



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA  
LABORATORIO DE COMPUTACIÓN GRÁFICA Y GEOMETRÍA  
APLICADA.

# Spline Tubular de Lagrange de Radio Variable.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la  
ilustre Universidad Central de Venezuela por  
el **Br. Arquímedes González.** para optar al  
título de Licenciado en Matemática.

**Tutor: Dr. Francisco Tovar.**

Caracas, Venezuela  
Julio 2012.

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Spline Tubular de Lagrange de Radio Variable.**”, presentado por el **Br. Arquímedes González**, titular de la Cédula de Identidad **17.514.241**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática.**

---

**Prof. Francisco Tovar**  
**Tutor**

---

**Prof. Tomás Guardia**  
**Jurado**

---

**Prof. Julio Daza**  
**Jurado**

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Curvas de Lagrange</b>	<b>6</b>
1.1. Los polinomios de Lagrange . . . . .	6
1.1.1. Propiedades . . . . .	6
1.2. Curvas de Lagrange Polinomial. . . . .	6
1.3. Curvas Racionales de Lagrange . . . . .	7
1.3.1. Propiedades de las curvas de Lagrange . . . . .	8
1.4. Algoritmo de Aitkens para curvas polinomiales . . . . .	9
1.4.1. Forma racional del Algoritmo de Aitkens . . . . .	10
1.5. Spline cónico de Lagrange . . . . .	10
1.5.1. Conexión de clase $G^0$ y $G^1$ . . . . .	10
1.6. Spline de superficies . . . . .	11
1.7. Envoltente de una familia monoparamétrica de superficies . . . . .	13
<b>2. Modelo de Dan Pedoe.</b>	<b>14</b>
2.1. División Armónica. . . . .	14
2.2. Ángulo de intersección entre dos esferas. . . . .	17
2.3. Correspondencia de rectas en $\mathbb{R}^3$ y haces de esferas. . . . .	18
2.4. Correspondencia de una cónica Lagrange. . . . .	22
<b>3. Spline tubular de Lagrange</b>	<b>25</b>
3.1. Spline Tubular de Lagrange . . . . .	27
3.2. Despliegue de un spline de clase $G^1$ . . . . .	28
3.3. Curva de Centro de Perfiles . . . . .	31
3.4. Ángulo prescrito de un spline tubular . . . . .	40
3.5. Pesos de la Superficie tubular de Lagrange . . . . .	42
3.5.1. Cambio de pesos y conservación de tangentes . . . . .	45
<b>4. Conclusiones</b>	<b>50</b>

# Introducción

Los splines son secciones de curvas o superficies conectadas con cierto grado de suavidad y que en general sirven para aproximar objetos geométricos. En el área de modelación geométrica se usan para construir gráficos en 2D y 3D, animaciones, ondas de audio y otros. Los splines se construyen principalmente, uniendo segmentos de curvas ó superficies. En el caso que los splines son formados por funciones polinómicas, se les asigna un grado de acuerdo al máximo grado de los polinomios utilizados.

Una característica de los splines polinómicas es que las expresiones algebraicas que los representan son bastante sencillas y de fácil manipulación. Sobre un splines se definen asas de control tales como: interpolación, tangencia, curvatura, orden de conexión, las cuales permiten manipular su forma Geométrica. Estas asas se vinculan con las expresiones algebraicas de los segmentos asociados al splines.

En particular los spline pueden formarse con dos segmentos de superficies tubulares, generadas por la envolvente de una familia monoparamétrica de esferas. Este tipo de superficies son de las principales primitivas geométricas usadas en la modelación de estructuras tubulares de radio constante o variable y de conexión suave. Estas superficies han sido estudiadas por importantes geómetras en el área de C.A.G.D (Computer Aided Geometric Design) durante los últimos 20 años, cabe destacar a W. Boehm, Pottman, Larry Schumaker, entre otros. Diversos modelos matemáticos se emplean para la construcción los spline tubulares, por ejemplo: el modelo propuesto por Dan Pedoe, el modelo de Moebius y el modelo de Laguerre. En este trabajo se emplea el modelo propuesto por Dan Pedoe el cual establece una correspondencia biyectiva entre puntos y rectas que yacen en el exterior de una cuádrica  $\mathbb{R}^4$ , y esferas, círculos y/o puntos en el espacio 3D.

El presente trabajo en está orientado al diseño de splines tubulares de radio variable a partir de una cónica de Lagrange. Los splines tubulares tienen propiedades tales como: continuidad, interpolación, conexión  $G^1$  (continuidad de los planos tangentes a lo largo del círculo de contacto) y además cada segmento de superficie está dado por una ecuación algebraica de grado cuatro muy sencilla y se puede controlar localmente la dilatación ó contracción de todo segmento.

La utilidad de un spline de este tipo reside en que se posibilita la construcción de un tubo por defecto, el cual permite su fácil manipulación.

Por otro lado, cada superficie tubular generada por la envolvente de una familia de esferas dada por la correspondencia de una cónica a través del modelo de Pedoe, tiene asociada una familia de círculos cuyos centros forman una cónica de Lagrange de grado 4. Este trabajo tiene como objetivo

secundario el cálculo de la expresión algebraica de dicha curva, además de lograr su representación en términos de los polinomios de Lagrange.

# Capítulo 1

## Curvas de Lagrange

### 1.1. Los polinomios de Lagrange

Sea  $n > 0$  y  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  una partición del intervalo  $[t_0, t_n]$  se define un polinomio de Lagrange mediante la expresión:

$$l_i^n(t) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t_i - t_j)} \quad (1.1)$$

donde  $i = 0 \dots n$

#### 1.1.1. Propiedades

1. Los polinomios de Lagrange forman una base para los polinomios de grado menor o igual que  $n$ .
2.  $l_i^n(t_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$
3. Los polinomios de Lagrange son una partición de la unidad.

$$\sum_{i=0}^n l_i^n(t) = 1$$

### 1.2. Curvas de Lagrange Polinomial.

De la propiedad (1) de la sección 1.1 se tiene que toda curva polinomial puede escribirse en términos de la base de Lagrange. En orden con esto, una curva de Lagrange es un segmento de curva polinomial expresada en términos de los polinomios de Lagrange.

**Definición 1.2.1.** Una curva de Lagrange de grado  $n$ , se expresa como la combinación lineal de los polinomios de Lagrange, donde las coordenadas de los puntos  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n \in \mathbb{R}^m$  son los coeficientes.

$$L(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i l_i^n(t)$$

Se observa claramente que la curva depende únicamente de los coeficientes  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ , los cuales son llamados puntos de control, o de interpolación, al ser modificado cualquiera de estos puntos, la curva cambiará su forma geométrica. La figura 1.1 muestra el cambio de la curva al mover el punto  $\mathbf{P}_1$  para una curva de grado  $n=2$ .

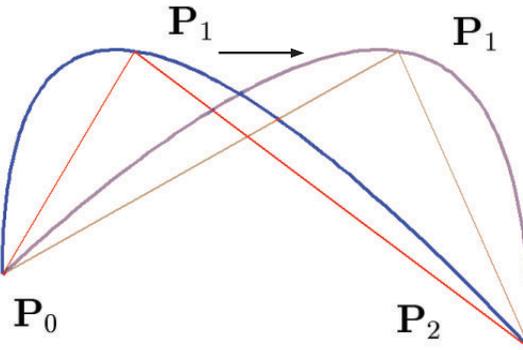


Figura 1.1: Cambio de la curva al mover el punto  $\mathbf{P}_1$ . Caso  $n = 2$

### 1.3. Curvas Racionales de Lagrange

Aun cuando los puntos de control permiten un gran manejo de la forma geométrica de la curva, es posible manipularla sin modificar los puntos de control. Para lograr esto se introduce el concepto de curva racional de Lagrange dado por la siguiente expresión:

**Definición 1.3.1.** Una curva racional de Lagrange de grado  $n$  está dada por la expresión.

$$L(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{P}_i l_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \alpha_i l_i^n(t)} \quad (1.2)$$

donde  $\alpha_i$  son escalares  $i = 0, \dots, n$  denominados pesos.

La ventaja de estas curvas es que, al variar los pesos  $\alpha_i$  podemos controlar la forma geométrica de la curva sin necesidad de alterar los puntos de interpolación. En la figura 1.2, se ilustra como varia la forma de la curva al cambiar el peso  $\alpha_1$ , para  $n = 2$  y  $m = 2$ .

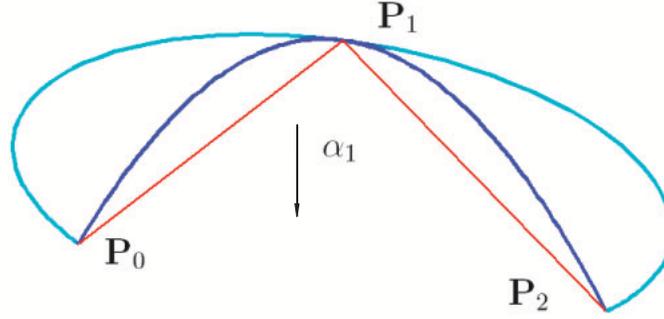


Figura 1.2: Curva Racional de Lagrange de grado  $n = 2$ .

### 1.3.1. Propiedades de las curvas de Lagrange

1. La curva de Lagrange interpola todos sus puntos de control esto es  $L(t_i) = \mathbf{P}_i$ .
2. La curva de Lagrange  $L(t)$  depende únicamente de sus puntos de control  $\mathbf{P}_i$  y sus pesos  $\alpha_i$ .
3. La derivada de  $L(t)$  está dada por:

$$L'(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{P}_i l_i'(t) \sum_{i=0}^n \alpha_i l_i(t) - \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{P}_i l_i(t) \sum_{i=0}^n \alpha_i l_i'(t)}{(\sum_{i=0}^n \alpha_i l_i(t))^2}$$

Si evaluamos esta expresión sobre los puntos de control tenemos que;

$$L'(t_j) = \frac{(\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{P}_i l_i'(t)) \alpha_j - \alpha_j \mathbf{P}_j (\sum_{i=0}^n \alpha_i l_i'(t))}{\alpha_j^2}$$

Para  $j = 0, 1, \dots, n$

Ahora veamos que ocurre en los extremos de la derivada de la curva de grado  $n=2$ . Evaluando en  $t_0$ ,  $t_1$  y  $t_2$  obtenemos las siguientes expresiones;

$$L'(t_0) = \frac{\alpha_1 l_1'(t_0)}{\alpha_0} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) + \frac{\alpha_2 l_2'(t_0)}{\alpha_0} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0) \quad (1.3)$$

$$L'(t_1) = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} l'_0(t_1)(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} l'_2(t_1)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \quad (1.4)$$

$$L'(t_2) = \frac{\alpha_0}{\alpha_2} l'_0(t_2)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} l'_1(t_2)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \quad (1.5)$$

Estas dos ecuaciones representan los vectores directores de las rectas tangentes a la curva en cada uno de sus extremos. Se hace especial énfasis es estas expresiones, porque serán usadas para la construcción de un spline cónico de Lagrange de clase  $G^1$ , lo que significa continuidad de las rectas tangentes.

## 1.4. Algoritmo de Aitkens para curvas polinomiales

El algoritmo de Aitkens es utilizado para obtener los puntos que yacen sobre una curva de Lagrange. Este algoritmo consiste en una secuencia de combinaciones baricéntricas que se hacen a partir de los puntos de control, para un valor fijo del parametro  $t$ .

$$\mathbf{P}_i^r(t) = \frac{(t_{i+r} - t)}{(t_{i+r} - t_i)} \mathbf{P}_i^{r-1}(t) + \frac{(t - t_i)}{(t_{i+r} - t_i)} \mathbf{P}_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{cases} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n - r \end{cases} \quad (1.6)$$

Los puntos intermedios  $\mathbf{P}_i^k$  del algoritmo de Aitkens pueden ser ordenados en una matriz triangular inferior de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P}_0^0 & & & & & & \\ \mathbf{P}_1^0 & \mathbf{P}_0^1 & & & & & \\ \mathbf{P}_2^0 & \mathbf{P}_1^1 & \mathbf{P}_0^2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \mathbf{P}_n^0 & \mathbf{P}_{n-1}^0 & \mathbf{P}_{n-2}^2 & \cdots & \mathbf{P}_0^n & & \end{array} \quad (1.7)$$

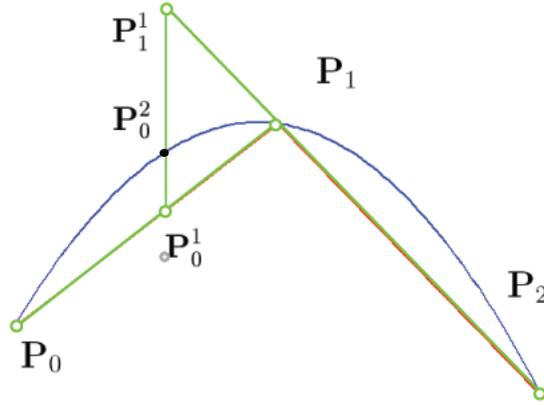


Figura 1.3: Curva Racional de Lagrange de grado  $n = 2$ .

### 1.4.1. Forma racional del Algoritmo de Aitkens

Si se quiere evaluar una curva racional de Lagrange e incluir los pesos, se debe emplear la siguiente relación de recurrencia.

$$\mathbf{P}_i^r(t) = \frac{(t_{i+r} - t)}{(t_{i+r} - t_i)} \mathbf{P}_i^{r-1} \frac{\alpha_i^{r-1}}{\alpha_i^r}(t) + \frac{(t - t_i)}{(t_{i+r} - t_i)} \frac{\alpha_i^{r-1}}{\alpha_i^r} \mathbf{P}_{i+1}^{r-1}, \quad \begin{cases} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n - r \end{cases} \quad (1.8)$$

donde:

$$\alpha_i^r(t) = \frac{(t_{i+r} - t)}{(t_{i+r} - t_i)} \alpha_i^{r-1}(t) + \frac{(t - t_i)}{(t_{i+r} - t_i)} \alpha_{i+1}^{r-1}$$

## 1.5. Spline cónico de Lagrange

En general se entiende por spline cónico la unión de uno o más segmentos de curvas conectados con cierto grado de suavidad, si dichos segmentos están definidos por 1.2 decimos que el spline cónico es de Lagrange.

### 1.5.1. Conexión de clase $G^0$ y $G^1$

Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos curvas de Lagrange de grado 2 donde sus pares de control se denotan por:

$$\begin{aligned} L_1 &: \{(\mathbf{P}_{10}, \alpha_{10}), (\mathbf{P}_{11}, \alpha_{11}), (\mathbf{P}_{12}, \alpha_{12})\} \\ L_2 &: \{(\mathbf{P}_{20}, \alpha_{20}), (\mathbf{P}_{21}, \alpha_{21}), (\mathbf{P}_{22}, \alpha_{22})\} \end{aligned}$$

Al conectar estas curvas  $\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{20}$  sin tener alguna condición adicional, el spline en general es llamado de clase  $G^0$ , sin embargo si se quiere que la conexión tenga algún grado de suavidad, es necesario agregar condiciones adicionales sobre los pares de control de ambas curvas. En la Figura 1.4 se muestra un Spline de clase  $G^0$  en el punto de conexión.

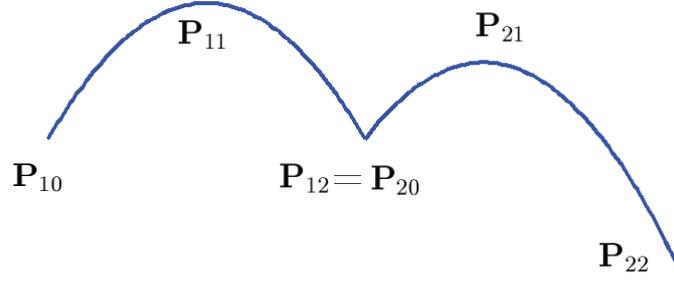


Figura 1.4: fig: Conexión de clase  $G^0$  que carece de suavidad.

