará el estado de vacío (mínima energía) para estados que son o no invariantes supersimétricos. También estudiaremos el potencial escalar y su relación con la ruptura espontánea de supersimetría

## 4.1. Algebra y Hamiltoniano

En supersimetría existe una conexión notable entre los generadores del álgebra supersimétrica  $Q$  y el Hamiltoniano como consecuencia del álgebra dada por:

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2\sigma_{ab}^\mu P_\mu. \quad (4.1)$$

En efecto sabemos que  $H = P_0$  y por lo tanto la ecuación anterior implica una relación entre  $H$  y  $Q$ , la cual derivaremos a continuación.

Multiplicando ambos lados de (4.1) por  $\delta^{ba}$ , se obtiene:

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} \delta^{ba} = 2\sigma_{ab}^\mu \delta^{ba} P_\mu = 2P_\mu \text{Tr} \sigma^\mu = 4P_0. \quad (4.2)$$

Concluimos entonces que  $H$  es:

$$H = \frac{1}{4} (Q_1 Q_1^\dagger + Q_1^\dagger Q_1 + Q_2 Q_2^\dagger + Q_2^\dagger Q_2), \quad (4.3)$$

donde se utilizó el hecho que  $\bar{Q}_a = Q_a^\dagger$ . Utilizando la ecuación (4.3) se demuestra que para un estado arbitrario  $|\Omega\rangle$  se cumple la propiedad:

$$\langle \Omega | H | \Omega \rangle = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^2 \|Q_a |\Omega\rangle\|^2 \geq 0. \quad (4.4)$$

La conclusión notable es que el espectro del Hamiltoniano de una teoría supersimétrica no posee autovalores negativos.

## 4.2. Estado de Vacío y Ruptura de Supersimetría

Por definición el vacío, denotado  $|0\rangle$ , es el estado de mínima energía. Además el criterio de ruptura espontánea de simetría es que el vacío no es invariante bajo las transformaciones de la simetría en cuestión. Para supersimetría esto implica que si supersimetría se rompe, entonces se verifica:

$$Q_a|0\rangle \neq 0, \quad (4.5)$$

para algún  $a = 1, 2$ . Utilizando (4.3) vemos que si supersimetría se rompe, entonces se cumple  $\langle 0|H|0\rangle \neq 0$ . Además si  $\langle 0|H|0\rangle \neq 0$  necesariamente debe cumplirse  $Q_a|0\rangle \neq 0$  para algún  $a = 1, 2$ . Concluimos que supersimetría se rompe si y solo si  $\langle 0|H|0\rangle \neq 0$ . Por otra parte es evidente que si supersimetría no se rompe, el vacío es invariante, es decir  $Q_a|0\rangle = 0$  para todo  $a$ , y por lo tanto  $\langle 0|H|0\rangle = 0$ .

En términos de los campos, la condición para que una simetría se rompa espontáneamente es  $\langle 0|\delta\Phi|0\rangle \neq 0$ . En el modelo Wess-Zumino con varios multipletes los campos son  $A_i, \psi_i, F_i$  y sus transformaciones están dadas por:

$$\begin{aligned} \delta A_i &= \sqrt{2}\xi\psi_i, \\ \delta F_i &= -i\sqrt{2}\partial_\mu\psi_i\sigma^\mu\bar{\xi}, \\ \delta\psi_i &= -\sqrt{2}\xi F_i - i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu A_i. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sabemos también que el Lagrangiano de cualquier teoría física es invariante bajo transformaciones de Lorentz. La simetría de Lorentz impone que únicamente los campos escalares pueden tener valor de expectación de vacío distinto de cero. En las transformaciones (4.6) se observa que los campos  $\psi_i, \partial_\mu\psi_i$  y  $\partial_\mu A_i$  no son escalares y debe cumplirse que:

$$\langle 0|\psi_i|0\rangle = 0, \quad (4.7)$$

$$\langle 0|\partial_\mu\psi_i|0\rangle = 0, \quad (4.8)$$

$$\langle 0|\partial_\mu A_i|0\rangle = 0. \quad (4.9)$$

Con estas condiciones se observa que las transformaciones  $\delta A_i$  y  $\delta F_i$  se anulan y ruptura de supersimetría ocurre debido a la transformación  $\delta\psi_i$ . Esto es:

$$\langle 0|\delta\psi_i|0\rangle \neq 0, \quad (4.10)$$

lo cual implica que en modelos Wess-Zumino  $\langle 0|F_i|0\rangle \neq 0$  es el único término que permite romper supersimetría y preservar la invariancia de Lorentz. A este tipo de ruptura de simetría se le conoce como ruptura espontánea de supersimetría por términos  $F$ . Es evidente que si para todo  $i$  se cumple  $\langle 0|F_i|0\rangle = 0$ , ocurre que  $\langle 0|\delta\psi_i|0\rangle = 0$  y supersimetría no se rompe.

### 4.3. Potencial Escalar y Ruptura de Supersimetría

A partir del Lagrangiano se determina el Hamiltoniano, siendo este de la forma:

$$H = \text{energía cinética} + V + \dots, \quad (4.11)$$

donde los términos más allá de  $V$  representan interacciones entre los escalares y otros campos. Sabemos que en el vacío los momentos son nulos y recordamos que solo los campos escalares tienen valor de expectación de vacío distinto de cero. Por lo tanto concluimos que para determinar el estado de vacío, estudiar el Hamiltoniano  $H$  es equivalente a estudiar el potencial escalar  $V$ .

Esta relación entre el Hamiltoniano y el potencial escalar es muy importante para estudiar los modelos supersimétricos y nos permite escribir los resultados de la sección anterior en términos del potencial escalar. En particular, un resultado importante a tener en cuenta, y que puede verse de la ecuación (4.11) y la discusión en la sección 4.2, es que supersimetría se rompe si y solo si  $\langle 0|V|0\rangle \neq 0$ . A continuación se verificará este resultado siguiendo otro razonamiento.

En una teoría supersimétrica con  $N$  multipletes Wess-Zumino, recordamos que el potencial escalar  $V$  se escribe:

$$V(A_i, A_i^*) = \sum_{i=1}^N F_i^* F_i, \quad (4.12)$$

donde  $F_i^* = \frac{\partial W}{\partial A_i}$ . Como ya hemos comentado  $V$  es semipositivo definido. Notemos que este hecho está de acuerdo a lo que ya conocemos del Hamiltoniano  $H$ . En particular para el estado de vacío podemos escribir:

$$\langle 0|V|0\rangle \geq 0. \quad (4.13)$$

Al observar (4.12) notamos que si  $\langle 0|F_i|0\rangle \neq 0$  para algún campo  $F_i$ , se tiene que  $\langle 0|V|0\rangle \neq 0$  y por lo tanto se rompe supersimetría. De igual manera vemos que  $\langle 0|V|0\rangle \neq 0$  solo si algún campo  $F_i$  tiene valor de expectación de vacío no nulo  $\langle 0|F_i|0\rangle \neq 0$ . Este hecho es consistente con los resultados de la sección anterior donde vimos que los campos  $F_i$  adquieren valor de expectación distinto de cero permitiendo romper supersimetría y preservar invariancia de Lorentz. Es importante hacer notar que  $\langle 0|F_i|0\rangle = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , es un sistema de  $N$  ecuaciones que depende de los  $N$  campos escalares  $A_i$ . Decimos que supersimetría se rompe si y solo si no existe solución para las  $N$  ecuaciones  $\langle 0|F_i|0\rangle = 0$ .

Es evidente que si existe solución a las  $N$  ecuaciones  $\langle 0|F_i|0\rangle = 0$ , entonces  $\langle 0|V|0\rangle = 0$  y supersimetría no se rompe. Esta solución es siempre un mínimo del potencial escalar. Para comprobarlo se utiliza el criterio de la primera derivada. Al calcular se obtiene:

$$\frac{\partial V}{\partial A_i} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial F_j^*}{\partial A_i} \right) F_j. \quad (4.14)$$

Se observa que  $\langle 0|F_j|0\rangle = 0$  implica directamente que  $\langle 0|\frac{\partial V}{\partial A_i}|0\rangle = 0$  y por lo tanto es un extremo. Además sabemos que  $V$  es semipositivo definido y  $\langle 0|V|0\rangle = 0$  es el menor valor de expectación que  $V$  puede tomar. Por lo tanto las soluciones de  $\langle 0|F_j|0\rangle = 0$  no rompen supersimetría y son un mínimo absoluto del potencial escalar. Las soluciones a las  $N$  ecuaciones  $\langle 0|F_j|0\rangle = 0$  corresponden a los  $N$  valores de expectación  $\langle 0|A_i|0\rangle$  de los campos escalares.

Para simplificar la presentación a continuación nos apartaremos de la notación de Dirac para designar los valores de expectación de vacío. Por el contexto se entenderá cuando se trata de los valores del potencial  $V$ , los campos escalares  $A_i$ , o los términos  $F_i$  en el vacío o en un extremo del potencial.

Es importante recordar que las propiedades de una teoría supersimétrica vienen dadas por la forma del superpotencial  $W$ . Esto se debe a la relación  $F_i^* = \frac{\partial W}{\partial A_i}$  y a la forma en que está definido el potencial escalar  $V$ . Otro hecho importante a tener en cuenta es que dado un superpotencial  $W$  su potencial escalar asociado  $V$  puede o no tener mínimos supersimétricos. Por otra parte resaltamos el hecho de que no es necesario resolver el sistema  $\frac{\partial V}{\partial A_i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , para saber si supersimetría está espontáneamente rota ya que también es posible hacerlo evaluando si las  $N$  ecuaciones  $F_i = 0$  son inconsistentes. Si se determina que supersimetría está rota, encontramos la nueva configuración de vacío hallando los extremos del potencial escalar  $V$  resolviendo las ecuaciones  $\frac{\partial V}{\partial A_i} = 0$ . Sin embargo, aun si las  $N$  ecuaciones  $F_i = 0$  son consistentes y existe un vacío supersimétrico, es útil resolver las ecuaciones  $\frac{\partial V}{\partial A_i} = 0$  ya que es posible que el modelo presente otros vacíos que son mínimos locales del potencial escalar. Estos mínimos locales se conocen como vacíos metaestables.

Una vez hallados los extremos del potencial escalar  $V$  mediante la solución de las  $N$  ecuaciones  $\frac{\partial V}{\partial A_i} = 0$ , necesitamos verificar su estabilidad. Para ello se calculan los autovalores de la llamada matriz de masas cuadradas bosónicas  $\mathcal{M}_B^2$ . La forma de  $\mathcal{M}_B^2$  puede obtenerse haciendo una expansión de  $V$  hasta segundo orden en torno al extremo. Esto es:

$$V = V_e + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_i & A_i^* \end{bmatrix} (\mathcal{M}_B^2)_{ij} \begin{bmatrix} A_j^* \\ A_j \end{bmatrix} + \dots, \quad (4.15)$$

donde  $V_e$  es el valor del potencial evaluado en el extremo y se ha usado que las primeras derivadas  $\frac{\partial V}{\partial A_i}$  se anulan en el extremo. El término de segundo orden corresponde al término cuadrado de masas del potencial y de allí el nombre matriz de masas

cuadradas. Para que el extremo corresponda a un mínimo, los autovalores de  $\mathcal{M}_B^2$  deben ser positivos. Explícitamente, la matriz de masas cuadradas bosónicas se escribe:

$$\mathcal{M}_B^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial A_i \partial A_j^*} & \frac{\partial^2 V}{\partial A_i \partial A_j} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial A_i^* \partial A_j^*} & \frac{\partial^2 V}{\partial A_i^* \partial A_j} \end{bmatrix}_e. \quad (4.16)$$

El subíndice  $e$  indica que las segundas derivadas se evalúan en el extremo. Se observa que  $\mathcal{M}_B^2$  es Hermítica y por lo tanto sus autovalores son reales.

Una vez calculados los autovalores podemos encontrar tres casos. Si los autovalores son positivos, la solución es estable y corresponde a un mínimo. Si existen autovalores negativos, la solución es inestable lo cual puede corresponder a puntos de ensilladura o máximos locales. Si los autovalores son positivos y además hay autovalores nulos, la solución es un mínimo pero existen direcciones planas del potencial. Este último caso es el que se presenta cuando se rompe supersimetría por términos  $F$  a nivel clásico, como ilustraremos primero con el modelo de O’Raifeartaigh y demostraremos en general en el capítulo 5.

Los autovalores positivos representan las masas cuadradas de los campos escalares  $A_i$  mientras que los autovalores negativos indican que la solución es inestable. Resaltamos el hecho de que el estudio la matriz  $\mathcal{M}_B^2$  coincide con el criterio del Hessiano del análisis matemático.

A continuación se muestran esquemáticamente algunas gráficas con ejemplos de potencial escalar. La gráfica 1 corresponde a un potencial con estado de vacío supersimétrico mientras que la gráfica 2 muestra un potencial con ruptura espontánea de supersimetría. Finalmente en la gráfica 3 se presenta el caso de un potencial con un vacío metaestable no supersimétrico, un máximo local y un vacío supersimétrico que corresponde a un mínimo global. Si hay más dimensiones, el máximo local puede corresponder a puntos de ensilladura.



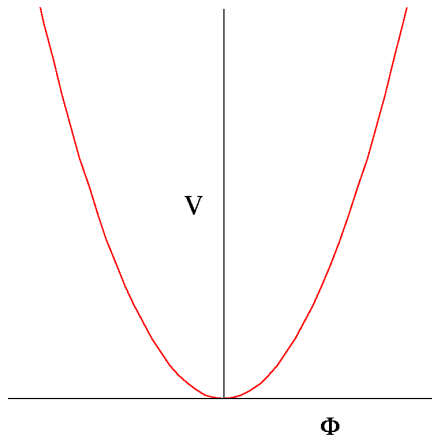


Figura 4.1: Potencial sin ruptura de supersimetría.

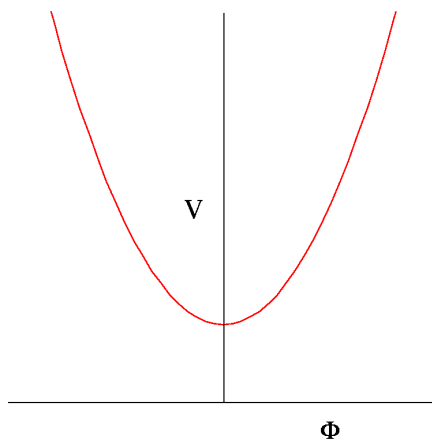


Figura 4.2: Potencial con ruptura de supersimetría en un mínimo estable.

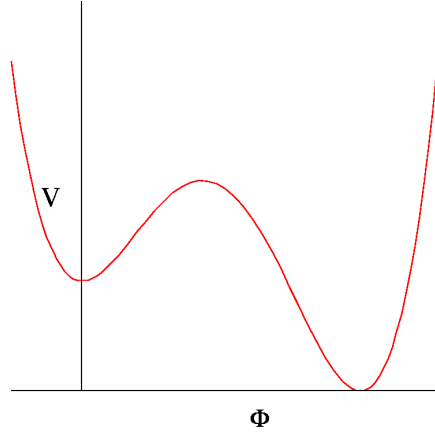


Figura 4.3: Potencial con ruptura de supersimetría en un mínimo metaestable.

#### 4.4. Masa de Fermiones

Hemos visto que una característica fundamental de la invariancia bajo supersimetría es la igualdad de las masas de bosones y fermiones en un multiplete. Por lo tanto esperamos que al romperse supersimetría, esta igualdad deje de ser cierta. Para verificar esto es necesario estudiar en detalle la masa de los fermiones.

Para estudiar lo que ocurre, consideremos el Lagrangiano Wess-Zumino nuevamente. Recordamos que este se escribe:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu A_i^* \partial^\mu A_i + i\psi_i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i - V(A_i, A_i^*) \\ & - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} \psi_i \psi_j + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} \right)^* \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

El término cuadrático en  $\psi_i$  y su conjugado dan lugar a la masa de los fermiones y lo denotaremos  $\mathcal{L}_{m_f}$ . Este término puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{m_f} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \psi_i & \bar{\psi}_i \end{bmatrix} (\mathcal{M}_F)_{ij} \begin{bmatrix} \psi_j \\ \bar{\psi}_j \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

donde la matriz  $\mathcal{M}_F$  se escribe:

$$\mathcal{M}_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} & 0 \\ 0 & \left( \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} \right)^* \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

La matriz  $\mathcal{M}_F$  evaluada en el mínimo se conoce como la matriz de masas fermiónicas. Para poder comparar con la matriz de masas cuadradas bosónicas, es conveniente definir la matriz de masas cuadradas fermiónicas. Esta es:

$$\mathcal{M}_F^2 = \mathcal{M}_F^* \mathcal{M}_F = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_k} \right)^* \frac{\partial^2 W}{\partial A_k \partial A_j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_k} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial A_k \partial A_j} \right)^* \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Se sobreentiende en adelante que las matrices  $\mathcal{M}_F$  y  $\mathcal{M}_F^2$  están evaluadas en el mínimo.

