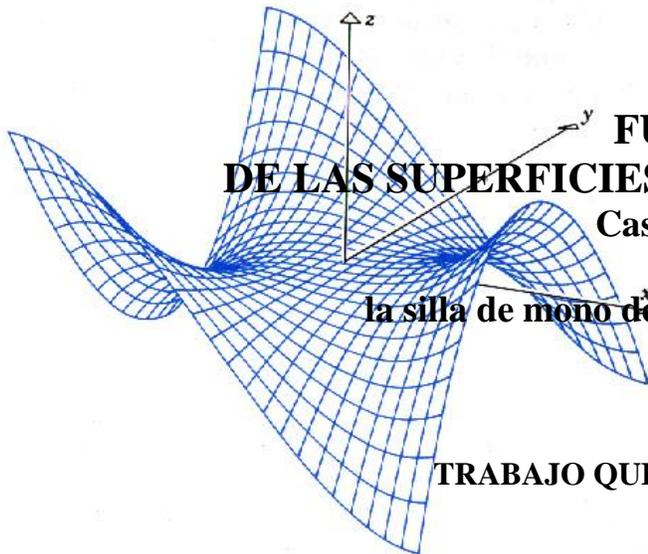




**UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
DOCTORADO DE FACULTAD V COHORTE**



**TESIS DOCTORAL
FUNDAMENTOS GEOMÉTRICOS
DE LAS SUPERFICIES DE PARÁBOLAS INVERTIDAS**
Caso de Estudio: Parámetros comparativos
del paraboloides hiperbólico,
la silla de mono de una cola y la silla de mono de dos colas

**TRABAJO QUE SE PRESENTA PARA OPTAR AL GRADO
DE DOCTOR EN ARQUITECTURA**

ALUMNO: M. Sc. Arq. RAFAEL GERARDO PÁEZ ESPINOZA

TUTOR: Dr. Ing. ALONSO ROMERO MARTÍNEZ

CARACAS, VENEZUELA; JUNIO DE 2013

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
DOCTORADO DE FACULTAD V COHORTE

TESIS DOCTORAL

**FUNDAMENTOS GEOMÉTRICOS
DE LAS SUPERFICIES
DE PARÁBOLAS INVERTIDAS**
**Caso de Estudio: Parámetros comparativos
del paraboloides hiperbólico,
la silla de mono de una cola y la silla de mono de dos colas**

TRABAJO QUE SE PRESENTA PARA OPTAR AL GRADO
DE DOCTOR EN ARQUITECTURA

ALUMNO: M. Sc. Arq. RAFAEL GERARDO PÁEZ ESPINOZA

TUTOR: Dr. Ing. ALONSO ROMERO MARTÍNEZ

CARACAS, VENEZUELA; JUNIO DE 2013

Aprobada en nombre de la Universidad Central de Venezuela

por el siguiente Jurado Examinador:

COORDINADOR:

Dr. Alonso Romero Facultad de Ingeniería UCV.

Dra. Yolimar Goatache. Facultad de Agronomía UCV.

Dr. Carlos Enrique Hernández. Facultad de Arquitectura y Urbanismo UCV.

Dra. Andrea Mara Henneberg de León. Facultad de Arquitectura y Diseño LUZ.

Dr. Ramón Arrieta. Facultad de Arquitectura y Diseño LUZ.

Fecha de aprobación: 10 octubre 2013

Se reúnen en el presente escrito los resultados de la investigación de los **Fundamentos Geométricos de las Superficies de Parábolas Invertidas**. Analizando, como caso particular de estudio, el estudio de los parámetros comparativos del paraboloides hiperbólico, la silla de mono de una cola en dos modalidades: ordinaria y *perturbada* y la silla de mono para monos de dos colas.

En cumplimiento a los requisitos propuestos para la obtención del Grado de Doctor en Arquitectura, dentro del Plan de Trabajo Individual de fecha 11 de febrero de 2005 del M. Sc. Arq. Rafael Gerardo Páez.

La presente Tesis Doctoral está acompañada de un CD con el siguiente contenido:

Un archivo pdf: *tesis_doctoral*, con todo el contenido de la monografía.

- Una carpeta denominada *tesis_doctoral-Derive[®] aplicaciones* en la cual están todos los archivos que contienen las representaciones de las familias de paraboloides hiperbólicos, sillas de mono ordinarias o perturbadas para monos de una cola y sillas de monos para monos de dos colas que han sido diseñadas en esta investigación mediante el software *Derive[®]*

Contiene también a su vez una carpeta denominada *tesis_doctoral-software* con el siguiente programa matemático computacional:

- *Derive[®]* (versión de prueba por 30 días del software para la versión 5)

Reúne también algunas publicaciones que se han realizado a partir de la presente investigación doctoral entre las cuales se encuentran las siguientes:

Artículo arbitrado:

Edificaciones con paraboloides hiperbólicos. La obra de Félix Candela en México y de Álvaro Coto en Venezuela.

Aceptado para su próxima publicación en la Revista Tecnología y Construcción.

Artículos no arbitrados:

Paraboloides Hiperbólicos como sistemas de cubiertas en estructuras sismorresistente.

(Publicado en la revista Magazine Sísmica).

Algunas experiencias, en México y Venezuela, de aplicaciones de paraboloides hiperbólicos como sistemas de cubiertas. (Aceptado para publicación próximamente en la revista Entrerayas).

Adicionalmente se encuentran en proceso de elaboración los siguientes libros:

Libros:

Construcciones en Venezuela de concreto armado solucionadas con cubiertas de paraboloides hiperbólicos.

En el cual se hace una recopilación de las obras en concreto armado construidas, proyectos y patentes innovadoras con diseños de paraboloides hiperbólicos en Venezuela. Se hace énfasis a las que fueron desarrolladas por el arquitecto Coto, quizás el profesional que posee mayor cantidad de obras. Este libro reúne una cantidad de material inédito y ha contado con la colaboración de familiares de este profesional de la construcción. (Material en proceso de elaboración, para finalizarlo en el año 2013 y someterlo a un proceso de arbitraje para su posterior publicación).

El contenido parcial de esta publicación queda registrado en el Capítulo 1 de esta investigación.

Arcos, bóvedas, cúpulas y superficies alabeadas de doble curvatura.

Un análisis retrospectivo de sus aplicaciones en procedimientos constructivos.

Libro con un contenido muy extenso que remonta su análisis a la existencia misma del hombre. El capítulo 2 de esta investigación recoge parte del contenido de este libro que está en proceso de elaboración, aún sin fecha prevista para su culminación.

¿Dudas?, ¿Sugerencias?, visite en la web:

<http://superficies-alabeadas.blogspot.com>

Otros enlaces de internet que mencionan parcialmente el contenido de la presente investigación doctoral y que pueden ser visitados son:

- www.arqhys.com/arquitectura/curva-superficie.html
- www.arqhys.com/arquitectura/industriales-construcciones.html
- www.arqhys.com/contenidos/geometricos-fundamentos.html
- <http://es.scribd.com/doc/98831559/Casa-Coll-Casa-Raleigh>
- <http://dl.dropbox.com/u/87695931/P%C3%A1ez%20Rafael%201.pdf>

DEDICATORIA

**Dedico esta investigación a mi hijo Keldrin.
Las metas alcanzadas por mí también serán un logro tuyo.**

AGRADECIMIENTOS

Mi sincero agradecimiento a todas las personas que han apoyado esta investigación Doctoral. Primordialmente al Dr. Ing. Alonso Romero Martínez, por su tutoría, constancia, y paciencia en todas y cada una de las sesiones realizadas con su valiosa asesoría. Por las incontables observaciones todas muy acertadas y dignas de reconocimiento por su alto valor pedagógico. En el momento en que el presente trabajo pudiese ser examinado como un modesto aporte en la aplicación de conocimientos de la geometría al campo de la tecnología de la construcción, en caso de que lo hubiere, deseo se reconozcan sus orientaciones.

También, a su vez, un agradecimiento especial, a la familia del Arq. Julio Coll Rojas (†) quienes gentilmente han brindaron la confianza al abrir las puertas de su casa lo cual ha permitido relatar en este trabajo la experiencia de una vivienda venezolana, con más de cuarenta años, construida con cubiertas de paraboloides hiperbólicos.

Agradezco a los familiares del Arq. Álvaro Coto Asenjo (†) por toda la información suministrada referente a la obra construida, proyectos, patentes, fotografías, apuntes de clases en fin todo un material inédito que ha servido para sustentar la información contenida en los antecedentes de esta investigación.

ÍNDICE		
Contenido		Pg.
Preliminares		
Dedicatoria		i
Agradecimientos		ii
Índice de cuadros		xi
Índice de figuras de portadas de los capítulos		xiv
Resumen		xvii
Abstract		xx
Introducción		21
CAPÍTULO 1		
Marco teórico		
1.1.	Justificación del tema: La geometría como responsable del equilibrio estable de las estructuras edificadas	33
	a. Planteamiento del problema	
	b. Objetivo general	37
	c. Objetivos específicos	38
1.2.	Aspectos empíricos de la investigación	39
	a. Supuestos del tema a investigar	
	b. Metodología de la investigación	40
	c. Resultados esperados	41
1.3.-	Antecedentes	42
1.3.1.-	Antecedentes de los estudios matemáticos. Su incidencia en los conocimientos de las superficies alabeadas de doble curvatura	
a.-	La geometría en el Período Helénico	43
b.-	Geometría euclidiana	47
c.-	Apolonio y los principios geométricos de las cónicas	50
d.	Nace la Geometría Analítica	52
	d.1. Descartes y Fermat	
	d.2. Bonaventura Cavalieri	54
	d.3. Evangelista Torricelli	
	d.4. Newton y Leibniz	56
e.	Nace la Geometría Descriptiva	58
	e.1. Gaspard Monge	
	e.2. Estudio de las superficies	60
	e.3. Joseph Louis Lagrange	
	e.4. Leonhard Euler	61
f.	La Geometría Proyectiva	62
	f.1.- Poncelet, la geometría proyectiva es creada en la cárcel	
g.	La Geometría no Euclidiana	63
	g.1. Louis Cauchy	64
	g.2. Carl Fiedrich Gauss	
	g.3. Arthur Cayley, el cálculo matricial	66

h. Surge un intento por unificar la geometría con álgebra lineal y álgebra abstracta, topología, y lógica	67
h.1. Emmy Noether,	
h.2. Los aportes computacionales al estudio de las superficies	68
h.3. Aplicaciones de las tecnologías de la comunicación, mediante la informática, en provecho del estudio de las superficies	69
h.4. Uso del internet en el estudio de las superficies alabeadas de doble curvatura	70
h.5. El software de <i>Autocad</i> [®] y otros similares	71
h.6. Graficadores y software matemáticos	72
1.4. Estado del arte de construcciones de sistemas de cubiertas con paraboloides hiperbólicos	73
1.4.1. Antecedentes internacionales de soluciones constructivas con cubiertas de paraboloides hiperbólicos	
a. Un primer período: 1901, el antecedente de las bóvedas regladas de Gaudí. La Cripta Güell y la Sagrada Familia	74
b. Segundo Período, 1933, Lafaille construye el primer paraboloide hiperbólico en concreto armado	75
b.1. 1936, surge un primer Tratado del comportamiento geométrico y estructural del paraboloide hiperbólico	77
b.2. Publicación del primer libro para cálculos de paraboloides hiperbólicos	77
b.3. 1938, Giorgio Baroni, los primeros paraboloides hiperbólicos en Italia.	
c. Tercer período: a partir de 1950, la experiencia mexicana con paraboloides hiperbólicos construidos por Félix Candela	80
c.1. Paraguas invertidos	83
c.2. Cúpulas cuadrangulares	85
c.3. Eje z vertical	86
c.4. Las bóvedas por aristas una innovación constructiva que antecedió a los paraboloides hiperbólicos con bordes libres	88
c.5. Eje z no vertical	90
c.6. Bordes libres	91
d. Cuarto período, paraboloides hiperbólicos a partir del fallecimiento de Candela hasta la actualidad	93
e. La obra del Arq. Eduardo Catalano, relacionada con superficies alabeadas de doble curvatura. La casa Raleigh	97
1.4.2. Experiencias venezolanas en construcción de paraboloides hiperbólicos de concreto armado	104
a. Paraboloides hiperbólicos de concreto armado construidos en la provincia venezolana	105
a.1. Club Playa azul, Naiguatá, estado Vargas	
a.2. Mercado libre de Maracay	107
a.3. Plaza del paraboloide en el campus UCV de Maracay	108
a.4. Planta de procesamiento de alimentos Heinz.	109

	a.5. Sede de Bomberos Marinos. Ocumare de la Costa - Aragua	109
	a.6. Parabolooides hiperbólicos. Paracotos - Miranda	110
	a.7. Estación de gasolina Los Guayos – Carabobo	111
	a.8. Parabolooides hiperbólicos en la Av. Bolívar - Valencia	112
b.	Algunos ejemplos de parabolooides hiperbólicos construidos en Caracas	113
	b.1. Almacenes del IPSFA – Paseo Los Precusores	
	b.2. Concesionario Chevrolet - Los Ruices	115
	b.3. La cubierta del Club Táchira – Bello Monte	116
	b.4. Casa habitación del Arq. Julio Coll Rojas – Los Chorros	117
c.	La obra del arquitecto Álvaro Coto Asenjo solucionada con parabolooides hiperbólicos en Venezuela	122
	c.1. Estaciones de gasolina en Caracas	123
	c.2. Centro Comercial El Parque– Cine Canaima	124
	c.3. Centro Comercial 19 de Abril - Maracay	126
	c.4. Terminal de pasajeros de San Cristóbal	127
	c.5. Terminal de autobuses de Barinas	129
	c.6. Sede del Colegio de Médicos del Zulia	132
	c.7. Planta ensambladora de Volkswagen en Palma Sola. Diseño del Arq. Dirk Bornhost, proyecto y ejecución de los parabolooides hiperbólicos: Álvaro Coto en colaboración con Félix Candela	133
	c.8. Propuestas innovadoras de Álvaro Coto para construcciones de Silos agroindustriales con parabolooides hiperbólicos	135
	c.9. Estanques para agua de gran capacidad	137
	c.10. Patente de Álvaro Coto para generar parabolooides hiperbólicos con fibra de vidrio	139
1.5.	Conclusiones del capítulo 1	141

CAPÍTULO 2

Marco Teórico: Arcos, bóvedas, cúpulas y superficies Un análisis retrospectivo de sus aplicaciones en las actividades constructivas de acuerdo a su clasificación geométrica

2.0.	Introducción al capítulo 2	146
2.1.	La línea recta	147
a.	<i>Las vigas y columnas</i>	
2.2.	La línea curva	150
2.3.	El período románico	151
2.3.1.	El arco semicircular (medio punto)	
2.3.2.	Superficie cilíndrica	154
	a. <i>La bóveda de cañón</i>	
	b. <i>La bóveda de aristas</i>	155
2.3.3.	Superficie esférica	156
	a. <i>La cúpula circular</i>	
	b. <i>La bóveda de pechinas</i>	157
2.4.	El período gótico	159
2.4.1.	El arco ojival	
2.4.2.	Las bóvedas en el gótico	160
	a. <i>La bóveda de crucería</i>	
2.5.	El Renacimiento	163
	a. <i>La cúpula del Renacimiento</i>	
	b. <i>El arco del Renacimiento, el arco carpanel</i>	164
	c. <i>La arquitectura en Mesoamérica</i>	166
2.6.	La Revolución Industrial: Nuevos materiales, nuevas tecnologías	168
2.6.1.	Construcciones con hierro y acero	
	a. Estructuras en hierro de forma libre	169
	b. El hierro fundido	170