Ahora bien, si adicionalmente las curvas  $L_1$  y  $L_2$  tienen la misma recta tangente en el punto de conexión, entonces el spline es de clase  $G^1$ . Para que esta condición se cumpla se debe elegir el punto  $\mathbf{P}_{21}$  tal que satisfaga la siguiente igualdad;

$$L'_1(t_2) = \lambda L'_2(t_3) , \text{ para } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ donde } t_2 = t_3$$

Usando las expresiones 1.3 y 1.5 y despejando la ecuación, se consigue la siguiente expresión para  $\mathbf{P}_{21}$  en función del parámetro  $\lambda$  y de los pares de control restantes, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{21} = & \mathbf{P}_{12} + \frac{\alpha_{22}}{4\alpha_{21}}(\mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{12}) + \frac{\alpha_{10}}{4\alpha_{21}\alpha_{12}}(\alpha_{10}(\mathbf{P}_{10} - \mathbf{P}_{12}) \\ & + 4\alpha_{11}(\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{12}))\lambda \end{aligned} \quad (1.9)$$

Esta expresión representa una recta de parámetro  $\lambda$ , que define el conjunto de puntos válidos para la construcción del spline de clase  $G^1$ . En la Figura 1.5 se muestra la familia de curvas que se pueden obtener al variar el parámetro  $\lambda$ , despejando fijo  $(\mathbf{P}_{10}, \alpha_{10}), (\mathbf{P}_{11}, \alpha_{11}), (\mathbf{P}_{12}, \alpha_{12})$  y  $(\mathbf{P}_{22}, \alpha_{22})$ .

## 1.6. Spline de superficies

Un spline de superficies es la conexión de dos o más segmentos de superficies conectadas a través de una curva común. Para que un spline de superficies

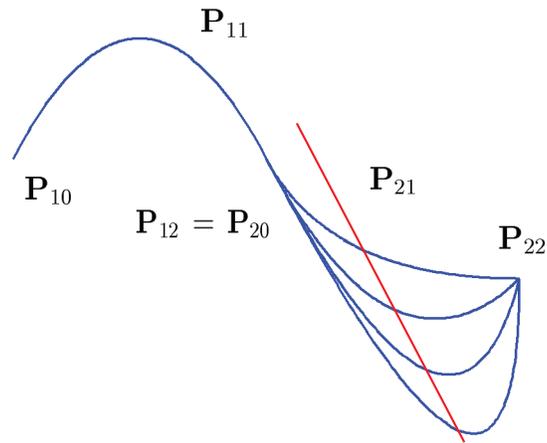


Figura 1.5: Spline de clase  $G^1$  y diferentes puntos  $P_{21}$ .

sea de clase  $G^1$ , el plano tangente en cada punto de la curva de conexión debe ser el mismo en ambos segmentos de superficies. En el capítulo 3 utilizaremos este concepto para el diseño de un spline tubular.

## 1.7. Envolverte de una familia monoparamétrica de superficies

**Definición 1.7.1.** Sea  $S$  la envolverte de  $M_s$  una familia monoparamétrica de superficies:

$$M_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, s \in \mathbb{R}/F(x, y, z, s) = 0\}$$

entonces  $F$  satisface las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} F(x, y, z, s) = 0 \\ F_s(x, y, z, s) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

donde  $F_s$  es la derivada parcial de  $F$  con respecto a  $s$ .

**Ejemplos 1.7.2.** Considerese la familia de esferas:

$$M_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, s \in \mathbb{R}/(x - s)^2 + y^2 + z^2 - s = 0\}$$

entonces el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} F(x, y, z, s) : (x - s)^2 + y^2 + z^2 - s = 0 \\ F_s(x, y, z, s) : -2(x - s) - 1 = 0 \end{cases}$$

Aplicando la teoría de resultante de Sylvester, se elimina el parametro  $s$  y se obtiene la solución del sistema anterior,  $S : 4y^2 + 4z^2 - 4x - 1 = 0$  la cual representa la envolverte para esta familia de esferas. En la Figura 1.6 se muestra la familia  $M_s$  y su envolverte.

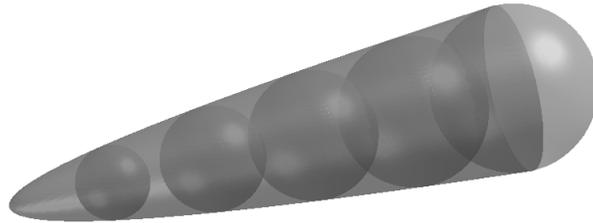


Figura 1.6: Envolverte de  $M_s$ .

# Capítulo 2

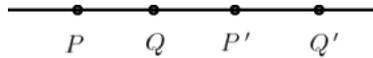
## Modelo de Dan Pedoe.

En este capítulo se explica el modelo de Pedoe generalizado en  $R^4$ , el cual establece una correspondencia biyectiva entre diferentes objetos matemáticos tales como, puntos, rectas y cónicas de Lagrange que yacen en  $R^4$ , con esferas, puntos y superficies envolventes de esferas, en  $R^3$ , respectivamente.

### 2.1. División Armónica.

Dados cuatro puntos colineales  $P, Q, P'$  y  $Q'$ , la división armónica consiste en dividir un segmento interna y externamente por un mismo factor de proporcionalidad  $k$ .

Se dice que  $Q$  y  $Q'$  dividen armónicamente al segmento  $\overline{PP'}$  si se verifica que:



$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QP'}} = \frac{\overline{PQ'}}{\overline{Q'P'}} = k \quad (2.1)$$

Si los pares de puntos  $Q, Q'$ , dividen armónicamente al segmento  $\overline{PP'}$  entonces diremos que  $P$  es armónico conjugado del punto  $P'$ , con respecto al segmento  $\overline{QQ'}$ . Esto significa que es una relación simétrica, es decir  $P'$  es armónico conjugado de  $P$ .

De 2.1 se deduce que, si  $P$  y  $P'$  son armónicos conjugados, resulta:

$$Q = \frac{P + kP'}{1 + k}, Q' = \frac{P - kP'}{1 - k}, k \neq \pm 1 \quad (2.2)$$

**Definición 2.1.1.** Denotamos por:

$$\Psi = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - w = 0 \}. \quad (2.3)$$

$$\Psi^+ = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - w > 0 \}. \quad (2.4)$$

$$\Psi^- = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - w < 0 \}. \quad (2.5)$$

Considerese  $P = (x_P, y_P, z_P, w_P)$  un punto fijo en  $\Psi^+$  y  $P' = (x, y, z, w)$  un punto cualquiera de  $\mathbb{R}^4$ ,  $L$  una recta que pasa por  $P$ ,  $P'$  y  $Q$ ,  $Q'$  los puntos de intersección de  $L$  con  $\Psi$ . Vease la Figura 2.1.

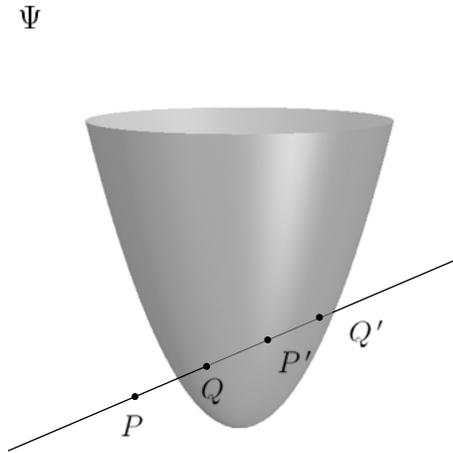


Figura 2.1: Paraboloide  $\Psi$ .

La recta  $L$  se puede parametrizar en términos de la razón de los puntos  $P$  y  $P'$ , por lo tanto:

Sustituyendo en la expresión de  $\Psi$ , resulta:

$$\left( \frac{x_P + kx}{1+k} \right)^2 + \left( \frac{y_P + ky}{1+k} \right)^2 + \left( \frac{z_P + kz}{1+k} \right)^2 - \left( \frac{w_P + kw}{1+k} \right) = 0.$$

Desarrollando la ecuación y ordenando como un polinomio de variable  $k$  resulta la siguiente ecuación de segundo grado.

$$(x^2 + y^2 + z^2 - w)k^2 + (2xx_P + 2yy_P + 2zz_P - w_P - w)k + x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P = 0 \quad (2.6)$$

Si  $Q$  y  $Q'$  son armónicos conjugados respecto a  $P$  y  $P'$  se tiene que:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - w)k^2 - (2x x_P + 2y y_P + 2z z_P - w_P - w)k + x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P = 0 \quad (2.7)$$

Entonces, sumando las ecuaciones 2.6 y 2.7 se tiene obtiene la expresión.

$$\Pi_P : 2x x_P + 2y y_P + 2z z_P - w_P - w = 0 \quad (2.8)$$

Que representa un 3-plano en  $\mathbb{R}^4$ , es llamado **3-plano polar** de  $P$  y contiene a todos los puntos armónicos conjugados de  $P$  respecto a  $\Psi$ .

**Definición 2.1.2.** *Dado un punto  $P \in \Psi^+$  El 3-plano polar asociado a  $P$  viene dado por la ecuación:*

$$\Pi_P : 2x x_P + 2y y_P + 2z z_P - w_P - w = 0$$

**Proposición 2.1.3.** *Dado un punto  $P \in \Psi^+$ ,*

(i)  $\Pi_P \cap \Psi \neq \emptyset$ .

(ii) *La proyección ortogonal de  $\Pi_P \cap \Psi$ , es una esfera de radio  $\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P}$  y centro  $(x_P, y_P, z_P)$ .*

**Demostración:** Sea  $P \in \Psi^+$  esto indica que  $x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P > 0$ , y supongamos que  $\Pi_P \cap \Psi = \emptyset$ .

(i) Sea  $P_\Pi$  la proyección ortogonal en el plano  $\Pi_P$ , del punto  $P$ , esto es:

$$P_\Pi = (x_P, y_P, z_P, 2x_P^2 + 2y_P^2 + 2z_P^2 - w_P) \in \Pi_P$$

Por hipótesis  $P_\Pi \in \Psi^+$  y  $\Pi_P \cap \Psi = \emptyset$  de aquí, se tiene que,

$$x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - (2x_P^2 + 2y_P^2 + 2z_P^2 - w_P) > 0$$

Por lo tanto sabiendo que si  $P_\Pi \in \Psi^+$ ,  $\Pi_P \cap \Psi \neq \emptyset$ , calculamos la proyección sobre el 3-plano  $w = 0 \Rightarrow -x_P^2 - y_P^2 - z_P^2 + w_P > 0$ , lo que contradice que  $P \in \Psi^+$ .

(ii) Sea  $v = (x, y, z, w)$  un punto cualquiera de  $\mathbb{R}^4$ , si  $v \in \Pi_P \cap \Psi$  se tiene que:

$$\begin{cases} 2x x_P + 2y y_P + 2z z_P - w_P - w = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - w = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Despejando la variable  $w$  de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se tiene que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_P - 2yy_P - 2zz_P + w_P = 0. \quad (2.10)$$

Completando cuadrados se obtiene la siguiente expresión:

$$(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 = x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P \quad (2.11)$$

Como  $P = (x_P, y_P, z_P, w_P) \in \Psi^+$  entonces  $x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P > 0$ , por lo tanto la ecuación representa una esfera en  $\mathbb{R}^3$  de radio

$$\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P} \text{ y centro } (x_P, y_P, z_P)$$

Por otro lado, si  $P \in \Psi$  entonces  $x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P = 0$  por lo tanto, de 2.11 se tiene que, la correspondencia del punto  $P$  es la proyección de si mismo en  $\mathbb{R}^3$ .

Por ende se concluye que el modelo de Pedoe permite establecer una biyección entre los puntos de  $\Psi^+ \cup \Psi$  y los puntos y esferas de  $\mathbb{R}^3$ .

□

## 2.2. Ángulo de intersección entre dos esferas.

**Definición 2.2.1.** *La ecuación normal de una esfera con centro en  $(x_c, y_c, z_c)$  y radio,  $R = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - w_c}$ , con  $w_c < x_c^2 + y_c^2 + z_c^2$  está dada por la expresión.*

$$E(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_c - 2y_c - 2z_c + w_c = 0 \quad (2.12)$$

Sean  $E_p$  y  $E_q$  dos esferas con dadas en forma normal.

$$\begin{cases} E_p(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_p - 2y_p - 2z_p + w_p = 0 \\ E_q(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_q - 2y_q - 2z_q + w_q = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Sea  $a \in E_p$  y  $E_q$ , y denotese a  $C_p$  y  $C_q$  los centros de  $E_p$  y  $E_q$  respectivamente. Por la ley del coseno tenemos que;

$$|C_p C_q|^2 = |C_p A|^2 + |C_q A|^2 - 2 |C_p A| |C_q A| \cos(\theta)$$

donde.

$$|C_p A| = R_p$$

$$|C_q A| = R_q$$

$$|C_p C_q|^2 = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2$$

$$\begin{aligned}
|C_p A| &= x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 - w_p = R_p \\
|C_q A| &= x_q^2 + y_q^2 + z_q^2 - w_q = R_q \\
2x_p x_q + 2y_p y_q + 2z_p z_q - w_p - w_q &= 2R_p R_q \cos(\theta) \\
\cos(\theta) &= \frac{2x_p x_q + 2y_p y_q + 2z_p z_q - w_p - w_q}{2R_p R_q} \tag{2.14}
\end{aligned}$$

**Corolario 2.2.2.** *Dos esferas son ortogonales si y solo si, sus correspondientes puntos en  $\mathbb{R}^4$  son armónicos conjugados respecto a  $\Psi$ .*

A continuación se define el producto interno de esferas:

**Definición 2.2.3.** *Sean  $E_P$  y  $E_Q$  dos esferas como las dadas en la definición 2.13, el producto interno entre esferas se define como:*

$$\begin{aligned}
[E_P \cdot E_Q] &= \frac{1}{2}[2x_P x_Q + 2y_P y_Q + 2z_P z_Q - w_P - w_Q] \\
&= \frac{1}{2}[R_P^2 + R_Q^2 - D^2] \tag{2.15}
\end{aligned}$$

donde  $D$  es la distancia entre sus centros.

**Propiedades:**

- Si  $E_P$  es tangente a  $E_Q$  entonces,  $[E_P \cdot E_Q] = \frac{1}{2}[R_P^2 + R_Q^2 - (R_P + R_Q)^2]$ , donde  $[E_P \cdot E_Q] = -R_P R_Q$
- Si  $E_P$  es secante a  $E_Q$  entonces,  $[E_P \cdot E_Q] = R_P R_Q \cos(\theta)$ , donde  $\theta$  es el ángulo de intersección entre las esferas.
- Si  $E_P$  y  $E_Q$  son concéntricas entonces,  $[E_P \cdot E_Q] = \frac{1}{2}[R_P^2 + R_Q^2]$ .
- Si  $E_P = E_Q$  entonces,  $[E_P \cdot E_Q] = R_P^2$ .
- Si  $E_P$  es ortogonal a  $E_Q$  entonces,  $[E_P \cdot E_Q] = 0$ .

## 2.3. Correspondencia de rectas en $\mathbb{R}^3$ y haces de esferas.

Sea  $L_{AB} \in \mathbb{R}^4$  una recta parametrizada por:

$$L_{AB}(t) = (B - A)t + A$$

donde  $A = (x_A, y_A, z_A, w_A)$  y  $B = (x_B, y_B, z_B, w_B)$ .