A continuación se compararán las matrices de masas cuadradas bosónicas y fermiónicas. Si consideramos la relación  $V = \left| \frac{\partial W}{\partial A_i} \right|^2$ , reescribimos la matriz de masas cuadradas bosónicas (4.16) en términos del superpotencial  $W$ . Esto es:

$$\mathcal{M}_B^2 = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_k} \right)^* \frac{\partial^2 W}{\partial A_k \partial A_j} & \frac{\partial^3 W}{\partial A_i \partial A_j \partial A_k} F_k \\ \left( \frac{\partial^3 W}{\partial A_i \partial A_j \partial A_k} \right)^* F_k^* & \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_k} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial A_k \partial A_j} \right)^* \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Los términos no diagonales de (4.21) corresponden a las derivadas segundas del potencial escalar  $\frac{\partial^2 V}{\partial A_i \partial A_j}$  y en general son distintas de cero. De esta manera podemos ver que si supersimetría no se rompe, entonces  $F_i = 0$  para todo  $i$ , y las matrices de masas cuadradas bosónicas y fermiónicas son idénticas  $\mathcal{M}_B^2 = \mathcal{M}_F^2$ . Por el contrario si supersimetría se rompe,  $F_i \neq 0$  para algún  $i$ , las matrices (4.20) y (4.21) son distintas,  $\mathcal{M}_B^2 \neq \mathcal{M}_F^2$ .

Aun cuando supersimetría esté rota, a partir de (4.20) y (4.21) se deduce que las trazas de  $\mathcal{M}_B^2$  y  $\mathcal{M}_F^2$  son iguales. Para expresar esta propiedad de manera conveniente se define la supertraza como la diferencia entre las trazas de ambas matrices, esto es  $\text{STr} \mathcal{M}^2 = \text{Tr}(\mathcal{M}_B^2 - \mathcal{M}_F^2)$ . En general la supertraza está definida  $\text{Str} \mathcal{M}^2 = \sum_J (-1)^{2J} (2J+1) m_J^2$ , donde la suma se realiza sobre las partículas de espín  $J$ . Vemos entonces que en los modelos Wess-Zumino a nivel árbol se cumple:

$$\text{STr} \mathcal{M}^2 = 0. \quad (4.22)$$

Esta propiedad tiene consecuencias importantes. A nivel teórico implica que incluso cuando supersimetría está rota, el potencial escalar no recibe correcciones radiativas cuadráticas [23]. A nivel fenomenológico, la cancelación de  $S\text{Tr}\mathcal{M}^2$  se puede utilizar para analizar el espectro de masas resultante en extensiones supersimétricas del Modelo Estándar en las que supersimetría debe romperse espontáneamente [14].

Una consecuencia notable de la ruptura espontánea de supersimetría es la existencia de un fermión de masa nula, llamado fermión de Goldstone o Goldstino. El Goldstino es una partícula análoga al bosón de Goldstone que aparece cuando se rompe una simetría bosónica global. Una manera de explicar el fenómeno es a partir de la acción del generador de supersimetría sobre el vacío. Sabemos que cuando supersimetría se rompe,  $Q_a|0\rangle \neq 0$  y como el vacío es un escalar mientras que  $Q_a$  es fermiónico, debe ser que  $Q_a|0\rangle$  es un fermión, de hecho es el Goldstino. Utilizando la corriente conservada de supersimetría se demuestra que el Goldstino tiene masa nula [21, 19].

La existencia del Goldstino también se deriva en la teoría de campos supersimétrica. Para verlo, reescribimos la condición para la existencia de un extremo (4.14) de un modelo Wess-Zumino con  $N$  multipletes, en términos del superpotencial  $W$ . Esto es:

$$\frac{\partial V}{\partial A_i} = \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} \left( \frac{\partial W}{\partial A_j} \right)^* = 0. \quad (4.23)$$

Supongamos que supersimetría se rompe solamente debido al término  $F_0^* = \frac{\partial W}{\partial A_0} \neq 0$ . De la ecuación (4.23) vemos que se cumple la siguiente condición:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_0} = 0. \quad (4.24)$$

La ecuación (4.24) es el bloque superior de la matriz de masas fermiónicas (4.19) y se observa que tiene un autovalor cero al anularse todos los términos de la columna y de la fila cero. El autovalor cero corresponde a la masa del Goldstino y su autovector está en la dirección del campo  $A_0$ . Por lo tanto el Goldstino es el fermión que pertenece al multiplete donde está el campo escalar  $A_0$  cuyo término  $F$  rompe supersimetría.

## 4.5. Modelo de O’Raifeartaigh

En 1975 O’Raifeartaigh [11] construyó el primer ejemplo de un modelo que presenta ruptura espontánea de supersimetría a nivel clásico. El superpotencial  $W$  propuesto por O’Raifeartaigh es:

$$W = \lambda X + m\phi_1\phi_2 + \frac{1}{2}hX\phi_1^2, \quad (4.25)$$

donde  $X$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son los campos escalares de tres multipletes Wess-Zumino. Sin pérdida de generalidad se considera que los parámetros  $\lambda$ ,  $m$  y  $h$  son reales debido a que siempre es posible hacer una redefinición de los campos de manera que absorban la fase de los parámetros en caso de que fueran complejos.

El potencial escalar  $V$  asociado a este superpotencial es:

$$V = \sum_i F_i^* F_i = |F_X|^2 + |F_{\phi_1}|^2 + |F_{\phi_2}|^2, \quad (4.26)$$

donde  $F_i^* = \frac{\partial W}{\partial A_i}$ . A continuación se calcula el término  $F_i^*$  para cada campo  $X$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Estos son:

$$F_X^* = \frac{\partial W}{\partial X} = \lambda + \frac{1}{2}h\phi_1^2, \quad (4.27)$$

$$F_{\phi_1}^* = \frac{\partial W}{\partial \phi_1} = m\phi_2 + hX\phi_1, \quad (4.28)$$

$$F_{\phi_2}^* = \frac{\partial W}{\partial \phi_2} = m\phi_1. \quad (4.29)$$

Para saber si se rompe supersimetría, verificamos la condición  $F_i = 0$ . La ecuación (4.29), impone que  $\phi_1 = 0$ . Por otra parte de la ecuación (4.28) y de  $\phi_1 = 0$ , vemos que  $\phi_2 = 0$ . Por último, utilizando que  $\phi_1 = 0$  y la ecuación (4.27) se obtiene que  $F_X = \lambda \neq 0$  y por lo tanto supersimetría está rota. Notamos que el campo  $X$  queda indeterminado. Vemos también que el valor del potencial escalar en este caso es  $V = |\lambda|^2 > 0$  lo cual es consistente con lo discutido en la sección 4.3.

Dado que supersimetría está rota es necesario determinar el extremo del potencial. Para esto escribimos el potencial escalar explícitamente. Esto es:

$$V = \left| \lambda + \frac{1}{2}h\phi_1^2 \right|^2 + |m\phi_2 + hX\phi_1|^2 + |m\phi_1|^2. \quad (4.30)$$

Utilizando el criterio de la primera derivada, hallamos los extremos del potencial escalar, es decir debemos resolver las ecuaciones  $\frac{\partial V}{\partial A_i} = 0$ , donde  $A_i$  corresponde a los campos  $X$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Las derivadas del potencial escalar  $V$  (4.30) se escriben:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = (m\phi_2 + hX\phi_1)^* h\phi_1, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_1} = \left(\lambda + \frac{1}{2}h\phi_1^2\right)^* h\phi_1 + (m\phi_2 + hX\phi_1)^* hX + m^2\phi_1^*, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_2} = m(m\phi_2 + hX\phi_1)^*. \quad (4.33)$$

Existen dos soluciones al sistema  $\frac{\partial V}{\partial A_i} = 0$ . Estas soluciones están parametrizadas por la cantidad  $y$  que depende de las constantes  $\lambda$ ,  $m$  y  $h$ . Esta se define:

$$y = \left| \frac{\lambda h}{m^2} \right|. \quad (4.34)$$

Las soluciones son:

1. Para el caso  $y < 1$ , se encuentra un extremo en

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0, \\ \phi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$X$  indeterminado.

El valor del potencial escalar en este extremo es  $V = |\lambda|^2$ .

2. Para el caso  $y > 1$  existen dos posibles extremos. El primero viene dado por la solución (4.35). El segundo es:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \pm i \sqrt{\frac{2\lambda}{h} (1 - y^{-1})}, \\ \phi_2 &= -\frac{hX}{m} \phi_1, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$X$  indeterminado.

La expresión (4.36) corresponde a dos extremos debido a los dos valores posibles del campo  $\phi_1$ . Además el campo  $\phi_1$  es real o imaginario dependiendo del signo del producto  $\lambda h$ .

En ambos casos el campo  $X$  es arbitrario lo cual muestra que hay una degeneración en la solución, es decir, existe un continuo de vacíos con igual energía, etiquetados por el valor de expectación del campo  $X$ . Se dice que la dirección del campo  $X$  es una dirección plana del potencial. Esto es una característica de este tipo de modelos a nivel árbol.

Ahora verificamos la estabilidad para ambos casos. Para ello escribimos explícitamente la matriz de masas bosónicas  $\mathcal{M}_B^2$  (4.16) correspondiente a este modelo. Esto es:

$$\mathcal{M}_B^2 = \begin{bmatrix} h^2|\phi_1|^2 & h^2X\phi_1^* & mh\phi_1^* & 0 & 0 & 0 \\ h^2X^*\phi_1 & m^2 + h^2|\phi_1|^2 + h^2|X|^2 & mhX^* & 0 & \lambda h + \frac{1}{2}h^2\phi_1^2 & 0 \\ mh\phi_1 & mhX & m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^2|\phi_1|^2 & h^2X^*\phi_1 & mh\phi_1 \\ 0 & \lambda h + \frac{1}{2}h^2\phi_1^{*2} & 0 & h^2X\phi_1^* & m^2 + h^2|\phi_1|^2 + h^2|X|^2 & mhX \\ 0 & 0 & 0 & mh\phi_1^* & mhX^* & m^2 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Para analizar la estabilidad de las soluciones encontradas, se evalúa la matriz  $\mathcal{M}_B^2$  en los extremos para cada caso y luego se determina el signo de sus autovalores.

A continuación estudiamos la estabilidad de cada una de las soluciones halladas, las cuales están parametrizadas por el valor de  $y = \left| \frac{\lambda h}{m^2} \right|$ .

1. Caso  $y < 1$ . El extremo viene dado por (4.35). Los autovalores se determinan utilizando el programa de computación simbólica Maple. Dos autovalores son nulos y los no nulos son:

$$m_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ h^2|X|^2 + m^2(2+y) \pm \sqrt{(h^2|X|^2 + m^2(2+y))^2 - 4m^4(1+y)} \right], \quad (4.38)$$

$$m_{3,4}^2 = \frac{1}{2} \left[ h^2|X|^2 + m^2(2-y) \pm \sqrt{(h^2|X|^2 + m^2(2-y))^2 - 4m^4(1-y)} \right]. \quad (4.39)$$

Se observa que los autovalores son todos positivos. Debido a que el campo  $X$  es indeterminado y existe la libertad de asignarle cualquier valor, podemos comprobar la positividad de los autovalores escogiendo  $X = 0$ . Con esta elección los autovalores distintos de cero se reducen a  $m_{1,4}^2 = m^2(1 \pm y)$ ,  $m_{2,3}^2 = m^2$ . Se concluye que el extremo es un mínimo.

2. Caso  $y > 1$ . Vimos que existen dos extremos, el primero viene dado por (4.35) y por lo tanto sus autovalores son formalmente iguales al caso anterior, pero debido a que  $y > 1$ , es posible demostrar que uno de los autovalores es negativo, es decir el extremo no es un mínimo local. Si nuevamente elegimos  $X = 0$ , vemos que los autovalores positivos son  $m_1^2 = m^2(1 + y)$ ,  $m_{2,3}^2 = m^2$  y se observa claramente que el autovalor  $m_4^2 = m^2(1 - y)$  es negativo. Esto corresponde a un punto de ensilladura. El segundo extremo viene dado por la solución (4.36). En este caso los autovalores no nulos son:

$$m_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ h^2 |X|^2 + 4h\lambda - m^2 \pm \sqrt{m^4 - 2m^2 h^2 |X|^2 + h^4 |X|^4 + 8h^3 \lambda |X|^2} \right], \quad (4.40)$$

$$m_{3,4}^2 = \frac{1}{2} \left[ h^2 |X|^2 + 4h\lambda - 3m^2 \pm \sqrt{m^4 - 6m^2 h^2 |X|^2 + h^4 |X|^4 + 8h^3 \lambda |X|^2} \right]. \quad (4.41)$$

Haciendo un poco de álgebra se demuestra que todos son positivos. Esto se puede ver fácilmente haciendo la elección  $X = 0$ . Los autovalores son  $m_1^2 = 2m^2 y$ ,  $m_{2,3}^2 = 2m^2(y - 1/2)$ ,  $m_4^2 = 2m^2(y - 1)$  y se puede ver que todos son positivos.

La solución por lo tanto corresponde a un mínimo.

En cualquiera de los casos analizados se obtuvieron autovalores nulos. Esto corresponde a la existencia de direcciones planas y es una característica de los modelos con ruptura espontánea de supersimetría. Cuando la solución es estable, los autovalores representan la masa de los campos escalares. El espectro consta de 6 autovalores



debido a que el modelo tiene tres campos escalares complejos y tanto la parte real como la imaginaria de cada campo tiene una masa asociada.

A continuación calcularemos la masa de los fermiones y se verificarán algunas propiedades discutidas en la sección anterior. Para calcular la masa de los fermiones utilizaremos únicamente el bloque superior  $\mathcal{M}_F^{2Sup}$  de la ecuación (4.20). Esto se debe a que el bloque inferior de  $\mathcal{M}_F^2$  es el conjugado hermítico del superior y por lo tanto sus autovalores son iguales. Es claro que el espectro completo de  $\mathcal{M}_F^2$  es el espectro de  $\mathcal{M}_F^{2Sup}$  con multiplicidad 2. Escribimos el bloque superior  $\mathcal{M}_F^{2Sup}$  de forma general de manera que podamos evaluar los extremos de los dos casos estudiados del modelo de O’Raifeartaigh. Esto es:

$$\mathcal{M}_F^{2Sup} = \begin{bmatrix} h^2|\phi_1|^2 & h^2X\phi_1^* & mh\phi_1^* \\ h^2X^*\phi_1 & m^2 + h^2|\phi_1|^2 + h^2|X|^2 & mhX^* \\ mh\phi_1 & mhX & m^2 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Al evaluar en el mínimo y calcular los autovalores, encontraremos las masas cuadradas de los fermiones.

Calcularemos a continuación los autovalores de la matriz  $\mathcal{M}_F^{2Sup}$  para cada uno de los casos parametrizados por  $y = \left| \frac{\lambda h}{m^2} \right|$ .

1. Caso  $y < 1$ . El extremo viene dado por (4.35). Los autovalores se determinan con el programa Maple. Se encuentra un autovalor nulo y los no nulos son:

$$m_{1,2}^{\prime 2} = m^2 + \frac{1}{2}h^2|X|^2 \pm \sqrt{(m^2 + \frac{1}{2}h^2|X|^2)^2 - m^4}. \quad (4.43)$$

Se observa que los autovalores son positivos. El autovalor nulo corresponde al Goldstino. Para el caso sencillo donde  $X = 0$ , los autovalores distintos de cero son  $m_{1,2}^{\prime 2} = m^2$ .

2. Caso  $y > 1$ . Ya hemos visto que existen dos extremos. Para el primer extremo los autovalores son iguales a los del caso anterior y el análisis realizado no cambia.

Para el segundo extremo la solución viene dada por (4.36). Se comprueba que existe un autovalor nulo y los autovalores distintos de cero son:

$$m_{1,2}'^2 = m^2(2y - 1) + \frac{1}{2}h^2|X|^2 \pm \sqrt{[m^2(1 - 2y) - \frac{1}{2}h^2|X|^2]^2 - m^4(1 - 2y)^2}. \quad (4.44)$$

Para este extremo todos los autovalores son positivos. Además se ha encontrado el autovalor nulo correspondiente al Goldstino. Considerando la posibilidad  $X = 0$ , los autovalores no nulos son  $m_{1,2}'^2 = m^2(2y - 1)$ .