2.7.	La arquitectura moderna	172
2.7.1.	Cúpulas en acero	
a.	La cúpula de Jena	
b.	La geodésica de Buckminster Fuller	173
c.	Cúpulas reticulares	176
d.	Estructuras Transformables	177
e.	Cúpulas de forma libre en acero	179
e.1.	El Reischtag	
e.2.	DZ Bank	180
f.	Arcos metálicos	
f.1.	Arcos de catenaria	
f.2.	El arco de Gateway	181
f.3.	Arcos parabólicos en metal	182
2.7.2.	Construcciones en concreto armado	184
a.	Arcos en concreto armado	185
a.1.	Arcos parabólicos en concreto armado	
a.2.	Arcos de catenaria en concreto armado	188
b.	Bóvedas en concreto armado	
b.1.	La arquitectura visionaria. Una concepción utópica de las cúpulas	189
b.2.	Bóvedas en concreto armado	190
b.3.	Cúpulas en concreto armado	191
b.4.	Cubiertas de concreto armado con estructura de conoide. El Club Táchira.	192
b.5.	El hiperboloide como solución geométrica llevada a los diseños arquitectónicos	193
c.	<i>La espiral y la helicoide en concreto armado</i>	195
c.1.	<i>El monumento a la III Internacional. Una espiral utópica</i>	
c.2.	<i>El Museo Guggenheim de Nueva York</i>	196
c.3.	<i>El Helicoide de Roca Tarpeya</i>	197
d.	El cilindro, el cubo y la pirámide	
d.1.	<i>Edificios cilíndricos</i>	
d.2.	<i>Edificios con estructura formal inscrita en un cubo</i>	199
d.3.	<i>La pirámide del museo Louvre de París.</i>	200
e.	La instauración de la forma libre en la arquitectura contemporánea	201
e.1.	Kenzo Tange	
e.2.	Frank Gehry	202
2.8.	Conclusiones del capítulo 2	203

Tomo 2

CAPÍTULO 3

**Superficies, conceptualización, generación geométrico-analítica y clasificación.
Sus propiedades y representación geométrica**

3.0. Introducción al concepto de superficie	211
3.1. Superficies, definiciones generales, generación y clasificación	212
a. Definición de superficie	
b. Generación de las superficies	213
c. Clasificación de las superficies	214
3.2. El plano	
3.3. Superficies de generación cilíndrica: clasificación y representación geométrico-analítica de las superficies cilíndricas	215
3.3.1. Generación cilíndrica de curvas	216
3.3.2. Propiedades geométricas de las superficies cilíndricas que permiten sus aplicaciones constructivas	217
3.4. Superficies de generación cónica. Clasificación y representación geométrico-analítica	218
3.5. Las cónicas	220
3.5.1. La elipse	222
3.5.2. La hipérbola	224
3.5.3. La parábola	
3.6. Cuádricas. Definición y clasificación	225
3.6.1. El elipsoide, condiciones geométricas de los elipsoides, elipsoide de revolución	226
a. Condiciones geométricas de los elipsoides	
3.6.2. Superficie esférica	230
3.6.3. Hiperboloide de una hoja	232
3.6.4. Hiperboloide de dos hojas	
3.6.5. Paraboloide elíptico	233
3.6.6. Paraboloide hiperbólico	235
a. Punto de ensilladura	237
3.6.7. Parámetros geométricos que determinan la aplicación de las cuádricas como estructuras para sistemas de cubiertas en edificaciones	238
3.6.8. Silla de mono ordinaria para un mono de una cola	241
3.6.9. Silla de mono para un mono de dos colas	243
3.6.10. <i>Silla de mono perturbada para monos de una cola</i>	
3.7. Parámetros geométricos para la representación gráfica de las sillas de mono <i>perturbadas</i> para monos de una cola	244
3.8. Propiedades geométricas de las superficies alabeadas de doble curvatura clasificación y ecuaciones que las determinan	247
3.8.1. La primera forma fundamental	
a. El área bajo la superficie	
b. La curvatura	
3.9. Fundamentos geométricos de los paraboloides hiperbólicos comparados con las sillas de mono de una y de dos colas	248
a. El paraboloide hiperbólico. Modalidades geométricas de su representación gráfica	

b.	La curvatura gaussiana del paraboloides hiperbólico	251
c.	La curvatura media del paraboloides hiperbólico	
d.	Curvatura gaussiana de las sillas de mono	253
e.	Curvatura media de las sillas de mono	254
3.10.	Otras superficies con potencial aplicación en procedimientos constructivos	
3.11.	Conclusiones del capítulo 3	257

Capítulo 4

Estudio comparativo de sistemas estructurales de cubiertas de paraboloides hiperbólicos mediante su clasificación y representación geométrica – espacial

4.0.	Introducción	259
4.1.	La forma construida vs el equilibrio estructural	261
4.2.	Aportes de Issenman Pilarsky a la representación arquitectónica de los paraboloides hiperbólicos	262
4.2.1.	Paraboloides hiperbólicos como superficie anticlástica, de configuración geométrica espacial que generan planta cuadrada	263
a.	Propuesta de Issenman Pilarsky	
b.	Descripción hecha por Félix Candela, a partir del concepto de Pilarsky, para la obtención de la configuración geométrica – espacial de paraboloides hiperbólicos de planta cuadrada como superficie anticlástica	264
c.	Combinaciones de dos, tres o cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos de planta cuadrada (superficies anticlásticas)	268
d.	Condiciones geométricas que permiten el equilibrio estable en cubiertas de cuatro unidades cuadradas de paraboloides hiperbólicos	269
e.	Combinación de cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos configuración rectangular y bordes rectos	271
f.	Otros modelos de paraboloides hiperbólicos propuestos por Pilarsky	273
4.2.2.	Configuración geométrica-espacial de paraboloides hiperbólicos como superficie sinclástica o de traslación	275
4.3.	Heino Engel, propuesta de un sistema de clasificación de las estructuras	278
4.3.1.	Sistemas de superficie activa. Prototipos registrados por Heino Engel	280
4.3.2.	Sistemas de forma activa. Prototipos registrados por Heino Engel	282
4.3.3.	Sistemas de vector activo. Prototipos registrados por Heino Engel	283
4.4.	Aproximación a un sistema de representación espacial y clasificación de paraboloides hiperbólicos. El aporte de Fred Angerer	284
4.5.	Aportes de Eduardo Catalano para la configuración, clasificación y representación de paraboloides hiperbólicos	287
4.6.	Conclusiones del capítulo 4	291

Capítulo 5

Fundamentos geométricos de las superficies de parábolas invertidas Propuesta de la investigación

5.0.	Introducción	293
5.1.-	Estudio comparativo de los parámetros geométricos que determinan el equilibrio estable en las superficies alabeadas de doble curvatura como sistemas de cubiertas	294
a.	Posicionamiento del sistema de ejes de coordenadas cartesianas	295

b.	Comandos que determinan los parámetros geométricos de las superficies a representar	296
c.	Nomenclatura propuesta	298
d.	El software <i>Derive</i> [®] como herramienta computacional para la agrupación de familias de superficies alabeadas de doble curvatura	300
e.	Propuesta de aplicación de las superficies alabeadas de doble curvatura como sistema de cubiertas en edificaciones	302
5.2.-	Descripción de la metodología a seguir para el diseño de las familias de superficies propuestas	304
5.2.1.	Propuesta de parámetros geométricos para la modelación de paraboloides hiperbólicos y sillas de monos. Valores predeterminados para cada una de las posiciones	
a.	Valores predeterminados en la posición <i>n.1</i>	
b.	Valores predeterminados en la posición <i>n.2</i>	306
c.	Valores predeterminados en la posición <i>n.3</i>	307
d.	Valores predeterminados en la posición <i>n.4</i>	309
e.	Valores predeterminados en la posición <i>n.5</i>	311
f.	Valores predeterminados en la posición <i>n.6</i>	312
g.	Valores predeterminados en la posición <i>n.7</i>	314
h.	Valores predeterminados en la posición <i>n.8</i>	316
i.	Valores predeterminados en la posición <i>n.9</i>	317
5.2.2.	Resumen de las ecuaciones de las familias de superficies que serán representadas. (nueve posiciones por cada tipo de familia de superficies)	320
5.3.	Familias de superficies de paraboloides hiperbólicos	321
5.4.	Familias de sillas de monos ordinarias para monos de una cola	331
5.5.	Familias de sillas de mono <i>perturbadas</i> para monos de una cola	337
5.6.	Familias de sillas de mono para monos de dos colas	343
5.7.	Conclusiones del capítulo 5	349

CAPÍTULO 6

Resultados, conclusiones y recomendaciones de la investigación

6.1.	Resultados de la investigación	351
a.	Superficies estudiadas en la investigación	
b.	Superficies de parábolas invertidas. Una nueva denominación para las superficies alabeadas de doble curvatura estudiadas	354
c.	Importancia de los resultados de esta investigación	355
d.	Aplicabilidad del software matemático <i>Derive</i> [®] en las actividades de diseño y construcción de cubiertas para edificaciones	357
d.1.	Resultados para la posición <i>n.1</i>	
d.2.	Resultados para las posiciones <i>n.2</i> a la <i>n.5</i>	358
d.3.	Resultados para la posición <i>n.6</i>	363
d.4.	Resultados para la posición <i>n.7</i>	364
d.5.	Resultados para la posición <i>n.8</i>	365
d.6.	Resultados para la posición <i>n.9</i>	366
e.	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas	368

e.1. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.2</i>	369
e.2. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.3</i>	371
e.3. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.4</i>	373
e.4. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.5</i>	375
e.5. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.6</i>	377
e.6. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.7</i>	379
e.7. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.8</i>	381
e.8. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.9</i>	383
6.2. Conclusiones y recomendaciones de la investigación.	385
6.3. Trabajos de investigación a futuro	387
6.3.1. Descripción de las variantes para la posición <i>n.3</i> , <i>n.3-a</i> , <i>n.3-b</i> , y <i>n.3-c</i> de las superficies de parábolas invertidas	
6.3.2. Descripción de las variantes para la posición <i>n.10</i> , <i>n.10-a</i> , <i>n.10-b</i> , y <i>n.10-c</i> de las superficies sillas de mono <i>perturbadas</i> para monos de una cola	390
Anexos	
Anexo 1. Conceptos de Geometría Descriptiva que se relacionan con esta investigación.	393
Apéndice 1. Modo de obtener las cónicas curvas descrito por Thomas.	404
Bibliografía	406
Glosario	407
	412

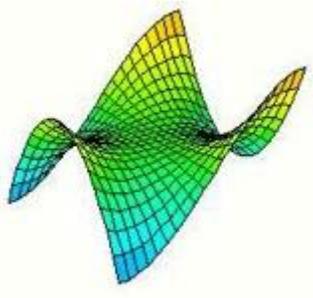
Nº	ÍNDICE DE CUADROS Descripción	Pg.
	Capítulo 3	
3.1	Propiedades geométricas de las superficies cilíndricas	217
3.2	Propiedades geométricas de las cónicas curvas.	223
3.3	Clasificación de los elipsoides según la longitud y características de los semiejes	229
3.4	Condiciones de los planos de coordenadas y secciones ante la representación de un elipsoide cuya expresión analítica es de la forma	230
	<i>; a, b y c ≠ 0</i>	
3.5	Condiciones de los planos de coordenadas y secciones ante la representación de un paraboloides hiperbólico de la forma	236
	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$; a y b son positivos y c ≠ 0.	
3.6	Fundamentos geométricos de las cuádricas según sus trazas	255
3.7	Otras superficies con potencial aplicación en procesos edificatorios	261
	Capítulo 4	
4.1	Condiciones de equilibrio estable en cubiertas de paraboloides hiperbólicos de configuración geométrica-espacial cuadrada y bordes rectos	270
4.2	Condiciones de equilibrio estable en cubiertas de paraboloides hiperbólicos de configuración geométrica-espacial rectangular y bordes rectos	272
	Capítulo 5	
5.1	Variaciones del sistema de coordenadas cartesianas para las posiciones <i>n.1</i> hasta <i>n.9</i> en la representación de las familias de superficies diseñadas de paraboloides hiperbólicos, sillas de monos para monos de una cola ordinarias y <i>perturbadas</i> y para monos de dos colas	297
5.2	Obtención de las vistas o proyecciones de un objeto arquitectónico	304
5.3	Resumen de las ecuaciones de las familias de superficies representadas	320
	Familias de paraboloides hiperbólicos	
5.4	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 1 $z = x^2 - y^2$	321
5.5	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 2 $z = 2x^2 - y^2$	322
5.6	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 3 $z = y^2 - x^2$	323
5.7	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 4 $z = 2y^2 - x^2$	324
5.8	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 5 $z = x^2 - 2y^2$	325
5.9	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 6 $z = 2x^2 - 2y^2$	326
5.10	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 7 $z = x^2 - 3y^2$	327
5.11	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 8 $z = x^2 - 3y^2$	328
5.12	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 9 $z = 3x^2 - 2y^2$	329
5.13	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 10 $z = x y$	330

Familias		
de sillas de mono ordinarias para monos de una cola		
5.14	Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 1 $z = x^3 - 3xy^2$	331
5.15	Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 2 $z = x^3 - 2xy^2$	332
5.16	Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 3 $z = x^3 - xy^2$	333
5.17	Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 4 $z = 2x^3 - 3xy^2$	334
5.18	Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 5 $z = 2x^3 - 2xy^2$	335
5.19	Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 6 $z = 2x^3 - xy^2$	336
Familias		
de sillas de mono perturbadas para monos de una cola		
5.20	Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo Sm _{pert} 1 $z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$	337
5.21	Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo Sm _{pert} 2 $z = x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$	338
5.22	Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo Sm _{pert} 3 $z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$	339
5.23	Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo Sm _{pert} 4 $z = 2x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$	340
5.24	Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo Sm _{pert} 5 $z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$	341
5.25	Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo Sm _{pert} 6 $z = 2x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$	342
Familias de sillas de mono para monos de dos colas		
(Sm₂)		
5.26	Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 1 $z = 4xy (x^2 - y^2)$	343
5.27	Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 2 $z = 3xy (x^2 - y^2)$	344
5.28	Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 3 $z = 2xy (x^2 - y^2)$	345
5.29	Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 4 $z = xy (x^2 - y^2)$	346
5.30	Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 5 $z = \frac{1}{2} xy (x^2 - y^2)$	347
5.31	Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 6 $z = \frac{3}{4} xy (x^2 - y^2)$	348
Capítulo 6		
6.1	Superficies estudiadas en la investigación	352
6.2	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.2</i>	359
6.3	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.3</i>	360
6.4	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.4</i>	361
6.5	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.5</i>	362

6.6	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.6</i>	363
6.7	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.7</i>	364
6.8	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.8</i>	365
6.9	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.9</i>	366
6.10	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.2</i>	369
6.11	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.3</i>	371
6.12	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.4</i>	373
6.13	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.5</i>	375
6.14	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.6</i>	377
6.15	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.7</i>	379
6.16	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.8</i>	381
6.17	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.9</i>	383
6.18	Parámetros geométricos comparativos para la representación gráfica de las familias de superficies de parábolas invertidas para las posiciones <i>n.3</i> , <i>n.3-a</i> , <i>n.3-b</i> , y <i>n.3-c</i> .	388
6.19	Parámetros geométricos comparativos para la representación gráfica de las familias de superficies de parábolas invertidas para las posiciones <i>n.10</i> , <i>n.10-a</i> , <i>n.10-b</i> , y <i>n.10-c</i> .	390

Índice y comentarios de las figuras en las portadas de los capítulos:

Portada de la Tesis



La silla de mono ordinaria para monos de una cola correspondiente a la ecuación cartesiana $z = x^3 - 3xy^2$ colocada en la familia de superficies de parábolas invertidas como Sm 1, posición 1.3.

El aporte fundamental entre los resultados de la presente investigación radica en la agrupación en familias de diferentes modalidades de paraboloides hiperbólicos, sillas de monos ordinarias para monos de una y de dos colas y sillas de mono perturbadas para monos de una cola, lo cual constituye una herramienta gráfica para el uso de arquitectos, ingenieros y constructores que permite visualizar, entre infinitas alternativas, un conjunto de 9 posiciones principales de estas superficies tales como fachadas, vistas en perspectivas isométricas y plantas de azoteas. Con variaciones de escalas y dimensionamiento de las proporciones de representación.