Por la proposición 2.1.3 Dicha recta genera un haz de esferas dadas por la expresión:

$$E_{L_{AB}} : (x - x(t))^2 + (y - y(t))^2 + (z - z(t))^2 = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 - w(t)$$

Donde;

$$x(t) = (x_B - x_A)t + x_A$$

$$y(t) = (y_B - y_A)t + y_A$$

$$z(t) = (z_B - z_A)t + z_A$$

$$w(t) = (w_B - w_A)t + w_A$$

**Proposición 2.3.1.** Si  $L_{AB} \in \Psi^+$  entonces el haz de esferas correspondientes se intersectan en un círculo fijo en 3-D

***Demostración:***

Denotamos por  $E(t_i)$  la esfera generada por el punto  $L_{AB}(t_i)$ . Primero demostramos que la intersección es no vacía es decir;

$$\bigcup_{i \in \mathbb{R}} E(t_i) \neq \emptyset$$

Sea  $i, j \in \mathbb{R}$  y  $E_i, E_j$  dos esferas generadas por los puntos  $t_i$  y  $t_j$ . Para que  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ , basta demostrar que el ángulo de intersección  $\theta$  entre las esferas sea distinto de cero, esto es lo mismo que demostrar que;

$$\cos(\theta) < 1$$

de la ecuación 2.14, demostrar lo anterior es equivalente a probar que:

$$\left| \frac{2x(t_i)2x(t_j) + 2y(t_i)y(t_j) + 2z(t_i)z(t_j) - w(t_i) - w(t_j)}{2R_i R_j} \right| < 1 \quad (2.16)$$

Lo que a su vez es equivalente a decir que;

$$(2x(t_i)2x(t_j) + 2y(t_i)y(t_j) + 2z(t_i)z(t_j) - w(t_i) - w(t_j))^2 < 4R_i^2 R_j^2 \quad (2.17)$$

Ahora bien, si reparametrizamos la recta por medio de las razones simples;

$$L_{AB}(t) = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt}{1+t}$$

con  $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Y sustituimos sus coordenadas en  $\Psi$  obtenemos el polinomio;

$$P(t) = R_i^2 t^2 + (2x(t_i)2x(t_j) + 2y(t_i)y(t_j) + 2z(t_i)z(t_j) - w(t_i) - w(t_j)) + R_j^2.$$

Como  $L_{AB} \in \Psi^+$  entonces, el  $P(t)$  no tiene solución por lo tanto:

$$(2x(t_i)2x(t_j) + 2y(t_i)y(t_j) + 2z(t_i)z(t_j) - w(t_i) - w(t_j))^2 - 4R_i^2R_j^2 < 0$$

De aquí se cumple 2.16 y por ende  $\theta \neq 0$ .

Por otro lado;

Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos puntos de la recta  $L_{AB}$ . Entonces, existen  $t_1$  y  $t_2$  tal que:

$$\begin{aligned} P_1 &= (x(t_1), y(t_1), z(t_1), w(t_1)) \\ P_2 &= (x(t_2), y(t_2), z(t_2), w(t_2)) \end{aligned}$$

Sea  $V = (x_V, y_V, z_V, w_V)$  el vector director de la recta  $L_{AB}(t)$  y  $(x, y, z, w) \in E_{t_1} \cap E_{t_2}$  entonces, su coordenadas satisfacen las ecuaciones;

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x x(t_1) + 2y y(t_1) + 2z z(t_1) - w(t_1) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x x(t_2) + 2y y(t_2) + 2z z(t_2) - w(t_2) = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Lo que es equivalente a:

$$\begin{cases} 2x(t_1 + x_V t_1) + 2y(t_1 + y_V t_1) + 2z(t_1 + z_V t_1) - (t_1 + w_V t_1) = 0 \\ 2x(t_2 + x_V t_2) + 2y(t_2 + y_V t_2) + 2z(t_2 + z_V t_2) - (t_2 + w_V t_2) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Resolviendo el sistema tenemos que:

$$(2x x_V + 2y y_V + 2z z_V - w_V)(t_2 - t_1) = 0 \quad (2.20)$$

$$2x x_V + 2y y_V + 2z z_V - w_V = 0 \quad (2.21)$$

Esto dice que la intersección de las dos esfera esta contenida en el plano radical de  $V$ , por lo tanto, los puntos de dicha intersección están determinados por el sistema; véase la Figura 2.2.

$$\begin{cases} (x - x(t))^2 + (y - y(t))^2 + (z - z(t))^2 = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) - w(t) \\ 2x x_V + 2y y_V + 2z z_V - w_V = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

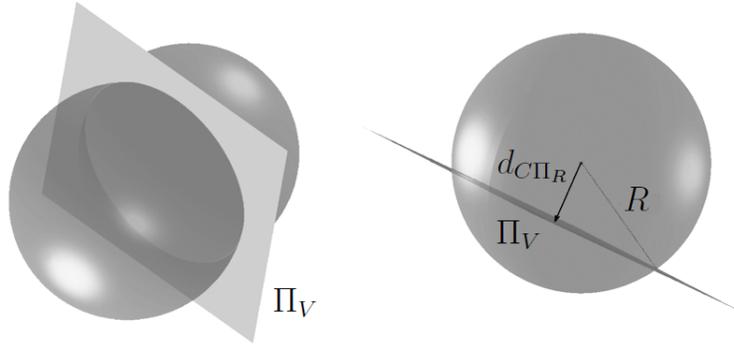


Figura 2.2: Circulo de intersección entre dos esferas y plano radical de  $V$ .

La solución de este sistema es una circunferencia en  $\mathbb{R}^3$ , además, nótese que el sistema no depende del punto seleccionado. Una forma de calcular el centro y el radio de dicha circunferencia es la siguiente:

Se calcula la distancia de el centro de  $E_t$  al plano  $\Pi_V$  que viene dada por la ecuación:

$$d_{C\Pi_R} = \frac{2x_V x(t) + 2y_V y(t) + 2z_V z(t) - w_V}{\sqrt{4x_V^2 + 4y_V^2 + 4z_V^2}} \quad (2.23)$$

entonces se deduce que la circunferencia tiene centro:

$$C = C_1 + d_{C\Pi_R} \hat{v} \quad (2.24)$$

y radio:

$$R = \sqrt{R_1^2 - d_{C\Pi_R}^2} \quad (2.25)$$

Ahora bien, si tomamos el punto  $C' = C_1 + d_{C_2\Pi_R}(-\hat{v})$  entonces

$$C' - C = C_2 + d_{C_2\Pi_R}(-\hat{v}) - C_1 - d_{C_1\Pi_R}\hat{v} =$$

$$(C_2 - C_1) - (d_{C_1\Pi_R}\hat{v} - d_{C_2\Pi_R}(-\hat{v})) = (C_2 - C_1) - (d_{C_1\Pi_R} + d_{C_2\Pi_R})\hat{v} = 0$$

Por lo tanto  $C = C'$ , esto demuestra que el centro de la circunferencia no depende del punto seleccionado y ya que la intersección es no vacía, el radio tampoco depende del punto seleccionado.

En el caso en que la recta  $L_{AB}$  es tangente a  $\Psi$  en un punto, la recta se corresponde a un haz de esferas que se interseca en un punto. En el caso en que la recta  $L_{AB}$  no corta a  $\Psi$ , la recta se corresponde a un haz de esferas que no se intersectan.

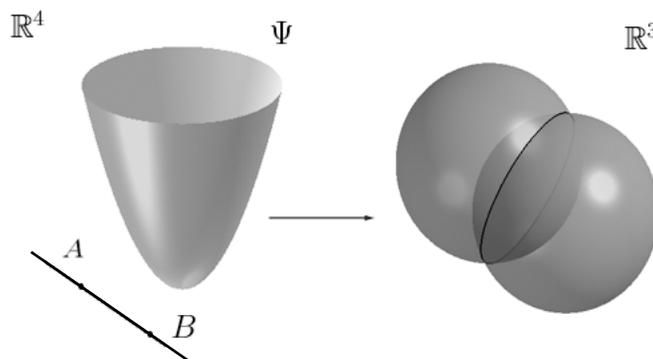


Figura 2.3: Correspondencia de una recta en  $\mathbb{R}^4$  cuando esta, no interseca a  $\Psi$ .

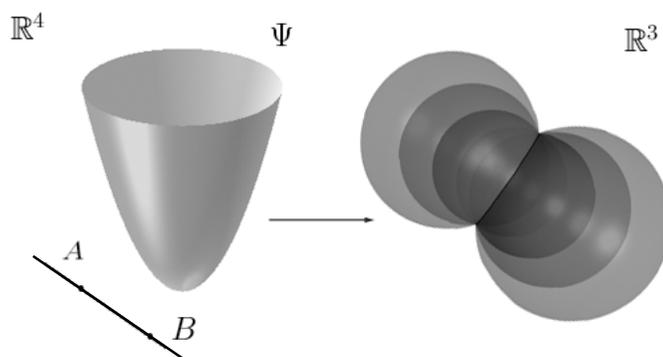


Figura 2.4: Haz de esferas que se intertesecta en un círculo común que se corresponde con una recta que no interseca a  $\Psi$ .

## 2.4. Correspondencia de una cónica Lagrange.

Sea  $L(t)$  una cónica racional de Lagrange definida por los pares de control  $(P_i, \alpha_i)$ , con  $i=0,1,2$ . Partiendo de la correspondencia establecida para puntos en  $\mathbb{R}^4$ , se pueden diferenciar 3 casos distintos para la correspondencia de una cónica en  $\mathbb{R}^4$ :

- Caso 1: Si la cónica está contenida en  $\Psi$  la correspondencia según el modelo de Pedoe es una familia monoparamétrica de esferas dadas por la expresión:

$$(x - x^2(t))^2 + (y - y^2(t))^2 + (z - z^2(t))^2 = r^2(t)$$

donde  $r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) - w(t)$ . En La figura 2.7, se observa un ejemplo de una familia de esferas generada por la curva contenida en  $\Psi$ .

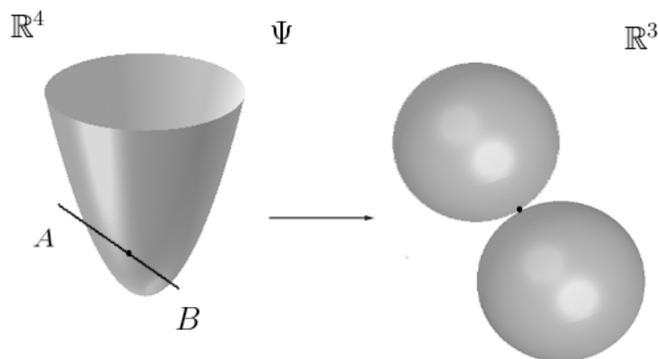


Figura 2.5: La correspondencia de la recta cuando es tangente a  $\Psi$ .

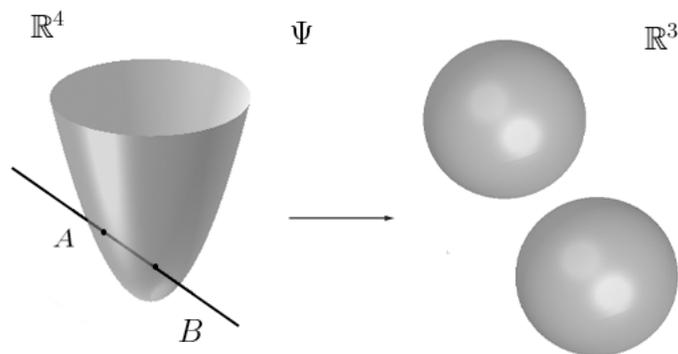


Figura 2.6: La correspondencia de la recta cuando es secante a  $\Psi$ .

- Caso 2: Si la curva es tangente a  $\Psi$  en  $L(t_0)$ , entonces este punto se corresponde a un punto en 3D, luego el resto de la curva genera una familia de esferas dadas por la expresión anterior, véase La Figura 2.8.
- Caso 3: Si la curva es secante a  $\Psi$  en  $L(t_1)$  y  $L(t_2)$ , entonces su correspondencia a través del modelo, son dos puntos en 3D además, los puntos residentes en  $\Psi^-$  no tienen correspondencia ya que el radio no está definido. Ver Figura 2.9.

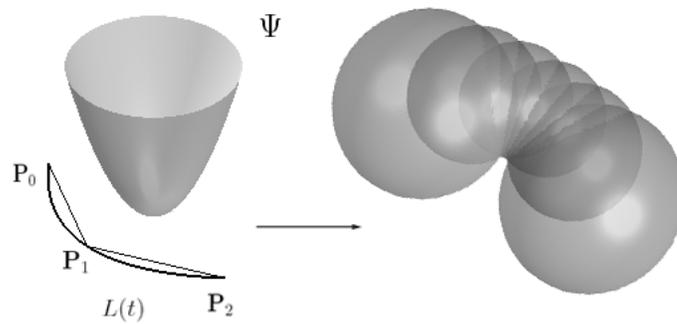


Figura 2.7: La cónica no intersecta a  $\Psi$ .

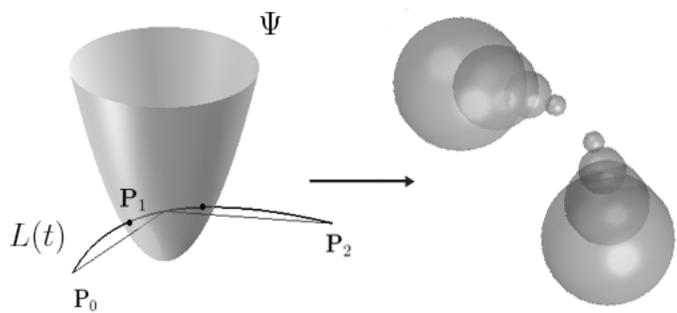


Figura 2.8: Caso en el que la cónica intersecta a  $\Psi$ .

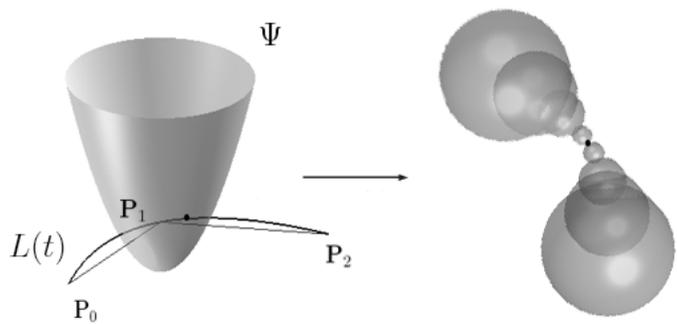


Figura 2.9: Caso en el que la cónica es tangente a  $\Psi$ .

# Capítulo 3

## Spline tubular de Lagrange

**Definición 3.0.1.** *Las superficies tubulares de Lagrange son superficies representadas por envolventes de familias monoparamétricas de esferas generadas por la correspondencia de los puntos de una cónica de Lagrange en  $\mathbb{R}^4$  y esferas de  $\mathbb{R}^3$ , a través del modelo de Pedoe. Ver Figura 3.1*

En esta sección se estudian estas superficies además de métodos y algoritmos para su despliegue, mas aun se buscan condiciones necesarias para conectar dos superficies tubulares de Lagrange con cierto de grado de suavidad.

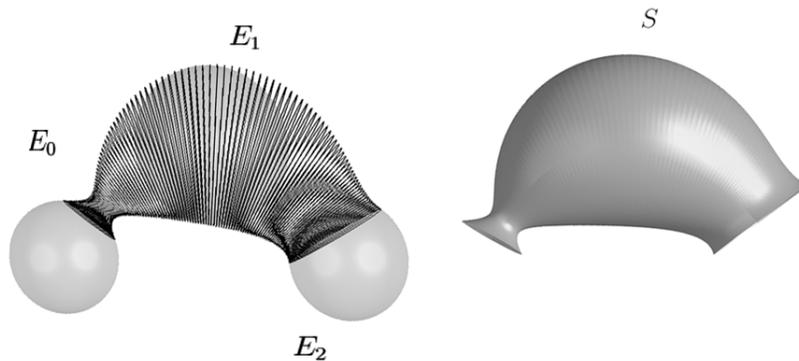


Figura 3.1: Interpolación de círculos y conexión  $G^1$  de dos segmentos.