Una vez calculada la masa de los fermiones, es posible comprobar la identidad de la supertraza  $\text{STr}\mathcal{M}^2 = 0$ . En particular es sencillo verlo cuando  $X = 0$ . Consideremos el caso 1,  $y < 1$ . Recordamos que los autovalores distintos de cero de la matriz de masas cuadradas bosónicas evaluados en  $X = 0$  son  $m_{1,4}^2 = m^2(1 \pm y)$ ,  $m_{2,3}^2 = m^2$  y por lo tanto  $\text{Tr}\mathcal{M}_B^2 = 4m^2$ . Por otra parte para los fermiones obtuvimos que los autovalores no nulos son  $m_{1,2}'^2 = m^2$  y recordando que cada uno tiene multiplicidad 2, obtenemos  $\text{Tr}\mathcal{M}_F^2 = 4m^2$ , es decir  $\text{STr}\mathcal{M}^2 = 0$ . Finalmente para el caso 2,  $y > 1$ , los autovalores no nulos del extremo estable son  $\mathcal{M}_B^2$  son  $m_1^2 = 2m^2y$ ,  $m_{2,3}^2 = 2m^2(y - 1/2)$ ,  $m_4^2 = 2m^2(y - 1)$ , siendo la traza  $\text{Tr}\mathcal{M}_B^2 = 8m^2(y - 1/2)$ . La matriz de masas fermiónicas tiene autovalores  $m_{1,2}'^2 = 2m^2(y - 1/2)$  y al considerar la multiplicidad se obtiene  $\text{Tr}\mathcal{M}_F^2 = 8m^2(y - 1/2)$  y nuevamente se verifica  $\text{STr}\mathcal{M}^2 = 0$ .

Para completar el análisis realizado con los autovalores de las matrices de masas cuadradas bosónicas y fermiónicas, calcularemos los autovectores correspondientes para cada caso. El análisis de los autovectores nos muestra sobre cuáles direcciones de los campos se extienden las partículas cuyas masas hemos encontrado haciendo el análisis de los autovalores. Los autovectores se pueden escribir de acuerdo al orden de las entradas de la matriz de masas cuadradas bosónicas del modelo de O'Raifeartaigh (4.37). Esto es, las componentes de los autovectores están en el orden

$$\left[ X \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \bar{X} \quad \bar{\phi}_1 \quad \bar{\phi}_2 \right]. \quad (4.45)$$

En forma similar, para los autovectores de la matriz de masas cuadradas fermiónicas el orden es:

$$\begin{bmatrix} \psi_X & \psi_{\phi_1} & \psi_{\phi_2} & \bar{\psi}_X & \bar{\psi}_{\phi_1} & \bar{\psi}_{\phi_2} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

A continuación calcularemos los autovectores para cada caso parametrizado por  $y = \left| \frac{\lambda h}{m^2} \right|$ . Por simplicidad se efectuará el cálculo tomando el valor de campo  $X = 0$ . Para realizar este cálculo se utilizó el programa Maple. Los casos son:

1. Caso  $y < 1$ . El extremo viene dado por (4.35). Los resultados para la matriz de masas cuadradas bosónicas  $\mathcal{M}_B^2$  son:

Autovalor	Autovectores	
0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
$m^2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	.
$m^2(1+y)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
$m^2(1-y)$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	(4.47)

Notamos que el autovalor nulo está en la dirección de  $X$ , que es precisamente la dirección plana del modelo, el autovalor  $m^2$  está en la dirección de  $\phi_2$  mientras que  $m^2(1+y)$  y  $m^2(1-y)$  tienen combinaciones lineales de  $\phi_1$  y  $\bar{\phi}_1$  que corresponden respectivamente a la parte real e imaginaria de  $\phi_1$ .

Para la matriz de masas cuadradas fermiónicas  $\mathcal{M}_F^2$  los autovalores y autovec-

tores son:

Autovalor	Autovectores	
0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	(4.48)
$m^2$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

Se observa que el fermión de masa cero se extiende a lo largo de  $X$ , este es el Goldstino y corresponde al fermión que está en el multiplete de  $X$ ,  $\psi_X$ , tal como se dedujo para el caso general de la ecuación (4.24). En la figura 4.4 se representan gráficamente los resultados para el caso  $y < 1$ .

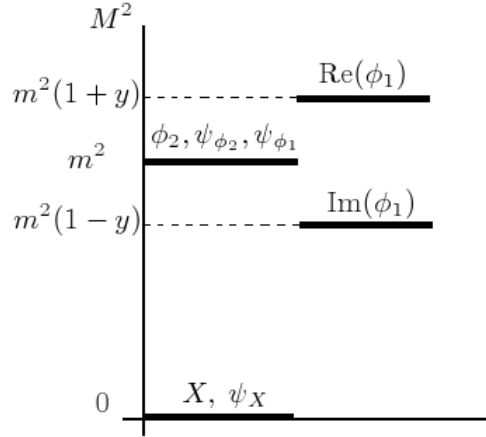


Figura 4.4: Espectro de masas en el modelo de O’Raifeartaigh, caso  $y < 1$ .

2. Caso  $y > 1$ . El extremo viene dado por (4.36). Los resultados para la matriz de

masas cuadradas bosónicas  $\mathcal{M}_B^2$  son:

Autovalor	Autovectores	
0	$\begin{bmatrix} (\bar{a})^{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
$2m^2(y - 1/2)$	$\begin{bmatrix} \bar{a} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 1 \end{bmatrix}$	),
$2m^2y$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
$2m^2(y - 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	

(4.49)

donde  $a = \frac{h\phi_1}{m}$ . En este caso observamos que el autovalor nulo está en una combinación lineal de  $X$  y  $\phi_2$  que es la dirección plana. A su vez comprobamos que son los términos  $F_X$  y  $F_{\phi_2}$  los que rompen supersimetría en este caso como puede verse de (4.27 – 4.29).

Para la matriz de masas cuadradas fermiónicas  $\mathcal{M}_F^2$  los autovectores son:

Autovalor	Autovectores	
0	$\begin{bmatrix} (\bar{a})^{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
$2m^2(y - 1/2)$	$\begin{bmatrix} \bar{a} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	).

(4.50)

Nuevamente  $a = \frac{h\phi_1}{m}$ . Vemos que el Goldstino se extiende a la largo de la dirección plana. Si bien el caso  $y > 1$  es un poco más complicado de analizar, aún pueden verificarse las propiedades estudiadas en las secciones anteriores.

El modelo de O’Raifeartaigh es muy importante ya que permite ejemplificar de forma sencilla todos los conceptos estudiados en los capítulos anteriores. Históricamente permitió abrir toda una línea de investigación que aún hoy continúa.

## CAPÍTULO 5

# Propiedades Generales de Ruptura Espontánea de Supersimetría

A lo largo de este capítulo se discutirán algunos resultados generales relacionados con la ruptura espontánea de supersimetría por términos  $F$  en modelos Wess-Zumino. En particular veremos la degeneración del estado de vacío a nivel árbol y la forma del superpotencial en los modelos de O’Raifeartaigh generalizados.

### 5.1. Degeneración del Estado de Vacío

En esta sección se mostrará que, si supersimetría se rompe espontáneamente por términos  $F$ , el estado de vacío está degenerado a nivel árbol. Para ello seguiremos el razonamiento de Ray [24]. A lo largo de esta sección los campos escalares se denotarán  $\phi_i$ .

Consideremos un potencial escalar  $V$ . Sabemos que  $V$  es de cuarto orden debido a que el superpotencial renormalizable más general es de orden 3 y a la relación  $V = |\frac{\partial W}{\partial \phi_i}|^2$ . La condición para que exista un vacío que rompa supersimetría es:

$$F_i^* = \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \neq 0. \quad (5.1)$$

La ecuación (5.1) debe cumplirse para al menos uno de los términos  $F_i$  y es la primera condición para demostrar la degeneración del estado de vacío. Por otra parte, la condición general para que exista un extremo es  $\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0, \forall i$ . Como  $V$  está determinado por el superpotencial  $W$ , se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_j} \right)^* = 0. \quad (5.2)$$

Esta ecuación es el criterio de la primera derivada para la existencia de un extremo y debe satisfacerse para todo  $i$ . La ecuación (5.2) es la segunda condición para demostrar la degeneración del estado de vacío.

El potencial escalar  $V$  se puede expandir en la forma general  $V(\phi + \delta\phi) = V + \delta V$ , exacta hasta cuarto orden. Esto es:

$$\begin{aligned} V(\phi_i + \delta\phi_i) &= V(\phi_i) + \left( \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \delta\phi_i + c.h. \right) \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \delta\phi_i \delta\phi_j + c.h. \right) + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j^*} \delta\phi_i \delta\phi_j^* \right] \\ &+ \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k} \delta\phi_i \delta\phi_j \delta\phi_k + 3 \frac{\partial^3 V}{\partial \phi_i^* \partial \phi_j \partial \phi_k} \delta\phi_i^* \delta\phi_j \delta\phi_k + c.h. \right) \\ &+ \frac{1}{4!} \left[ \left( \frac{\partial^4 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k \partial \phi_m} \delta\phi_i \delta\phi_j \delta\phi_k \delta\phi_m + 4 \frac{\partial^4 V}{\partial \phi_i^* \partial \phi_j \partial \phi_k \partial \phi_m} \delta\phi_i^* \delta\phi_j \delta\phi_k \delta\phi_m + c.h. \right) \right. \\ &\left. + 6 \frac{\partial^4 V}{\partial \phi_i^* \partial \phi_j^* \partial \phi_k \partial \phi_m} \delta\phi_i^* \delta\phi_j^* \delta\phi_k \delta\phi_m \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Debido a la relación  $V = \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right|^2$ , podemos escribir las derivadas del potencial escalar  $V$  en términos de derivadas del superpotencial  $W$ . Como consecuencia de esto, es posible ver que algunas de las derivadas en la ecuación (5.3) se anulan. En particular, cualquier derivada de al menos tercer orden respecto a  $\phi_i$  se anula. Al simplificar y escribir las

derivadas en términos del superpotencial  $W$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 V(\phi + \delta\phi) = & \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right|^2 + 2\text{Re} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right)^* \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \delta\phi_j \right] \\
 & + \left| \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \delta\phi_j \right|^2 + \text{Re} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right)^* \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k} \delta\phi_j \delta\phi_k \right] \\
 & + \text{Re} \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_k \partial \phi_m} \right)^* \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_m} \delta\phi_i \delta\phi_j (\delta\phi_k)^* \right] \\
 & + \left| \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k} \delta\phi_j \delta\phi_k \right|^2 .
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Para que exista un mínimo local, la variación del potencial debe ser positiva  $\delta V > 0$ . Sin embargo existen caminos  $\delta\phi$  que harían negativa a la variación del potencial,  $\delta V < 0$ , y es necesario determinar las condiciones para que esto no ocurra. Para el análisis es suficiente considerar la variación del potencial hasta tercer orden en los campos. La variación  $\delta V$  evaluada en el extremo se escribe:

$$\begin{aligned}
 \delta V = & \left| \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \delta\phi_j \right|^2 + \text{Re} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right)^* \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k} \delta\phi_j \delta\phi_k \right] \\
 & + \text{Re} \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_k \partial \phi_m} \right)^* \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_m} \delta\phi_i \delta\phi_j (\delta\phi_k)^* \right] + O(\delta\phi^4) .
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Notamos que los términos lineales se anulan al utilizar la condición (5.2).

Para encontrar las condiciones que debe satisfacer el superpotencial  $W$ , consideremos primero una variación  $\delta\phi_i = \delta z \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right)^*$  y sustituimos en la ecuación (5.5). Utilizando la condición (5.2) se comprueba que la variación  $\delta V$  hasta segundo orden en  $z$  se escribe:

$$\delta V = \text{Re} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right)^* \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_j} \right)^* \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_k} \right)^* \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k} (\delta z)^2 \right] + O(\delta z^3) . \tag{5.6}$$

Existen caminos que hacen negativa a la variación del potencial dada en (5.6). En particular observamos que siempre es posible ajustar la fase de  $(\delta z)^2$  y obtener  $\delta V < 0$ . Como esta elección de  $\delta\phi$  contradice nuestra hipótesis de que el extremo es un mínimo local, se concluye:

$$\left( \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right)^* \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_j} \right)^* \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_k} \right)^* \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k} = 0 . \tag{5.7}$$



Para facilitar el trabajo posterior reescribimos la ecuación (5.7) en la forma simplificada  $\Lambda_i \zeta_i = 0$ , donde  $\Lambda_i = \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_i}\right)^*$  y  $\zeta_i = \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_j}\right)^* \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_k}\right)^* \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k}$ .

Podemos continuar el análisis escogiendo otras formas para  $\delta\phi$  y determinando las condiciones sobre el superpotencial  $W$  para que  $\delta V > 0$ . Consideremos a continuación  $\delta\phi_i = \rho_i \delta z^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_i}\right)^* \delta z$ , donde  $\rho_i \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_i}\right)^* = \rho_i \Lambda_i = 0$ , siendo  $\rho_i$  un parámetro arbitrario. Consideramos  $\delta V$  en (5.5) hasta tercer orden en  $z$ . Utilizando las condiciones (5.2) y (5.7),  $\delta V$  se escribe:

$$\delta V = 2\text{Re} \left[ \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_j}\right)^* \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_k}\right)^* \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k} \rho_i (\delta z)^3 \right] + O(\delta z^4). \quad (5.8)$$

Nuevamente es posible elegir la fase de  $\delta z$  y así obtener  $\delta V < 0$ . De esta manera debe cumplirse lo siguiente:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \phi_j}\right)^* \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_k}\right)^* \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k} \rho_i = 0. \quad (5.9)$$

Nuevamente reescribimos el resultado como  $\zeta_i \rho_i = 0$  para simplificar la notación.

Las ecuaciones (5.7), (5.9) y la condición de ortogonalidad  $\rho_i \Lambda_i = 0$  nos permiten demostrar que  $\zeta_i = 0$ . Consideremos un vector cualquiera  $X_i$ . Debido a que  $\rho_i$  es arbitrario,  $X_i$  puede escribirse como una combinación lineal de un vector paralelo y uno ortogonal a  $\rho_i$ . Esto es:

$$X_i = \alpha \rho_i + \beta \Lambda_i. \quad (5.10)$$

Consideremos el producto  $X_i \zeta_i$ . Explícitamente se escribe:

$$X_i \zeta_i = \alpha \rho_i \zeta_i + \beta \Lambda_i \zeta_i = 0. \quad (5.11)$$

El producto  $X_i \zeta_i$  es cero debido a las ecuaciones (5.7) y (5.9). Pero como  $X_i$  es un vector cualquiera, entonces  $\zeta_i$  debe ser el vector nulo  $\zeta_i = 0$ . Es decir:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \phi_j}\right)^* \left(\frac{\partial W}{\partial \phi_k}\right)^* \frac{\partial^3 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j \partial \phi_k} = 0. \quad (5.12)$$

Esta es la tercera y última condición para demostrar la degeneración del potencial escalar en un vacío que rompe supersimetría.

Podemos considerar ahora una variación finita en los campos  $\Delta\phi_i = z \left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right)^*$ , donde  $\frac{\partial W}{\partial\phi_i} \neq 0$ , es decir  $\Delta\phi_i$  está en cualquier dirección donde se rompa supersimetría. Sustituyendo  $\Delta\phi_i$  en  $\Delta V$  y utilizando las condiciones (5.2), (5.7), (5.12), vemos que la variación finita del potencial escalar  $\Delta V$  se anula. Por ejemplo, al sustituir  $\Delta\phi_i = z \left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right)^*$  en  $\Delta V$  y considerar el término de tercer orden en  $z$ , se obtiene:

$$\text{Re} \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial\phi_k \partial\phi_m} \right)^* \frac{\partial^3 W}{\partial\phi_i \partial\phi_j \partial\phi_m} \left( \frac{\partial W}{\partial\phi_i} \right)^* \left( \frac{\partial W}{\partial\phi_j} \right)^* \frac{\partial W}{\partial\phi_k} |z|^2 z \right] = 0 \quad (5.13)$$

La expresión (5.13) se anula tanto por la condición (5.2) como por la condición (5.12). Haciendo un análisis similar para los otros términos, se concluye que:

$$\Delta V = 0. \quad (5.14)$$

El potencial escalar  $V$  no cambia a lo largo de la dirección de  $\phi_i$  con  $\frac{\partial W}{\partial\phi_i} \neq 0$ , y por lo tanto el vacío considerado está degenerado a nivel árbol. A esta dirección se le conoce como dirección plana del potencial y es una característica de la ruptura espontánea de supersimetría.