Introducción



Un hombre con una larga capa que muestra su linaje (dando la espalda a quien lo observa) personifica a un geómetra que, con un compás de doble punta seca, traza una circunferencia sobre un muro de ladrillos en el cual está representado un mapa -quizás del mundo antiguo- como si fueran humedades enmohecidas. Las figuras geométricas por él representadas: circunferencia, triángulo isósceles inscrito, cuadrado; nuevamente la circunferencia, hasta llegar a lo humano: hombre de turbante con barba y mujer, ambos desnudos. Curiosamente en el piso un abanico abierto dispuesto a dar aire por si la meditación geométrica acalora al personaje.

Según Carl Jung en su libro, *El hombre y sus símbolos*, el grabado visualiza el “concepto alquímico simbólico de la cuadratura del círculo”

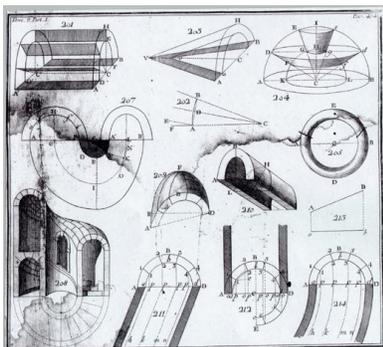
Capítulo 1: Marco Teórico



Los antecedentes de construcciones con paraboloides hiperbólicos se remontan a las edificaciones de Antonio Gaudí. ¿De dónde obtuvo la idea de proponer bóvedas regladas? La respuesta es un misterio. En los sótanos de la Sagrada Familia quedaron las maquetas como mudos testigos de la comprensión de lo que hasta ese entonces era un fenómeno geométrico inexplicable: el modo en que las rectas generatrices y directrices producen una doble curvatura en el hiperespacio para generar cerramientos en espacios construidos.

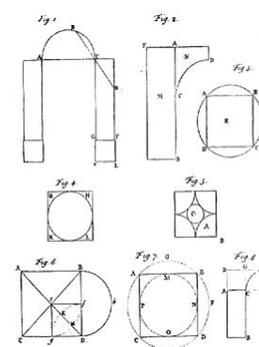
Capítulo 2: Arcos, bóvedas, cúpulas y superficies.

Un análisis retrospectivo de sus aplicaciones en las actividades constructivas de acuerdo a su clasificación geométrica



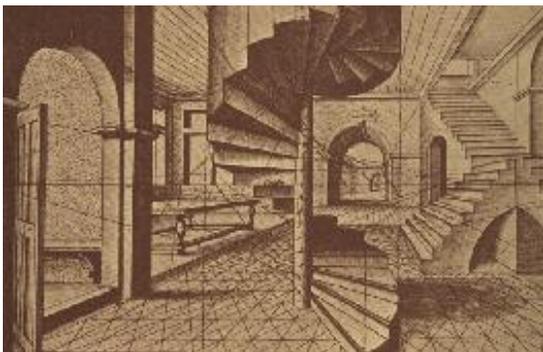
Un texto muy antiguo –sin identificación del autor, que ha sido empleado en esta investigación- contiene un sinnúmero de representaciones gráficas y geométricas (ver figura a la izquierda) que, hasta ahora, en opinión de quienes lo han revisado, se pudiesen atribuir a Christopher Wren.

Otras figuras registradas por Houghton-Evans en el texto *Estructuras*, (ver figura a la derecha) señalan unos dibujos similares que son descritos como “El intento de Wren de analizar científicamente bóvedas y cúpulas. (tomado de su segundo Tratado de arquitectura).” (Hodkigson, 1976:11).



Capítulo 3: Superficies, conceptualización, generación geométrico-analítica y clasificación.

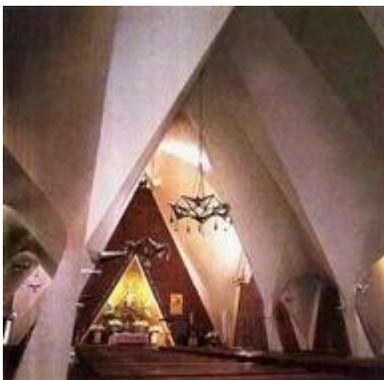
Sus propiedades y representación geométrica descriptiva



La propuesta arquitectónica para la construcción del Palacio de Fontainebleau requirió de un interesante estudio de trazos geométricos que incluían el conocimiento de las superficies. Tal fue el caso específico de la helicoide alabeada como solución estructural para erigir una escalera de caracol.

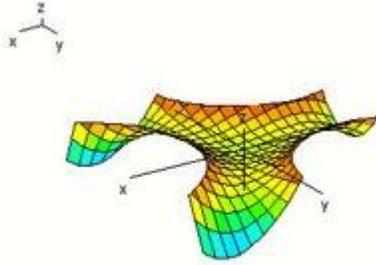
Fuente: Este grabado ha sido extraído del tomo N° 5, *Edificios soñados*, de la colección de la Biblioteca Salvat *Las cien maravillas*.

Capítulo 4: Estudio comparativo de sistemas estructurales de cubiertas de paraboloides hiperbólicos mediante su clasificación y representación geométrica – espacial



La primera cubierta en concreto armado, de doble curvatura, fue construida en 1933, en Francia. Dos años más tarde, su constructor, el Ing. Lafaille, publicó un artículo con los resultados del comportamiento estructural. Candela, en 1954, construye sin calcular previamente el paraboloides hiperbólico del Instituto de Rayos Cósmicos. De hecho, “...cuando un comité de supervisión pidió los cálculos. No había ningunos [Sic].” (Faber, 1970:51). Hasta que mediante el dominio geométrico-espacial y refinamiento de todas las fórmulas de Aïmond permitieron construir obras como la iglesia La Medalla Milagrosa, (ver foto) estructuralmente seguras y con un alto valor estético.

Capítulo 5: Fundamentos geométricos de las superficies de parábolas invertidas. Propuesta de la investigación



La silla de mono *perturbada* para un mono de una cola, corresponde a una de las distintas superficies que han sido analizadas en esta investigación. Empleándose una metodología que permite agrupaciones en familias y visualizar, mediante la utilización de un software matemático, una gama infinita de posibilidades de explotación de tales superficies alabeadas de doble curvatura que, hasta ahora, han sido un tanto ignoradas por arquitectos, ingenieros y constructores.

Capítulo 6: Resultados, Conclusiones y Recomendaciones de la Investigación

**FUNDAMENTOS GEOMERICOS
DE LAS SUPERFICIES DE PARÁBOLAS INVERTIDAS**
Caso de Estudio: Parámetros comparativos del paraboloides hiperbólico, la silla de mono de una cola y la silla de mono de dos colas

RESUMEN

Se realiza en esta investigación un estudio para determinar los fundamentos geométricos de las superficies alabeadas de doble curvatura analizando los parámetros comparativos de los paraboloides hiperbólicos, sillas de mono para monos de una cola ordinarias y *perturbadas* y las sillas de mono para monos de dos colas. Hasta ahora en el campo de las aplicaciones arquitectónicas de cubiertas para edificaciones sólo han sido empleadas soluciones con paraboloides hiperbólicos. Las otras gráficas, objeto del presente estudio, no se han dispuesto como techos para cubrir espacios construidos. El primer techo fabricado en concreto armado con un paraboloides hiperbólico se registró en 1933, por el Ingeniero Bernard Laffaille, en Francia. Luego destacaron distintas experiencias iniciadas con el Pabellón de Rayos Cósmicos, (Félix Candela, México, 1950). Mientras que en Venezuela -salvo muy pocos ejemplos- no hay una tradición de estas construcciones. Existiendo, en cierta medida, un desconocimiento de los principios geométricos determinantes del comportamiento estructural de esas superficies; incidiendo esto en la escasez de ejemplos existentes, a pesar que las edificaciones diseñadas con estructuras de superficies alabeadas de doble curvatura poseen ventajas tales como: eficiencia estructural bajo condiciones de equilibrio estable, alto valor estético, reducción de los costos, disminución de los tiempos y cantidades de material con participación de una mano de obra no especializada (excepto para las labores de encofrado). El aporte fundamental entre los resultados de la presente investigación radica en la designación de estas representaciones geométricas con un nuevo nombre: SUPERFICIES DE PARABOLAS INVERTIDAS, reconociendo así una de sus cualidades esenciales como lo es la generación espacial a partir de parábolas con las ramas hacia arriba que son geoméricamente idénticas a otras que dentro de la conformación de la misma superficie se hallan con las ramas hacia abajo. Estas superficies hasta ahora son reconocidas con nombres que no permiten denotar sus condiciones geométrico-espaciales, tal como es el caso de la *silla de montar a caballo*. Luego se realiza un aporte inédito, mediante la utilización de un software matemático, de agrupar en familias diferentes modalidades de paraboloides hiperbólicos, sillas de monos ordinarias para monos de una y de dos colas y sillas de

mono *perturbadas* para monos de una cola, lo cual constituye una herramienta gráfica para el uso de arquitectos, ingenieros y constructores que permite visualizar, entre infinitas alternativas, un conjunto de 9 posiciones principales de estas superficies; aplicando la descripción universal de representación de objetos, tales como son la obtención de la fachada principal, posterior y laterales, vistas en perspectivas isométricas (axonometrías y proyección bimétrica) y plantas de azoteas. Entidades que resultarían sumamente difíciles de representar con instrumentos de dibujo tradicionales incluyendo aún las herramientas de dibujo asistido por computadora. Se resuelven así, además, las variaciones de escalas, dimensionamientos y de las proporciones de representación e inercia visual de la superficie obtenida. Los resultados son vertidos en un documento gráfico donde se clasifican y agrupan a partir de una ecuación dada la generación de las distintas tipologías seleccionadas que servirá para consulta de profesionales e investigadores que requieran establecer análisis sistémicos basados en principios geométricos, estéticos y espaciales que permitan su utilización para la representación de estas superficies en la solución de proyectos arquitectónicos.

Palabras clave: Superficies alabeadas de doble curvatura, paraboloides hiperbólicos, silla de mono de una y de dos colas, superficie de parábolas invertidas.

Junio de 2013.

GEOMETRIC FUNDAMENTS OF INVERTED PARABOLAS SURFACES
Case study: Benchmarks the hyperbolic paraboloid, one tail monkey saddle and two-tailed monkey saddle

ABSTRACT

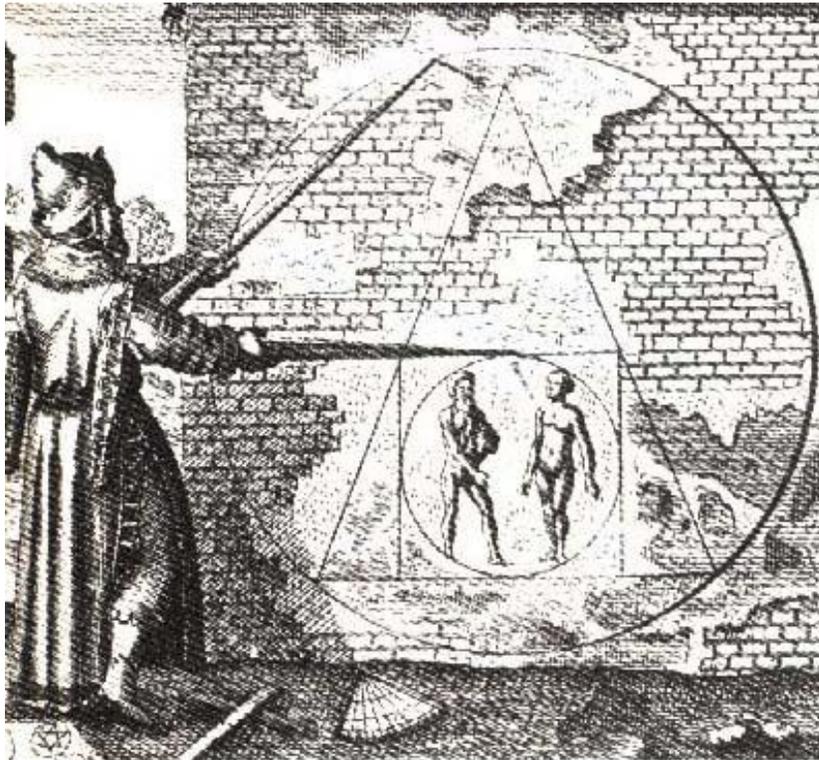
A study is made specifically in this research to determine the geometrical foundations warped surfaces of double curvature with benchmarks of the hyperbolic paraboloid, one tail monkey saddle ordinary and disrupted; and two-tailed monkeys saddle So far in the field of architectural applications covers buildings have been used only solutions with hyperbolic paraboloid. The other graphs, the subject of this study, have not been as willing to cover roofs built spaces. The first building with a hyperbolic paraboloid roof was recorded in 1933, by the Engineer Laffaille in France. Then highlight different experiences started with Cosmic Rays Pavilion, (Félix Candela, Mexico, 1950). While in Venezuela except very few examples there is no tradition of these constructions. Exist in our environment, a lack of geometric principles determining the structural behavior of these surfaces, stressing that the existing shortage of examples, although they have advantages such as structural efficiency under conditions of stable equilibrium, high aesthetic value, reducing costs, timing and amounts of material, one involving unskilled labor. The fundamental contribution between the results of this research lies in the designation of these geometric representations with a new name: SURFACES INVERTED PARABOLAS, recognizing one of its essential qualities such as spatial generation from parabolas with upward branches which are geometrically identical to the others within the same surface forming the branches are down. Then unpublished input is performed by using a mathematical software, grouped into families of different modes of hyperbolic paraboloids, for ordinary monkeys saddle and a two-tailed and monkey saddle disturbed for a queue, which is a graphical tool for use by architects, engineers and builders to visualize, among infinite alternatives, a set of nine main positions of these surfaces, applying the universal description object representation, such as obtaining the main facade, rear and side, isometric perspective views (and axonometric projection bimetric) and rooftop plants. Entities that would be extremely difficult to represent with traditional drawing tools including computational tools even computer-aided drawing. It thus solves further variations dimensioning scales and proportions and inertia visual representation of

the surface obtained. The results are dumped in a graphic which classifies the generation of different types that will be used to query selected professionals and researchers requiring systemic analysis based set geometric principles, aesthetic and space.

Key words: Warped surfaces of double curvature, Hyperbolic Paraboloid, monkey saddle of one and two tails, surfaces inverted parabolas.

Junio - 2013.

INTRODUCCIÓN



INTRODUCCIÓN

El presente escrito recoge los antecedentes, avances, resultados y conclusiones de la investigación en la cual se estudian los fundamentos geométricos de las superficies alabeadas de doble curvatura. Ocupando como caso particular de estudio un análisis comparativo de los paraboloides hiperbólicos, las sillas de mono ordinarias y *perturbadas* para monos de una cola y las sillas de mono para monos de dos colas.

Los paraboloides hiperbólicos (superficie anticlastica de doble curvatura) son analizados bajo dos modalidades diferentes. En primer lugar los casos que corresponden a los tipos de estructuras que espacialmente se constituyen como una superficie doblemente reglada (generatrices y directrices rectas). La otra modalidad son los paraboloides hiperbólicos configurados como una superficie de traslación (de generación parabólica).

Respecto a las sillas de mono se estudian tres tipos: por una parte, las sillas de mono ordinarias para monos de una cola, las sillas de mono «*perturbadas*»; en este caso perturbadas, exclusivamente, por un paraboloides de base circular. Finalmente las sillas de mono para monos de dos colas.

La disposición de los capítulos contenidos en esta investigación responde a la siguiente descripción:

En el capítulo 1 se aborda el *Marco Teórico* del tema de estudio; las superficies de paraboloides hiperbólicos cuando son construidos en concreto armado, como sistemas de cubiertas para edificaciones, quedan incluidos dentro del conjunto de estructuras laminares debido a su bajo espesor en comparación con el área de material empleado en su fabricación.