Sea  $L(t) \subset \Psi^+$  una cónica de Lagrange, con puntos de control  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \Psi^+$ ,  $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i, w_i)$ , y pesos  $\alpha_0, \alpha_1$ , y  $\alpha_2$  respectivamente parametrizada por:

$$L(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t)), \quad \text{con } t \in [0, 1]. \quad (3.1)$$

donde:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{x_0\alpha_0 l_0(t) + x_1\alpha_1 l_1(t) + x_2\alpha_2 l(t)}{\alpha_0 l_0(t) + \alpha_1 l_1(t) + \alpha_2 l_2(t)} \\
y(t) &= \frac{y_0\alpha_0 l_0(t) + y_1\alpha_1 l_1(t) + y_2\alpha_2 l(t)}{\alpha_0 l_0(t) + \alpha_1 l_1(t) + \alpha_2 l_2(t)} \\
z(t) &= \frac{z_0\alpha_0 l_0(t) + z_1\alpha_1 l_1(t) + z_2\alpha_2 l(t)}{\alpha_0 l_0(t) + \alpha_1 l_1(t) + \alpha_2 l_2(t)} \\
w(t) &= \frac{w_0\alpha_0 l_0(t) + w_1\alpha_1 l_1(t) + w_2\alpha_2 l(t)}{\alpha_0 l_0(t) + \alpha_1 l_1(t) + \alpha_2 l_2(t)}
\end{aligned}$$

Dado que  $L(t) \subset \Psi^+$ , entonces por la proposición 2.1.3 a cada punto de  $L(t)$  le corresponde una esfera en 3D que tiene por ecuación:

$$E(x, y, z, t) : (x - x^2(t))^2 + (y - y^2(t))^2 + (z - z^2(t))^2 = r^2(t)$$

donde,  $r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) - w(t)$ . La familia monoparamétrica cuadrática de esferas correspondiente a la cónica  $L(t)$  es:

$$M_t = \{E(x, y, z, t) = 0 : t \in \mathbb{R}\}$$

La superficie tubular asociada a la cónica  $L(t)$  es entonces, por definición la envolvente de la familia  $M_t$ . Dicha envolvente viene dada por la eliminación del parámetro  $t$  en el siguiente sistema:

$$\begin{cases}
(x - x^2(t))^2 + (y - y^2(t))^2 + (z - z^2(t))^2 = r^2(t) \\
2x \frac{dx}{dt}(t) + 2y \frac{dy}{dt}(t) + 2z \frac{dz}{dt}(t) - \frac{dw}{dt}(t) = 0.
\end{cases} \quad (3.2)$$

Usando la resultante de silvester se resuelve el Sistema 3.2 y se tiene que la ecuación implícita de la superficie envolvente dada por:

$$S : (E_0 \alpha_{01} - 4 E_1 \alpha_{11} + E_2 \alpha_{21})^2 - 4 E_0 \alpha_{01} E_2 \alpha_{21} = 0 \quad (3.3)$$

Donde  $E_i = x^2 + y^2 + z^2 - 2x x_i - 2y y_i - 2z z_i + w_i$ , es la ecuación de la esfera correspondiente al punto de control  $P_i$  con  $i = 0, 1, 2$ . Obsérvese que esta superficie es de grado algebraico a lo sumo 4.

De acuerdo a la incidencia de la recta tangente con la cuádrlica  $\Psi$  se tienen dos casos:

El primer caso si la recta intersecta a la cuádrlica en uno o dos puntos, entonces el haz de esferas asociado es tangente en un punto o no se intersecta. Otro caso es que la recta no intersecte a la cuádrlica  $\Psi$ . En este último caso, se tiene que por la proposición 2.3.1 la recta tangente tiene asociado un haz de esferas que se intersecta en un círculo fijo en 3D.

Si se considera una curva de Lagrange cuyas rectas tangentes estén en  $\Psi^+$  se deduce que la familia de rectas tangentes a la cónica tiene asociada una familia de círculos. Esta familia de círculos representa los *perfiles* circulares de la superficie tubular asociada a la cónica  $L(t)$ , los cuales son utilizados para su despliegue. La Figura 3.2 muestra un ejemplo de la familia de círculos asociada a una cónica  $L(t) \subset \Psi^+$  cuyas rectas tangentes yacen en  $\Psi^+$ .

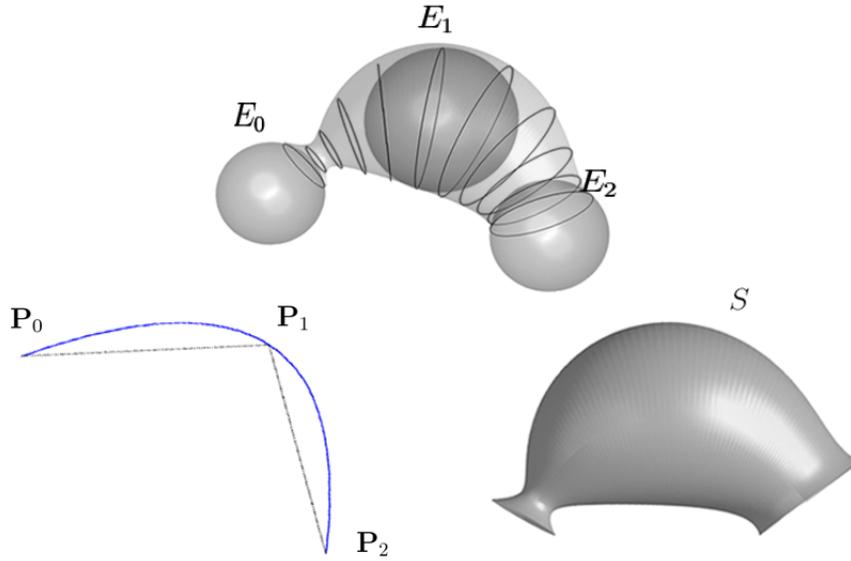


Figura 3.2: Perfiles Circulares asociados a curvas cuyas rectas tangentes yacen en  $\Psi^+$ .

### 3.1. Spline Tubular de Lagrange

**Definición 3.1.1.** *Un spline tubular de Lagrange es la unión de uno o mas segmentos de superficies tubulares de Lagrange por medio de una circunferencia común y con cierto grado de suavidad. Si adicionalmente los dos segmentos tienen los mismos planos tangentes en cualquier punto de la circunferencia entonces el spline es de clase  $G^1$ .*

**Proposición 3.1.2.** *Si un spline cónico de Lagrange es de clase  $G^1$  el spline tubular de Lagrange asociado también es de clase  $G^1$ .*

**Demostración:**

Sean  $L_1(t)$  y  $L_2(t)$  dos cónicas de Lagrange definidas en los intervalos  $[t_0, t_2]$  y  $[t_2, t_4]$ , respectivamente, con puntos de control,  $\mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}$  y  $\mathbf{P}_{20}, \mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}$  respectivamente, supongase que en el punto:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{20}$$

las dos cónicas se conectan con suavidad  $G^1$ . Esto significa que la recta tangente a  $L_1(t_2)$  es igual a la recta tangente en  $L_2(t_2)$ , y supongase además que dicha recta tangente yace en  $\Psi^+$ .

El círculo  $C$  correspondiente a la recta tangente a  $L_1(t)$  en  $\mathbf{P}$ , está contenido en la esfera que corresponde a dicho punto. Por lo tanto, dado que  $L_1(t_2) = L_2(t_2)$  se tiene siguiendo el modelo de Pedoe, que las esferas correspondientes a los segmentos  $L_1$  y  $L_2$ , coinciden sobre el círculo de  $C$ , correspondiente a la recta tangente  $L_1(t_2)$  y  $L_2(t_2)$ , que yace sobre la esfera  $E_{12}$  y  $E_{22}$ . Dado que la envolvente  $S_1$  es tangente a la esfera  $E_{12}$  sobre el círculo  $C$  y la superficie  $S_2$  también es tangente a la esfera  $E_{22}$  sobre  $C$ , se concluye que ambas familias de planos tangentes correspondientes a  $S_1$  y  $S_2$  son exactamente iguales. Esto implica que estas superficies se conectan de clase  $G^1$  sobre el círculo  $C$ .  $\square$

La proposición 3.1.2 permite implementar un algoritmo para el despliegue de splines cuadráticos. La Figura 3.3 muestra algunos ejemplos de splines tubulares de Lagrange de clase  $G^1$ .

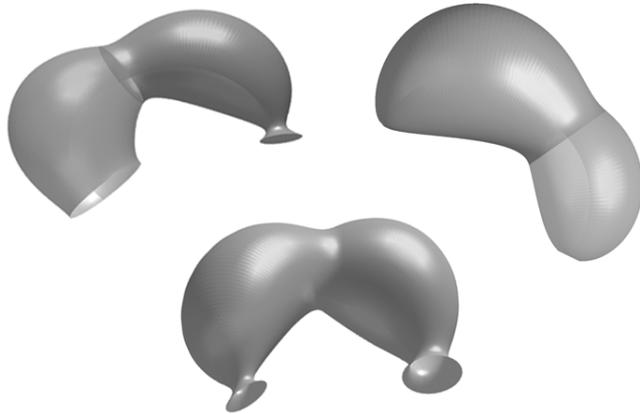


Figura 3.3: Ejemplos de algunos splines Tubulares de Lagrange.

## 3.2. Despliegue de un spline de clase $G^1$ .

En el siguiente esquema se muestran los pasos a seguir para la construcción de un spline tubular de Lagrange.

- Paso 1: Dado  $m > 0$ . Dados los pesos  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ . Dados las esferas de control con  $E_0, E_1$ , y  $E_2$  con centro  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , y radios  $r_0, r_1$  y  $r_2$  respectivamente, donde  $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - w_i$ . A partir de esta información se definen los puntos

$\mathbf{P}_{10}$ ,  $\mathbf{P}_{11}$  y  $\mathbf{P}_{12}$  de manera que  $\mathbf{P}_{1i} = (x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}, w_{1i})$ . Nótese que esta forma define el primer segmento de spline cónico de Lagrange en  $\mathbb{R}^4$ .

- Paso 2: Se contruye el segundo segmento de spline cónico de Lagrange  $L_2(t)$  de la siguiente manera. Dado la esfera  $E_{22}$ : con centro  $\mathbf{p}_{22} = (x_{22}, y_{22}, z_{22})$  y radio  $r_{22} = \sqrt{x_{22}^2 + y_{22}^2 + z_{22}^2 - w_{22}}$ , se define  $\mathbf{P}_{22}$ , de forma análoga como se definieron los puntos  $\mathbf{P}_{1i}$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Así para  $L_2(t)$  se tienen definidos sus puntos extremos  $\mathbf{P}_{20}$  y  $\mathbf{P}_{22}$ , como se mostró anteriormente  $\mathbf{P}_{20} = \mathbf{P}_{12}$  (punto de conexión). El punto  $\mathbf{P}_{21}$  se determina mediante la expresión 1.9 logrando con esto que la conexión sea de clase  $G^1$ , de esta manera se construye el segundo segmento del spline cónico de Lagrange  $L_2(t)$ , vease la Figura 3.4.

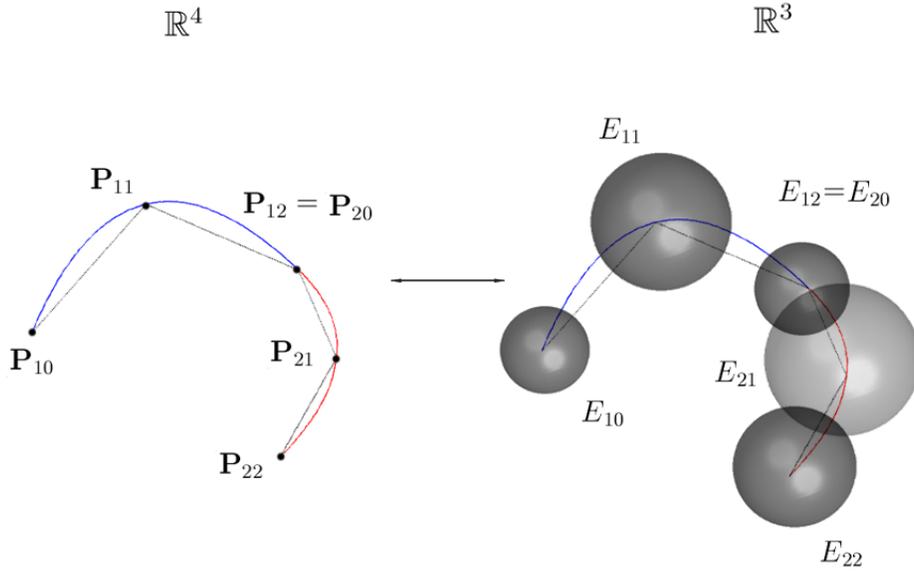


Figura 3.4: Spline cónicos de Lagrange cuyas rectas tangentes yacen en  $\Psi^+$

Para construir un spline cónico de Lagrange de  $n$  segmentos se repite el Paso 2  $m - 1$  veces.

- Paso 3: Para cada  $s \in [t_0, t_2]$  se calcula la recta tangente a la curva en el punto  $L_1(s)$ ;

$$\mathcal{R}_s : L'_1(s)t + L_1(s) = 0 \quad (3.4)$$

esta recta se corresponde con un perfil circular de centro y radio indicados en la proposición 2.3.1. esta correspondencia genera la familia de perfiles asociada a la cónica  $L_1(t)$ .

Al obtener tener la familia de perfiles, junto con los respectivos planos radicales se procede a triangular los segmentos de conos determinados por círculos consecutivos (ver Figura 3.6).

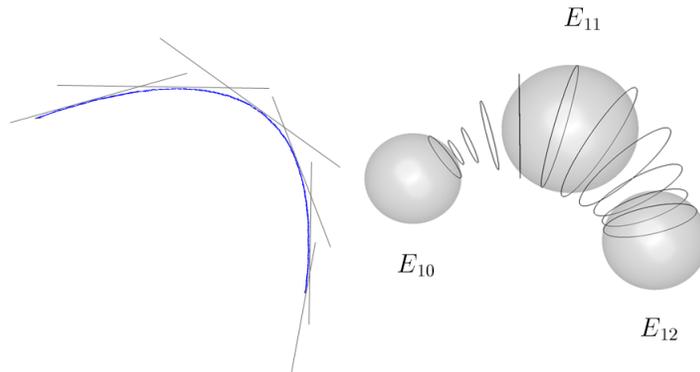


Figura 3.5: Correspondencia entre las rectas tangentes a la cónica y las familia de perfiles circulares

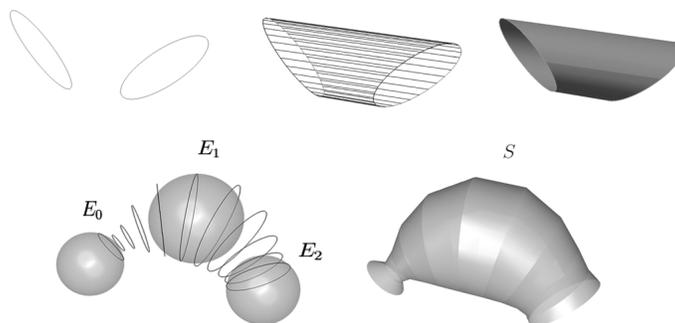


Figura 3.6: Superficie Tubular asociada a  $L_1$ , para una baja (izquierda) y alta partición (derecha).

Según la proposición 3.1.2 el hecho de que este spline cónico sea de clase  $G^1$ , garantiza que el spline tubular de Lagrange también sea de clase  $G^1$ . De esta manera se consigue construir los  $m$  segmentos de spline tubular de Lagrange. En la figura 3.6 se aprecia el primer segmento de spline tubular para una partición baja y alta de los intervalos  $[t_0, t_2]$  y  $[t_2, t_4]$ . La figura 3.7 ilustra los pasos descritos para la construcción del spline tubular de Lagrange de clase  $G^1$ .

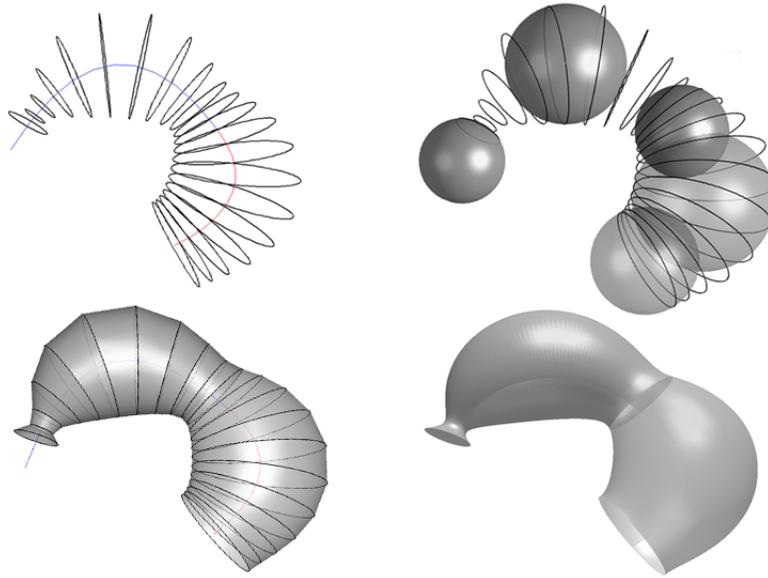


Figura 3.7: Ilustración del algoritmo para la construcción de un spline tubular de Lagrange.