## 5.2. Modelos de O’Raifeartaigh Generalizados

A continuación se determinará la forma que tiene el superpotencial más general consistente con ruptura espontánea de supersimetría por términos  $F$ , lo que se conoce como modelos de O’Raifeartaigh generalizados. Para ello consideremos un modelo Wess-Zumino con  $N$  multipletes. El superpotencial renormalizable más general es:

$$W = \lambda_i \phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k. \quad (5.15)$$

Si elegimos la notación  $\phi_0 \equiv X$  y el resto de los campos  $\phi_a$ , donde  $a = 1, \dots, N-1$ , podemos reescribir el superpotencial (5.15) como sigue:

$$\begin{aligned} W = & \lambda X + \lambda_a \phi_a + \frac{1}{2} m_{00} X^2 + m_{0a} X \phi_a + \frac{1}{2} m_{ab} \phi_a \phi_b \\ & + \frac{1}{3} g_{000} X^3 + g_{00a} X^2 \phi_a + g_{0ab} X \phi_a \phi_b + \frac{1}{3} g_{abc} \phi_a \phi_b \phi_c. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Esta expresión es conveniente ya que podemos considerar lo que ocurre cuando se rompe supersimetría debido al término  $F_X$ .

Si consideramos que la ruptura espontánea de supersimetría ocurre únicamente debido al término  $F_X$ , deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial W}{\partial X} \neq 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \phi_a} = 0. \quad (5.17)$$

Utilizando la ecuación (5.2) y la relación anterior  $\frac{\partial W}{\partial X} \neq 0$ , obtenemos las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial \phi_a} = 0. \quad (5.18)$$

Por último, al considerar la ecuación (5.12) y nuevamente la relación  $\frac{\partial W}{\partial X} \neq 0$ , se obtiene:

$$\frac{\partial^3 W}{\partial X^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial X^2 \partial \phi_a} = 0. \quad (5.19)$$

Las ecuaciones (5.17–5.19) imponen ciertas restricciones al superpotencial  $W$ . Para verlo apliquemos las condiciones dadas en (5.19) al superpotencial (5.16). Estas son:

$$\frac{\partial^3 W}{\partial X^3} = 2g_{000} = 0, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial X^2 \partial \phi_a} = 2g_{00a} = 0. \quad (5.21)$$

Utilizando este resultado y las condiciones (5.18) sobre el superpotencial, hallamos las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = m_{00} = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial \phi_a} = m_{0a} + 2g_{0ab}\phi_b = 0. \quad (5.23)$$

Hemos visto que las constantes  $g_{000}$ ,  $g_{00a}$  y  $m_{00}$  se anulan. Por lo tanto el superpotencial (5.16) se puede escribir:

$$W = \lambda X + \lambda_a \phi_a + m_{0a} X \phi_a + \frac{1}{2} m_{ab} \phi_a \phi_b + g_{0ab} X \phi_a \phi_b + \frac{1}{3} g_{abc} \phi_a \phi_b \phi_c. \quad (5.24)$$

Se observa que se han cancelado los términos cuadráticos y cúbicos en  $X$ . La condición  $\frac{\partial W}{\partial \phi_a} = 0$  dada en (5.17) implica la condición adicional:

$$\lambda_a + m_{ab}\phi_b + g_{abc}\phi_b\phi_c = 0, \quad (5.25)$$

donde se ha empleado la ecuación (5.23).

A continuación deseamos simplificar la expresión (5.24), para ello se considera una traslación en los campos  $\phi_a = \sigma_a + \bar{\phi}_a$ , donde  $\bar{\phi}_a$  denota los valores de expectación de  $\phi_a$ . Es claro que los nuevos campos  $\sigma_a$  tienen valor de expectación nulo,  $\bar{\sigma}_a = 0$ . Notemos que los  $\bar{\phi}_a$  deben satisfacer las ecuaciones (5.23) y (5.25). Sustituyendo la redefinición de los campos en el superpotencial  $W$  se obtiene:

$$W = \lambda'X + m'_{ab}\sigma_a\sigma_b + g'_{ab}X\sigma_a\sigma_b + \frac{1}{3}g_{abc}\sigma_a\sigma_b\sigma_c + K. \quad (5.26)$$

Las nuevas constantes son:

$$\lambda' = \lambda + m_{0a}\bar{\phi}_a + g_{0ab}\bar{\phi}_a\bar{\phi}_b, \quad (5.27)$$

$$m'_{ab} = \frac{1}{2}m_{ab} + g_{abc}\bar{\phi}_c, \quad (5.28)$$

$$g'_{ab} = g_{0ab}, \quad (5.29)$$

$$K = \lambda_a\bar{\phi}_a + \frac{1}{2}m_{ab}\bar{\phi}_a\bar{\phi}_b + \frac{1}{3}g_{abc}\bar{\phi}_a\bar{\phi}_b\bar{\phi}_c. \quad (5.30)$$

Se observa en (5.26) que el término lineal en los campos  $\sigma_a$  se ha cancelado. Esto implica que  $\frac{\partial W}{\partial \sigma_a} = 0$  se cumple cuando  $\bar{\sigma}_a = 0$ , como se había impuesto. Por otra parte notamos que  $K$  es un término constante y no afecta al modelo ya que únicamente las derivadas del superpotencial  $W$  son relevantes para la teoría y por lo tanto puede despreciarse. Con estas observaciones y eliminando las primas en las constantes y denotando los campos nuevamente como  $\phi_a$ , el superpotencial  $W$  dado en (5.26) se escribe:

$$W = \lambda X + m_{ab}\phi_a\phi_b + g_{ab}X\phi_a\phi_b + \frac{1}{3}g_{abc}\phi_a\phi_b\phi_c. \quad (5.31)$$

La expresión (5.31) se conoce como el superpotencial canónico de los modelos de tipo O'Raifeartaigh para teorías con ruptura espontánea de supersimetría por términos  $F$ .

Por construcción, en un superpotencial de la forma (5.31) existe un mínimo en  $\bar{\phi}_a = 0$  que rompe supersimetría debido al término  $F_X$ . El valor de expectación de  $X$  es arbitrario y por lo tanto  $X$  es una dirección plana de acuerdo al análisis general realizado.

Finalmente consideremos ahora la situación en que hay varios campos  $X_i$  cuyos términos  $F$  tienen valor de expectación de vacío distinto de cero  $\langle F_{X_i} \rangle \neq 0$ , es decir rompen supersimetría. En un modelo genérico, es decir un modelo como el (5.31) donde ningún parámetro se cancela arbitrariamente, las condiciones (5.2) y (5.12) implican que no puede haber ningún término en el superpotencial que acople a estos campos  $X_i$  entre sí y por lo tanto únicamente aparecen en términos lineales. Consideremos un modelo con campos  $X_i$  tales que  $\langle F_{X_i} \rangle \neq 0$  y campos  $\phi_a$  con  $\langle F_{\phi_a} \rangle = 0$ , de la discusión realizada podemos escribir el superpotencial  $W$  de la siguiente manera:

$$W = \sum_i X_i f_i(\phi_a) + g(\phi_a) , \quad (5.32)$$

donde  $i = 1, \dots, r$  y  $a = 1, \dots, s$ . Las funciones  $f_i(\phi_a)$  y  $g(\phi_a)$  son polinomios genéricos en  $\phi_a$  cuadráticos y cúbicos respectivamente. Los modelos que se obtienen al considerar  $g(\phi_a) = 0$  han sido analizados por Intrilligator, Seiberg y Shih en [16]. Puede verse que si  $r > s$ , no es posible anular todos los términos  $F_{X_i}^* = f_i(\phi_a)$  debido a que el sistema está sobredeterminado y por lo tanto supersimetría está rota. La expresión (5.32) se conoce como forma genérica del superpotencial en modelos de O’Raifeartaigh generalizados y fue propuesta en un artículo de Komargodski y Shih [25] como generalización a los casos estudiados en [16].

Es importante resaltar que no todo modelo que rompe supersimetría por términos  $F$  puede colocarse en la forma canónica (5.31), únicamente los modelos genéricos pueden hacerlo. Como ejemplo consideremos el siguiente superpotencial:

$$W = f\phi_1 - f\phi_2 + \frac{m}{2}\phi_1^2 + m\phi_1\phi_2 + \frac{m}{2}\phi_2^2 . \quad (5.33)$$

Los términos  $F_i^*$  para este superpotencial son:

$$F_1^* = f + m(\phi_1 + \phi_2) , \quad (5.34)$$

$$F_2^* = -f + m(\phi_1 + \phi_2) . \quad (5.35)$$

Se observa que (5.33) no es genérico porque los acoplos no son arbitrarios. Claramente no está en la forma canónica (5.31) pero es un modelo de O’Raifeartaigh debido a que supersimetría está rota porque no pueden anularse simultáneamente los términos  $F_i^*$ .

## CAPÍTULO 6

### Simetría R y Ruptura Espontánea de Supersimetría

Además de las simetrías de Lorentz y supersimetría, es posible que el Lagrangiano Wess-Zumino sea invariante bajo otras simetrías aún no estudiadas. Un ejemplo muy importante y que está estrechamente relacionado con supersimetría es una simetría global  $U(1)_R$  conocida como simetría R o R-simetría. En este capítulo estudiaremos primero las transformaciones de la simetría R y luego se discutirá su conexión con la ruptura espontánea de supersimetría.

#### 6.1. Simetría R en modelos Wess-Zumino

La simetría R se origina de la invariancia del álgebra  $\mathcal{N} = 1$  (3.16 – 3.25) bajo la siguiente transformación de fase

$$Q'_a = e^{-i\beta} Q_a , \quad (6.1)$$

donde  $\beta$  es un parámetro real. Se dice que  $Q_a$  tiene carga  $R(Q_a) = -1$ . La invariancia del álgebra se demuestra fácilmente sustituyendo la transformación (6.1) en cada una de las expresiones del álgebra y recordando que los generadores  $P_\mu$  y  $J_{\mu\nu}$  son neutros.

Por otra parte notamos que el parámetro de la transformación de supersimetría que hemos denotado  $\xi$  debe transformar según la expresión

$$\xi' = e^{i\beta}\xi . \quad (6.2)$$

El parámetro  $\xi$  tiene carga  $R(\xi) = 1$ . La manera en que transforman  $Q$  y  $\xi$  garantiza que un campo  $\Phi$  y su variación  $\delta\Phi$  tienen la misma carga. Esto puede demostrarse sustituyendo las transformaciones (6.1) y (6.2) en la ecuación (3.8)  $\delta\Phi = i[\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}, \Phi]$ .

La simetría global  $U(1)_R$  puede ser también una simetría del Lagrangiano Wess-Zumino dependiendo del valor de las R-cargas de los campos en los multipletes. Dado un multiplete  $(A_i, \psi_i, F_i)$ , le asignamos carga  $R_i$  al campo escalar, esto es  $R(A_i) = R_i$  y por lo tanto podemos escribir:

$$A'_i = e^{i\beta R_i} A_i . \quad (6.3)$$

Utilizando las transformaciones de supersimetría (2.37) y las ecuaciones (6.2) y (6.3), se demuestra que las R-cargas de los campos  $\psi_i$  y  $F_i$  son  $R(\psi_i) = R_i - 1$  y  $R(F_i) = R_i - 2$ . Por lo tanto los campos deben transformar bajo R-simetría de la siguiente forma:

$$\psi'_i = e^{i\beta(R_i-1)}\psi_i , \quad F'_i = e^{i\beta(R_i-2)}F_i . \quad (6.4)$$

Podemos realizar como ejemplo el cálculo para el campo  $\psi_i$ , considerando que transforma como  $\psi'_i = e^{i\beta C}\psi_i$ , deseamos hallar  $C$ . Utilizando las transformaciones (2.37) y las ecuaciones (6.2) y (6.3), escribimos  $\delta A'_i = \sqrt{2}\xi'\psi'_i$ , esto es:

$$e^{i\beta R_i}\delta A_i = e^{i\beta(1+C)}\sqrt{2}\xi\psi_i . \quad (6.5)$$

De la ecuación (6.5) se observa que  $C = R_i - 1$ . De manera análoga se comprueba el valor de la R-carga de  $F_i$ .

Una vez determinado cómo transforman los campos, podemos estudiar las condiciones necesarias para que el Lagrangiano Wess-Zumino sea invariante bajo R-simetría.



Utilizando las transformaciones de los campos (6.3), (6.4) y considerando que el Lagrangiano debe ser neutro, es decir  $R(\mathcal{L}) = 0$ , se verifica que la invariancia de  $\mathcal{L}$  se cumple si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\lambda_i \neq 0, \quad \text{si} \quad R_i = 2, \quad (6.6)$$

$$m_{ij} \neq 0, \quad \text{si} \quad R_i + R_j = 2, \quad (6.7)$$

$$g_{ijk} \neq 0, \quad \text{si} \quad R_i + R_j + R_k = 2. \quad (6.8)$$

Como ejemplo verifiquemos el cálculo para el término de masas que recordamos está dado por:

$$\mathcal{L}_m = - \sum_{i,j} m_{ij} (A_i F_j + \frac{1}{2} \psi_i \psi_j) + c.h. \quad (6.9)$$

Al calcular  $\mathcal{L}'_m$  sustituyendo las transformaciones (6.3) y (6.4) se obtiene:

$$\mathcal{L}'_m = - \sum_{i,j} e^{i\beta(R_i+R_j-2)} m_{ij} (A_i F_j + \frac{1}{2} \psi_i \psi_j) + c.h. \quad (6.10)$$

Se concluye que los términos en  $\mathcal{L}_m$  con  $m_{i,j} \neq 0$  pueden ser parte de un Lagrangiano neutro si  $R_i + R_j = 2$ . Similarmente, las condiciones (6.6) y (6.8) garantizan que los términos  $\mathcal{L}_F$  y  $\mathcal{L}_g$ , dados en (2.35) y (2.36), son invariantes.

Las condiciones (6.6 – 6.8) sobre las cargas, a su vez implican que cuando el Lagrangiano es invariante, el superpotencial transforma de manera bien definida. Recordando que el superpotencial viene dado por:

$$W = \lambda_i A_i + \frac{1}{2} m_{ij} A_i A_j + \frac{1}{3} g_{ijk} A_i A_j A_k, \quad (6.11)$$

y utilizando la ecuación (6.3), se demuestra que el superpotencial  $W$  tiene R-carga  $R(W) = 2$ , es decir no es neutro y por lo tanto se cumple lo siguiente:

$$W' = e^{2i\beta} W. \quad (6.12)$$

Como regla práctica tenemos que si dado un superpotencial  $W$  existe una asignación de R-cargas  $R_i$  de los campos  $A_i$  tales que  $R(W) = 2$ , entonces el modelo definido por este  $W$  tiene una simetría R.

## 6.2. Simetría R y Ruptura Espontánea de Supersimetría en Modelos Wess-Zumino

La conexión entre simetría R y ruptura de supersimetría por términos  $F$  fue establecida en el artículo seminal de Nelson y Seiberg [17]. Estos autores demostraron que la existencia de una simetría R es una condición necesaria para la ruptura espontánea de supersimetría en un modelo genérico. Cuando el modelo Wess-Zumino no es R-simétrico aparecen mínimos invariantes supersimétricos. Por otra parte, es necesario que la simetría R esté rota para poder generar masas de gauginos<sup>1</sup>.

Si la simetría R se rompe explícitamente, existirán mínimos supersimétricos tal y como lo argumenta [17] y veremos más adelante. Sin embargo queda la posibilidad de romper supersimetría en un vacío metaestable como lo proponen originalmente Intriligator, Seiberg y Shih [16]. En la sección 6.3 estudiaremos un ejemplo concreto de ruptura explícita de R-simetría presentado en [16]. Otra alternativa es romper R-simetría en forma espontánea. En la sección 6.3 presentaremos un ejemplo de este tipo investigado recientemente por Shih [18].

A continuación discutiremos aspectos generales de la relación entre simetría R y ruptura espontánea de supersimetría, para este fin seguiremos el análisis de Ray [26]. Antes de empezar es necesario hacer dos definiciones importantes:

1. Se dice que un modelo es genérico si los parámetros que lo conforman admiten un valor arbitrario a menos que una simetría imponga que tomen un valor particular.
2. Un estado de vacío es R-simétrico si los campos con R-carga distinta de cero tienen valor de expectación nulo.

---

<sup>1</sup>En una teoría de calibre supersimétrica, además de vectores de calibre  $A_\mu$  deben existir gauginos o fermiones de calibre  $\lambda$ . Bajo supersimetría  $\delta A_\mu = i\xi\sigma_\mu\bar{\lambda} + c.h.$  [6]. El campo  $A_\mu$  es neutro bajo  $U(1)_R$ , de manera que  $R(\lambda) = 1$  y por lo tanto un término de masas de gauginos  $m_\lambda\lambda\lambda + c.h.$ , rompe simetría R.

El análisis se basa en la existencia de un Lagrangiano Wess-Zumino R-simétrico. Como hemos visto, esto significa que es posible asignar cargas  $R(A_i) = R_i$  tales que el superpotencial  $W$  tiene  $R(W) = 2$ . A partir de esta hipótesis se pueden deducir tres resultados importantes que discutiremos a continuación.