Mientras que, hasta ahora, otros grafos de superficies resultantes de la configuración de sillas de monos para monos de una cola y sillas de monos para monos de dos colas no se conoce aplicación alguna que arroje, como resultado de algún proyecto constructivo, una estructura edificada donde se hayan empleado éstas como sistemas de cubiertas. Es más aún, sólo en los textos que han sido consultados para esta investigación, con un contenido especializado en construcciones de estructuras para arquitectos e ingenieros,

aunque refieren abundantemente a los paraboloides hiperbólicos a las sillas de mono no las mencionan.

El problema planteado para la investigación consiste en la existencia de algunos profesionales de la construcción y diseño de estructuras que poseen poco conocimiento de los fundamentos geométricos que determinan el comportamiento estable de las estructuras de los paraboloides hiperbólicos, la silla de mono para un mono de una cola y la silla de mono para un mono de dos colas agrupadas en el conjunto de las superficies alabeadas de doble curvatura.

Se hace necesario indagar por qué –en el caso específico de las sillas de monos para monos de una y de dos colas– estas han sido omitidas en los procedimientos constructivos. Mientras que los paraboloides hiperbólicos sí han sido profusamente estudiados y representados como soluciones para sistemas de cubiertas en casi todo el mundo. Convirtiéndose, hoy en día, estas estructuras en una manifestación comprobada de los más altos procedimientos tecnológicos de la construcción.

El objetivo general de la investigación consiste en determinar los fundamentos geométricos de las superficies alabeadas de doble curvatura (paraboloide hiperbólico, la silla de mono de una cola y la silla para un mono de dos colas). Analizándose los principios que determinan las modalidades de generación, clasificación y representación en distintas agrupaciones de familias de superficies donde queden registradas las diferentes posibilidades de visualización para los casos más emblemáticos en que han sido aplicadas en los ejemplos internacionales ya edificados y, en el caso particular de las sillas de monos para monos de una y de dos colas, para los tipos que pudiesen aplicarse como sistemas de cubiertas en la solución de proyectos arquitectónicos.

Se han considerado los antecedentes desde dos escenarios distintos: los antecedentes, desde la antigüedad hasta el presente, de los estudios geométricos y matemáticos que tienen una incidencia para la evolución del conocimiento de las superficies alabeadas de doble curvatura. Se establece que es en la actualidad cuando se ha desarrollado una mejor posibilidad de obtención de rápidos resultados de graficación y desarrollo de

ecuaciones mediante la utilización de software matemáticos, que solucionan en corto tiempo la representación visual.

Algunas de las interrogantes planteadas en estudio de los antecedentes de los estudios matemáticos de las superficies responden a algunas interrogantes que son decisorias a saber:

¿Cómo evolucionaron los conocimientos matemáticos que permiten explicar los aspectos geométricos y numéricos de las superficies? ¿Quiénes fueron los hombres de ciencia que mediante sus investigaciones y publicaciones lograron demostrar para la humanidad los principios matemáticos que rigen la generación de las superficies?; ¿Cómo una superficie alabeada de doble curvatura, –cuyos estudios se remontan hacia el período helénico– se convierte, sólo a partir del siglo XX, en una estructura construida?; ¿Cómo evolucionaron los conocimientos matemáticos que permiten explicar los aspectos geométricos y numéricos de las superficies?; ¿Quiénes fueron los hombres de ciencia que mediante sus investigaciones y publicaciones lograron demostrar para la humanidad los principios matemáticos que rigen la generación de las superficies?

El otro escenario es el de los antecedentes de las construcciones realizadas con cubiertas de paraboloides hiperbólicos en concreto armado en los inicios del siglo pasado. La determinación del estado del arte de las construcciones de paraboloides hiperbólicos es uno de los aportes fundamentales de esta investigación. Estos son analizados desde dos escenarios diferentes: los antecedentes internacionales y las experiencias venezolanas de construcciones de edificaciones, cubiertas, así como también un registro de los aportes teóricos traducidos en libros, patentes, tratados, artículos y proyectos no construidos.

De la revisión de tales antecedentes se puede concluir, a simple vista, que las aplicaciones en procedimientos constructivos recogen un período bastante corto en tiempo, 100 años. Esto en comparación con 2500 años de investigaciones y desarrollo del saber matemático de la humanidad para la comprensión geométrica de estas superficies.

La primera experiencia de construcción, en concreto armado, de un paraboloides hiperbólico fue realizada por el Ing. Bernard Lafaille, (1900 – 1955), en Francia, en 1933. También a él se debe, además de la primera patente registrada de estos sistemas de cubiertas, un primer escrito: «*Memoires sur l'etude generale des surfaces gauches minces*», (Memorias sobre el estudio general de las superficies alabeadas), publicación de los Boletines del Segundo Congreso de la Asociación de Ingeniería de Puentes y Estructuras. (IABSE, Vol.III, Zurich, 1935)¹.

Fernand Aimond (1902 – 1984), un año después, en 1936, publicó en los mismos Boletines esta vez en el Vol. IV el primer Tratado: «*Etude statique des voiles minces en paraboloides hyperbolique travaillant sans flexion*», (Estudio estático de las bóvedas delgadas en paraboloides hiperbólico trabajando sin flexión). Quince años más tarde las fórmulas y fundamentos geométricos contenidos en ese tratado llevarían, previa interpretación, adaptación y perfeccionamiento, a solucionar -estructural y especialmente- los prototipos desarrollados por Félix Candela.

Un primer libro desarrolló las propuestas del comportamiento elástico de “Cubiertas parabólicas de hormigón, a base de láminas armadas...”, en 1936, Issenmann Pilarsky, quien es su autor, publicó: «*Calcule des voiles minces en béton armé*» (Cálculo de cubiertas delgadas en concreto armado), editorial Dunod, Paris. Se tiene conocimiento de una edición de esta obra titulada «*Cálculo de cascarones de concreto armado*», de la editorial Continental para el año 1961.

Un constructor italiano, el Ing. Giorgio Baroni, desarrolló unas cubiertas de paraboloides hiperbólicos descritas en sus propias palabras como un sistema “...qué marca un progreso revolucionario en la técnica y la teoría de la ciencia de construcciones”². A él se debe otra patente, para Italia; siendo sus primeras experiencias, con techos de paraboloides hiperbólicos, la cubierta del Club de Trabajadores de la Planta de Aceros de Milán así como la cubierta de un almacén de la planta de fabricación de Alfa-Romeo,

¹ IABSEN: International Association for Bridge and Structural Engineering.

²http://www.area-arch.it/home.php?_idnodo=176335&PHPSESSID=c1949aa7b53359544f491e859ef05123

en la misma ciudad. También Baroni realizó la primera experiencia de paraboloides hiperbólicos en forma de paraguas, los paraguas de la localidad de Tresigallo, cerca de Ferrara, los cuales en la actualidad se han conservado en buen estado con mínimo mantenimiento.

El advenimiento de la Segunda Guerra Mundial trajo, entre otras consecuencias, la paralización de todos los avances en lo concerniente a construcción de paraboloides hiperbólicos en Europa.

No se conoce, algún otro antecedente relevante de construcciones de estas cubiertas durante el conflicto ni en la etapa de la reconstrucción europea. Todavía más: luego de las experiencias constructivas de Baroni en Italia no se dio otra hasta que surgieron los modelos de cáscaras diseñadas por el Arq. Candela, en México, para los años 50.

Llama la atención que hay autores que presentan escritos donde se analizan las propiedades de los paraboloides hiperbólicos y generan confusión al presentar erróneamente, entre los antecedentes de edificaciones con esta superficie, a otras de generación hiperbólica como es el caso del Hipódromo de la Zarzuela y la Torre Shejov que no son de doble curvatura.

La solución, sin calcular previamente, por parte del ingeniero español Félix Candela, de la cubierta del Pabellón de Rayos Cósmicos de la Ciudad Universitaria (México, D.F., 1951, diseñada por el Arq. Jorge González Reyna), marcó la pauta para que los paraboloides hiperbólicos, dentro del conjunto de las superficies alabeadas de doble curvatura, se diseminaran como estructuras para sistemas de cubiertas construidas en casi todo el mundo.

A partir de la obra construida por Candela, los paraboloides hiperbólicos representan uno de los ejemplos más palpables de la mejor tradición tecnológica, de soluciones estructurales y estéticas en los procedimientos constructivos.

Pese a ello, en Venezuela, salvo muy contados casos –principalmente construidos como paraguas invertidos- no existió una tradición innovadora de aplicaciones de paraboloides hiperbólicos como sistemas de cubiertas. Hallándose algunas experiencias cuya autoría

aún resulta difícil de documentar, pero que se atribuyen a la excepcional obra del arquitecto venezolano de origen mexicano Álvaro Coto Asenjo quien en mucho de sus proyectos trabajó en sociedad junto a Gabriel Loperena.

Salvo esos dos casos no se conoce, hasta este momento, la trayectoria de algún otro arquitecto venezolano que haya realizado una profusa investigación de las innovaciones respecto a este tipo de cubiertas o que su obra construida esté signada por aplicaciones e innovaciones de cubiertas en edificaciones solucionadas con paraboloides hiperbólicos. La mayoría de las construcciones existentes permanecen en el anonimato de sus proyectistas, constructores, entes contratantes, de la data y memorias descriptivas que relaten la experiencia constructiva.

El capítulo 2 se titula **Arcos, bóvedas, cúpulas y superficies un análisis retrospectivo de sus aplicaciones en las actividades constructivas de acuerdo a su clasificación geométrica**. Aquí se realiza un análisis respecto a los diferentes sistemas constructivos que emplean elementos estructurales curvilíneos. Desde el arco semicircular - erróneamente llamado de *medio punto*- de los constructores romanos, se inicia una recopilación de la información de las distintas innovaciones y de la influencia de la línea curva, para generar las diferentes tipologías de arcos, las bóvedas y de allí a las cúpulas (incluyendo a las conchas y cáscaras) que cubren los respectivos espacios arquitectónicos a los que han sido destinados.

Este segundo capítulo reúne las diferentes etapas en el perfeccionamiento de los sistemas constructivos mediante el empleo de las superficies en la solución de los espacios construidos de la humanidad. Se realiza en este capítulo una clasificación de las superficies de acuerdo a sus aplicaciones en los procesos constructivos

Bien es sabido que la evolución de los conocimientos geométricos y matemáticos han avanzado más rápidamente en lo que respecta a sus aplicaciones en procedimientos constructivos que, en casos como los que aquí son analizados, en referencia a las superficies alabeadas de doble curvatura han tardado muchos años en ser interpretados y aplicados.

El capítulo 3 **Superficies, conceptualización, generación geométrico-analítica y clasificación. Sus propiedades y representación geométrica descriptiva.** Aquí se aborda el estudio geométrico de las superficies un tema que es primordial en esta investigación de un modo recopilatorio intentando abarcar esos conocimientos desde una óptica global de los conceptos geométricos plasmados en los conocimientos analíticos y descriptivos con representaciones gráficas y tabulaciones de las propiedades de las superficies. Partiendo de las superficies cilíndricas hasta alcanzar a los tres grafos geométricos, objeto de la presente investigación, como son, el paraboloides hiperbólico, la silla de mono de una cola y la silla para un mono de dos colas.

Seguidamente el capítulo 4: **Estudio comparativo de sistemas estructurales de cubiertas de paraboloides hiperbólicos mediante su clasificación y representación geométrica** en el que se desarrolla un registro de los métodos que permiten la concepción geométrica de la superficie alabeada de doble curvatura para convertirla en una estructura construida bajo condiciones de equilibrio estable, aportados por Issenman Pilarsky, para luego presentar uno de los aportes más interesantes al campo del conocimiento de las estructuras como fue el realizado por Félix Candela para determinar las representaciones espaciales que determina el dimensionamiento de los paraboloides hiperbólicos cuando están configurados como superficie de traslación o sinclástica.

Félix Candela revolucionó el modo de erigir las estructuras de doble curvatura en tiempos en que no se alcanzaba a realizar operaciones ni tan siquiera con calculadoras de bolsillo. Para ese entonces la regla de cálculo era la herramienta imprescindible y mediante ella se alcanzaban métodos de cálculo que aun hoy en día resultan acertados mediante comprobaciones con herramientas computacionales.

Otra contribución que es analizada en este capítulo es la del arquitecto Eduardo Catalano, quien elabora una clasificación de estructuras de paraboloides hiperbólicos con base en el número de unidades que la conforman comparadas con la cantidad de columnas que le sirven de apoyo al piso.

En el capítulo 4 de esta investigación se da respuesta a una interrogante que hasta ahora no había podido discernirse en la literatura consultada: ¿Cómo una superficie de doble

curvatura que posee más de 2500 años de estudios geométricos logra finalmente convertirse en una estructura construida que responde eficientemente a las condiciones de equilibrio estable?

Como se puede constatar las estructuras de doble curvatura al momento de erigirse como sistemas de cubiertas en espacios requieren la menor cantidad de apoyos para alcanzar uno de los órdenes de magnitud más elevados en cuanto a la mayor cantidad de área que alcanzan a cubrir.

En el quinto capítulo: *Fundamentos geométricos de las superficies de parábolas invertidas. Propuesta de la investigación* se realiza el estudio comparativo de los parámetros geométricos que determinarían el equilibrio estable en las superficies alabeadas de doble curvatura como sistemas de cubiertas.

La metodología empleada en este capítulo permite la representación gráfica espacial de las superficies. Haciendo énfasis en las ecuaciones cartesianas. Formando agrupaciones de superficies en familias independientes, a partir de un sistema que logre cubrir una planta cuadrada. Se conforma así, con cada uno de ellos, la unidad adimensional o módulo que permitirá establecer su implantación como sistemas de cubiertas bajo condiciones de equilibrio estable. Determinándose, comparativamente, los parámetros geométricos mediante un software computacional. En este caso el *Derive*[®] (para dibujar la variedad de superficies), a partir de la indicación de la ecuación respectiva.

En el sexto y último capítulo se presentan los resultados, conclusiones y recomendaciones de la investigación. Las posiciones representadas en los tipos de superficies que se han diseñado corresponden a analogías de visualizaciones de objetos arquitectónicos con las cuales se hallan familiarizados los arquitectos e ingenieros, tales como alzados, fachadas, vistas en perspectivas isométricas y plantas de azoteas. Con variaciones de escalas y dimensionamiento de las proporciones de representación.

La agrupación en familias de las superficies mencionadas constituye una herramienta gráfica para el uso de arquitectos, ingenieros y constructores que permite visualizar, entre infinitas alternativas aquellas que mediante proyecciones planas; se constituyen

como representaciones visuales de las siguientes posiciones: *n.1*, que corresponde a la vista de una malla plana reticular de 20 x 20 unidades adimensionales (planta cuadrada, la cual permite obtener una idea intuitiva del área que se requiere para obtener la superficie de doble curvatura. Las posiciones *n.2* a la *n.5* son representaciones de perspectivas isométricas, donde el sistema de coordenadas cartesianas del software *Derive* es ubicado por defecto, tal como lo ocupa el software. Luego, a partir de aquí, las posiciones *n.6*, una vista en fachada frontal, *n.7*, vista de fachada lateral; *n.8*, vista en planta de techo o azotea y finalmente la posición *n.9* que permite obtener una vista en axonometría bimétrica de la superficie.

Observar las familias de superficies que se han conformado en los resultados de esta investigación conlleva a pensar en algún material constructivo, para la aplicación práctica, en procedimientos constructivos de cubiertas en espacios arquitectónicos, por lo cual se concibe que resulte preferible emplear el concreto armado.

Siendo así que se deben descartar todos los materiales excepto el concreto armado. No obstante, otros materiales como el acero inoxidable extendido en láminas que existen en el mercado con diferentes calibres, lisas, microperforadas, (con diferentes tipos de aberturas) brillantes, satinadas y mate en medidas de 1.22*2.44 m. o en bobinas. La propuesta se centra al menos en una experiencia que en lo personal se obtuvo mediante la realización de un proyecto arquitectónico de doble curvatura que se ideó para ser construido, todo el cerramiento de la cubierta con dicho material.