### 3.3. Curva de Centro de Perfiles

A continuación se calcula la expresión paramétrica de la curva de los centros de perfiles asociada a la superficie tubular de Lagrange. Por la proposición 2.3.1 se tiene que una recta se corresponde con un círculo, el cual resulta de la intersección del haz de esferas que generan los puntos de la recta. Se observa que en la demostración de la proposición 2.3.1 el círculo de intersección está contenido en el plano radical del vector director de la recta, por lo tanto, dicha recta es perpendicular al plano según 3.2 de donde se concluye que el centro del círculo es la intersección de la recta tangente con el plano radical de su vector director.

En este orden se tiene:

Sea  $L(t)$  una curva de Lagrange entonces  $L'(t)$  es el vector director de la recta tangente a  $L(t)$  en  $t \in [t_0, t_2]$ , dicha recta está parametrizada por la siguiente expresión para cada  $t$  fijo;

$$\mathcal{R} : (L'(t))s + L(t) \tag{3.5}$$

donde cada coordenada está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_x(t) &= x'(t) s + x(t) \\
\mathcal{R}_y(t) &= y'(t) s + y(t) \\
\mathcal{R}_z(t) &= z'(t) s + z(t)
\end{aligned}$$

Por otra parte el plano radical

$$\Pi_{L'(t)} : 2x x'(t) + 2y y'(t) + 2z z'(t) - w'(t) = 0 \quad (3.6)$$

La intersección del plano  $\Pi_{L'(t)}$  con la recta de 3.5 da el centro de el perfil en t;

$$2\mathcal{R}_x(t) x'(t) + 2\mathcal{R}_y(t) y'(t) + 2\mathcal{R}_z(t) z'(t) - w'(t) = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
&(2(s x'(t) + x(t)) x'(t) + 2(s y'(t) + y(t)) y'(t) + 2(s z'(t) \\
&+ z(t)) z'(t) - w'(t) = 0
\end{aligned} \quad (3.8)$$

$$s(t) = \frac{-2x'(t)x(t) - 2y'(t)y(t) - 2z'(t)z(t) + w'(t)}{2((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2)} \quad (3.9)$$

Sustituyendo el valor de s(t) en las funciones coordenadas de la recta de 3.5.

$$\mathfrak{S}(t) = \frac{-2x'(t)x(t) - 2y'(t)y(t) - 2z'(t)z(t) + w'(t)}{2((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2)} L'(t) + L(t) \quad (3.10)$$

Al desarrollar esta expresión sustituyendo las expresiones de  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $w(t)$ ,  $x'(t)$ ,  $y'(t)$ ,  $z'(t)$ ,  $w'(t)$  se obtiene una curva racional de grado 4 de parámetro t, que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathfrak{S}(t) = \frac{\sum_i^4 n_i t^i}{\sum_i^4 d_i t^i} \quad (3.11)$$

donde los coeficientes del numerador  $n_i$  y los del denominador  $d_i$ , están en función de las coordenadas de los puntos de control de la curva de Lagrange y los pesos  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ , y  $\alpha_2$ .

Esta curva racional se puede expresar en términos de la base de Lagrange, usando como tiempos de la curva:

$$\mathcal{H} = \{T_0 = t_0, T_1 = \frac{t_0 + t_1}{2}, T_2 = t_1, T_3 = \frac{t_1 + t_2}{2}, T_4 = t_2\}$$

formando estos una nueva partición del intervalo  $[t_0, t_2]$ , de esta manera la curva de centro de perfiles se puede escribir de la forma:

$$\mathfrak{S}(t) = \frac{\sum_{i=0}^4 \omega_i \mathbf{v}_i l_i^4(t)}{\sum_{i=0}^4 \omega_i l_i^4(t)} \quad (3.12)$$

Donde los polinomios de Lagrange se definen sobre los nuevos tiempos de la partici3n  $\mathcal{H}$ .

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sum_{j=0}^4 d_i(t_0)^j \\ \omega_1 &= \sum_{j=0}^4 d_i\left(\frac{t_0 + t_1}{2}\right)^j \\ \omega_2 &= \sum_{j=0}^4 d_i(t_1)^j \\ \omega_3 &= \sum_{j=0}^4 d_i\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)^j \\ \omega_4 &= \sum_{j=0}^4 d_i(t_2)^j \end{aligned}$$

Desarrollando, completando cuadrado y factorizando adecuadamente se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= 32(\alpha_0^2(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2}))\alpha_1^2 + \\
&\quad (-16\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 16|\mathbf{p}_0|^2 + 16\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_1 + 16\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_2)\alpha_2\alpha_0^2\alpha_1 + \\
&\quad 2(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2^2})\alpha_0^2\alpha_2^2 \\
\omega_1 &= (\frac{81}{8}\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2})\alpha_0^2\alpha_1^2 + \\
&\quad (9/4\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_1 - 9/4\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_2 - 9/4|\mathbf{p}_1|^2 + 9/4\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + \\
&\quad (1/8|\mathbf{p}_1|^2 - 1/4\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + 1/8|\mathbf{p}_2|^2)\alpha_2^2 \\
\omega_2 &= (-4\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2})\alpha_0^2 + \\
&\quad (4\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 4\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_2 + 4\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_1 - 4|\mathbf{p}_1|^2)\alpha_2\alpha_0 + \\
&\quad 2\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^2}\alpha_2^2)\alpha_1^2 \\
\omega_2 &= 2\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_0^2}\alpha_1^2\alpha_0^2 + \\
&\quad (4\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_1 - 4\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_2 - 4|\mathbf{p}_1|^2 + 4\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)\alpha_1^2\alpha_2\alpha_0 + \\
&\quad 2\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_0^2}\alpha_1^2\alpha_2^2 \\
\omega_3 &= ((1/8\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2})\alpha_0^2 + (9/4\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_1 - 9/4\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_2 - \\
&\quad 9/4|\mathbf{p}_1|^2 + 9/4\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)\alpha_0\alpha_2 + (\frac{81}{8}\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^2})\alpha_2^2)\alpha_1^2 + \\
&\quad ((-1/4|\mathbf{p}_0|^2 + 1/4\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_1 + 1/4\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_2 - 1/4\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)\alpha_0^2\alpha_2 + \\
&\quad (-9/4\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_1 + 9/4\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_2 + 9/4\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 9/4|\mathbf{p}_2|^2)\alpha_0\alpha_2^2)\alpha_1^2 + \\
&\quad 1/8\overline{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_0^2}\alpha_0^2\alpha_2^2 \\
\omega_4 &= (32\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^2})\alpha_1^2\alpha_2^2 + \\
&\quad \alpha_0^2\alpha_2^2\alpha_1^2 + (16\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 16|\mathbf{p}_2|^2 - \\
&\quad 16\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_1 + 16\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_2)\alpha_1\alpha_2^2\alpha_0 + (2\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2^2})
\end{aligned}$$

Donde  $\mathbf{p}_i$  es la proyección ortogonal de  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^4$  en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$  y  $\overline{\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j^2}$  son el producto escalar y la distancia respectivamente entre  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}_j$ .

Analogamente se puede hallar los puntos de control evaluando el numerador de 3.10 en los tiempos de  $\mathcal{H}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_0 &= \frac{1}{\omega_0} \sum_{j=0}^4 n_i (t_0)^j \\
\mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\omega_1} \sum_{j=0}^4 n_i \left(\frac{t_0 + t_1}{2}\right)^j \\
\mathbf{v}_2 &= \frac{1}{\omega_2} \sum_{j=0}^4 n_i (t_1)^j \\
\mathbf{v}_3 &= \frac{1}{\omega_3} \sum_{j=0}^4 n_i \left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)^j \\
\mathbf{v}_4 &= \frac{1}{\omega_4} \sum_{j=0}^4 n_i (t_2)^j
\end{aligned}$$

Nuevamente desarrollando, completando cuadrado y factorizando adecuadamente se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_0 &= \frac{1}{\omega_0} (32(r_1^2 - [E_1 E_0])\mathbf{p}_0 + 32(r_0^2 - [E_0 E_1])\mathbf{p}_1) \alpha_1^2 \alpha_0^2 + (8([E_0 E_2] - \\
&\quad r_0^2) \alpha_2 \alpha_0^2 \mathbf{p}_1 + (8 [E_0 E_2] - 16 [E_1 E_2] + 8 [E_0 E_1]) \alpha_2 \alpha_0^2 \mathbf{p}_0 + \\
&\quad (8 E_0 E_1 - 8 r_0^2) \alpha_2 \alpha_0^2 \mathbf{p}_2) \alpha_1 + \\
&\quad (-2 [E_0 E_2] + 2 r_0^2) \alpha_0^2 \alpha_2^2 \mathbf{p}_2 + (-2 [E_0 E_2] + 2 r_2^2) \alpha_0^2 \alpha_2^2 \mathbf{p}_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 = & \left( \frac{81}{8} (r_0^2 - [E_0 E_1]) \alpha_0^2 + \frac{9}{8} ([E_0 E_1] + [E_1 E_2] - [E_0 E_2]) \alpha_0 \alpha_2 + \right. \\
& (-1/8 [E_1 E_2] + 1/8 r_2^2) \alpha_2^2 \mathbf{p}_1 + \left( \frac{81}{8} (-[E_0 E_1] + r_1^2) \alpha_0^2 + \right. \\
& \frac{9}{8} (-r_1^2 + [E_1 E_2]) \alpha_0 \alpha_2 \mathbf{p}_0 + \left( \frac{9}{8} ([E_0 E_1] - r_1^2) \alpha_0 \alpha_2 + 1/8 (r_1^2 - \right. \\
& [E_1 E_2]) \alpha_2^2 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_2 \alpha_1^2 + \left( \frac{9}{8} ([E_0 E_2] - r_0^2) \alpha_0^2 \alpha_2 + 1/8 ([E_0 E_2] \right. \\
& - r_2^2) \alpha_0 \alpha_2^2 \mathbf{p}_1 + \left( \frac{9}{8} [E_0 E_1] - 9/4 [E_1 E_2] + \frac{9}{8} [E_0 E_2] \right) \alpha_0^2 \alpha_2 - \\
& 1/8 (r_2^2 + [E_1 E_2]) \alpha_0 \alpha_2^2 \mathbf{p}_0 + \left( \frac{9}{8} ([E_0 E_1] - r_0^2) \alpha_0^2 \alpha_2 + \right. \\
& (1/8 [E_0 E_2] + 1/8 [E_1 E_2] - 1/4 [E_0 E_1]) \alpha_0 \alpha_2^2 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_2 \alpha_1 + \\
& \left. \left. (-1/8 [E_0 E_2] + 1/8 r_2^2) \alpha_0^2 \alpha_2^2 \mathbf{p}_0 + 1/8 (r_0^2 - [E_0 E_2]) \alpha_0^2 \alpha_2^2 \mathbf{p}_2 \right) \right) \\
\mathbf{v}_2 = & \left( ((2 r_0^2 - 2 [E_0 E_1]) \alpha_0^2 + (-4 [E_0 E_2] + 2 [E_1 E_2] + 2 [E_0 E_1]) \alpha_2 \alpha_0 + \right. \\
& (-2 [E_1 E_2] + 2 r_2^2) \alpha_2^2 \mathbf{p}_1 + ((2 r_1^2 - 2 [E_0 E_1]) \alpha_0^2 + \\
& (-2 r_1^2 + 2 [E_1 E_2]) \alpha_2 \alpha_0) \mathbf{p}_0 + ((-2 r_1^2 + 2 [E_0 E_1]) \alpha_2 \alpha_0 + \\
& \left. \left. (-2 [E_1 E_2] + 2 r_1^2) \alpha_2^2 \mathbf{p}_2 \right) \alpha_1^2 \right) \\
\mathbf{v}_3 = & \left( ((1/8 r_0^2 - 1/8 [E_0 E_1]) \alpha_0^2 + \left( \frac{9}{8} [E_0 E_1] + \frac{9}{8} [E_1 E_2] - \right. \right. \\
& 9/4 [E_0 E_2]) \alpha_0 \alpha_2 + \left( -\frac{81}{8} [E_1 E_2] + \frac{81}{8} r_2^2 \right) \alpha_2^2 \mathbf{p}_1 + \\
& \left( (1/8 r_1^2 - 1/8 [E_0 E_1]) \alpha_0^2 + \left( -\frac{9}{8} r_1^2 + \frac{9}{8} [E_1 E_2] \right) \alpha_0 \alpha_2 \right) \mathbf{p}_0 \\
& + \left( \left( \frac{9}{8} [E_0 E_1] - \frac{9}{8} r_1^2 \right) \alpha_0 \alpha_2 + \left( -\frac{81}{8} [E_1 E_2] + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{81}{8} r_1^2 \right) \alpha_2^2 \mathbf{p}_2 \right) \alpha_1^2 + \left( (-1/8 r_0^2 + 1/8 [E_0 E_2]) \alpha_2 \alpha_0^2 + \right. \\
& \left( -\frac{9}{8} r_2^2 + \frac{9}{8} [E_0 E_2] \right) \alpha_2^2 \alpha_0 \mathbf{p}_1 + \\
& \left( (1/8 [E_0 E_2] - 1/4 [E_1 E_2] + 1/8 [E_0 E_1]) \alpha_2 \alpha_0^2 + \right. \\
& \left( -\frac{9}{8} r_2^2 + \frac{9}{8} [E_1 E_2] \right) \alpha_2^2 \alpha_0 \mathbf{p}_0 + \\
& \left( (1/8 [E_0 E_1] - 1/8 r_0^2) \alpha_2 \alpha_0^2 + (-9/4 [E_0 E_1] - \right. \\
& \left. \frac{9}{8} [E_0 E_2] + \frac{9}{8} [E_1 E_2]) \alpha_2^2 \alpha_0 \right) \alpha_1 \mathbf{p}_2 + \\
& \left. \left. (-1/8 [E_0 E_2] + 1/8 r_2^2) \alpha_0^2 \alpha_2^2 \mathbf{p}_0 + (1/8 r_0^2 - 1/8 [E_0 E_2]) \alpha_0^2 \alpha_2^2 \mathbf{p}_2 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_4 = & ((-32 [E_1 E_2] + 32 r_2^2) \alpha_2^2 \mathbf{p}_1 + (-32 [E_1 E_2] + 32 r_1^2) \alpha_2^2 \mathbf{p}_2) \alpha_1^2 + \\
& ((-8 r_2^2 + 8 [E_0 E_2]) \alpha_2^2 \alpha_0 \mathbf{p}_1 + (-8 r_2^2 + 8 [E_1 E_2]) \alpha_2^2 \alpha_0 \mathbf{p}_0 + \\
& (8 [E_0 E_2] - 16 [E_0 E_1] + 8 [E_1 E_2]) \alpha_2^2 \alpha_0 \mathbf{p}_2) \alpha_1 + \\
& (-2 [E_0 E_2] + 2 r_0^2) \alpha_0^2 \alpha_2^2 \mathbf{p}_2 + (-2 [E_0 E_2] + 2 r_2^2) \alpha_0^2 \alpha_2^2 \mathbf{p}_0
\end{aligned}$$

Donde  $[E_i E_j]$  es el producto interno de esferas definido anteriormente, por otra parte, se observo que  $[E_i E_j] = R_i^2 + R_j^2 - \overline{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j}^2$ , de esta manera sustituyendo se obtienen las siguientes expresiones para  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ , y  $\mathbf{v}_4$ :