### Resultado I

*Si R-simetría no se rompe, es decir el estado de vacío es R-simétrico, entonces supersimetría se rompe espontáneamente solamente si existen campos de R-carga 2.*

Para demostrar este resultado consideremos un superpotencial  $W$  con R-simetría donde  $\phi_i$  son los campos del modelo. Recordamos que  $F_i^* = \frac{\partial W}{\partial \phi_i}$ , de tal manera que la carga de  $F_i^*$  es  $R(F_i^*) = 2 - R_i$ . Vemos entonces que si existe un campo con  $R_i = 2$ , su término  $F_i^*$  correspondiente tendrá carga nula y puede adquirir un valor de expectación diferente de cero consistente con un estado R-simétrico, esto es:

$$\langle F_i^* \rangle \neq 0 . \quad (6.13)$$

Pero esta es precisamente la condición de ruptura de supersimetría. Veamos algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1. Consideremos el siguiente superpotencial con dos campos escalares  $\phi_0$  y  $\phi_1$ :

$$W = \frac{1}{2} \phi_1^2 f(\phi_0) , \quad (6.14)$$

donde  $f(\phi_0)$  es una función arbitraria del campo  $\phi_0$ . Este superpotencial admite una simetría R bajo la asignación de cargas  $R(\phi_0) = 0$  y  $R(\phi_1) = 1$  y no posee campos con R-carga 2. Calculamos los términos  $F^*$ . Estos son:

$$F_0^* = \frac{\partial W}{\partial \phi_0} = \frac{1}{2} \phi_1^2 f'(\phi_0) , \quad (6.15)$$

$$F_1^* = \frac{\partial W}{\partial \phi_1} = \phi_1 f(\phi_0) . \quad (6.16)$$

El campo  $\phi_1$  tiene R-carga distinta de cero y por lo tanto, en un vacío R-simétrico, su valor de expectación debe ser nulo  $\phi_1 = 0$ . Este resultado anula ambos términos

$F^*$ , (6.15) y (6.16), y por lo tanto la solución  $\phi_1 = 0$ ,  $\phi_0$  arbitrario es un vacío que preserva tanto R-simetría como supersimetría.

Ejemplo 2. Sea un superpotencial con un único campo  $X$ :

$$W = \lambda X . \quad (6.17)$$

El campo  $X$  posee R-carga  $R(X) = 2$ . Al existir un campo con carga 2, supersimetría puede romperse. Calculemos el término  $F_X^*$  correspondiente. Este es:

$$F_X^* = \frac{\partial W}{\partial X} = \lambda . \quad (6.18)$$

En general  $\lambda \neq 0$  y por lo tanto supersimetría está rota. Para este modelo, el valor de expectación de  $X$  es arbitrario lo cual rompe con R-simetría, pero esto es consistente con la ruptura de supersimetría ya descrita.

Ejemplo 3. Consideremos una perturbación del superpotencial anterior (6.17) de la forma:

$$W = \lambda X + \frac{1}{2}\epsilon X^2 , \quad (6.19)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro pequeño. Vemos que este superpotencial rompe explícitamente R-simetría. La condición de supersimetría  $F_X^* = 0$  impone que  $X$  debe satisfacer la ecuación:

$$\lambda + \epsilon X = 0 . \quad (6.20)$$

Esta condición se satisface si  $X = -\lambda/\epsilon$ . Vemos que la ruptura explícita de R-simetría restituye supersimetría tal como se comentó en la introducción de esta sección. En la siguiente sección veremos un ejemplo más elaborado con ruptura explícita de R-simetría.

Existe un corolario al enunciado I:

I'. *Si un superpotencial no posee campos con R-carga 2, ruptura de supersimetría implica también ruptura de R-simetría.*

Este resultado es de esperarse porque si no hay campos de carga 2, entonces los términos  $F_i$  deben estar cargados. Por lo tanto si se rompe supersimetría,  $\langle F_i \rangle \neq 0$

para algún  $i$  y por lo tanto también se rompe R-simetría. En la sección 6.3 se estudiará un ejemplo de este caso publicado por Komargodski y Shih [25].

### Resultado II

*En un modelo genérico con  $n_2$  campos de R-carga 2 y  $n_0$  campos neutros, existe un estado de vacío R-simétrico y supersimétrico si y solo si  $n_0 \geq n_2$ .*

Para demostrar este resultado calculemos las derivadas del superpotencial  $W$  respecto a los campos  $X_i$  con  $R(X_i) = 2$  y tomemos su valor de expectación. Esto es:

$$\left\langle \frac{\partial W}{\partial X_i} \right\rangle = \frac{\partial W}{\partial X_i}(\phi_a) = 0, \quad (6.21)$$

donde  $\phi_a$  son los campos con R-carga nula y además son los únicos campos que pueden tener valor de expectación distinto de cero para mantener la simetría R. La expresión (6.21) forma un conjunto de  $n_2$  ecuaciones con  $n_0$  incógnitas el cual tiene solución para una elección genérica de parámetros si el número de incógnitas es al menos igual al número de ecuaciones. Es decir:

$$n_0 \geq n_2. \quad (6.22)$$

De este resultado se observa que en el caso  $n_0 > n_2$ , la solución estará degenerada en  $(n_0 - n_2)$  direcciones. Por otra parte, es claro que si se tiene  $n_2 > n_0$ , no existe solución genérica y por lo tanto supersimetría se rompe necesariamente.

Para ilustrar este resultado estudiaremos algunos ejemplos.

Ejemplo 4. Sea un superpotencial  $W$  con dos campos  $X$  y  $\phi_0$  tales que  $R(X) = 2$  y  $R(\phi_0) = 0$ . El superpotencial más general con  $R(W) = 2$  consistente con esta elección de carga es:

$$W = X \left( \lambda + m\phi_0 + \frac{1}{2}h\phi_0^2 \right). \quad (6.23)$$

Debido a que  $n_0 = n_2$ , esperamos que el estado de vacío R-simétrico sea también un vacío supersimétrico. Para verlo, calculemos los términos  $F_i^*$ . Estos son:

$$F_X^* = \frac{\partial W}{\partial X} = \lambda + m\phi_0 + \frac{1}{2}h\phi_0^2, \quad (6.24)$$

$$F_{\phi_0}^* = \frac{\partial W}{\partial \phi_0} = X(m + h\phi_0). \quad (6.25)$$

La condición para supersimetría  $\langle F_i^* \rangle = 0$  impone que el vacío debe ser:

$$X = 0, \quad (6.26)$$

$$\phi_0 = -\frac{m}{h} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4h\lambda}{m^2}} \right). \quad (6.27)$$

Esta solución es R-simétrica debido a la condición (6.26) y a la vez preserva supersimetría. Existe también un extremo para  $\phi_0 = -m/h$  y  $X$  arbitrario pero rompe supersimetría debido al término  $F_X^*$  y no es en general R-simétrica.

#### Ejemplo 5. Modelo de O’Raifeartaigh.

Recordamos que el superpotencial del modelo de O’Raifeartaigh se escribe:

$$W = \lambda X + m\phi_1\phi_2 + \frac{1}{2}hX\phi_1^2. \quad (6.28)$$

Este superpotencial tiene  $R(W) = 2$  con asignación  $R(X) = R(\phi_2) = 2$  y  $R(\phi_1) = 0$ . En este caso se tiene  $n_2 > n_0$  y hemos verificado detalladamente en el capítulo anterior que supersimetría está rota.

Para finalizar, recordamos que en el capítulo 5 mencionamos los modelos de O’Raifeartaigh generalizados. Un caso particular de estos modelos surge al considerar  $g(\phi_a) = 0$ , es decir modelos de la forma:

$$W = \sum_i X_i f_i(\phi_a), \quad (6.29)$$

donde  $i = 1, \dots, r$  y  $a = 1, \dots, s$ . Estos modelos fueron analizados en [16] considerando el caso en que  $R(X_i) = 2$ ,  $R(\phi_a) = 0$ . Si  $r > s$ , no es posible anular todos los términos  $F_{X_i}^* = f_i(\phi_a)$  para  $f_i(\phi_a)$  genérico, debido a que el sistema está sobredeterminado

y por lo tanto supersimetría está rota. Esto es consistente con el resultado II, considerando  $n_2 = r$  y  $n_0 = s$ . Una amplia clase de los modelos estudiados en la literatura corresponden a este tipo.

### Resultado III (Nelson-Seiberg)

*En un modelo genérico, un vacío que rompe simetría  $R$  también rompe supersimetría.*

Este resultado se demostró originalmente en [17]. Para empezar se considera un superpotencial  $W$  con  $N$  campos escalares. Uno de los campos, denotado  $X$ , tiene valor de expectación y R-carga distintos de cero  $R_X \neq 0$ , es decir R-simetría está rota. Al resto de los campos se denota  $\phi_a$ , donde  $a = 1, \dots, N - 1$ . Con esta elección se definen campos neutros  $\rho_a$  tales que:

$$\phi_a = \rho_a X^{R_a/R_X} . \quad (6.30)$$

En esta oportunidad  $R_a$  es la R-carga de  $\phi_a$  y se observa que  $R(\rho_a) = 0$ . Como  $R(W) = 2$  es posible escribir:

$$W = X^{2/R_X} f(\rho_a) , \quad (6.31)$$

donde  $f$  es una función *genérica* de los campos  $\rho_a$ . Al calcular los términos  $F^*$  del superpotencial (6.31) e imponer  $F^* = 0$ , se obtiene:

$$X^{2/R_X} \partial_a f = 0 , \quad (6.32)$$

$$\frac{2}{R_X} X^{\frac{2}{R_X}-1} f(\rho_a) = 0 , \quad (6.33)$$

donde  $\partial_a$  denota las derivadas parciales respecto a los campos  $\rho_a$ . Debido a que por hipótesis  $\langle X \rangle \neq 0$ , se obtienen las condiciones:

$$\partial_a f = 0 , \quad f(\rho_a) = 0 . \quad (6.34)$$

Estas ecuaciones forman un conjunto de  $N$  ecuaciones con  $N - 1$  incógnitas el cual está sobredeterminado y no tiene solución genérica y por lo tanto supersimetría también se encuentra rota.

Como ejemplo consideremos nuevamente el modelo de O’Raifeartaigh con el superpotencial dado en (6.28). Recordamos que en este modelo la asignación de cargas es  $R(X) = R(\phi_2) = 2$  y  $R(\phi_1) = 0$ . Deseamos realizar la factorización (6.31) en términos del campo  $X$  ya que  $R(X) \neq 0$ . Para hacer esto debemos expresar los demás campos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  según la expresión (6.30). Esto es:

$$\phi_1 = \rho_1, \quad \phi_2 = \rho_2 X. \quad (6.35)$$

Con esta redefinición de campos el superpotencial se escribe:

$$W = X(\lambda + m\rho_1\rho_2 + \frac{1}{2}h\rho_1^2). \quad (6.36)$$

La condición de supersimetría sobre los términos  $F^*$  impone:

$$\lambda + m\rho_1\rho_2 + \frac{1}{2}h\rho_1^2 = 0, \quad (6.37)$$

$$m\rho_2 + h\rho_1 = 0, \quad (6.38)$$

$$m\rho_1 = 0, \quad (6.39)$$

donde se ha utilizado  $X \neq 0$ . Estas ecuaciones no tienen solución simultánea y rompen supersimetría como ya hemos estudiado.

Existen excepciones al resultado de Nelson-Seiberg. Algunas de ellas son estudiadas en el artículo de Ray [26], sin embargo estas excepciones involucran superpotenciales de grado mayor que 3 y por lo tanto no son renormalizables. Otras excepciones fueron estudiadas por Nelson y Seiberg [17] y están relacionadas con el hecho de que si el superpotencial no es genérico existen modelos con vacíos supersimétricos que rompen  $R$ -simetría. Un modelo de este tipo se discute a continuación.

Ejemplo 6. Consideremos el siguiente superpotencial:

$$W = X\phi_2^2 + X\phi_2\phi_3 + \phi_1\phi_2^2 + m\phi_1\phi_3. \quad (6.40)$$

Bajo la asignación de cargas  $R(X) = R(\phi_1) = 2$ ,  $R(\phi_2) = R(\phi_3) = 0$ , el superpotencial (6.40) tiene  $R(W) = 2$ . Al calcular los términos  $F^*$  y aplicar la condición de



supersimetría, se obtiene:

$$\phi_2^2 + \phi_2\phi_3 = 0, \quad (6.41)$$

$$\phi_2^2 + m\phi_3 = 0, \quad (6.42)$$

$$2X\phi_2 + X\phi_3 + 2\phi_1\phi_2 = 0, \quad (6.43)$$

$$X\phi_2 + m\phi_1 = 0. \quad (6.44)$$

Este sistema de ecuaciones tiene dos soluciones. La primera solución viene dada por

$$X = \phi_1 = 0, \quad \phi_2 = m, \quad \phi_3 = -m. \quad (6.45)$$

Esta solución preserva tanto supersimetría como R-simetría debido a que los campos con valores de expectación distintos de cero poseen R-carga nula. La segunda solución que preserva supersimetría es

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0, \quad X \text{ indeterminado.} \quad (6.46)$$

Debido a que en general  $X \neq 0$  y su R-carga es distinta de cero, la segunda solución rompe la simetría R. Sin embargo esto no contradice el resultado III, ya que éste suponía un modelo genérico y este modelo no lo es porque en  $W$  se puede incluir un término  $\lambda X$ , con  $\lambda$  arbitrario, que preserva la simetría R. Al hacerlo se encuentra que existe solo un vacío supersimétrico con  $X = 0$  y  $\phi_1 = 0$  y la simetría R no se rompe.

En resumen, el resultado de Nelson-Seiberg establece que la ruptura espontánea de simetría R es una condición suficiente para la ruptura de supersimetría. En este sentido, la existencia de una simetría R es condición necesaria para la ruptura de supersimetría. Aquí se asume que el superpotencial es genérico pues en caso contrario es posible tener ruptura espontánea de supersimetría sin que exista simetría R. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 7. Consideremos el siguiente superpotencial:

$$W = \lambda_1\phi_1\phi_3^2 + \lambda_2\phi_2(\phi_3^2 - \mu^2) + \lambda_3\phi_3^3 + m_1\phi_3^2 + m_2^2\phi_3. \quad (6.47)$$

Para este superpotencial no existe una asignación de R-cargas a los campos tal que  $R(W) = 2$ , es decir no existe R-simetría. Al calcular los términos  $F_i^*$  se obtiene:

$$F_{\phi_1}^* = \lambda_1 \phi_3^2, \quad (6.48)$$

$$F_{\phi_2}^* = \lambda_2 (\phi_3^2 - \mu^2), \quad (6.49)$$

$$F_{\phi_3}^* = 2\lambda_1 \phi_1 \phi_3 + 2\lambda_2 \phi_2 \phi_3 + 3\lambda_3 \phi_3^2 + 2m_1 \phi_3 + m_2^2. \quad (6.50)$$

Vemos que no es posible anular simultáneamente los términos  $F_i^*$  y por lo tanto supersimetría está rota. Debido a que el superpotencial (6.47) no es genérico, aún podemos incluir otros términos. En particular al añadir un término del tipo  $\gamma \phi_1^2$  el superpotencial continúa sin admitir simetría R. Sin embargo al calcular los términos  $F_i^*$ , se encuentra que el término (6.48) se escribe  $F_{\phi_1}^* = \lambda_1 \phi_3^2 + 2\gamma \phi_1$  y el nuevo sistema  $F_i^* = 0$  ahora admite una solución. Esta es:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\lambda_1 \mu^2 / 2\gamma, \\ \phi_2 &= \frac{\lambda_1^2 \mu^2}{2\lambda_2 \gamma} - \frac{3\lambda_3 \mu^2 + 2m_1 |\mu| + m_2^2}{2\lambda_2 |\mu|}, \\ \phi_3 &= |\mu|. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Esta solución restaura supersimetría y es lo que se espera al no existir R-simetría.

### 6.3. Otros Modelos con Ruptura Espontánea de Supersimetría

Es esta sección se abordará el estudio de algunos ejemplos más elaborados que los presentados en la sección anterior. En primer lugar consideraremos un modelo con ruptura explícita de simetría R, en particular se tomará el modelo de O’Raifeartaigh y se le añadirá un término que rompe explícitamente la simetría R. Al no haber simetría R esperamos que haya un vacío supersimétrico por el resultado III de Nelson-Seiberg. Sin embargo aún puede haber vacíos metaestables y veremos que esto es lo que ocurre en el modelo de O’Raifeartaigh modificado. En segundo lugar estudiaremos el modelo de Komargodski-Shih en el cual no hay campos con R-carga 2 y se muestra que la

ruptura de supersimetría impone la ruptura de simetría R, esto es un ejemplo del corolario I'. Por último veremos el modelo de Shih en el cual las correcciones radiativas no restauran la simetría R. Este hecho ocurre en el modelo de O'Raifeartaigh original y muchos otros y puede demostrarse [18] que es necesario que haya campos con R-carga distinta de dos o cero para que las correcciones radiativas no restauren la simetría R. Estos ejemplos sirven para ilustrar y ampliar los resultados estudiados en la sección anterior.