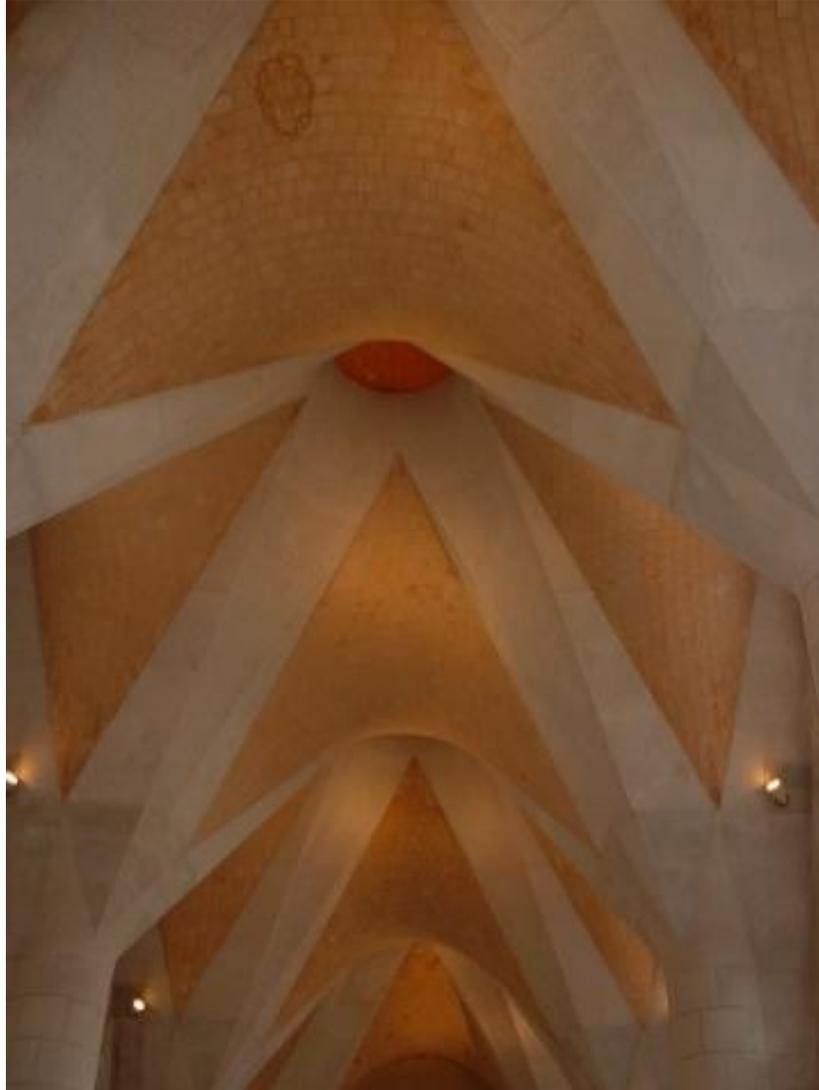
Ahora bien, ¿Cuáles son los aportes relevantes logrados en esta investigación doctoral?

El aporte fundamental obtenido radica en la agrupación realizada de diferentes familias de las superficies estudiadas: una familia de paraboloides hiperbólicos. Una familia que agrupa a las sillas de monos para monos de una cola ordinarias y otra para cuando son sillas de mono *perturbadas* para un mono de una cola, además de una última familia de superficies que reúne a las sillas de mono para monos de dos colas.

Cada uno de los tipos de superficies seleccionadas es determinado por una ecuación cartesiana predeterminada. Y, mediante el software *Derive*[®] se elabora una tabla que

contiene la representación gráfica -de esa misma ecuación- en un conjunto desde $n.1$ hasta $n.9$ posiciones principales para las superficies de paraboloides hiperbólicos, y sillas de mono para monos de una cola y de dos colas.

CAPÍTULO 1
MARCO TEÓRICO



CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO

“Parece evidente para cualquiera
que siendo la forma y la estructura tan importantes
en el diseño de las obras arquitectónicas,
la Geometría y las Matemáticas sean una parte fundamental de la Arquitectura”
Raúl Ibáñez Torres¹

1.1. Justificación del tema: La geometría como responsable del equilibrio estable de las estructuras edificadas

a. Planteamiento del Problema

Existen algunos profesionales de la construcción y diseño de estructuras que poseen poco conocimiento de los fundamentos geométricos que determinan el comportamiento estable de las estructuras de los paraboloides hiperbólicos, la silla de mono para un mono de una cola y la silla de mono para un mono de dos colas agrupadas en el conjunto de las superficies alabeadas de doble curvatura.

Prueba de este desconocimiento se ve reflejada en algunos textos que generan confusión caracterizando edificaciones con soluciones de techos de paraboloides hiperbólicos cuando en realidad son cubiertas de una curvatura simple.

Ejemplo de este caso es el gimnasio cubierto de la UCV (figuras 1 y 2) concebido, erróneamente, por algunos profesionales de la arquitectura como una *silla de montar*. Como muestra un texto publicado con motivo de la designación de la Universidad Central de Venezuela como Patrimonio de la Humanidad por la UNESCO (Consalvi, S. *et al.* 2001) en el cual se señala el techo del “...gimnasio cubierto con forma de silla de montar” (Consalvi, *et al.* 2001:15). Sin embargo, el gimnasio cubierto de la UCV no es un proyecto solucionado por el Arq. español Félix Candela.² Tampoco consiste su cubierta en la solución de un paraboloides

¹ Ibáñez, R. & Macho, M. (2004). El Vientre de un arquitecto. (La búsqueda de la forma). En: *Un Paseo por la Geometría 2003/04*. Universidad del País Vasco. 155-185.

² No obstante, en la entrevista telefónica con el Profesor Graciano Gasparini, en diciembre de 2006, comentó haber conocido personalmente a Candela, con quien mantuvo amistad, por muchos años, hasta el momento de la muerte del Arq. español, y que éste le manifestó siempre un deseo incumplido de trabajar con Villanueva. Es más, según las palabras del Arq. Gasparini, Candela sostuvo no haber realizado personalmente algún proyecto de cubierta para Venezuela. Esto último coloca en contradicción lo expresado por Bermúdez, en el Diccionario de Arquitectura quien sostuvo que los Arq. Álvaro Coto y Gabriel Loperena fundaron la empresa Ala de Venezuela, que era representante legal de la firma del Arq. Candela en este país.

hiperbólico implantado como superficie anticlástica, más bien es un óvalo con un pliegue cóncavo hacia abajo que le provoca una sola curvatura.



Figura 1. Gimnasio cubierto de la UCV. Conocido como “*La cachucha de Pérez Jiménez*”.
Fuente: archivos de COPRED-UCV.

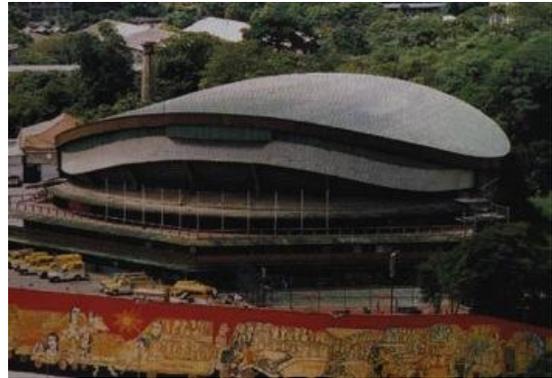


Figura 2. Gimnasio cubierto de la UCV.
Fuente: Consalvi, *et al.* 2001.

En los medios donde se imparte la enseñanza de la arquitectura e ingeniería civil, no se contempla entre los pensa, una difusión de los conocimientos geométricos y espaciales de las distintas formas en que se combinan las modulaciones de dichas superficies alabeadas, como soluciones que reúnen un sinnúmero de ventajas económicas, técnicas y estructurales; para las necesidades de generar sistemas de cubiertas en las edificaciones.

Mientras en otros países las construcciones de paraboloides hiperbólicos son una muestra de los más altos adelantos tecnológicos; en el ámbito nacional venezolano, salvo muy pocos ejemplos, no se observan aplicaciones generalizadas de estas soluciones estructurales. Esto a pesar de que los paraboloides hiperbólicos, constituyen el corolario de un proceso edificatorio en el que se conjugan óptimos valores estéticos, altos niveles de resistencia estructural, ahorro en los volúmenes de material aplicado y la participación de una mano de obra especializada.

La normativa sismorresistente venezolana (COVENIN 1756-98 y otras similares) ignora por completo en sus disposiciones las recomendaciones que pudieran guiar a los arquitectos e ingenieros respecto a los parámetros a seguir para realizar el diseño, cálculo y construcción de estructuras regladas no desarrollables. De aquí que las experiencias realizadas de construcción de paraboloides hiperbólicos no hayan legado a las nuevas generaciones de profesionales los aspectos resaltantes que podrían llevar a soluciones acertadas en los procesos de edificación de este tipo de superficies alabeadas.

Salvo muy contados casos en Venezuela se han empleado básicamente paraboloides hiperbólicos en concreto armado del tipo de paraguas invertidos. Se puede afirmar incluso que –mientras en otros países la construcción de superficies alabeadas de doble curvatura es una muestra de los más avanzados conocimientos edificatorios- en Venezuela las construcciones con paraboloides hiperbólicos sencillamente han sido muy desestimadas por los proyectistas y constructores. Aún más: actualmente se realizan mayores propuestas para demoler cubiertas de paraboloides hiperbólicos de concreto armado ya existentes, que las que se efectúan para planificar y construir otros.

En gran medida la ausencia de aplicaciones de las sillas de mono ordinarias a procesos de solución de cubiertas laminares en las edificaciones construidas se puede atribuir al modo como estas son conceptualizadas en los textos. Existiendo autores que describen a tales superficies bajo la premisa de que realmente su utilidad es para asiento de un primate (Cordero, Fernández & Gray, 1995) –y sobre este concepto se hará énfasis más adelante– estableciendo que

“Una persona podría sentarse confortablemente en un paraboloides hiperbólico, dado que posee entrantes para colocar sus piernas. Sin embargo, un mono tendría dificultades para hacerlo, ya que no posee ningún espacio para su cola. La silla del mono sería lo más adecuado para un mono,...” (Cordero, Fernández & Gray 1995:245).

En cuanto a algunos libros de geometría analítica que son del uso generalizado en las carreras de pregrado universitario se menciona la existencia de dos textos que incluyen ejemplos gráficos de la silla de mono ordinaria, para monos de una cola, sin siquiera profundizar en su modo de obtención. Tales textos son los siguientes:

Pourcel (1987) establece textualmente que:

“Si la superficie es muy complicada, puede ser útil mostrar las trazas de muchos planos paralelos a los ejes coordenados. Aquí puede ser muy útil una computadora con capacidad para diseñar gráficas. En la figura [abajo], presentamos una gráfica generada por computadora de $z = x^3 - 3xy^2$. Esta superficie se conoce como *silla de mono*; tiene espacio para la cola del mono, así como para sus dos piernas. (Sic)” (Pourcel, 1987:619).

Otro ejemplo en el cual se amplía más el concepto y a la silla de mono de una cola la representan (Edwards & Penney, 1994) de una forma bastante singular mediante la siguiente figura:



Figura 3. Imagen designada como “El mono en su silla.”

Fuente: Extraída con fines didácticos del texto de Edwards & Penney, 1994:820.

Cuando se observa a ciertos perros echados al piso con las extremidades extendidas se está en presencia de un hecho que quizás conllevó a denominar a la silla de mono ordinaria para un mono de dos colas como “*silla del perro*” (Edwards & Penney, 1994).

Se percibe el caso de un texto que ocupa en su portada un paraboloides hiperbólico como superficie anticlástica (Carmona y Pardo, 1983), mas al realizar una revisión del contenido de los capítulos no menciona en absoluto la existencia de dicha superficie.

Otro caso que es importante destacar (Salvadori, 1968) donde no se menciona la existencia de paraboloides hiperbólicos, el capítulo de geometría analítica, sólo analiza los casos concernientes a la línea recta.

En cuanto a algunos de los textos de Estructuras (diseño y cálculo) que han sido revisados para la presente investigación y que son empleados en la formación a nivel de las carreras de pregrado de carreras de ingeniería, arquitectura y diseño industrial no se ha encontrado alguna mención de la posible aplicación de las sillas de mono para solucionar sistemas de cubiertas.

Algunos de los textos de geometría descriptiva, revisados para la presente investigación, dan a conocer el modo de representación de los paraboloides hiperbólicos. Mas, sin embargo, no se ha encontrado todavía alguno que indique como realizar la representación geométrica descriptiva de las sillas de mono, o que al menos mencione su existencia.

Félix Candela hasta donde se ha logrado revisar su obra escrita, nunca mencionó la posibilidad de construir con sillas de mono ordinarias, aun cuando se podría intuir que sí las conoció (al menos como ecuaciones geométricas). En cuanto a las experiencias construidas de estas superficies, no se tienen antecedentes de que haya realizado alguna aplicación con sillas de monos.

Finalmente, y ya que se ha mencionado nuevamente la obra construida por Candela, es menester acotar en relación a su obra escrita³, un ensayo donde establece los principios filosóficos que determinaban las conceptos estructurales de estas superficies (Candela, 1962).

De acuerdo con Candela (1962):

“Pensar constituye siempre un esfuerzo penoso, y, por tanto, nos es mucho más cómodo creer simplemente en el buen criterio de los que han desarrollado los procedimientos en uso y aplicarlos al pie de la letra, por largos y tediosos que estos métodos sean, antes que pararnos a pensar un momento por nuestra cuenta.

Pero la técnica sólo puede avanzar como consecuencia de preocupaciones científicas; sin ellas, sin el fervor investigador, se convierte en pura rutina y va degenerando hasta llegar a ser un recetario inamovible.” (Candela, 1962:10).

b. Objetivo general

Determinar los fundamentos geométricos de las superficies alabeadas de doble curvatura (paraboloide hiperbólico, la silla de mono de una cola y la silla para un mono de dos colas) usando un software matemático. Principios que determinan las modalidades de generación, clasificación y representación en distintas agrupaciones de familias de superficies donde queden registradas las diferentes posibilidades de visualización para los casos más emblemáticos en que han sido aplicadas en los ejemplos internacionales ya edificados y, en el caso particular de las sillas de monos para monos de una y de dos colas, para los tipos que pudiesen aplicarse como sistemas de cubiertas en la solución de proyectos arquitectónicos.

³ El texto de Colin Faber, en su edición de 1970, recoge algunos de los principios constructivos enarbolados por Candela que ya habían sido mencionados en el artículo de Candela, **Les paraboloides hyperboliques les coques, en beton armé**. En: *L'architecture d'aujourd'hui*. N° 23. Septiembre de 1959. Paris.

c. Objetivos específicos

Identificar los antecedentes de la investigación, indicando la relación existente entre los procesos de innovación tecnológica que han conllevado a la implantación de las superficies alabeadas de doble curvatura y los aportes teóricos a los conocimientos de los fundamentos geométricos que la sustentan.

Determinar el estado del arte de las edificaciones que basan su comportamiento estructural mediante la aplicación de superficies alabeadas de doble curvatura.

Realizar un inventario de las distintas tipologías de estructuras que han sido construidas hasta el presente, en las cuales se hayan empleado modelos espaciales basados en el paraboloides hiperbólico.

Registrar las distintas modulaciones preestablecidas para realizar combinaciones espaciales de paraboloides hiperbólicos.

Describir los fundamentos geométricos que tienen una influencia preponderante en la respuesta estructural y resistente de los paraboloides hiperbólicos.

Categorizar los aspectos incidentes de la teoría de cálculo de conchas y cáscaras, y su incidencia sobre el conjunto de las estructuras laminares, que basen su genealogía en las superficies regladas no desarrollables.

Identificar los rangos de cobertura y de separación entre apoyos (luces) de los paraboloides hiperbólicos, realizando una propuesta de variables de magnitud, que los compare y relacione con otros sistemas estáticos.