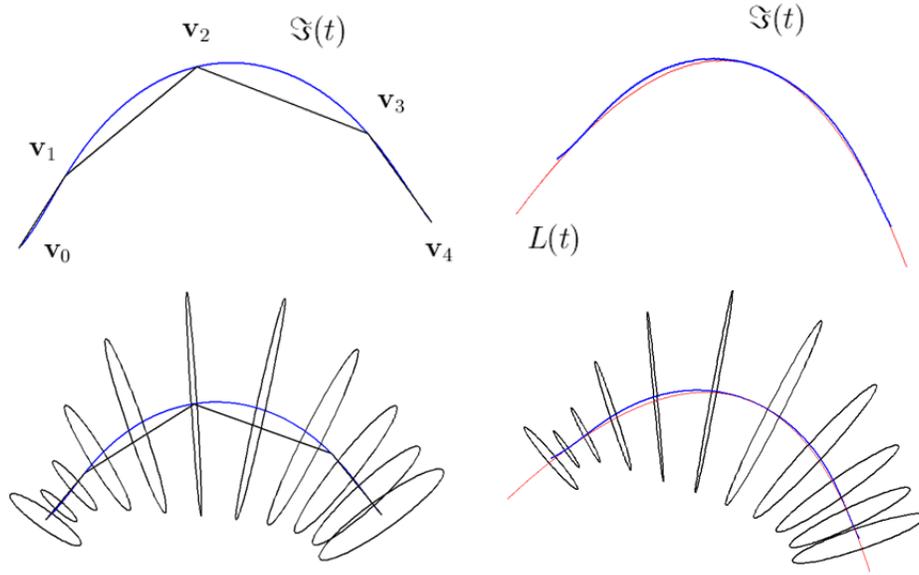


Figura 3.8: Curva de perfil con sus puntos de control.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_0 &= \frac{1}{\omega_0} (32(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2} - r_0^2)\mathbf{p}_0 + 32(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2} - r_1^2)\mathbf{p}_1) \alpha_1^2 \alpha_0^2 + (8(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2^2} - \\
&\quad r_2^2) \alpha_2 \alpha_0^2 \mathbf{p}_1 + 8(r_0^2 + r_2^2 - 2r_1^2 - 2\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^2} + \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2^2} + \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2}) \alpha_2 \alpha_0^2 \mathbf{p}_0 + \\
&\quad 8(r_1^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2}) \alpha_2 \alpha_0^2 \mathbf{p}_2) \alpha_1 + \\
&\quad 2(r_2^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2^2}) \alpha_0^2 \alpha_2^2 \mathbf{p}_2 + 2(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2^2} - r_0^2) \alpha_0^2 \alpha_2^2 \mathbf{p}_0 \\
\mathbf{v}_1 &= ((\frac{81}{8} (\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2} - r_1^2)) \alpha_0^2 + \frac{9}{8} (2r_1^2 + \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2} + \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^2} - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2^2}) \alpha_0 \alpha_2 + \\
&\quad 1/8 (\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^2} - r_1^2) \alpha_2^2) \mathbf{p}_1 + (\frac{81}{8} (\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2} - r_0^2) \alpha_0^2 + \\
&\quad \frac{9}{8} (r_2^2 + \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^2}) \alpha_0 \alpha_2) \mathbf{p}_0 + (\frac{9}{8} (r_0^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2}) \alpha_0 \alpha_2 + 1/8 (\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^2} - \\
&\quad r_2^2) \alpha_2^2) \mathbf{p}_2) \alpha_1^2 + ((\frac{9}{8} (r_1^2 - \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^2}) \alpha_0^2 \alpha_2 + 1/8 (r_0^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2^2}) \alpha_0 \alpha_2^2) \mathbf{p}_1 + \\
&\quad (\frac{9}{8} (2r_2^2 - r_1^2 - r_2^2 - 2\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^2} + \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2^2} + \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2}) \alpha_0^2 \alpha_2 - 1/8 (r_2^2 + \\
&\quad [E_1 E_2]) \alpha_0 \alpha_2^2) \mathbf{p}_0 + (\frac{9}{8} (r_1^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1^2}) \alpha_0^2 \alpha_2 + 1/8 (2r_2^2 - r_1^2 - \\
&\quad r_0^2 + \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2^2} + \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2^2} - 2\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^2}) \alpha_0 \alpha_2^2) \mathbf{p}_2) \alpha_1 + \\
&\quad 1/8 (r_0^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2^2}) \alpha_0^2 \alpha_2^2 \mathbf{p}_0 + 1/8 (\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2^2} - r_2^2) \alpha_0^2 \alpha_2^2 \mathbf{p}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 = & ((2(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}^2 - r_1^2)\alpha_0^2 + 2(2r_1^2 - r_2^2 - r_0^2 + \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2 + \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2 - \\
& 2\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}^2)\alpha_2\alpha_0 + 2(r_1^2 - \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2)\alpha_2^2)\mathbf{p}_1 + (2(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}^2 - \\
& r_0^2)\alpha_0^2 + 2(\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2 - r_2^2)\alpha_2\alpha_0)\mathbf{p}_0 + (-2(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}^2 + r_0^2)\alpha_2\alpha_0 + \\
& 2(r_2^2 - \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2)\alpha_2^2)\mathbf{p}_2)\alpha_1^2 \\
\mathbf{v}_3 = & ((1/8(r_1^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}^2)\alpha_0^2 + \frac{9}{8}(2r_1^2 - r_2^2 - r_0^2 + \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2 + \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2 - \\
& 2\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}^2)\alpha_0\alpha_2 + \frac{81}{8}(r_1^2 - \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2)\alpha_2^2)\mathbf{p}_1 + (1/8(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}^2 - r_0^2)\alpha_0^2 + \\
& \frac{9}{8}(\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2 - r_2^2)\alpha_0\alpha_2)\mathbf{p}_0 + (\frac{9}{8}(r_0^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}^2)\alpha_0\alpha_2 + \\
& \frac{81}{8}(r_2^2 - \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2)\alpha_2^2)\mathbf{p}_2)\alpha_1^2 + ((1/8(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2 - r_2^2)\alpha_2\alpha_0^2 + \frac{9}{8}(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2 - \\
& r_0^2)\alpha_2^2\alpha_0)\mathbf{p}_1 + (1/8(2r_0^2 - r_2^2 - r_0^2 + \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2 + \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}^2 - 2\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2)\alpha_2\alpha_0^2 + \\
& \frac{9}{8}(\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2 - r_1^2)\alpha_2^2\alpha_0)\mathbf{p}_0 + (1/8(r_1^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2)\alpha_2\alpha_0^2 + \frac{9}{8}(2r_2^2 \\
& - r_1^2 - r_0^2 + \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2 + \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2 - 2\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}^2)\alpha_2^2\alpha_0)\alpha_1\mathbf{p}_2 + \\
& 1/8(r_0^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2)\alpha_0^2\alpha_2^2\mathbf{p}_0 + 1/8(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2 - r_2^2)\alpha_0^2\alpha_2^2\mathbf{p}_2 \\
\mathbf{v}_4 = & (32(r_1^2 - \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2)\alpha_2^2\mathbf{p}_1 + 32(r_2^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2)\alpha_2^2\mathbf{p}_2)\alpha_1^2 + \\
& (8(\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2 - r_0^2)\alpha_2^2\alpha_0\mathbf{p}_1 + 8(\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2 - r_1^2)\alpha_2^2\alpha_0\mathbf{p}_0 + \\
& 8(2r_1^2 - r_2^2 - r_0^2 + \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2 + \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^2 - 2\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}^2)\alpha_2^2\alpha_0\mathbf{p}_2)\alpha_1 + \\
& 2(r_2^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2)\alpha_0^2\alpha_2^2\mathbf{p}_2 + 2(r_0^2 - \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2}^2)\alpha_0^2\alpha_2^2\mathbf{p}_0
\end{aligned}$$

De aquí se observa que estos puntos de control de la curva de perfiles dependen de los puntos de control de la cónica de Lagrange  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  y de sus pesos  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ , y  $\alpha_2$ .

### 3.4. Ángulo prescrito de un spline tubular

Dado que en las secciones anteriores se obtuvo condiciones para conectar dos superficies tubulares de Lagrange, con suavidad  $G^1$ , resulta interesante estudiar las condiciones para que la conexión sea de clase  $G^0$ , pero con ángulo de conexión preestablecido.

Dados los puntos

Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos curvas de Lagrange de grado 2 donde sus pares de control son;  $\{(\mathbf{P}_{10}, \alpha_{10}), (\mathbf{P}_{11}, \alpha_{11}), (\mathbf{P}_{12}, \alpha_{12})\}$  y  $\{(\mathbf{P}_{20}, \alpha_{20}), (\mathbf{P}_{21}, \alpha_{21}), (\mathbf{P}_{22}, \alpha_{22})\}$

Nótese que según lo estudiado en el capítulo 3 para construir un spline de Lagrange de clase  $G^0$  basta con que  $\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{20}$ , sin embargo en este caso con dicha condición solo se obtiene que el perfil  $C_{12}$  correspondiente según el modelo de Pedoe, al punto  $\mathbf{P}_{12}$ , tenga el mismo centro que el perfil  $C_{20}$ , correspondiente al punto  $\mathbf{P}_{20}$ .

De esta manera la condición que garantiza que  $C_{12}$  y  $C_{20}$  sean el mismo círculo es que las rectas tangentes a  $L_1$  y  $L_2$  en  $\mathbf{P}_{12}$  y  $\mathbf{P}_{20}$  respectivamente, sean iguales. usando las ecuaciones 1.3 y 1.5 del capítulo 1 para  $L_1(t_2)$  y  $L_2(t_0)$  se obtiene una ecuación en función de los puntos y pesos de control despejando  $\mathbf{P}_{21}$  se obtiene la siguiente expresión.

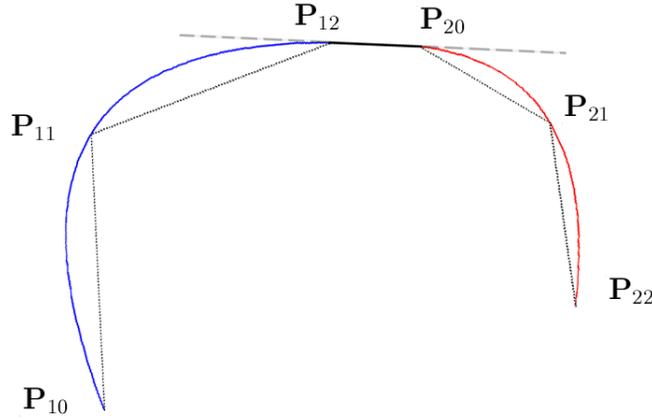


Figura 3.9: Cónicas de Lagrange conectadas mediante una recta que es tangente a las dos curvas en los puntos de conexión.

$$\mathbf{P}_{21} = \frac{1}{4 \lambda \alpha_{10} \alpha_{21}} (\alpha_{10}^3 (\mathbf{P}_{10} - \mathbf{P}_{12}) + 4 \alpha_{10}^2 \alpha_{11} (\mathbf{P}_{12} - \mathbf{P}_{11}) + \lambda (\alpha_{12} \alpha_{10} \alpha_{22} \mathbf{P}_{22} + 4 \alpha_{12} \alpha_{20} \mathbf{P}_{20} \alpha_{11} - \alpha_{12}^2 \alpha_{20} \mathbf{P}_{20} \alpha_{12})) \quad (3.13)$$

En la Figura 3.9 se muestran las dos curvas de Lagrange conectadas por el segmento de recta  $\mathbf{P}_{12}$  y  $\mathbf{P}_{20}$ .

Como las dos curvas se conectan por este segmento de recta tangente a las dos curvas en  $\mathbf{P}_{12}$  y  $\mathbf{P}_{20}$  dicha recta se corresponde a un círculo de intersección entre las esferas  $E_{12}$  y  $E_{20}$ .

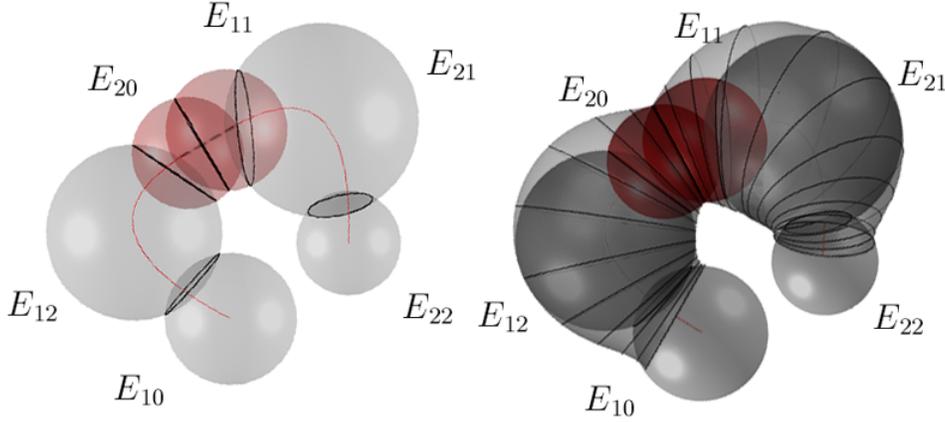


Figura 3.10: Las esferas de control donde se aprecia el círculo de intersección, y conexión de dos segmentos de spline tubular de clase  $G^0$ .

El gráfico 3.10 muestra las esferas de control del spline tubular y el spline tubular de clase  $G^0$ .

Por otro lado esta intersección entre las dos esferas  $E_{12}$  y  $E_{20}$  tiene un ángulo asociado  $\theta$ , el cual es denominado ángulo prescrito. Este ángulo prescrito se calcula usando la expresión dada en 2.14.

$$\cos(\theta) = \frac{[E_{12} E_{20}]}{R_{12} R_{20}}$$

donde  $[E_{12} E_{20}]$  es el producto interno entre las esferas y  $R_{12}$  y  $R_{20}$  son los radios de  $E_{12}$  y  $E_{20}$  respectivamente.

también puede escribirse;

$$\cos(\theta) = \frac{2 x_{12} x_{20} + 2 y_{12} y_{20} + 2 z_{12} z_{20} - w_{12} - w_{20}}{\sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2} \sqrt{x_{20}^2 + y_{20}^2 + z_{20}^2}}$$

### 3.5. Pesos de la Superficie tubular de Lagrange

En el capítulo 1 se vio como la variación de los pesos  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , influyen sobre la forma geométrica de la cónica de Lagrange dejando fijos los puntos de control de la cónica. De forma similar para las superficies tubulares de Lagrange, modificar la forma geométrica de la superficie, dejando fijas las esferas de control.

Las expresiones 1.3, y 1.5 de  $L'(t_0)$ ,  $L'(t_1)$ , y  $L'(t_2)$  respectivamente, nos dicen de forma analítica como se comportan las tangentes a la cónica de Lagrange en los tiempos,  $t_0$ ,  $t_1$ , y  $t_2$ , al variar los pesos y de esta manera también observar los cambios de la curva al variar dichos pesos  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ , y  $\alpha_2$ . Nótese que estas expresiones son combinaciones lineales de los vectores:

$$(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0) \text{ y } (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$$

además es fácil verificar que  $l'_2(t_0) > 0$ ,  $l'_1(t_1) > 0$  y  $l'_0(t_2) < 0$ , de esta manera es posible ubicar de una forma gráfica e intuitiva el comportamiento de las rectas tangentes para  $t_0$ ,  $t_1$ , y  $t_2$ , y así observar su incidencia en el gráfico de la cónica. Por ejemplo si se hace variar el valor del peso  $\alpha_2$  se puede observar que el vector  $L'(t_0)$ , experimenta una rotación debido a que el vector  $\frac{\alpha_2}{\alpha_0}l'_2(t_0)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0)$  aumenta o disminuye según la variación de  $\alpha_2$  y  $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}l'_1(t_0)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$  queda fijo. Algo similar ocurre para  $L'(t_1)$ , donde la dilatación de  $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}l'_2(t_1)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$  al variar  $\alpha_2$ , hace que el vector  $L'(t_1)$  rote en una o en otra dirección según el cambio de  $\alpha_2$ . Como  $L'(t_2)$  está multiplicado por  $\alpha_2$ , este vector no rota al variar el peso  $\alpha_2$ , si no que se dilata según la variación. En la Figura 3.11, se ilustra como inciden estos cambios en los pesos sobre las tangentes y sobre el gráfico de la cónica de Lagrange.