### 6.3.1. Modelo de O'Raifeartaigh Modificado.

Este modelo permite estudiar lo que ocurre cuando R-simetría está rota explícitamente dentro de la teoría. Consideremos una perturbación del superpotencial (6.28),

$$W = \lambda X + m\phi_1\phi_2 + \frac{1}{2}hX\phi_1^2 + \frac{1}{2}\epsilon m\phi_2^2. \quad (6.52)$$

Los tres primeros términos corresponden al modelo de O'Raifeartaigh clásico. El último término tiene una R-carga  $R(\phi_2^2) = 4$  y rompe R-simetría explícitamente. El parámetro  $\epsilon$  cuantifica el grado de ruptura de R-simetría. Como R-simetría está rota, sabemos que debe aparecer un mínimo supersimétrico. Para verificar esta afirmación, calculamos los términos  $F^*$ . Estos son:

$$F_X^* = \lambda + \frac{1}{2}h\phi_1^2, \quad (6.53)$$

$$F_{\phi_1}^* = m\phi_2 + hX\phi_1, \quad (6.54)$$

$$F_{\phi_2}^* = m\phi_1 + \epsilon m\phi_2. \quad (6.55)$$

Al resolver el sistema  $F_i^* = 0$  se comprueba que

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \pm \sqrt{-\frac{2\lambda}{h}}, \\ \phi_2 &= \mp \frac{1}{\epsilon} \phi_1, \\ X &= \frac{m}{h\epsilon}, \end{aligned} \quad (6.56)$$

es solución. Notamos que en efecto hay dos mínimos supersimétricos dependiendo de la escogencia en el signo de las raíces. Es importante resaltar que en este modelo la

aparición de mínimos supersimétricos es consecuencia directa de la ruptura explícita de la simetría R tal como se desprende del resultado III. La solución (6.56) es un mínimo global de  $V$  puesto que es invariante supersimétrico y cumple  $V = 0$ . Sin embargo es posible que existan otros mínimos en  $V$ . Es evidente que de existir estos mínimos, serán mínimos locales, correspondiendo así a vacíos metaestables del potencial escalar  $V$ .

Para verificar si existe algún otro extremo, analizamos las derivadas del potencial escalar dado por:

$$V = |\lambda + \frac{1}{2}h\phi_1^2|^2 + |m\phi_2 + hX\phi_1|^2 + |m\phi_1 + \epsilon m\phi_2|^2. \quad (6.57)$$

En un extremo se debe cumplir:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = (m\phi_2 + hX\phi_1)^* h\phi_1 = 0, \quad (6.58)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_1} = \left(\lambda + \frac{1}{2}h\phi_1^2\right)^* h\phi_1 + (m\phi_2 + hX\phi_1)^* hX + m^2(\phi_1 + \epsilon\phi_2)^* = 0, \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_2} = m(m\phi_2 + hX\phi_1)^* + \epsilon m^2(\phi_1 + \epsilon\phi_2)^* = 0. \quad (6.60)$$

Además de la solución supersimétrica (6.56) este sistema admite una segunda solución:

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, \quad X \text{ indeterminado}, \quad (6.61)$$

en la cual se rompe supersimetría pues  $F_X^* \neq 0$  como se observa en (6.53). Esta solución corresponde al extremo estable en el modelo de O’Raifeartaigh clásico si  $y = \left|\frac{\lambda h}{m^2}\right| < 1$ .

Para determinar la estabilidad en el modelo actual, evaluamos la matriz de masas cuadradas bosónicas  $\mathcal{M}_B^2$  en el extremo (6.61) y calculamos sus autovalores. La matriz  $\mathcal{M}_B^2$  evaluada en (6.61) es:

$$\mathcal{M}_B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 + h^2|X|^2 & mhX^* + \epsilon m^2 & 0 & \lambda h & 0 \\ 0 & mhX + \epsilon^* m^2 & m^2(1 + |\epsilon|^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda h & 0 & 0 & m^2 + h^2|X|^2 & mhX + \epsilon^* m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & mhX^* + \epsilon m^2 & m^2(1 + |\epsilon|^2) \end{bmatrix}. \quad (6.62)$$

Se observa claramente que existen dos autovalores nulos. Para calcular los autovalores no nulos utilizamos el programa Maple. Estos son:

$$m_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ h^2|X|^2 + m^2(2 + y + |\epsilon|^2) \pm \sqrt{(h^2|X|^2 + m^2(2 + y + |\epsilon|^2))^2 - 4m^4 \left( \left| \frac{hX\epsilon}{m} - 1 \right|^2 + y(1 + |\epsilon|^2) \right)} \right], \quad (6.63)$$

$$m_{3,4}^2 = \frac{1}{2} \left[ h^2|X|^2 + m^2(2 - y + |\epsilon|^2) \pm \sqrt{(h^2|X|^2 + m^2(2 - y + |\epsilon|^2))^2 - 4m^4 \left( \left| \frac{hX\epsilon}{m} - 1 \right|^2 - y(1 + |\epsilon|^2) \right)} \right]. \quad (6.64)$$

Los autovalores son todos positivos si se cumple sobre el campo  $X$  la siguiente restricción:

$$\left| \frac{hX\epsilon}{m} - 1 \right|^2 > y(1 + |\epsilon|^2). \quad (6.65)$$

Esta condición se obtiene de la expresión (6.64). Fuera de este rango existe un modo taquiónico en (6.64) debido a que el autovalor  $m_4^2$  es negativo y por lo tanto el extremo (6.61) es un punto de ensilladura. Notamos que la región (6.65) incluye una vecindad del origen  $X = 0$  si se cumple la condición:

$$y < \frac{1}{1 + |\epsilon|^2}. \quad (6.66)$$

Esta condición se reduce al caso  $y < 1$  del modelo clásico si  $\epsilon = 0$ . También se verifica que el valor  $\epsilon = 0$  reproduce los autovalores del modelo de O’Raifeartaigh clásico (4.38) y (4.39).

A continuación se calcula la masa de los fermiones. Para ello consideramos la matriz  $\mathcal{M}_F^{2Sup}$  y recordamos que los autovalores de  $\mathcal{M}_F^2$  son los autovalores de  $\mathcal{M}_F^{2Sup}$  con multiplicidad 2. Evaluando en el mínimo, la matriz  $\mathcal{M}_F^{2Sup}$  se escribe:

$$\mathcal{M}_F^{2Sup} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 + h^2|X|^2 & mhX^* + \epsilon m^2 \\ 0 & mhX + \epsilon^* m^2 & m^2(1 + |\epsilon|^2) \end{bmatrix}. \quad (6.67)$$

Nuevamente notamos la existencia de un autovalor nulo que es el Goldstino. Calcu-

lamos los autovalores no nulos utilizando el programa Maple. Estos son:

$$m_{1,2}'^2 = \frac{1}{2} \left[ h^2 |X|^2 + m^2 (2 + |\epsilon|^2) \pm \sqrt{(h^2 |X|^2 + m^2 (2 + |\epsilon|^2))^2 - 4m^4 \left( \left| \frac{hX\epsilon}{m} - 1 \right|^2 \right)} \right]. \quad (6.68)$$

Podemos observar que para  $\epsilon = 0$  se recuperan los autovalores (4.43) hallados en el modelo de O’Raifeartaigh clásico.

Para verificar la identidad de la supertraza, consideramos el caso más sencillo donde  $X = 0$ . Sustituyendo  $X = 0$  en (6.63), (6.64) y (6.68) y recordando que los autovalores de  $\mathcal{M}_F^{2^{sup}}$  tienen multiplicidad 2, se obtiene que  $\text{Tr} \mathcal{M}_B^2 = \text{Tr} \mathcal{M}_F^2 = 2m^2(2 + |\epsilon|^2)$  y por lo tanto se cumple  $\text{STr} \mathcal{M}^2 = 0$ .

El modelo de O’Raifeartaigh modificado muestra que el hecho de romper explícitamente la simetría R, produce un vacío supersimétrico tal como se vio en el ejemplo 3 de la sección anterior. Sin embargo existe la posibilidad de romper supersimetría en un vacío metaestable lo cual hace atractivo a este tipo de modelos.

### 6.3.2. Modelo de Komargodski-Shih

Este modelo fue estudiado en [25] y es el primer ejemplo publicado donde se ilustra el corolario I’, es decir que dado un modelo donde no hay campos con R-carga 2, ruptura de supersimetría implica también ruptura de simetría R. El superpotencial propuesto es:

$$W = m_1 X_1 \phi_1 + m_2 X_2 \phi_2 + \lambda_1 X_3 \phi_1^2 + \lambda_2 X_1 \phi_2^2 + \lambda_3 X_4 \phi_3^2 + \lambda_4 X_2 \phi_1 \phi_3 + m_3 \phi_4^2 + m_4 \phi_3 \phi_5 + \lambda_5 \phi_4 \phi_5^2. \quad (6.69)$$

Este modelo posee nueve campos escalares. Se consideran todos los parámetros reales y positivos debido a que puede ajustarse la fase de los campos. Para facilitar la presentación de los datos del modelo elaboramos una tabla con la R-carga y el término

$F^*$  correspondiente a cada campo.

Campo	R-carga	$F^*$
$X_1$	5	$m_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2^2$
$X_2$	7/2	$m_2\phi_2 + \lambda_4\phi_1\phi_3$
$X_3$	8	$\lambda_1\phi_1^2$
$X_4$	-1	$\lambda_3\phi_3^2$
$\phi_1$	-3	$m_1X_1 + 2\lambda_1X_3\phi_1 + \lambda_4X_2\phi_3$
$\phi_2$	-3/2	$m_2X_2 + 2\lambda_2X_1\phi_2$
$\phi_3$	3/2	$2\lambda_3X_4\phi_3 + \lambda_4X_2\phi_1 + m_4\phi_5$
$\phi_4$	1	$2m_3\phi_4 + \lambda_5\phi_5^2$
$\phi_5$	1/2	$m_4\phi_3 + 2\lambda_5\phi_4\phi_5$

(6.70)

El superpotencial (6.69) incluye todos los términos consistentes con  $R(W) = 2$  para esta elección de cargas. Para empezar, veamos si existe una solución que no rompa supersimetría, resolviendo el sistema que se obtiene al anular los términos  $F^*$  en (6.70). Al hacerlo obtenemos:

$$X_1 = X_2 = \phi_a = 0 \quad , \quad X_3 \text{ y } X_4 \text{ indeterminados} \quad , \quad (6.71)$$

donde  $a = 1, \dots, 5$ . Esta solución es un mínimo supersimétrico que rompe R-simetría debido a que  $X_3$  y  $X_4$  tienen R-carga distinta de cero. Es importante señalar que no se viola el resultado de Nelson-Seiberg porque la función  $f$ , definida según (6.31), que se obtiene en este modelo no es genérica. Sabemos que si existen otros mínimos, serán metaestables.

Para encontrar otros extremos se analiza el potencial escalar  $V$ . Este es:

$$\begin{aligned} V = & |m_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2^2|^2 + |m_2\phi_2 + \lambda_4\phi_1\phi_3|^2 + |\lambda_1\phi_1^2|^2 + |\lambda_3\phi_3^2|^2 \\ & + |m_1X_1 + 2\lambda_1X_3\phi_1 + \lambda_4X_2\phi_3|^2 + |2\lambda_3X_4\phi_3 + \lambda_4X_2\phi_1 + m_4\phi_5|^2 \\ & + |m_2X_2 + 2\lambda_2X_1\phi_2|^2 + |2m_3\phi_4 + \lambda_5\phi_5^2|^2 + |m_4\phi_3 + 2\lambda_5\phi_4\phi_5|^2 . \end{aligned} \quad (6.72)$$

Al tomar las primeras derivadas, notamos que es posible anular  $\frac{\partial V}{\partial X_i}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial \phi_4}$  y  $\frac{\partial V}{\partial \phi_5}$ , haciendo cero los términos  $F_{\phi_a}^*$ . Los términos  $F_{\phi_a}^*$  se anulan para valores de  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_4$ ,

$\phi_4$  y  $\phi_5$  dados en función de los campos  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  y  $X_3$ . Esto es:

$$\phi_5 = \left( \frac{m_3 m_4}{\lambda_5^2} \phi_3 \right)^{1/3}, \quad (6.73)$$

$$\phi_4 = -\frac{\lambda_5}{2m_3} \phi_5^2, \quad (6.74)$$

$$X_1 = -\frac{2m_2 \lambda_1 \phi_1 X_3}{m_1 m_2 - 2\lambda_2 \lambda_4 \phi_2 \phi_3}, \quad (6.75)$$

$$X_2 = -\frac{2\lambda_2}{m_2} \phi_2 X_1, \quad (6.76)$$

$$X_4 = -\frac{1}{2\lambda_3 \phi_3} (\lambda_4 \phi_1 X_2 + m_4 \phi_5). \quad (6.77)$$

El campo  $X_3$  queda indeterminado pues no aparece en los términos  $F_{X_i}^*$ . Por otra parte los términos  $F_{X_i}^*$  dependen de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  como puede observarse en (6.70), por lo tanto es suficiente escribir el potencial escalar con los términos  $F_{X_i}^*$  y analizar las derivadas  $\frac{\partial V}{\partial \phi_1}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial \phi_2}$  y  $\frac{\partial V}{\partial \phi_3}$ . Con estas consideraciones el potencial escalar a estudiar se escribe:

$$V = |m_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2^2|^2 + |m_2 \phi_2 + \lambda_4 \phi_1 \phi_3|^2 + |\lambda_1 \phi_1^2|^2 + |\lambda_3 \phi_3^2|^2. \quad (6.78)$$

Al tomar las derivadas e igualar a cero se encuentra:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_1} = (m_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2^2)^* m_1 + (m_2 \phi_2 + \lambda_4 \phi_1 \phi_3)^* \lambda_4 \phi_3 + (\lambda_1 \phi_1^2)^* 2\lambda_1 \phi_1 = 0, \quad (6.79)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_2} = (m_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2^2)^* 2\lambda_2 \phi_2 + (m_2 \phi_2 + \lambda_4 \phi_1 \phi_3)^* m_2 = 0, \quad (6.80)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_3} = (m_2 \phi_2 + \lambda_4 \phi_1 \phi_3)^* \lambda_4 \phi_1 + (\lambda_3 \phi_3^2)^* 2\lambda_3 \phi_3 = 0. \quad (6.81)$$

Por simplicidad se buscan soluciones reales a estas ecuaciones. Utilizaremos el programa Maple para hallar las soluciones. Es conveniente utilizar el Ansatz

$$\phi_3 = \frac{\lambda_4 x}{\lambda_3} \phi_1, \quad (6.82)$$

donde  $x$  es un parámetro real a ser determinado. Sustituyendo el Ansatz en (6.81) se obtiene:

$$\phi_2 = -\frac{\lambda_4^2 x (2x^2 + 1)}{\lambda_3 m_2} \phi_1^2. \quad (6.83)$$

Sustituyendo esta ecuación y (6.82) en las derivadas (6.79) y (6.80) se encuentra:

$$\phi_1 = \frac{2m_2^2}{\lambda_2 m_1} \frac{x^2 (\alpha^2 - x^4)}{(2x^2 + 1)(x^4 - 2x^6 - 2\alpha^2)}, \quad (6.84)$$



donde  $\alpha = \lambda_1 \lambda_3 / \lambda_4^2$ . Por consistencia,  $x$  debe ser una solución real de la siguiente ecuación:

$$\beta(x^4 - 2x^6 - 2\alpha^2)^{3/2} = \frac{4x^2(\alpha^2 - x^4)^2}{2x^2 + 1}, \quad (6.85)$$

con  $\beta = m_1^2 \lambda_2 \lambda_3 / \lambda_4^2 m_2^2$ . Se observa que existen soluciones reales para  $\alpha$  suficientemente pequeño. Por ejemplo, si se considera el caso  $\alpha = 0, 1$  y  $\beta = 5$ , se obtiene que  $x = \pm 0, 43$  y  $x = \pm 0, 59$ . En [25] se demuestra que para  $x = \pm 0, 43$  la solución corresponde a un mínimo local mientras que con  $x = \pm 0, 59$  el extremo es un punto de ensilladura.

En conclusión, en este modelo se comprueba que existe un vacío estable en el cual se rompe supersimetría y también simetría R debido a que todos los campos adquieren valor de expectación y tienen R-cargas distintas de cero. Como el modelo no incluye campos con R-carga 2, queda ilustrado el corolario I.

### 6.3.3. Modelo de Shih

En el artículo [18], Shih estudia las condiciones para que ocurra ruptura espontánea de simetría R a nivel de un lazo. El resultado de Shih es que para lograr que las correcciones radiativas no restauren la simetría R es necesario que el modelo incluya campos con R-carga distinta de cero o dos. En el modelo de O’Raifeartaigh no se cumple esta condición y en efecto las condiciones radiativas son tales que necesariamente  $X = 0$  en el mínimo y se mantiene la simetría R.