1.2. Aspectos empíricos de la investigación

a. Supuestos del tema a investigar

Es posible demostrar, bajo los enfoques de las teorías del cálculo estructural, mediante la manipulación de métodos gráficos y numéricos, que el paraboloides hiperbólico y las sillas de monos para monos de una cola y de dos colas, dentro del conjunto de las superficies alabeadas de doble curvatura, poseen un comportamiento estable óptimo, entre los parámetros del equilibrio estable, en comparación con el resto de las estructuras curvilíneas que se emplean para salvar grandes luces sin apoyos intermedios.

El paraboloides hiperbólico representaría una respuesta al estado límite al cual se puede someter a una superficie; para que responda a los esfuerzos de flexocompresión que en comparación con un elemento plano (viga o losa plana) conllevaría a predimensionamientos inalcanzables por la ingeniería y arquitectura contemporáneas. Todo lo cual ocurre con el uso mínimo de materiales y una disminución considerable de los tiempos de edificación. Además la fabricación de un techo de doble curvatura no requiere de la participación de una mano de obra altamente especializada, ni de maquinarias o equipos sofisticados, factores que conllevan a la disminución de los costes finales de los procesos constructivos.

Cuando se requieren salvar luces sin apoyos intermedios, para cubiertas bastante grandes, con un mínimo de apoyos, dimensionados estos últimos con sus más pequeñas proporciones; el paraboloides hiperbólico es una alternativa entre el grupo de las estructuras laminares de doble curvatura, que actuando bajo el dominio de rectas directrices y generatrices, permite una respuesta constructiva eficiente con un alto valor estético, logrados mediante un bajo costo, reducciones considerables de las cantidades de material y de los tiempos de manufactura.

La razón principal por la cual la construcción de espacios arquitectónicos basados en la implantación de paraboloides hiperbólicos, al menos en Venezuela, se haya convertido en cosa del pasado es debida –entre otras causas- al desconocimiento que poseen algunos profesionales de la construcción de los fundamentos geométricos y determinación de los esfuerzos que generan el comportamiento bajo condiciones de equilibrio estable de estas estructuras.

El material ideal para erigir un paraboloides hiperbólico duradero, con una mínima inversión en mantenimiento es el concreto armado, con el cual se desarrollan extensas superficies laminares de 2.5 cm hasta 5 cm máximo de espesor. Sin embargo, es posible indagar la pertinencia de aplicar otros materiales que van desde los materiales textiles, el plástico con polímeros de alta resistencia, con lo cual se podrían bajar estos espesores. Algunos materiales como el bambú, con el cuales se llegarían a reducir los costos de material y el papel o cartón reciclados, con lo que se puede proponer una participación de tales estructuras, en los procesos de construcciones sustentables.

b. Metodología de la investigación

Se hará una investigación bibliográfica relacionada con el tema así como también visitas a los sitios donde se han edificado estructuras con paraboloides hiperbólicos para realizar un inventario de los avances tecnológicos que han permitido la evolución de las estructuras de superficies regladas de doble curvatura.

En el caso específico de las superficies alabeadas de doble curvatura conformadas por los paraboloides hiperbólicos y las sillas de mono ordinaria para monos de una cola, o de dos colas y una modalidad particular de representación de estas últimas que consiste en las sillas de mono perturbadas es posible realizar un sistema de representación de la ecuación geométrica dada de la superficie, mediante la aplicación de un software graficador para matemáticas, que permita generar distintas visualizaciones de una misma superficie bajo parámetros numéricos en posiciones que son traducibles al lenguaje formativo de arquitectos, ingenieros y constructores. Tales posicionamientos se verían reflejados en vistas características de las edificaciones proyectadas y construidas como son: isometrías, alzados plantas arquitectónicas y de conjunto.

La agrupación en familias de superficies reflejará los cambios de apariencia que reciben los sistemas de cubiertas en cuanto a elementos de ordenamiento visual como son: la proporción, la escala y el tamaño.

c. Resultados esperados

Los resultados serán vertidos en un documento gráfico, que servirá para la consulta de los profesionales de la construcción, cálculo y diseño de estructuras; estudiantes e investigadores que requieran establecer comparaciones sistemáticas, basadas en los principios geométricos, estructurales, estéticos y espaciales, que sustentan el equilibrio estable de las superficies alabeadas de doble curvatura, cuando son aplicadas para cubrir grandes luces, dentro de los distintos procesos constructivos.

El resultado esperado de esta investigación consiste en obtener un método gráfico de representación de diferentes superficies bajo los mismos parámetros de apariencia visual para contrastar las distintas posibilidades de aplicación de una ecuación geométrica específica para emplearla como posible solución en un sistema de cubierta en edificaciones bajo condiciones de equilibrio estable. Esto implica un conocimiento de los algoritmos matemáticos para producir de manera gráfica la representación y dimensionamiento de estas estructuras.

1.3. Antecedentes

¿Cómo evolucionaron los conocimientos matemáticos que permiten explicar los aspectos geométricos y numéricos de las superficies? ¿Quiénes fueron los hombres de ciencia que mediante sus investigaciones y publicaciones lograron demostrar para la humanidad los principios matemáticos que rigen la generación de las superficies?

¿Cómo una superficie alabeada de doble curvatura, cuyos estudios se remontan hacia el período helénico, se convierte sólo a partir del siglo XX en una estructura construida?

Seguidamente se presenta un análisis de los antecedentes de esta investigación partiendo de dos premisas distintas. Por una parte los antecedentes de los estudios y aportes al campo de los conocimientos matemáticos que han tenido una incidencia directa en la determinación geométrica de las superficies de doble curvatura. Por otra, un intento por establecer el estado del arte de la construcción de edificaciones con cubiertas laminares, regladas, de doble curvatura; específicamente aquellas que han empleado el paraboloides hiperbólico como propuesta de solución formal y estructural.

1.3.1. Antecedentes de los estudios matemáticos.

Su incidencia en los conocimientos de las superficies alabeadas de doble curvatura.

Geometría es una palabra que proviene del griego *γεωμετρία*. Etimológicamente⁴ significa γῆ "geo", tierra y μέτρον "metrón", medida: «*medida de tierras*» y de allí pasa al latín como geometria.

Los primeros estudios de la geometría como ciencia se remontan a los momentos en que despierta el pensamiento filosófico griego. Sin embargo, ya anteriormente se habían realizado algunas mediciones geométricas por parte de los egipcios quienes manifestaban preocupación por la determinación de las porciones de terrenos que eran anegadas por los desbordamientos

⁴ El significado etimológico de geometría es tomado de <http://iesgarciamorato.org/Diccionario.htm>

Capítulo 1. Marco teórico

del Nilo. Esto, claro está, sin aportes importantes en la elaboración de algún axioma o teorema. “Los egipcios hallaron para π un valor aproximado de 3.1605.”⁵

A su vez en Mesopotamia los problemas concernientes a las mediciones también fueron el campo en el cual ellos lograron un cierto desarrollo. Determinaciones de área del cuadrado y del círculo, volúmenes de cuerpos y representaciones de figuras semejantes.

a. La geometría en el Período Helénico

El conocimiento geométrico como rama de la matemática, en el período helénico, se inicia en el año 600 a. de C. con el surgimiento de la Escuela de Mileto, que se hallaba ubicada en territorio de lo que hoy es Turquía, y que entre sus exponentes más importantes se hallaban Tales y sus discípulos Anaximandro y Anaxímenes.

De Tales de Mileto (figura 4) se dice que no dejó nada por escrito. No obstante, se atribuyen a él los siguientes teoremas de la Geometría Elemental:

1. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto (figura 5)
2. Todo diámetro biseca a la circunferencia en dos partes iguales (figura 6).
3. Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales
4. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales (figura 5)
5. Dos triángulos son congruentes si ellos tienen dos ángulos y un lado igual.⁶

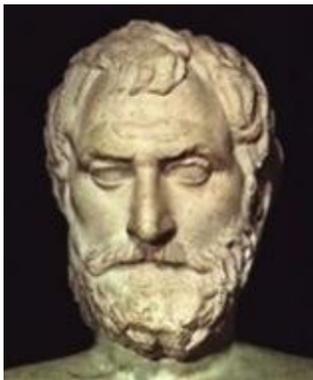


Figura 4. Tales de Mileto (624 – 546 a. de C.).

Fuente: http://blog.gilbertomirandajr.com.br/2009/05/ciencia-tecnologia-imbricamentos-e_05.html.

⁵ <http://almez.pntic.mec.es/~agos0000/geometria.html>

⁶ Con base en: http://symploke.trujaman.org/index.php?title=Tales_de_Mileto

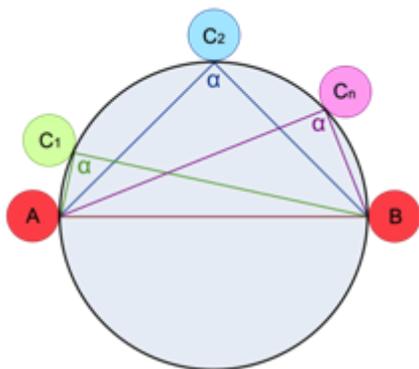


Figura 5. Representación gráfica de los Teoremas 1 y 2 de Tales de Mileto. Fuente:
http://it.wikipedia.org/wiki/File:Tales_de_Mileto_TT.jpg.

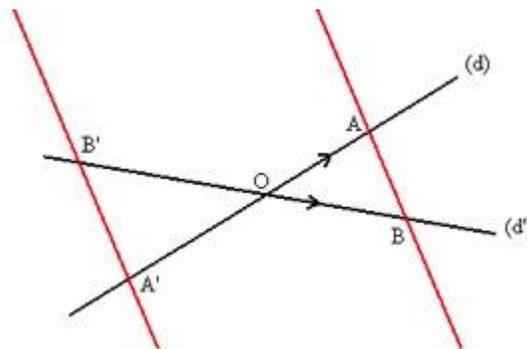


Figura 6. Representación del Teorema 4 de Tales de Mileto. Fuente:
http://symploke.trujaman.org/index.php?title=Imagen:Teorema_de_Tales_1.png

Luego, Pitágoras (figura 7) combinó conocimientos de filosofía y geometría. Él y sus seguidores consideraban que los números eran los elementos conceptuales básicos de todo lo existente. También se les atribuye el descubrimiento de los números irracionales (la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado), que parece haberse convertido en un secreto de la escuela, celosamente guardado.”⁷

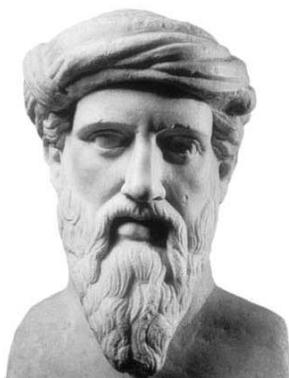


Figura 7. Pitágoras.
 Fuente: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pitagoras.htm>

La escuela de Pitágoras marcó una pauta en los avances de los conocimientos matemáticos del período helénico. Los procesos de abstracción numérica permitieron resolver, mediante el teorema de Pitágoras, la medición de los lados de un triángulo rectángulo con la ecuación

⁷ <http://www.oja-es.net/reportajes/pitagoras.html>

$a^2 + b^2 = c^2$. Alcanzando así la serie ilimitada que se conoce con el nombre de los números “pitagóricos” (figura 8).

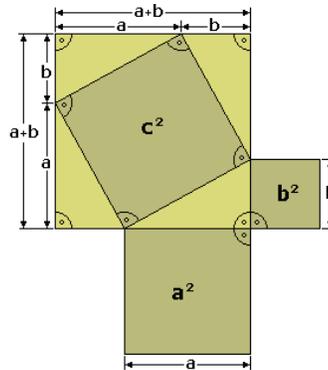


Figura 8. Representación gráfica del teorema de Pitágoras.
Fuente: <http://enciclopedia.us.es/>

Anaxágoras (499 - 428 a. de C.), fue encarcelado por decir que el Dios Sol no era tal, llevando consigo a su presidio escuadras y compás para intentar solucionar la cuadratura del círculo.⁸

El inicio de los estudios de los fundamentos geométricos de algunas de las superficies alabeadas de doble curvatura se remonta al período helénico. Menaechmo, discípulo de Platón y de Eudoxo, en el siglo IV a. de C. conocía que parábola era sinónimo de equiparable, elipse de deficiencia e hipérbola de exceso.⁹

Arquímedes (figura 9) fue el matemático más grande de los tiempos antiguos. Fue asesinado durante la captura de Sicilia por los romanos en la Segunda Guerra Púnica a pesar de que Marcelo, el General romano que dirigía la ocupación, había ordenado que le respetaran la vida. Curiosamente existe una representación del cilindro conteniendo la esfera en el epitafio de su tumba. Esto como muestra de uno de sus aportes a la geometría, quizás -según consideró Arquímedes- el más significativo; en el cual determina que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro que la circunscribe.

Arquímedes dedicó sus estudios a ramas diferentes del conocimiento humano, como la mecánica de fluidos, la física e ingeniería militar pero fue en la geometría donde realizó sus mayores contribuciones efectuando importantes aportes al estudio de las superficies.

⁸ <http://www.mat.usach.cl/histmat/html/anax.html>

⁹ www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Apolonio3.asp

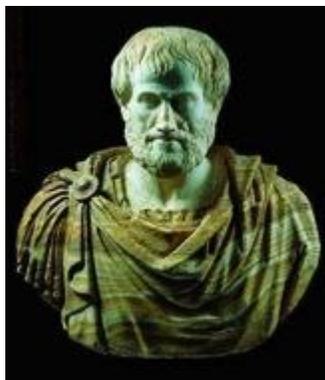


Figura 9. Arquímedes, (287 - 212 a. de C.).
Fuente: <http://iesogalileo.es/webs1011/victoria/pagina4.html>

La geometría de Arquímedes fue planteada con base en la medición de las figuras que le tocó estudiar. Realizó cuadraturas de superficies planas y curvas. Llegó a calcular los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos a un mismo círculo (figura 10)

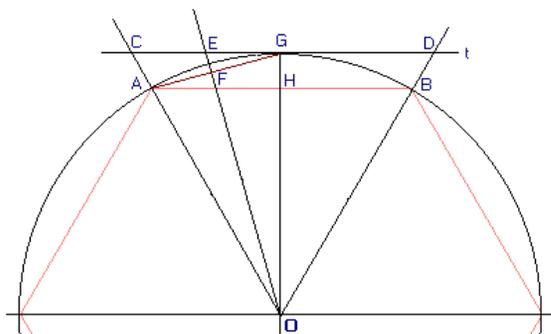


Figura 10. Representación parcial del modo empleado por Arquímedes para calcular los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos a un mismo círculo.

Fuente: <http://www.arrakis.es/~mcj/circulo.htm>

Arquímedes “...fue autor de varias obras las cuales se han ordenado según la época en que fueron escritas:

1. Esfera y cilindro.
2. Medida del círculo.
3. Geoides y esferoides.
4. Espirales.
5. Equilibrio de los planos y sus centros de gravedad.
6. Cuadratura de la parábola.
7. El arenario.
8. Cuerpos flotantes.
9. Los lemas.”¹⁰

¹⁰ www.mat.usach.cl/histmat/html/arch.html

También demostró que la superficie de una esfera es cuatro veces la de uno de sus círculos máximos. Calculó áreas de zonas esféricas y el volumen de segmentos de una esfera. Demostró que “El área de un casquete esférico es igual a la superficie de un círculo que tiene por radio la recta que une el centro del casquete con punto de la circunferencia basal.” (Alba & Moreno, 2004:29).

Arquímedes planteó para el cálculo de π un valor de $3+(10/71)$.