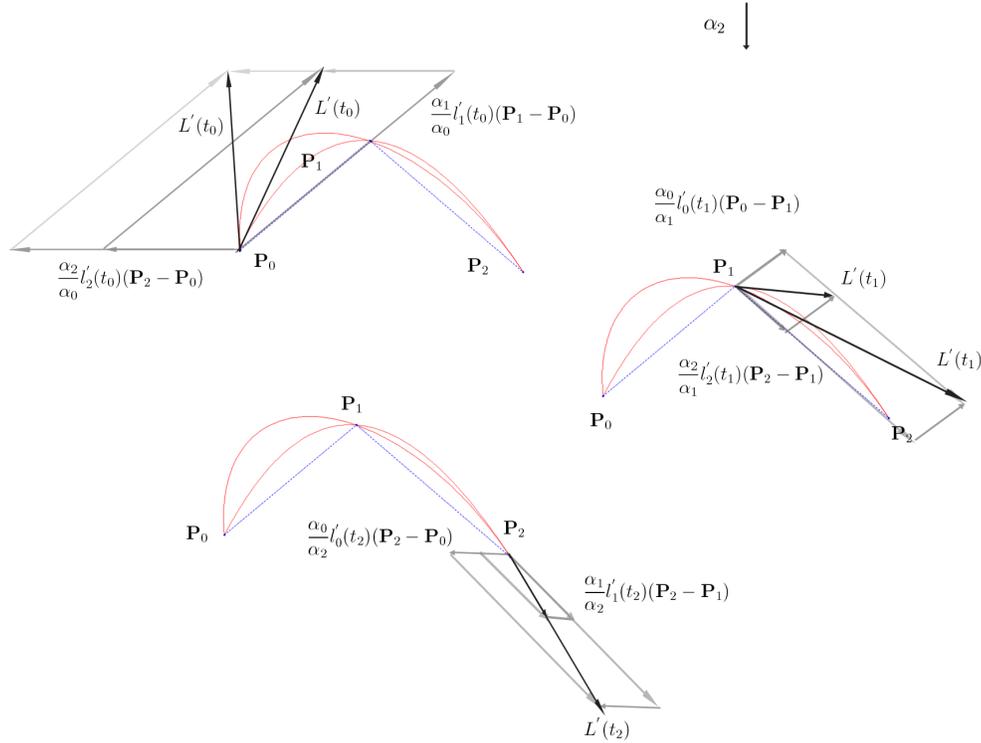


Figura 3.11: Variación de los vectores tangentes sobre los tiempos de la cónica, al hacer variar  $\alpha_2$

Se concluye que usando el esquema anterior podemos predecir los cambios que sufre la cónica de Lagrange al variar los pesos,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , sin embargo es difícil estudiar los cambios sobre la forma geométrica de las superficies tubulares de Lagrange al variar los pesos de la misma manera. Sin embargo, podemos afirmar que por las expresiones de  $L'(t_0)$ ,  $L'(t_2)$  los vectores tangentes en los extremos de la cónica, son proporcionales a los valores  $\alpha_0$  y  $\alpha_2$  respectivamente y por ende, las rectas tangentes en estos extremos  $L'(t_0)$ ,  $L'(t_2)$  se mantienen invariantes, al variar  $\alpha_0$  y  $\alpha_2$  respectivamente. De esta manera también podemos decir que  $L'(t_0)$ ,  $L'(t_2)$  cambian al variar  $\alpha_2$  y  $\alpha_0$ . Esto implica que los perfiles circulares  $C_0$  y  $C_2$  correspondientes según el modelo de D.Pedoe, a  $L'(t_0)$ ,  $L'(t_2)$  se mantienen invariantes cuando variamos  $\alpha_0$  y  $\alpha_2$  y que a su vez cambian los perfiles circulares  $C_2$  y  $C_0$  en cada caso. Este cambio de centro y radio de los perfiles circulares  $C_2$  y  $C_0$  al variar el valor de  $\alpha_0$  y  $\alpha_2$  respectivamente, se puede observar en la gráfica 3.12 y 3.13.

Al analizar el cambio del perfil circular  $C_2$  al variar  $\alpha_0$  se observa que se desplaza hacia uno de los dos polos de la esfera  $E_2$  dependiendo del aumen-

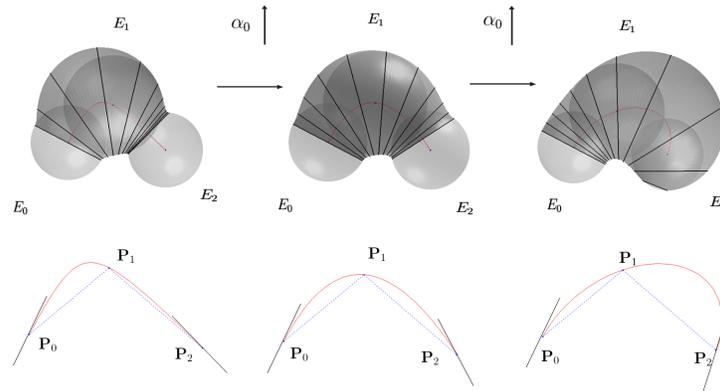


Figura 3.12: Superficie tubular al aumentar el  $\alpha_0$ , de izquierda a derecha se muestran para valores de  $\alpha_0$  en orden creciente.

to o disminución  $\alpha_0$ . Este movimiento es seguido por los perfiles circulares siguientes, por un movimiento de traslación, rotación y dilatación de los mismo, que produce que la superficie tubular de Lagrange  $S$  envuelva la esfera de control  $E_2$  a medida que  $\alpha_0$  aumenta su valor numérico. Análogamente ocurre con el perfil circular  $C_0$  al variar de valor el peso  $\alpha_2$ , la superficie  $S$  envuelve a la esfera  $E_0$ . Por otro lado, si se evalúa la expresión de  $L'(t_0)$  y  $L'(t_2)$  cuando varia el valor numérico de  $\alpha_1$ , usando el mismo razonamiento anterior, se observa que las tangentes en los extremos rotan, pero en sentido contrario al que sigue cuando se hace variar  $\alpha_2$  y  $\alpha_0$ . Es claro que los perfiles circulares  $C_0$  y  $C_2$  se desplazan a lo largo de las esferas de control  $\alpha_1$ . En la Figura 3.14 se observa que a medida que  $\alpha_1$  disminuye su valor numérico, los perfiles circulares  $C_0$  y  $C_2$  se desplazan a lo largo de esferas de control  $E_0$  y  $E_2$ , de esta manera la superficie tubular de Lagrange envuelve las esferas de control  $E_0$  y  $E_2$ .

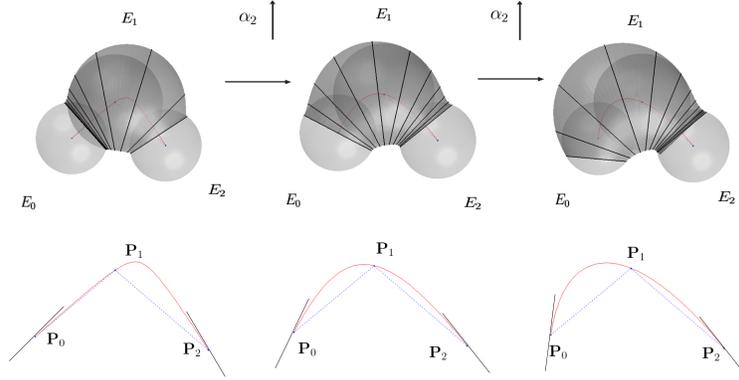


Figura 3.13: Superficie tubular al aumentar el  $\alpha_2$ , de izquierda a derecha se muestran para valores de  $\alpha_2$  en orden creciente.

### 3.5.1. Cambio de pesos y conservación de tangentes

El problema que se plantea ahora al variar el valor numérico de los pesos  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ , y  $\alpha_2$  es el de lograr que dicho cambio, deje invariantes las tangentes en los extremos de la cónica de Lagrange y por ende los perfiles circulares correspondientes según el modelo de D.Pedoe. Sin embargo, para que las tangentes en los extremos se mantenga invariantes al modificar los pesos, es necesario compensar el cambio modificando el punto de control  $\mathbf{P}_1$  convenientemente. sea  $L(t)$  es la cónica de Lagrange inicial y  $\bar{L}$  la cónica de Lagrange resultante, luego de modificar los pesos y el punto de control  $\mathbf{P}_1$ . Entonces dadas las ecuaciones 1.3 y 1.5 se plantean las siguientes igualdades.

$$\mathcal{R}_{t_0} : L'(t_0) = k_1 \bar{L}'(t_0)$$

$$\mathcal{R}_{t_2} : L'(t_2) = k_2 \bar{L}'(t_2)$$

Esto es equivalente a las ecuaciones:

$$\bar{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_0 + \frac{\bar{\alpha}_2}{4\bar{\alpha}_1}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0) + \frac{\bar{\alpha}_0}{4\bar{\alpha}_1\alpha_0}(4\alpha_1(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) + \alpha_2(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_2))k_1 \quad (3.14)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_2 + \frac{\bar{\alpha}_0}{4\bar{\alpha}_1}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_2) + \frac{\bar{\alpha}_2}{4\bar{\alpha}_1\alpha_2}(\alpha_0(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0) + 4\alpha_1(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2))k_2 \quad (3.15)$$

Al resolver las ecuaciones 3.14 y 3.15 se obtienen las rectas  $\mathcal{R}_{t_0}$  y  $\mathcal{R}_{t_2}$ , de parámetro  $k_1$  y  $k_2$  respectivamente. La recta  $\mathcal{R}_{t_0}$  representa el conjunto de todos los puntos  $\bar{\mathbf{P}}_1$  tal que al variar los pesos  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_2$ , por los pesos  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_2$ , conservan la recta tangente a  $L(t)$  en  $\mathbf{P}_0$ . Por otro lado, La recta  $\mathcal{R}_{t_2}$  conserva la recta tangente  $L(t)$  en  $\mathbf{P}_0$ , bajo las misma condiciones anteriores. De esto, se concluye que el punto  $\bar{\mathbf{P}}_1$  que conserva las rectas tangentes en los extremos de la cónica es el punto intersección de las rectas

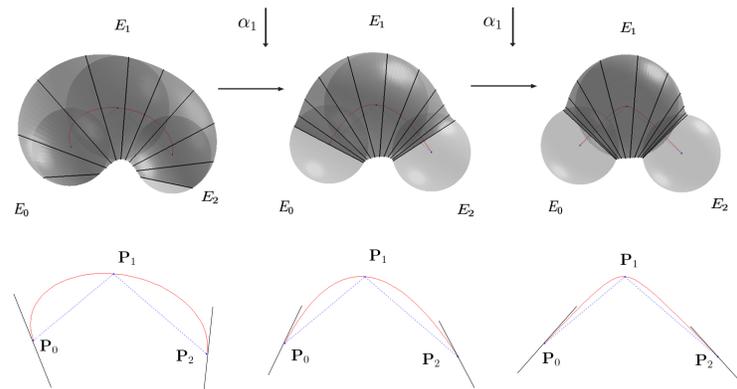


Figura 3.14: Superficie tubular al aumentar el  $\alpha_1$ , de izquierda a derecha se muestran para valores de  $\alpha_1$  en orden creciente

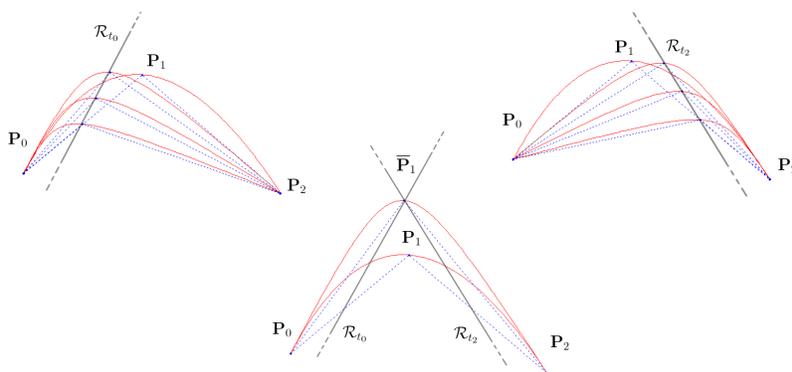


Figura 3.15: Rectas  $\mathcal{R}_{t_0}$  y  $\mathcal{R}_{t_2}$ , que conservan las tangentes en los extremos de la cónica de Lagrange, y abajo su punto de intersección

$\mathcal{R}_{t_0}$  y  $\mathcal{R}_{t_2}$ . Ver figura 3.15. Para hallar la intersección de estas dos rectas se debe encontrar los valores de  $k_1$  y  $k_2$  para que las ecuaciones 3.14 y 3.15 sean

iguales, esto es equivalente a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 i) \quad & \mathbf{x}_0 + \frac{\bar{\alpha}_2}{4\bar{\alpha}_1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) + \frac{\bar{\alpha}_0}{4\bar{\alpha}_1\alpha_0}(4\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \alpha_2(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2))k_1 - \\
 & (\mathbf{x}_2 + \frac{\bar{\alpha}_0}{4\bar{\alpha}_1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2) + \frac{\bar{\alpha}_2}{4\bar{\alpha}_1\alpha_2}(\alpha_0(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) + 4\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2))k_2) = 0 \\
 ii) \quad & \mathbf{y}_0 + \frac{\bar{\alpha}_2}{4\bar{\alpha}_1}(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_0) + \frac{\bar{\alpha}_0}{4\bar{\alpha}_1\alpha_0}(4\alpha_1(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0) + \alpha_2(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_2))k_1 - \\
 & (\mathbf{y}_2 + \frac{\bar{\alpha}_0}{4\bar{\alpha}_1}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_2) + \frac{\bar{\alpha}_2}{4\bar{\alpha}_1\alpha_2}(\alpha_0(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_0) + 4\alpha_1(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2))k_2) = 0 \\
 iii) \quad & \mathbf{z}_0 + \frac{\bar{\alpha}_2}{4\bar{\alpha}_1}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_0) + \frac{\bar{\alpha}_0}{4\bar{\alpha}_1\alpha_0}(4\alpha_1(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0) + \alpha_2(\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_2))k_1 - \\
 & (\mathbf{z}_2 + \frac{\bar{\alpha}_0}{4\bar{\alpha}_1}(\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_2) + \frac{\bar{\alpha}_2}{4\bar{\alpha}_1\alpha_2}(\alpha_0(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_0) + 4\alpha_1(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2))k_2) = 0 \\
 iv) \quad & \mathbf{w}_0 + \frac{\bar{\alpha}_2}{4\bar{\alpha}_1}(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_0) + \frac{\bar{\alpha}_0}{4\bar{\alpha}_1\alpha_0}(4\alpha_1(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0) + \alpha_2(\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_2))k_1 - \\
 & (\mathbf{w}_2 + \frac{\bar{\alpha}_0}{4\bar{\alpha}_1}(\mathbf{w}_0 - \mathbf{x}_2) + \frac{\bar{\alpha}_2}{4\bar{\alpha}_1\alpha_2}(\alpha_0(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_0) + 4\alpha_1(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2))k_2) = 0
 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene las ecuaciones para  $k_1$  y  $k_2$ .