Para ilustrar sus resultados, Shih propone el siguiente superpotencial:

$$W = \lambda X \phi_1 \phi_2 + m_1 \phi_1 \phi_3 + \frac{1}{2} m_2 \phi_2^2 + f X. \quad (6.86)$$

Este superpotencial consta de cuatro campos escalares y es el superpotencial renormalizable más general consistente con R-simetría bajo la asignación de cargas  $R(X) = 2$ ,  $R(\phi_1) = -1$ ,  $R(\phi_2) = 1$  y  $R(\phi_3) = 3$ . Los parámetros  $\lambda$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  y  $f$  se consideran reales y positivos debido a que es posible ajustar la fase de los campos.

A continuación se calculan los términos  $F_i^*$  y verificamos la condición de supersimetría  $F_i^* = 0$ . Esto es:

$$F_X^* = \lambda\phi_1\phi_2 + f = 0, \quad (6.87)$$

$$F_{\phi_1}^* = \lambda X\phi_2 + m_1\phi_3 = 0, \quad (6.88)$$

$$F_{\phi_2}^* = \lambda X\phi_1 + m_2\phi_2 = 0, \quad (6.89)$$

$$F_{\phi_3}^* = m_1\phi_1 = 0. \quad (6.90)$$

Vemos que este sistema de ecuaciones es incompatible y por lo tanto supersimetría está rota. Este resultado es previsible debido a que el número de campos con R-carga 2 es mayor que el número de campos con R-carga 0 tal como se expresa en el resultado II de la sección anterior. Sin embargo existe una solución asintótica al sistema  $F_i^* = 0$  que viene dada por:

$$\begin{aligned} X &= \left( \frac{m_1^2 m_2 \phi_3^2}{\lambda^2 f} \right)^{1/3}, \\ \phi_1 &= \left( \frac{f^2 m_2}{\lambda^2 m_1 \phi_3} \right)^{1/3}, \\ \phi_2 &= - \left( \frac{f m_1 \phi_3}{\lambda m_2} \right)^{1/3}, \\ \phi_3 &\longrightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Esta solución corresponde a un mínimo supersimétrico debido a que anula todos los términos  $F_i$ . Se dice que supersimetría se restablece en una *dirección runaway*. Por último notamos que efectivamente la solución rompe espontáneamente R-simetría ya que los campos con R-carga diferente de cero tienen valor de expectación no nulo.

Para determinar los extremos que rompen supersimetría, estudiamos el potencial escalar:

$$V = |\lambda\phi_1\phi_2 + f|^2 + |\lambda X\phi_2 + m_1\phi_3|^2 + |\lambda X\phi_1 + m_2\phi_2|^2 + |m_1\phi_1|^2. \quad (6.92)$$

Calculamos las primeras derivadas. Estas son:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = (\lambda X \phi_2 + m_1 \phi_3)^*(\lambda \phi_2) + (\lambda X \phi_1 + m_2 \phi_2)^*(\lambda \phi_1) , \quad (6.93)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_1} = (\lambda \phi_1 \phi_2 + f)^*(\lambda \phi_2) + (\lambda X \phi_1 + m_2 \phi_2)^*(\lambda X) + m_1^2 \phi_1^* , \quad (6.94)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_2} = (\lambda \phi_1 \phi_2 + f)^*(\lambda \phi_1) + (\lambda X \phi_2 + m_1 \phi_3)^*(\lambda X) + (\lambda X \phi_1 + m_2 \phi_2)^* m_2 , \quad (6.95)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_3} = (\lambda X \phi_2 + m_1 \phi_3)^* m_1 . \quad (6.96)$$

El sistema  $\frac{\partial V}{\partial A_i} = 0$  tiene la siguiente solución:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0 , \quad X \text{ arbitrario.} \quad (6.97)$$

Esta solución es un extremo del potencial escalar (6.92) y rompe supersimetría porque  $F_X^* = f \neq 0$  y por lo tanto  $\langle V \rangle = |f|^2 > 0$ .

Ahora verificamos la estabilidad de la solución (6.97) evaluando la matriz de masas cuadradas bosónicas  $\mathcal{M}_B^2$  en el extremo y determinando el signo de sus autovalores. La matriz  $\mathcal{M}_B^2$  evaluada en el extremo se escribe explícitamente como sigue:

$$\mathcal{M}_B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1^2 + \lambda^2 |X|^2 & m_2 \lambda X^* & 0 & 0 & 0 & \lambda f & 0 \\ 0 & m_2 \lambda X & m_2^2 + \lambda^2 |X|^2 & m_1 \lambda X^* & 0 & \lambda f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \lambda X & m_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda f & 0 & 0 & m_1^2 + \lambda^2 |X|^2 & m_2 \lambda X & 0 \\ 0 & \lambda f & 0 & 0 & 0 & m_2 \lambda X^* & m_2^2 + \lambda^2 |X|^2 & m_1 \lambda X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 \lambda X^* & m_1^2 \end{bmatrix} . \quad (6.98)$$

Se observa claramente la existencia de 2 autovalores nulos. En este caso no es posible hallar los autovalores explícitamente. Sin embargo aún podemos encontrar una condición que garantice la estabilidad de la solución (6.97). Para encontrar esta condición observamos que el polinomio característico  $P_C(z) = \det(z\mathbf{1} - \mathcal{M}_B^2)$  se puede factorizar

como  $P_C(z) = z^2 f_1(z) f_2(z)$ , con:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z^3 - \left(m_2^2 + 2m_1^2 + 2\lambda^2|X|^2\right) z^2 \\ &\quad + \left(2m_2^2 m_1^2 - m_2^2 m_1^2 y^2 + m_1^4 - 2ym_1 m_2^2 \lambda|X| + 2\lambda^2 m_1^2 |X|^2 + \lambda^4 |X|^4\right) z \\ &\quad - m_1^3 m_2^2 \left(m_1 - m_1 y^2 - 2\lambda y|X|\right) , \end{aligned} \quad (6.99)$$

$$\begin{aligned} f_2(z) &= z^3 - \left(m_2^2 + 2m_1^2 + 2\lambda^2|X|^2\right) z^2 \\ &\quad + \left(2m_2^2 m_1^2 - m_2^2 m_1^2 y^2 + m_1^4 + 2ym_1 m_2^2 \lambda|X| + 2\lambda^2 m_1^2 |X|^2 + \lambda^4 |X|^4\right) z \\ &\quad - m_1^3 m_2^2 \left(m_1 - m_1 y^2 + 2\lambda y|X|\right) , \end{aligned} \quad (6.100)$$

donde el parámetro  $y$  se ha definido:

$$y = \frac{\lambda f}{m_1 m_2} . \quad (6.101)$$

Se observa que los factores  $f_i(z)$  son polinomios de tercer grado en  $z$ . A su vez, cada  $f_i$  puede ser factorizado en la forma  $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ , donde  $z_i$  son los autovalores no nulos y pedimos que  $z_i > 0$  para que la solución sea estable. Desarrollando  $f$  con las condiciones mencionadas, se obtiene:

$$f = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)z - z_1 z_2 z_3 . \quad (6.102)$$

De esta ecuación vemos que  $f(0) < 0$  es condición necesaria para que el extremo sea estable y sus autovalores positivos. Las expresiones para  $f_1(0) < 0$  y  $f_2(0) < 0$  son:

$$- m_1^3 m_2^2 (m_1 - m_1 y^2 - 2y\lambda|X|) < 0 , \quad (6.103)$$

$$- m_1^3 m_2^2 (m_1 - m_1 y^2 + 2y\lambda|X|) < 0 , \quad (6.104)$$

De la expresión (6.103) se obtiene la condición:

$$|X| < \frac{m_1}{\lambda} \left( \frac{1 - y^2}{2y} \right) . \quad (6.105)$$

Esta condición se satisface para  $y < 1$  y en este rango el extremo (6.97) es un mínimo. Notamos que la condición (6.105) incluye una vecindad de  $|X| = 0$ . Por otra parte la expresión (6.104) no ofrece ninguna restricción debido a que se cumple siempre en  $y < 1$ .

Para encontrar una expresión de los autovalores de las matrices de masas bosónicas en el modelo de Shih, resolvemos de manera aproximada haciendo una expansión en torno a  $|X| = 0$ . Esto es posible debido a que la condición (6.105) incluye una vecindad de  $|X| = 0$ . Utilizando Maple encontramos que a primer orden en  $|X|$ , los factores  $f_1$  y  $f_2$  se escriben:

$$f_1(z) = z^3 - (m_2^2 + 2m_1^2)z^2 + (m_1^4 + 2m_1^2m_2^2 - m_1^2m_2^2y^2 - 2y\lambda m_1m_2^2|X|)z - m_1^3m_2^2(m_1 - m_1y^2 - 2y\lambda|X|), \quad (6.106)$$

$$f_2(z) = z^3 - (m_2^2 + 2m_1^2)z^2 + (m_1^4 + 2m_1^2m_2^2 - m_1^2m_2^2y^2 + 2y\lambda m_1m_2^2|X|)z - m_1^3m_2^2(m_1 - m_1y^2 + 2y\lambda|X|). \quad (6.107)$$

Las raíces de los polinomios  $f_1(z)$  y  $f_2(z)$  son los autovalores  $m_i^2$  distintos de cero de la matriz de masas cuadradas bosónicas  $\mathcal{M}_B^2$ . Resolviendo  $f_1(z) = 0$  y  $f_2(z) = 0$  se encuentra:

$$z_{1,2} = m_1^2, \quad (6.108)$$

$$z_{3,4} = \frac{1}{2} \left[ m_1^2 + m_2^2 \pm \sqrt{(m_1^2 + m_2^2)^2 - 4m_1m_2^2(m_1(1 - y^2) - 2\lambda y|X|)} \right], \quad (6.109)$$

$$z_{5,6} = \frac{1}{2} \left[ m_1^2 + m_2^2 \pm \sqrt{(m_1^2 + m_2^2)^2 - 4m_1m_2^2(m_1(1 - y^2) + 2\lambda y|X|)} \right]. \quad (6.110)$$

Es posible observar que la condición (6.105) aparece claramente en el segundo término dentro de la raíz de (6.109). Además notamos que todos los autovalores son positivos si  $y < 1$ .

A continuación calculamos la masa de los fermiones. Para ello escribimos el bloque superior de la matriz de masas cuadradas fermiónicas  $\mathcal{M}_F^{2Sup}$  evaluada en el mínimo (6.97). Esta es:

$$\mathcal{M}_F^{2Sup} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1^2 + \lambda^2|X|^2 & m_2\lambda X^* & 0 \\ 0 & m_2\lambda X & m_2^2 + \lambda^2|X|^2 & m_1\lambda X^* \\ 0 & 0 & m_1\lambda X & m_1^2 \end{bmatrix}. \quad (6.111)$$

Observamos que existe un autovalor nulo en (6.111) el cual corresponde a la masa del Goldstino. Para hallar los autovalores fermiónicos y poder compararlos con los bosónicos hacemos una expansión en torno a  $|X| = 0$  del polinomio característico de  $\mathcal{M}_F^{2Sup}$  y hallamos sus raíces. Es decir debemos resolver:

$$z'^3 - (m_2^2 + 2m_1^2)z'^2 + m_1^2(2m_2^2 + m_1^2)z' - m_1^4m_2^2 = 0. \quad (6.112)$$

Se comprueba que (6.112) está en la forma general (6.102) y  $z'_1z'_2z'_3 = m_1^4m_2^2$ , lo cual garantiza que los autovalores son positivos. Al resolver (6.112) se obtiene:

$$z'_{1,2} = m_1^2, \quad z'_3 = m_2^2. \quad (6.113)$$

Recordamos que el espectro de  $\mathcal{M}_F^2$  está constituido por los autovalores (6.113) con multiplicidad 2. Una vez calculado el espectro de masas bosónicas y fermiónicas, podemos verificar la identidad de la supertraza. Para ello calculamos las trazas de  $\mathcal{M}_B^2$  y  $\mathcal{M}_F^2$ , encontramos que  $\text{Tr}\mathcal{M}_B^2 = \text{Tr}\mathcal{M}_F^2 = 2(2m_1^2 + m_2^2)$  y por lo tanto se cumple  $\text{STr}\mathcal{M}^2 = 0$ .

Por último consideremos el caso  $|X| = 0$  y calculemos los autovectores para cada autovalor tanto bosónico como fermiónico. Las componentes de los autovectores están en el siguiente orden:

$$\left[ X \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \bar{X} \quad \bar{\phi}_1 \quad \bar{\phi}_2 \quad \bar{\phi}_3 \right]. \quad (6.114)$$

De manera análoga, para los fermiones el orden de las componentes es:

$$\left[ \psi_X \quad \psi_{\phi_1} \quad \psi_{\phi_2} \quad \psi_{\phi_3} \quad \bar{\psi}_X \quad \bar{\psi}_{\phi_1} \quad \bar{\psi}_{\phi_2} \quad \bar{\psi}_{\phi_3} \right]. \quad (6.115)$$

Para calcular los autovectores utilizamos el programa Maple. En primer lugar calcu-

lamos los autovalores bosónicos. Estos son:

Autovalor	Autovectores
0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$m_1^2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2}(m_2^2 + m_1^2 + \sqrt{(m_2^2 + m_1^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 (1 - y^2)})$	$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a' & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2}(m_2^2 + m_1^2 - \sqrt{(m_2^2 + m_1^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 (1 - y^2)})$	$\begin{bmatrix} 0 & a' & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

, (6.116)

donde las constantes  $a$  y  $a'$  se han definido como sigue:

$$a = \frac{2\lambda f}{m_2^2 - m_1^2 + \sqrt{m_2^4 - 2m_2^2 m_1^2 + m_1^4 + 4\lambda^2 f^2}}, \quad (6.117)$$

$$a' = \frac{2\lambda f}{m_2^2 - m_1^2 - \sqrt{m_2^4 - 2m_2^2 m_1^2 + m_1^4 + 4\lambda^2 f^2}}. \quad (6.118)$$

Se observa en (6.116) que el autovalor nulo está en la dirección de  $X$  que corresponde a la dirección plana. Esto es consistente con el hecho de que el término  $F_X$  es el que rompe supersimetría. Al calcular los autovectores fermiónicos encontramos:

Autovalor	Autovectores
0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$m_2^2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$m_1^2$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

. (6.119)

El Goldstino está en la dirección de  $\psi_X$  que es el fermión que pertenece al multiplete de  $X$  tal y como es de esperarse según los resultados generales ya estudiados. En [18]

se han encontrado las correcciones radiativas al potencial escalar y se ha demostrado que existe un rango de parámetros tal que existe un mínimo metaestable con  $X \neq 0$ .



## CAPÍTULO 7

### Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han estudiado varios aspectos relacionados a supersimetría y su ruptura espontánea. En el capítulo 2 estudiamos el Lagrangiano y las transformaciones del modelo Wess-Zumino con un multiplete formado por un campo escalar complejo  $A$ , un fermión de Weyl  $\psi$  y un campo escalar auxiliar complejo  $F$ . Comprobamos la invariancia de la acción. Luego, utilizando la ecuación de movimiento del campo auxiliar  $F$ , se encontró el Lagrangiano on-shell en el cual es posible notar fácilmente que las masas de los bosones y fermiones en un multiplete Wess-Zumino son iguales, así como también deben ser iguales las constantes de acoplamiento de las interacciones cuárticas del campo  $A$  y de las interacciones tipo Yukawa entre  $A$  y  $\psi$ . También se definió el superpotencial  $W$  y mostramos que es posible escribir el Lagrangiano on-shell en términos de  $W$ , en particular vimos que los términos  $F$  y el potencial escalar  $V$  se escriben en términos del superpotencial  $W$ . Los cálculos se generalizaron para varios multipletes. En el capítulo 3 se determinó el álgebra de los generadores  $Q$  de supersimetría. Comprobamos que existe una relación entre el álgebra de supersimetría y el álgebra de Poincaré y que ambas conforman un álgebra más grande conocida como álgebra  $\mathcal{N} = 1$  [20].