Arquímedes establece además los siguientes principios que tuvieron incidencia en la comprensión de los conocimientos geométricos de las superficies:

- La línea recta es la más corta entre dos puntos.
- De dos líneas cóncavas hacia el mismo lado y que tienen los mismos extremos, es mayor la que queda fuera de la otra.
- De dos superficies que pasan por una misma curva cerrada, cóncavas hacia un mismo lado, es mayor la exterior.”¹¹

b. Geometría euclidiana

Otra obra de geometría que marcó una pauta en la evolución de los conocimientos que permitieron el estudio y comprensión de las superficies regladas lo constituyó la obra compilada en los trece libros del geómetra Euclides: «*Los Elementos*». “Esta obra de Euclides es el coronamiento de las investigaciones realizadas por los geómetras de Atenas, como así mismo de los anteriores. Euclides no hace sino volver a tomar con más perfección los ensayos anteriores; hace una selección de las proposiciones fundamentales y las coordina convenientemente desde el punto de vista lógico.”¹²

¹¹ http://www.arteyestilos.net/biografias_escritores/arquimedes.htm

¹² www.mat.usach.cl/histmat/html/eucl.html



Figura 11. Euclides.

Fuente: teoremasdelamatematica.blogspot.com/2010/10/teorema-de-euclides

El Teorema de Euclides (figura 12) se explica así:

“El cuadrado construido sobre uno de los catetos de un triángulo rectángulo es equivalente al rectángulo que tiene por lados la hipotenusa y la proyección ortogonal del mismo cateto sobre ella.” (Romero, 2005:73)

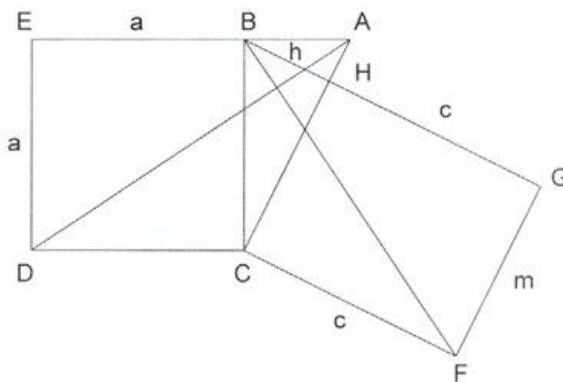


Figura 12. Teorema de Euclides.

Fuente: Romero (2005:73).

De acuerdo con Romero la demostración del Teorema de Euclides se deduce así:

Se representa un triángulo rectángulo ABC .

Los lados a y b son catetos;

El lado c es la hipotenusa.

m es la proyección de a sobre c .

Se construye un cuadrado de vértices $BCDE$ sobre el cateto a

Se construye un rectángulo $c*m$ de vértices $CHFG$.

De tal forma que se conforman dos triángulos:

$$DCA \text{ y } BCF$$

Análisis comparativo de ambos triángulos:

$$\angle DCA = \angle BCA + \angle \text{RECTO}$$

$$\angle BCF = \angle BCA + \angle \text{RECTO}$$

$$\Rightarrow \angle DCA \cong \angle BCF \quad \text{por ley transitiva}$$

$$\overline{DC} \cong \overline{CB} \wedge \overline{CA} \cong \overline{CF} \quad \text{por hipótesis}$$

$$ADCA \cong ABCF \quad \text{por el primer teorema de congruencia}$$

Área (DCA) = Área (BCF), porque son figuras congruentes.

Tomando como base del triángulo DCA el lado DC , su altura será a

(medida de la perpendicular bajada desde A hasta la recta DC).

$$\text{Área } (DCA) = \frac{1}{2} \text{Área } (DCBE) \quad \text{teorema del área del triángulo.}$$

Tomando como base del triángulo BCF el lado CF , su altura será m

(medida de la perpendicular bajada desde B hasta la recta CF).

$$\text{Área } (BCF) = \frac{1}{2} \text{Área } (HCFG) \quad \text{teorema del área del triángulo.}$$

Estas dos igualdades tienen sus primeros miembros iguales según la relación:

$$\frac{1}{2} \text{Área } (DCBE) = \frac{1}{2} \text{Área } (HCFG) \Rightarrow \text{Área } (DCBE) = \text{Área } (HCFG)$$

Es así como se demuestra el llamado teorema de Euclides (Romero, 2005:73-74).

Las definiciones señaladas por Euclides que dieron pie a una mejor comprensión del estudio de las superficies son:

1. “Punto, que lo define como ‘una cosa que no tiene parte’
2. Línea ‘es una cosa que no tiene sino largo; es una longitud sin ancho’
3. Línea recta, es la que está igualmente situada con respecto a sus puntos
4. Los extremos de las líneas son puntos
5. Superficie es lo que tiene sólo ancho y largo
6. Los límites de las superficies son líneas
7. Ángulo es la inclinación de una línea con respecto a otra
8. Ángulos adyacentes son los que tienen un lado común y los otros en línea recta
9. Ángulo recto es aquel que es igual a su adyacente
10. Ángulo agudo es el menor que el recto y ángulo obtuso, el mayor que el recto”¹³

¹³ www.mat.usach.cl/histmat/html/eucl.html

c. Apolonio y los principios geométricos de las cónicas

En el año 232 a. de C., Apolonio de Perga (262 - 190 a. de C.), conocido como «*el gran geómetra*», en Grecia, logró establecer los principios de representación de las cónicas (figura 13). Este hecho fue determinante para el estudio, a posteriori, de las superficies cuádricas; entre las cuales se hallan los paraboloides hiperbólicos.

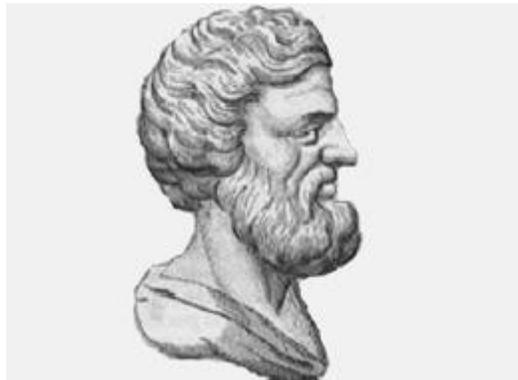


Figura 13. Apolonio de Perga.

Fuente: <http://vidasfamosas.com/2011/08/31/>

Las cónicas se agrupan en dos tipos: las cónicas curvas que son: la hipérbola, la parábola y la elipse (incluyendo a la circunferencia como un caso particular de la elipse, cuando la excentricidad es nula) y las cónicas degeneradas que son: el punto, la recta, y las rectas que se cortan. Todas ellas obtenidas geoméricamente a partir de la intersección de un plano secante con un cono de revolución de doble manto.

Los estudios realizados por Apolonio se reúnen en los tomos de su obra titulada «*Secciones Cónicas*» los cuales comprenden ocho tomos.

“Los libros del 1 al 4 no contienen material original pero introducen las propiedades básicas de cónicas (...). Los libros del 5 al 7 son originales; en estos discute y muestra como muchas de las cónicas pueden ser dibujadas desde un punto. Él da proposiciones determinando el centro de curvatura lo cual conduce inmediatamente a la ecuación cartesiana del desarrollo de la evolución. Muchos de sus otros libros están perdidos, el libro número 8 de *Secciones Cónicas* está perdido, mientras que los libros del 5 al 7 sólo

existen en traducción Árabe; sin embargo nosotros conocemos algunos de sus otros trabajos a partir de los escritos de otros personajes.”¹⁴

Las obras escritas de Apolonio, sólo mediante unas copias, fueron estudiadas por Hypatia (Alejandría, 370 - 415 d. de C.), quien escribió un libro denominado «*Sobre las cónicas de Apolonio*», aun cuando no existe ninguna prueba fehaciente que lo demuestre sino fuentes indirectas que así lo mencionan.



Figura 14. Hypatia.

Fuente: http://poster.4teachers.org/view/poster.php?poster_id=449534

Existe un libro: «*Archimedis opera; Apollonii Pergaei conicorum libri III; Theodosii Sphaerica*». Edición de I. Barrow de «*Las Cónicas de Apolonio*» (Londres, 1675), el cual contiene también obras de Arquímedes y de Teodosio. El texto (figura 15) se halla en la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando (Cádiz). Otra copia del libro de Apolonio «*Sobre las cónicas*» se encuentra conservado en la Biblioteca del Vaticano catalogado como uno de los textos más importante de geometría de la antigüedad. www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Apolonio3.asp

¹⁴ <http://www.mat.usach.cl/histmat/html/apol.html>

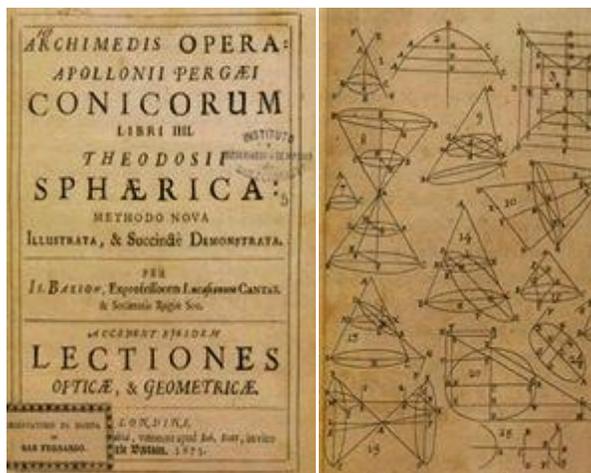


Figura 15. Portada y representaciones gráficas del texto: «Archimedis opera; Apollonii Pergaei conicorum libri III; Theodosii Sphaerica».

Fuente: www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Apolonio3.asp

d. Nace la geometría analítica

Algunos problemas geométricos tales como la determinación de la longitud de una curva, el área bajo una curva cualquiera, el volumen de cuerpos geométricos regulares e irregulares, las tangentes a una curva en un punto dado, lograron resolverse, con un mayor nivel de exactitud mediante el desarrollo del cálculo infinitesimal en el siglo XVII.

d.1. Descartes y Fermat

René Descartes (1596 – 1650) en forma particular no fue matemático, ya que más bien se dedicó a su estudio en algunos de sus ratos libres, sino más bien un egresado en los estudios de Derecho y jurisprudencia en Poitiers, donde comenzó su carrera militar como voluntario a los veintiún años en las filas de Mauricio de Nassau, Príncipe de Orange.

Descartes (figura 16) publicó el texto «*Geometría*» en 1637 perfeccionando en ella “la teoría de las secciones cónicas hasta que los recursos del cálculo infinitesimal, ampliando el principio de correspondencia entre las curvas y las ecuaciones, abrieron nuevos horizontes fecundos.” (Vera, 2003:2).



Figura 16. René Descartes

Fuente: <http://www.quotecounterquote.com/>

A la vez que Descartes acogía la vida militar otro francés, Pierre de Fermat (1601 – 1664) también con estudios de jurisprudencia, ejercía como magistrado en Toulouse, y para el año en que Descartes publicó «*Geometría*» fue el mismo año en el que Fermat (figura 17) ya había finalizado el escrito «*Ad locos planos et solidos isagoge*» (Introducción a los lugares planos y sólidos) sin publicarlo.

¿Es posible conceder a Fermat los créditos por la creación de la Geometría Analítica, o deben concederse los méritos a Descartes? Aún en la actualidad no existe, en la comunidad científica, un acuerdo en cuanto a quien atribuirle la prioridad.

Lo cierto es que ya para el año 1637 Fermat, como muestra de su afición por las matemáticas, había escrito una versión de uno de los textos perdidos de Apolonio: «*Plane Loci*». (Vera, 2003:2).



Figura 17. Pierre de Fermat.

Fuente: <http://www.dailykos.com/>

d.2. Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647)

Bonaventura Cavalieri (figura 18) fue un matemático italiano, autor del principio que lleva su nombre y que establece lo siguiente:

“...Si dos figuras planas (o sólidas) tienen igual altura y las secciones hechas por rectas paralelas (planos paralelos en caso de sólidos) a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces las figuras planas (o los sólidos) están también en la misma razón..” (Fernández, 2011).



Figura 18. Bonaventura Cavalieri.

Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Bonaventura_Cavalieri.

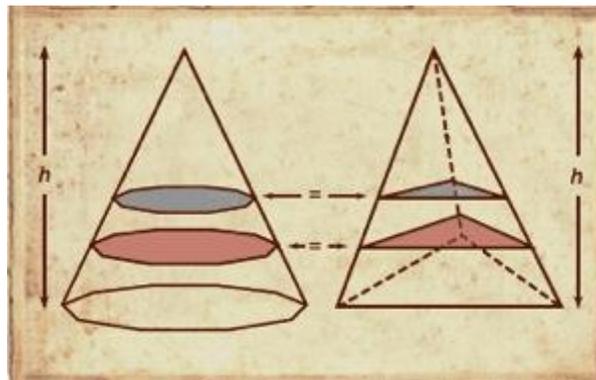


Figura 10. Principio Cavalieri.

Fuente: <http://www.britannica.com/>

d.3. Evangelista Torricelli

Evangelista Torricelli (1608-1647) fue un matemático y físico de origen italiano, principalmente reconocido por sus aportes en los conocimientos de las mediciones de la presión atmosférica. De hecho a Torricelli se deben el barómetro de mercurio y la unidad de medida de presión que se emplea en física y otras disciplinas, el *Torr*. Sin embargo, no fue menos importante su legado en el campo de las matemáticas, específicamente la continuidad

Capítulo 1. Marco teórico

en la obra de Cavalieri y el estudio de las líneas curvas y superficies cuádricas. Fue así como Torricelli, en 1644, alcanzó a publicar una extensión del *Método de los indivisibles* que había sido propuesto por Cavalieri en 1635, llevando estos a su aplicación a los indivisibles curvos.

Examinó a su vez los cuerpos tridimensionales que se obtienen al rotar un polígono regular alrededor de un eje de simetría. Sin embargo, sus trabajos de investigación no se detuvieron allí logrando también calcular el área y centro de gravedad de la cicloide.

“El tema de La cicloide surgió de una disputa con Roberval. En una carta fechada en octubre de 1643 Le informa a Roberval sobre sus puntos de vista y resultados sobre el centro de gravedad de la parábola, la superficie de la cicloide y su historia, el sólido de revolución generado por una cónica y un sólido hiperbólico. (...) Otra contribución de Torricelli fue en 1640, la resolución del problema de Fermat: dados tres puntos en un plano, encontrar un Cuarto punto tal que la suma de las distancias a los tres lados sea la menor posible (conocido como el centro isogónico del triángulo).”¹⁵

Torricelli ((figura 20) realizó un aporte al estudio de las curvas y superficies mediante una publicación hecha en 1644 que tituló «*Opera geometrica*». Gilles de Roberval (1602 – 1675) quien fue un matemático francés llegó a acusarle de plagio ya que también él había alcanzado una propuesta innovadora para la solución del problema de la cuadratura de las curvas estudiadas por Torricelli. Tal querrela nunca llegó a solucionarse debido a que no existían dudas de que Torricelli había realizado sus aportes de forma independiente.



Figura 20. Evangelista Torricelli.

Fuente: http://nl.wikipedia.org/wiki/Bestand:Lezioni_accademiche_d'Evangelista_Torricelli.jpg

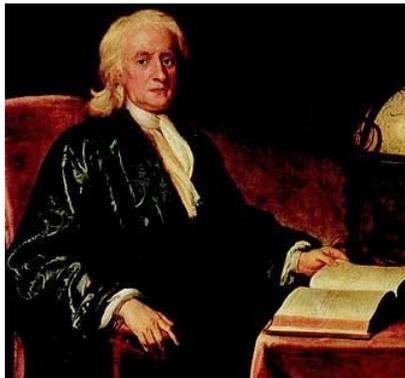
¹⁵ <http://www.portalplanetasedna.com.ar/torrielli.htm>

Otros matemáticos precursores del cálculo infinitesimal con aplicaciones a solución de problemas geométricos de las superficies fueron John Wallis (1616 – 1703) e Isaac Barrow (1630 - 1677).

d.4. Newton y Leibniz

No obstante, era necesario establecer una teoría global donde se incluyeran estos problemas, y otros muchos, aparentemente independientes. Los artífices de esta teoría fueron de forma simultánea, Isaac Newton (1643 – 1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716).

Newton (figura 21) publicó en 1687 una magna obra titulada «*Los principios matemáticos de la filosofía natural*» que constituye uno de los hitos más grandes de la historia de la ciencia.



Figuras 21. Isaac Newton.