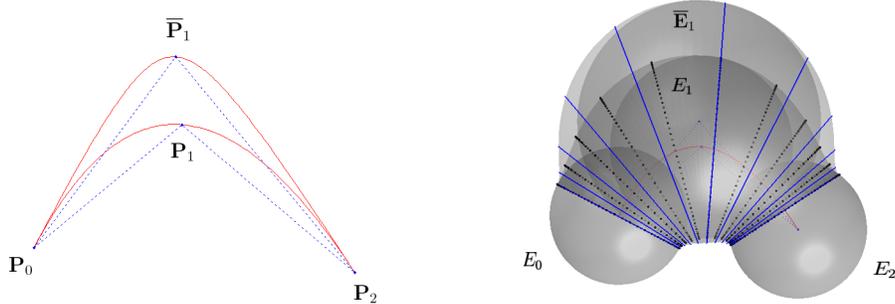


Figura 3.16: Punto  $\bar{\mathbf{P}}_1$  donde se interseca las rectas  $\mathcal{R}_{t_0}$  y  $\mathcal{R}_{t_0}$ .

$$k_1 = \frac{\alpha_0(-4\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_0)}{\bar{\alpha}_0(\alpha_0 - 4\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (3.16)$$

$$k_2 = \frac{\alpha_2(-4\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_0)}{\bar{\alpha}_2(\alpha_0 - 4\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (3.17)$$

Entonces  $\bar{\mathbf{P}}_1$  es el resultado de sustituir el valor de  $k_1$  en la ecuación 3.14, o bien sustituir el valor de  $k_2$  en la ecuación 3.15.

$$\bar{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_0 + \frac{\bar{\alpha}_2}{4\bar{\alpha}_1} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0) + \frac{(\bar{\alpha}_2 - 4\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_0)}{(\alpha_0 - 4\alpha_1 + \alpha_2)} \left( \frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_1} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) + \frac{\alpha_2}{4\bar{\alpha}_1} (\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_2) \right) \quad (3.18)$$

En las Figuras 3.17, 3.18 y 3.19 se muestra el cambio de la superficie tubular de Lagrange y el punto  $\bar{\mathbf{P}}_1$ , la variar los pesos,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  respectivamente. Nótese que al tomar como constantes dos de los pesos  $\bar{\alpha}_0$ ,  $\bar{\alpha}_1$ , o  $\bar{\alpha}_2$ , la expresi

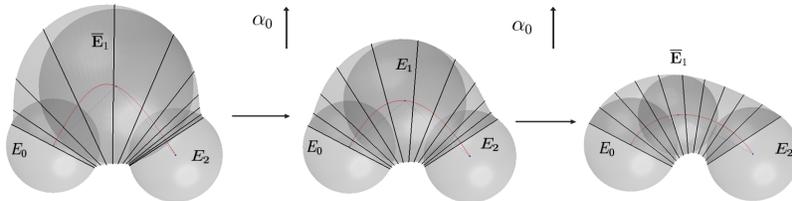


Figura 3.17: Aumento de izquierda a derecha de  $\alpha_0$ , y se observa el cambio de la Superficie Tubular de Lagrange

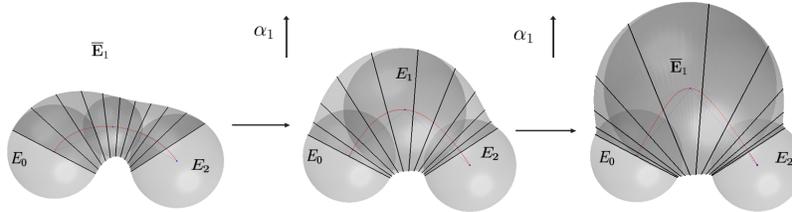


Figura 3.18: Aumento de izquierda a derecha de  $\alpha_1$ , y se observa el cambio de la Superficie Tubular de Lagrange

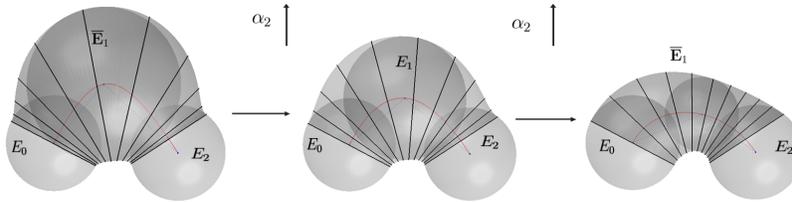


Figura 3.19: Aumento de izquierda a derecha de  $\alpha_2$ , y se observa el cambio de la Superficie Tubular de Lagrange

ción 3.18 es una recta de parámetro  $\bar{\alpha}_0$ ,  $\bar{\alpha}_1$ , o  $\bar{\alpha}_2$  que representa los puntos  $\bar{\mathbf{P}}_1$ , para los cuales la cónica de Lagrange mantiene invariantes sus tangentes, de esta manera se tienen 3 rectas distintas de puntos  $\bar{\mathbf{P}}_1$ . Esas rectas definen

las trayectorias que sigue  $\bar{\mathbf{P}}_1$  a medida que aumenta o disminuye el valor numérico de los pesos. Véase la Figura 3.20

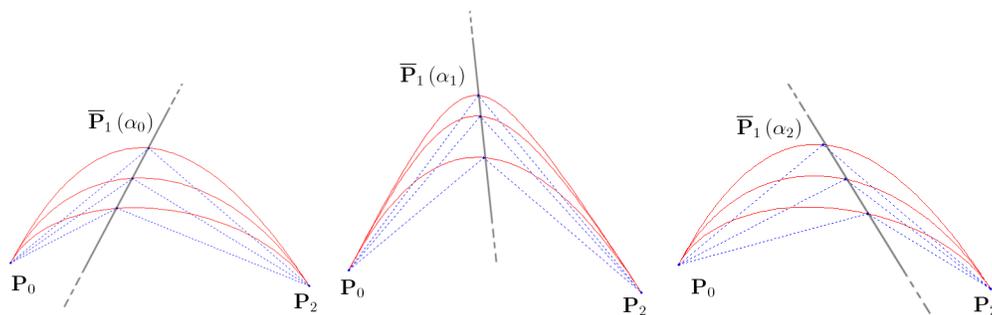


Figura 3.20: Rectas  $\bar{\mathbf{P}}_1(\alpha_0)$ ,  $\bar{\mathbf{P}}_1(\alpha_1)$ , y  $\bar{\mathbf{P}}_1(\alpha_2)$  que muestran los puntos  $\bar{\mathbf{P}}_1$  en función de los pesos.

# Capítulo 4

## Conclusiones

A continuación se presentan los resultados obtenidos en este trabajo:

1. Se graficó una cónica racional de Lagrange mediante el algoritmo de Aitkens logrando así un cálculo eficiente de sus puntos, más aun se logró conectar dos segmentos de curvas racionales de Lagrange ubicando sobre una cierta recta, el punto de control intermedio (e interpolación) del segundo segmento de cónica, tal que la conexión sea de clase  $G^1$ .

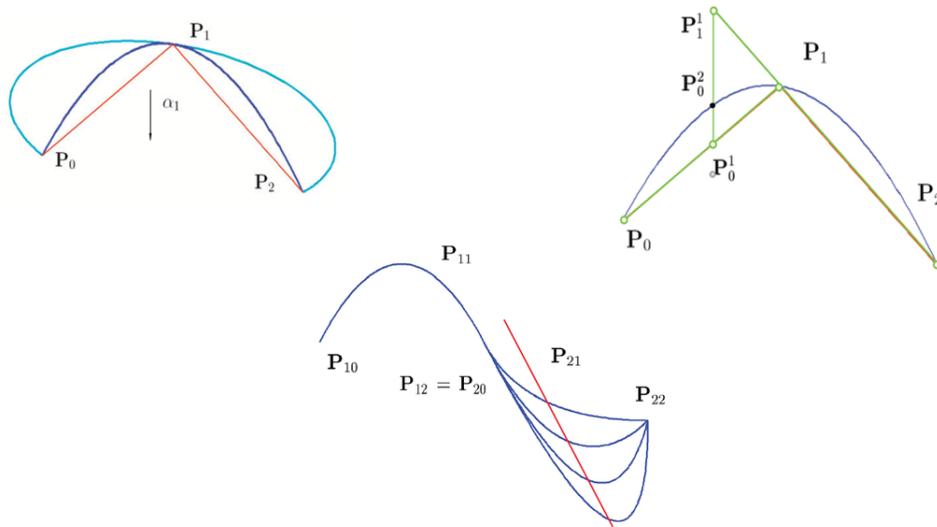


Figura 4.1: Cónicas racional de Lagrange, algoritmo de Aitkens y spline cónico de Lagrange.

2. Se estudio a fondo el modelo de Dan Pedoe generalizado, el cual establece una representación de puntos y rectas en  $\mathbb{R}^4$ , como puntos, esferas y círculos en  $3D$  respectivamente. Además se calculó los radios y centros de dichas esferas y círculos en términos de puntos de  $\mathbb{R}^4$ . En

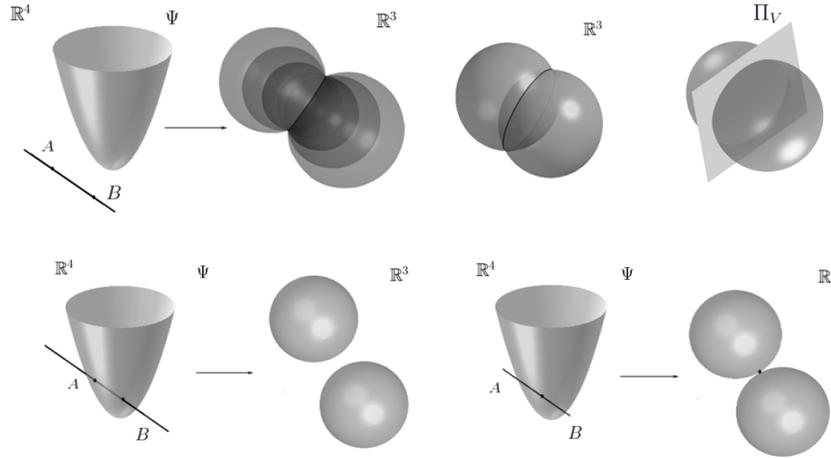


Figura 4.2: Representación de rectas en  $\mathbb{R}^4$ , como haces de esferas en  $\mathbb{R}^3$  y plano radical.

particular se observó que el círculo que corresponde a una recta que intersecta a la cuádrica  $\Psi$ , está contenido en el plano polar del vector director de la recta. Véase 4.2.

3. Una cónica de Lagrange  $L(t) \subset \Psi^+$ , cuyas rectas tangentes no intersecten a  $\Psi$ , está en correspondencia con una superficie envolvente denominada superficie tubular de Lagrange. La forma de dicha superficie, depende básicamente de 6 parámetros que son, las 3 esferas de control correspondientes a los puntos de control de la cónica  $L(t)$ , y 3 escalares  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ , y  $\alpha_2$  denominados pesos. Se concluye que las rectas tangentes a  $L(t)$  que intersectan a la cuádrica  $\Psi$ , producen singularidades o desconexidades en las superficies tubulares correspondientes. Ver 4.3.
4. Se demostró también, que la conexión entre dos segmentos de superficies tubulares de Lagrange es de clase  $G^1$ , si el spline cónico de Lagrange correspondiente, es también de clase  $G^1$ . Por lo anterior, se tiene una doble representación para los spline tubulares de Lagrange, la primera de ellas es una expresión implícita que permite reconocer la ubicación de un punto respecto al spline tubular. Por otra parte, se elaboró un esquema en el cual se describe cada segmento de spline tubular a partir de un dominio discreto, para efectos de graficar la superficie con eficiencia por medio de un computador. Véase 4.4
5. Se dedujo que cada perfil circular se corresponde con la intersección de la recta tangente a la cónica en cada punto, con el plano radical de la derivada de la cónica en cada punto. Al calcular esta intersección

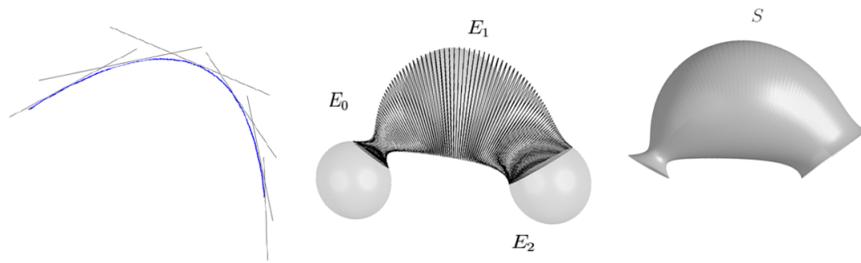


Figura 4.3: Correspondencia de una cónica de Lagrange con una superficie tubular de Lagrange, según el modelo de Pedoe.

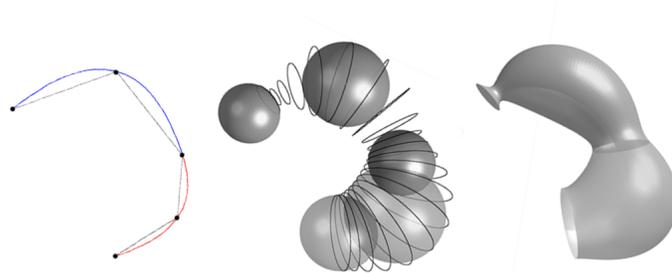


Figura 4.4: Ilustración del algoritmo para la construcción de un spline tubular de Lagrange.

se encuentra una expresión para cada centro de perfil circular que depende del punto sobre la cónica racional de Lagrange. Esta expresión resultó ser una curva racional de Lagrange de grado 4.

6. Se introdujo el concepto de ángulo prescrito de un spline tubular de Lagrange, ángulo de intersección entre las dos esferas de control que se intersectan en el círculo de conexión del spline tubular de Lagrange. Además, se calculó la expresión algebraica del ángulo prescrito.
7. Se realizó un estudio del comportamiento de la forma geométrica de la superficie tubular de Lagrange, al variar los pesos de la cónica racional de Lagrange, y se demostró que la variación de dichos pesos cambia las rectas tangentes en los extremos de la cónica de Lagrange. En consecuencia de lo anterior, se encontraron condiciones y expresiones para el punto de control intermedio de la cónica de Lagrange, para que las rectas tangentes en los extremos se mantuvieran invariantes al modificar los pesos.

Para los ejemplos usados en el trabajo, se llevo a cabo el diseño y la programación de varios algoritmos realizados con el software MATLAB 2008.

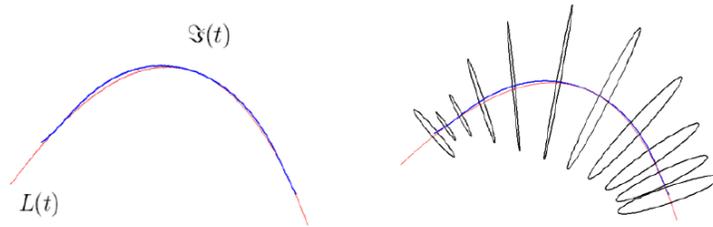


Figura 4.5: Ilustración del algoritmo para la construcción de un spline tubular de Lagrange.

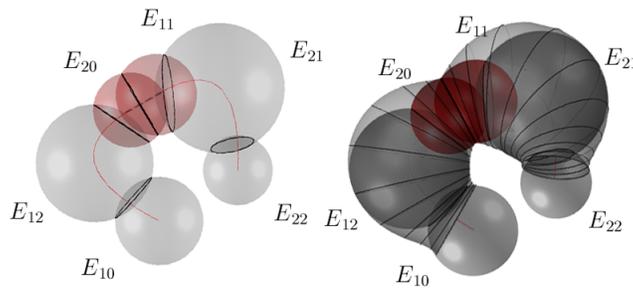


Figura 4.6: Ilustración del algoritmo para la construcción de un spline tubular de Lagrange.

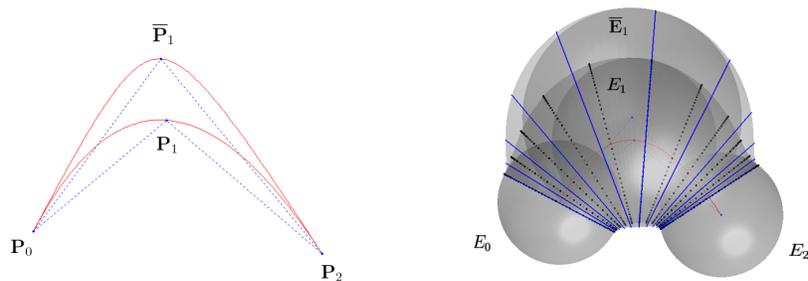


Figura 4.7: Ilustración del algoritmo para la construcción de un spline tubular de Lagrange.

# Bibliografía

- [1] D. Pedoe, Geometry a comprehensive course. Dover publications, INC, 1998.
- [2] Farin, Gerald E. (1992), Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A practical Guide, 3rd Edition, ISBN 0-12-249052-5.
- [3] J. Franquiz, M. Paluszny and F. Tovar. Cyclides and the guiding circle. ScienceDirect, Mathematics and computers in simulation, vol 73, pp 168 - 174 (2006).
- [4] M. Paluszny and W. Boehm, Bézier General Cyclides. Computer Aided Geometric Design, vol 15, pp 699 - 710 (1998).
- [5] Montesdeoca, Angel. Apuntes de Geometría diferencial de curvas y superficies. Universidad de La Laguna. España (2004).
- [6] Documento digital: [http://www.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ws09\\_10/CGGC/Notes/Resultants.pdf](http://www.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ws09_10/CGGC/Notes/Resultants.pdf)