En el capítulo 4 estudiamos la ruptura espontánea de supersimetría por términos  $F$ . A partir del álgebra de supersimetría, se muestra el vínculo que existe entre el Hamiltoniano y los generadores  $Q$ . Se encontró que el espectro del Hamiltoniano es semidefinido positivo y en particular vimos que el estado de vacío rompe supersimetría si y solo si el valor de su energía es distinto de cero. En términos de los campos esto quiere decir que supersimetría se rompe si y solo si alguno de los campos  $F_i$  adquiere un valor de expectación distinto de cero. Si supersimetría está rota es necesario hallar los extremos del potencial escalar y analizar su estabilidad. Para ello se definió la matriz de masas cuadradas bosónicas. También se estudió la matriz de masas fermiónicas y comprobamos que aun cuando se rompe supersimetría, las trazas de las matrices de masas cuadradas bosónicas y fermiónicas son iguales. Por otra parte vimos que a consecuencia de la ruptura de supersimetría aparece un fermión de masa nula análogo al bosón de Goldstone, llamado Goldstino. Finalmente se estudió en detalle el modelo de O’Raifeartaigh que es el ejemplo original con el cual se estudió ruptura espontánea de supersimetría por términos  $F$  [11]. Se verificó que supersimetría está rota y se procedió a hallar el estado de vacío. Luego se estudió la estabilidad y se comprobó la igualdad de las trazas de las matrices de masas bosónicas y fermiónicas, así como la existencia de direcciones planas.

En el capítulo 5 estudiamos algunas propiedades generales de la ruptura espontánea de supersimetría por términos  $F$ . En particular vimos que al romperse supersimetría, el estado de vacío está degenerado a nivel árbol en la dirección del campo cuyo término  $F$  adquiere valor de expectación distinto de cero. Para ver esto se hizo una expansión en serie del potencial escalar y se encontraron ciertas condiciones que debían satisfacer algunos de los términos de la expansión para garantizar que el estado de vacío correspondiera a un mínimo. La dirección a lo largo de la cual el potencial escalar está degenerado se conoce como dirección plana del potencial escalar. Luego, utilizando las condiciones encontradas sobre los términos de la expansión del potencial escalar, se determinó la forma canónica que tiene el superpotencial  $W$  en los modelos

de tipo O’Raifeartaigh.

Por último en el capítulo 6 estudiamos la simetría  $R$ , que es una simetría global  $U(1)$ , y su relación con la ruptura espontánea de supersimetría. La simetría  $R$  deja invariante al álgebra de supersimetría y se extiende a una simetría de la acción si es posible asignar  $R$ -cargas a los campos tales que el Lagrangiano es neutro. Verificamos que esta condición se cumple si las  $R$ -cargas de los campos son tales que el superpotencial  $W$  tiene  $R$ -carga 2. Luego se estudiaron tres resultados importantes que vinculan la simetría  $R$  con la ruptura espontánea de supersimetría. En particular se estudió el resultado de Nelson-Seiberg que afirma que, en un modelo genérico, la existencia de una simetría  $R$  es condición necesaria para que se rompa supersimetría espontáneamente y por otra parte la ruptura espontánea de simetría  $R$  es condición suficiente para que ocurra ruptura espontánea de supersimetría. Todos los resultados estudiados fueron ilustrados con ejemplos sencillos.

Para finalizar desarrollamos en detalle tres ejemplos ilustrando y ampliando algunos de los resultados que relacionan simetría  $R$  y la ruptura espontánea de supersimetría. En primer lugar analizamos una modificación al modelo de O’Raifeartaigh donde se rompe  $R$ -simetría explícitamente. Verificamos que, como lo indica el resultado de Nelson-Seiberg, hay un mínimo supersimétrico como consecuencia de la ruptura explícita de simetría  $R$ . Sin embargo también hay un mínimo metaestable donde se rompe supersimetría. En segundo lugar estudiamos el modelo de Komargodski-Shih donde se presenta un superpotencial sin campos con  $R$ -carga 2 y se comprueba que al romperse supersimetría, el vacío obtenido también rompe simetría  $R$ . El tercer y último ejemplo es el modelo de Shih. En este modelo existe un vacío supersimétrico en una dirección de *runaway* y existe otro vacío que rompe supersimetría. Los tres ejemplos fueron realizados detalladamente, indicando los pasos intermedios para llegar a los resultados. En el modelo de O’Raifeartaigh modificado y en el modelo de Shih se calcularon los autovalores de las matrices de masas bosónicas y fermiónicas, y se comprobó la igualdad de las trazas de ambas matrices. En el modelo de Shih también se calcularon los

autovectores de las matrices de masas bosónicas y fermiónicas y se verificó la existencia de direcciones planas.

Para la realización de este trabajo fue necesario aprender varios aspectos de teorías de campos, como la descripción de la dinámica y las interacciones en términos de un Lagrangiano invariante bajo transformaciones de Lorentz y otros grupos de transformaciones. En particular se estudiaron las propiedades de un Lagrangiano invariante bajo supersimetría. Luego se analizaron aspectos generales de la ruptura espontánea de supersimetría y su realización en modelos de tipo O’Raifeartaigh. Además se estudió el formalismo espinorial así como también el manejo de ciertos programas de cálculo simbólico como Maple. Por otra parte, fue necesario realizar una amplia revisión de la literatura ya que es un tema que abarca más de tres décadas de desarrollo sostenido. El presente trabajo puede considerarse una presentación pedagógica y sistemática, con detalles y ejemplos, útil a todo aquel que desee introducirse en el tema de supersimetría y su ruptura espontánea. Los resultados discutidos tienen aplicaciones fenomenológicas. Por ejemplo, en el Modelo Estándar supersimétrico la ruptura espontánea de supersimetría se puede describir acoplando los campos del modelo a un sector de tipo O’Raifeartaigh.

## APÉNDICE A

## Notación y Convenciones

A lo largo de este trabajo se utilizan las unidades, notación y convenciones de [22]. Utilizamos las llamadas unidades naturales:

$$c = \hbar = 1. \tag{A.1}$$

También se utilizó la métrica de Bjorken-Drell, esto es:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}. \tag{A.2}$$

Se eligió la siguiente normalización para la densidad tensorial de Levi-Civita:

$$\epsilon_{0123} = +1. \tag{A.3}$$

## APÉNDICE B

### Espinores - Definiciones e Identidades

Se utilizaron los espinores de Weyl en sus distintas representaciones. Esto es,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \text{espinor izquierdo de 2 componentes complejas}, \quad (\text{B.1})$$

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) = \text{espinor derecho de 2 componentes complejas}. \quad (\text{B.2})$$

En la notación de Van der Waerden, sin punto =  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  y con punto =  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ :

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) : \psi_a, \quad (\text{B.3})$$

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) : \bar{\psi}^{\dot{a}} \equiv (\psi_a)^*, \quad (\text{B.4})$$

donde notamos que también se cumple:

$$\bar{\psi}_{\dot{a}} \equiv (\psi_a)^\dagger ; \quad \psi^a \equiv (\bar{\psi}_{\dot{a}})^*. \quad (\text{B.5})$$

Para subir y bajar índices se utilizan los símbolos de Levi-Civita 2-dimensionales:

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

$$\epsilon^{ab} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = i\sigma^2, \quad (\text{B.7})$$

donde  $\sigma^2$  es una de las matrices de Pauli definidas más adelante en (B.16). Por lo tanto podemos escribir,

$$\begin{aligned}\psi^a &= \epsilon^{ab}\psi_b, & \psi_a &= \epsilon_{ab}\psi^b, \\ \bar{\psi}^{\dot{a}} &= \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\bar{\psi}_{\dot{b}}, & \bar{\psi}_{\dot{a}} &= \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\bar{\psi}^{\dot{b}}.\end{aligned}\tag{B.8}$$

El convenio de suma para espinores se expresa:

$$\begin{aligned}\psi\chi &= \psi^a\chi_a = -\psi_a\chi^a = \chi^a\psi_a = \chi\psi, \\ \bar{\psi}\bar{\chi} &= \bar{\psi}_{\dot{a}}\bar{\chi}^{\dot{a}} = -\bar{\psi}^{\dot{a}}\bar{\chi}_{\dot{a}} = \bar{\chi}_{\dot{a}}\bar{\psi}^{\dot{a}} = \bar{\chi}\bar{\psi}.\end{aligned}\tag{B.9}$$

Algunas identidades útiles de espinores son:

$$(\psi\chi)^\dagger = (\psi^a\chi_a)^\dagger = \bar{\chi}_{\dot{a}}\bar{\psi}^{\dot{a}} = \bar{\psi}\bar{\chi},\tag{B.10}$$

$$(\chi\sigma^\mu\bar{\psi})^\dagger = \psi\sigma^\mu\bar{\chi},\tag{B.11}$$

$$\psi^a\psi^b = -\frac{1}{2}\epsilon^{ab}\psi\psi,\tag{B.12}$$

$$\psi_a\psi_b = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\psi\psi,\tag{B.13}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{a}}\bar{\psi}^{\dot{b}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\bar{\psi}\bar{\psi},\tag{B.14}$$

$$\bar{\psi}_{\dot{a}}\bar{\psi}_{\dot{b}} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\bar{\psi}\bar{\psi}.\tag{B.15}$$

A continuación presentamos las matrices de Pauli:

$$\begin{aligned}\sigma^0 = I &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \sigma^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, & \sigma^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{B.16}$$

Utilizando las matrices de Pauli se define el arreglo:

$$\begin{aligned}\sigma^\mu &= (\sigma^0, \vec{\sigma}) = \bar{\sigma}_\mu, \\ \bar{\sigma}^\mu &= (\sigma^0, -\vec{\sigma}) = \sigma_\mu.\end{aligned}\tag{B.17}$$

Indicamos explícitamente los índices espinoriales de las matrices de Pauli, esto es:

$$\begin{aligned} (\sigma^\mu)_{ab} , \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} . \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Las relaciones de completitud de las matrices de Pauli son:

$$\text{Tr}\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu = 2\eta^{\mu\nu} , \quad (\text{B.19})$$

$$(\sigma^\mu)_{ab}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{c}\dot{d}} = 2\delta_a^{\dot{d}}\delta_b^{\dot{c}} \quad (\text{B.20})$$

Debido a que las matrices de Pauli anticonmutan, se cumple la siguiente relación:

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = \delta^{ij} I , \quad (\text{B.21})$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$  e  $I$  es la matriz identidad 2x2. También se satisfacen:

$$\begin{aligned} (\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_a^{\dot{b}} &= 2\eta^{\mu\nu}\delta_a^{\dot{b}} , \\ (\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)_{\dot{a}}^{\dot{b}} &= 2\eta^{\mu\nu}\delta_{\dot{a}}^{\dot{b}} , \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

donde  $\sigma^\mu$  y  $\bar{\sigma}^\mu$  están dadas según (B.17).

La realización del grupo de Lorentz en la representación  $(1/2, 0)$  y  $(0, 1/2)$  es respectivamente:

$$\begin{aligned} (\Sigma^{\mu\nu})_a^{\dot{b}} &= \frac{i}{4}[\sigma_{a\dot{c}}^\mu\bar{\sigma}^{\nu\dot{c}\dot{b}} - \sigma_{a\dot{c}}^\nu\bar{\sigma}^{\mu\dot{c}\dot{b}}] , \\ (\bar{\Sigma}^{\mu\nu})_{\dot{b}}^{\dot{a}} &= \frac{i}{4}[\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c}\sigma_{cb}^\nu - \bar{\sigma}^{\nu\dot{a}c}\sigma_{cb}^\mu] . \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Y la identidad de la traza se escribe:

$$\text{Tr}[\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\rho\sigma}] = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} . \quad (\text{B.24})$$

Una relación útil entre las matrices de Pauli y los generadores de Lorentz es:

$$\begin{aligned} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu &= \eta^{\mu\nu} - 2i\Sigma^{\mu\nu} , \\ \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu &= \eta^{\mu\nu} - 2i\Sigma^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$



Por último citamos algunas de las identidades de Fierz:

$$(\theta\phi)(\theta\psi) = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\phi\psi), \quad (\text{B.26})$$

$$(\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) = -\frac{1}{2}(\bar{\phi}\bar{\psi})(\bar{\theta}\bar{\theta}), \quad (\text{B.27})$$

$$\phi\sigma^\mu\bar{\chi} = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\phi, \quad (\text{B.28})$$

$$(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}), \quad (\text{B.29})$$

$$(\sigma^\mu\bar{\theta})_a(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\theta_a(\bar{\theta}\bar{\theta}) - i(\Sigma^{\mu\nu}\theta)_a(\bar{\theta}\bar{\theta}), \quad (\text{B.30})$$

$$(\theta\phi)(\bar{\theta}\bar{\psi}) = \frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\phi\sigma_\mu\bar{\psi}), \quad (\text{B.31})$$

$$(\bar{\theta}\bar{\psi})(\theta\phi) = \frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\phi\sigma_\mu\bar{\psi}) = (\theta\phi)(\bar{\theta}\bar{\psi}). \quad (\text{B.32})$$

---

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] P. Ramond, “Dual Theory for Free Fermions,” *Phys. Rev. D* **3**, 2415 (1971).  
A. Neveu y J. H. Schwarz, “Factorizable Dual Model of Pions,” *Nucl. Phys. B* **31**, 86 (1971).
- [2] Yu. A. Golfand y E. P. Likhtman, “Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance,” *JETP Lett.* **13**, 323 (1971).
- [3] D. V. Volkov y V. P. Akulov, “Is the Neutrino a Goldstone Particle?,” *Phys. Lett. B* **46**, 109 (1973).
- [4] J. Wess y B. Zumino, “A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations,” *Phys. Lett. B* **49**, 52 (1974).
- [5] J. Wess y B. Zumino, “Supergauge Transformations in Four-Dimensions,” *Nucl. Phys. B* **70**, 39 (1974).
- [6] J. Wess y J. Bagger, “Supersymmetry and Supergravity,” Princeton University Press, 1992.
- [7] J. Wess y B. Zumino, “Supergauge Invariant Extension of Quantum Electrodynamics,” *Nucl. Phys. B* **78**, 1 (1974).

- [8] P. Fayet, “Spontaneously Broken Supersymmetric Theories of Weak, Electromagnetic and Strong Interactions,” *Phys. Lett. B* **69**, 489 (1977).
- [9] P. Fayet y J. Iliopoulos, “Spontaneously Broken Supergauge Symmetries and Goldstone Spinors,” *Phys. Lett. B* **51**, 461 (1974).
- [10] P. Fayet, “Spontaneous Supersymmetry Breaking Without Gauge Invariance,” *Phys. Lett. B* **58**, 67 (1975).
- [11] L. O’Raifeartaigh, “Spontaneous Symmetry Breaking For Chiral Scalar Superfields,” *Nucl. Phys. B* **96**, 331 (1975).
- [12] S. Dimopoulos, S. Raby y F. Wilczek, “Supersymmetry and the Scale of Unification,” *Phys. Rev. D* **24**, 1681 (1981).
- [13] U. Amaldi, W. de Boer y H. Furstenau, “Comparison of Grand Unified Theories with Electroweak and Strong Coupling Constants Measured at LEP,” *Phys. Lett. B* **260**, 447-455 (1991).
- [14] Para revisión de resultados y referencias, ver la versión 5, de diciembre 2008, de: S. Martin, “A Supersymmetry Primer,” arXiv:hep-ph/9709356.
- [15] K. A. Intriligator, N. Seiberg y D. Shih, “Dynamical SUSY Breaking in Metastable Vacua,” *JHEP* **0604**, 021 (2006) [arXiv:hep-th/0602239].
- [16] K. A. Intriligator, N. Seiberg y D. Shih, “Supersymmetry Breaking, R-Symmetry Breaking and Metastable Vacua,” *JHEP* **0707**, 017 (2007) [arXiv:hep-th/0703281].
- [17] A. E. Nelson y N. Seiberg, “R symmetry Breaking versus Supersymmetry Breaking,” *Nucl. Phys. B* **416**, 46 (1994) [arXiv:hep-ph/9309299].
- [18] D. Shih, “Spontaneous R-symmetry Breaking in O’Raifeartaigh Models,” *JHEP* **0802**, 091 (2008) [arXiv:hep-th/0703196].

- [19] E. Witten, “Dynamical Breaking of Supersymmetry,” Nucl. Phys. B **188**, 513 (1981).
- [20] R. Haag, J. T. Lopuszanski y M. Sohnius, “All Possible Generators Of Supersymmetries Of The S Matrix,” Nucl. Phys. B **88**, 257 (1975).
- [21] A. Salam y J.A. Strathdee, “On Goldstone Fermions,” Phys. Lett. B **49**, 465 (1974).
- [22] J. D. Lykken, “Introduction to Supersymmetry,” arXiv:hep-th/9612114.
- [23] L. Girardello y M. T. Grisaru, “Soft Breaking of Supersymmetry,” Nucl. Phys. B **194**, 65 (1982).
- [24] S. Ray, “Some Properties of Meta-stable Supersymmetry-Breaking Vacua in Wess-Zumino Models,” Phys. Lett. B **642**, 137 (2006) [arXiv:hep-th/0607172].
- [25] Z. Komargodski y D. Shih, “Notes on SUSY and R-symmetry Breaking in Wess-Zumino Models,” JHEP **0904**, 093 (2009) [arXiv:0902.0030 [hep-th]].
- [26] S. Ray, “Supersymmetric and R-symmetric Vacua in Wess-Zumino Models,” arXiv:0708.2200[hep-th].