Fuente: www.biografiasyvidas.com/monografia/newton/

Se destaca también su obra «*Método de fluxiones*», que contenía su Cálculo Infinitesimal, escrita dieciséis años antes de publicarse la anterior.

Newton generalizó los métodos que se habían utilizado para trazar líneas tangentes a curvas y para calcular el área bajo una curva, y descubrió que los dos procedimientos eran operaciones inversas. Uniéndolos en lo que él llamó el *método de las fluxiones*, Newton desarrolló en 1666 lo que se conoce hoy como cálculo, un método nuevo y poderoso que situó a las matemáticas modernas por encima del nivel de la geometría griega.

Aunque Newton fue su inventor, no introdujo el cálculo en las matemáticas europeas. En 1675 Leibniz llegó de forma independiente al mismo método, al que llamó cálculo diferencial; su publicación hizo que él recibiera en exclusividad los elogios por el desarrollo de ese método, hasta 1704, año en que Newton publicó una exposición detallada del método de fluxiones, superando sus reticencias a divulgar sus investigaciones y descubrimientos por temor a ser criticado.

En 1678 Leibniz (figura 22) publicó sus descubrimientos sobre el cálculo en una revista que él mismo había fundado, «*Acta Eruditorum*». Pero es el Acta de 1684 la que contiene lo que actualmente se considera el primer tratado de cálculo diferencial. Tal publicación no frenó el que se entablara una disputa entre los seguidores de ambos matemáticos por determinar quién había sido el primero en descubrir el cálculo.



Figura 22. Wilhelm Leibniz.

Fuente: <http://histinf.blogs.upv.es/2011/12/24/biografia-de-gottfried-wilhelm-leibniz/>

No existió acuerdo unánime respecto a quién se debe atribuir la creación del cálculo infinitesimal. Esto fue algo sobre lo cual no privó el consenso entre los matemáticos europeos del siglo XVII.

Es muy probable que los aportes de Leibniz y los de Newton fueran desarrollados, de forma independiente, sin que ninguno de los dos estuviera al tanto de los avances que cada uno lograba para el beneficio de la ciencia. Sin embargo, para la posteridad quedó sentado el hecho de que el aporte de Leibniz era cualitativamente superior al realizado por Newton, aun cuando éste lo concibió antes. Todo ello generó una controversia que duró por muchos años.

Actualmente, se deja por sentado que la primicia de la publicación le corresponde a Leibniz; y, a Newton, la autoría del descubrimiento. El cálculo de Newton es mucho más profundo que el de Leibniz. Mientras que las notaciones utilizadas por Leibniz, son más inteligibles que las de Newton.

e. Nace la Geometría Descriptiva

La conflictividad bélica desatada en Europa por Napoleón Bonaparte, en la segunda mitad del siglo XVII, conllevó a que algunos matemáticos franceses se convirtieran en militares de carrera. Sin embargo, las campañas expansionistas no coartaron la evolución de los conocimientos matemáticos y fue así como este periodo de la historia sirvió para que se desarrollara, entre otros conocimientos importantes, la geometría descriptiva cuyos postulados y métodos de representación perduran hasta hoy.

e.1. Gaspar Monge

El conocimiento que actualmente se tiene de la Geometría Descriptiva se debe, principalmente, a los aportes de Gaspar Monge, quien sin abandonar su carrera militar en el siglo XVIII, en las fuerzas francesas de Napoleón, dio nuevos enfoques al estudio y representación en proyecciones planas de los cuerpos tridimensionales que se hallan en el espacio geométrico.



Figura 23. Gaspar Monge.
Fuente: <http://geotete.blogspot.com/>

A finales del siglo XVIII Gaspar Monge (1746 – 1818) desarrolló un método de representación, de los objetos mediante proyecciones ortogonales el cual es empleado por arquitectos e ingenieros en la visualización de plantas, fachadas y cortes de las edificaciones; al igual que en el dibujo técnico y mecánico (figura 24).

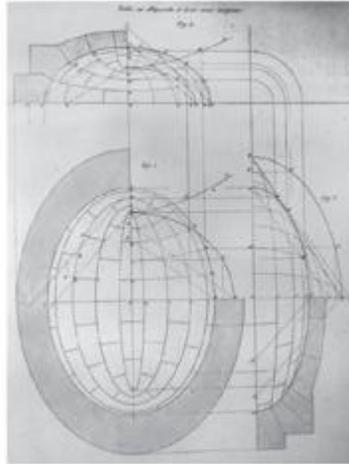


Figura 24. Propuesta para la construcción de una bóveda elipsoidal realizada por Monge en 1796.

Fuente: <http://architectureincombination.wordpress.com/2010/12/01/gaspard-monge-curvature-line-vault/>.

La contribución de Monge a la geometría quedó plasmada en su obra «*Aplicaciones del análisis a la geometría*» en la cual dejó evidencia de un inmenso valor para los conocimientos matemáticos debido a la profundidad y a la aplicación –en la solución de problemas- de conceptos y diferentes tópicos que conllevan a reconocerle, además del innovador de la Geometría Descriptiva, como uno de los creadores de la Geometría Diferencial ya que fue capaz de desarrollar casos para el estudio de las superficies que abordaban en su solución conocimientos de ecuaciones en derivadas parciales.

Monge “...fue quien, con el poder de su genio, elevó sus estudios a consideraciones geométricas más abstractas y, al mismo tiempo, llevó a principios simples y generales, los diferentes procedimientos gráficos empleados hasta entonces de modos diversos e independientes, en las artes de la fortificación, del trazo de caminos y canales, [y también] de la construcción arquitectónica...” (Torre, 1978:15).

e.2. Estudio de las superficies

A partir del siglo XVII y en la casi totalidad del siglo XVIII los partidarios o discípulos de Newton y Leibniz, a pesar de que dividieron sus opiniones en referencia de a quién dar el crédito de la creación del cálculo infinitesimal, en lo que sí lograron un acuerdo fue en comenzar a aplicar los nuevos conocimientos aportados para solucionar los problemas pendientes en diferentes ramas de la ciencia. La física, la óptica, la termodinámica, astronomía e ingeniería pasaron por un replanteamiento generalizado en el cual, quien abordara sus análisis sin conocer a fondo el nuevo lenguaje matemático, propuesto por Newton y Leibniz, sencillamente se hallaba lejos de concebir acertadamente la realidad.

Ya ha sido analizado el aporte a la geometría descriptiva del matemático francés Gaspar Monge. A continuación se considerará el caso de dos de los matemáticos que ejercieron mayor influencia en el estudio de las superficies.

e.3. Joseph Louis Lagrange

Lagrange realizó aportes a los campos de los conocimientos de la física (dinámica), astronomía, álgebra, matemática pura y teoría de números. Los trabajos de Lagrange sobre el método de interpolación polinómica se han mantenido sin modificaciones hasta el presente.



Figura 25. Joseph Louis Lagrange, (1736 – 1813).

Fuente: http://www.ecured.cu/index.php/Joseph_Louis_Lagrange.

Entre las contribuciones de Lagrange al estudio de las superficies se pueden enumerar:

Álgebra:

- Solución de las formas cuadráticas (1769) y de ecuaciones indeterminadas (1770).
- Tratado de la teoría de eliminación de parámetros (1770).
- Procedimiento general para solucionar una ecuación algebraica de cualquier grado (1770 – 1771).
- La solución completa de una ecuación binomial de cualquier grado,
- Solución de determinantes de segundo y tercer orden, y de sus invariantes (1773).

Teoría de números:

Método por determinar los factores de números de la forma $x^2 + ay^2$.

Cálculo y geometría:

En 1797 fueron publicadas las conferencias dictadas en la École Polytechnique con el título de *Théorie des fonctions analytiques* las cuales versaban sobre cálculo diferencial.

“El libro está dividido en tres partes. Da una prueba algebraica del Teorema de Taylor. La segunda trata las aplicaciones a la geometría; y la tercera aplicaciones a la mecánica. Otro tratado en las mismas líneas fue su *Leçons sur le calcul des fonctions*, publicado en 1804. Estos trabajos pueden ser considerados como el punto de arranque- para las investigaciones de Cauchy, Jacobi y Weierstrass.”¹⁶

e.4. Leonhard Euler

Euler fue el matemático más insigne del siglo XVIII, quien aportó ideas fundamentales sobre el cálculo y otras ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. Euler escribió textos sobre cálculo, mecánica y álgebra que se convirtieron en modelos a seguir para otros autores interesados en estas disciplinas.

Sin embargo, el éxito de Euler (figura 26) y de otros matemáticos para resolver problemas tanto matemáticos como físicos utilizando el cálculo sólo sirvió para acentuar la falta de un desarrollo adecuado y justificado de las ideas básicas del cálculo. La teoría de Newton estaba basada en la cinemática y las velocidades, la de Leibniz en los infinitésimos, y el tratamiento de Lagrange era completamente algebraica y basada en el concepto de las series infinitas.

¹⁶ http://es.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_de_Lagrange http://www.ecured.cu/index.php/Joseph_Louis_Lagrange



Figura 26. Leonhard Euler, (1707 – 1783).
Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Todos estos sistemas eran inadecuados en comparación con el modelo lógico de la geometría griega, y este problema no fue resuelto hasta el siglo posterior.

El primer logro científico importante de Euler lo constituyó la introducción del método analítico en la exposición de la mecánica newtoniana (1736) con el fin de reducir al mínimo la tradicional confianza en la demostración por métodos geométricos de la mecánica. Euler trasladó estos planteamientos al cálculo infinitesimal y, en 1748, publicó la primera obra de análisis matemático en la que el papel principal estaba reservado a las funciones en lugar de a las curvas. Sus obras completas que abarcan más de ochocientos tratados ocupan 87 volúmenes.

f. La Geometría Proyectiva

f.1. Poncelet, la geometría proyectiva es creada en la cárcel

Jean Victor Poncelet (figura 27) fue un General y matemático francés que cursó estudios en la Ecole Polytechnique y luego en la escuela militar de Metz, egresando con el grado de Oficial de Ingenieros y participando en tal condición en la expedición francesa a Rusia, ordenada por Napoleón.

Al ser puesto prisionero por los rusos pidió escuadras, papel y lápices para crear en su celda de castigo la geometría proyectiva. Estuvo “dos años en Saratov, continuando allí sus estudios (1812-14); dio a estos estudios, después de su regreso a la patria y de su reincorporación al

ejército, forma definitiva en el *Tratado de las Propiedades Proyectivas de las Figuras* (1822), que fue su obra más importante.”¹⁷



Figura 27. Poncelet, (1788 - 1867).
Fuente: <http://www.geocities.ws/fisicas/>

g. La Geometría no Euclidiana

Los matemáticos del siglo XIX, además de fortalecer los fundamentos del *Análisis*, nombre dado a partir de entonces a las técnicas del cálculo, llevaron a cabo importantes avances en esta materia. A principios del siglo, Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) dio una explicación adecuada del concepto de número complejo.

Otro importante avance del *Análisis* fue el estudio, por parte de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) de las sumas infinitas de expresiones con funciones trigonométricas. Éstas se conocen hoy como series de Fourier, y son herramientas muy útiles tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. Además, la investigación de funciones que pudieran ser iguales a series de Fourier llevó a Cantor al estudio de los conjuntos infinitos y a una aritmética de números infinitos. La teoría de Cantor, que fue considerada como demasiado abstracta y criticada como enfermedad de la que las matemáticas se curarán pronto forma hoy parte de los fundamentos de las matemáticas y recientemente ha encontrado una nueva aplicación en el estudio de corrientes turbulentas en fluidos.

¹⁷ <http://www.geocities.ws/fisicas/cientificos/matematicos/poncelet.html>

También en el siglo XIX un descubrimiento que se consideró abstracto e inútil en su tiempo fue la geometría no euclídea. En esta geometría se pueden trazar al menos dos rectas paralelas a una recta dada que pasen por un punto que no pertenece a ésta.

Las geometrías no euclídeas fueron estudiadas en su forma más general por Riemann, con su descubrimiento de las múltiples paralelas. En el siglo XX, a partir de los trabajos de Einstein, se le han encontrado también aplicaciones en física.

g.1. Louis Cauchy

Louis Cauchy para 1822 en su libro *«Analyse Algebrique»*, que fuera escrito para los alumnos del *École Polytechnique*, aportó los conceptos de límite, continuidad, función y otros. Basando sus conceptualizaciones del cálculo infinitesimal. “Sin embargo, esta solución planteó un nuevo problema, el de la definición lógica de número real. Aunque la definición de cálculo de Cauchy estaba basada en este concepto, no fue él sino el matemático alemán Julius W. R. Dedekind quien encontró una definición adecuada para los números reales, a partir de los números racionales, que todavía se enseña”¹⁸

En 1829 escribe *«Leçons sur le calculs différentiel»* define por vez primera los conceptos de función compleja y de variable compleja.¹⁹

g.2. Carl Fiedrich Gauss

Gauss (figura 28) fue un matemático, físico, inventor, astrónomo, ingeniero de comunicaciones y geodesta. Es reconocido como uno de los mayores genios de la humanidad, junto a Arquímedes y Newton por lo que ha sido considerado como el *Príncipe de los matemáticos*. Escribió 155 títulos; realizando su primer aporte importante a la geometría en 1796, un mes antes de cumplir los 19 años, mediante la obtención de un polígono regular de 17 lados con regla y compás, como se requería desde el período helénico, en la escuela pitagórica, donde Eudoxo, Euclides y Arquímedes, entre otros, explicaron que para las construcciones geométricas sólo debía utilizarse regla y compás. Gauss no sólo logró la construcción del mencionado polígono, sino que además estableció uno de los caminos más

¹⁸ soko.com.ar/historia/Historia_matem.htm

¹⁹ <http://www.ugr.es/~caznar/cauchy.htm>

utilizados para la resolución de problemas matemáticos que es el de llevar un problema, inicialmente de índole geométrico, a otro campo de conocimiento diferente para así obtener una solución definitiva.



Figura 28. Carl Fiedrich Gauss (1777 – 1855).

Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss.

En su tesis doctoral en la Univesidad Helmstedt presentada en 1799 Gauss dio la primera demostración del *Teorema Fundamental del Álgebra*.

La obra más trascendente de Gauss fue las «*Disquisitiones Arithmeticae*», escrita en 1801, cuando contaba con 24 años de edad. En ella establece una teoría que conllevó a la demostración de importantes teoremas tales como la *Ley de la Reciprocidad Cuadrática*²⁰ a la cual el mismo Gauss designó con el nombre de “Teorema Aureo”.

Gauss representó geoméricamente a los números complejos mediante puntos en el plano, además de aceptarlos y emplearlos como objetos matemáticos puros con lo que realizó un aporte interesante a la teoría de los números complejos. En 1811 Gauss, aun cuando no llegó nunca a publicarlo, demostró el hoy llamado Teorema de Cauchy (Carrillo, 2002).

Gauss fue el primero en desarrollar una geometría no euclídea, pero no publicó estos importantes descubrimientos ya que deseaba evitar todo tipo de publicidad. En la teoría de la probabilidad, desarrolló el importante método de los mínimos cuadrados y las leyes fundamentales de la distribución de la probabilidad. El diagrama normal de la probabilidad se sigue llamando curva de Gauss que es una Ley de Probabilidad según la cual cuando sobre una

²⁰ El concepto de *Ley de la Reciprocidad Cuadrática* al igual que el *Teorema Fundamental del Álgebra* se encuentran definidos en el Glosario de esta investigación

magnitud actúan una serie de pequeñas variaciones independientes entre sí, los resultados se disponen alrededor de la media y se distribuyen simétricamente a su alrededor, distribución cuya representación gráfica es una curva, la cual tiene forma de campana, de ahí que reciba el nombre de curva o campana de Gauss.

“En 1822, Gauss halló una expresión para determinar la curvatura en términos de ds^2 en coordenadas

$$k = -\frac{1}{m^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} \log m + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \log m \right)$$

cuando

$$ds^2 = m^2(du^2 + dv^2).$$

En 1825, el estableció la expresión de la curvatura en términos de los coeficientes de ds^2 en coordenadas polares (geodésicas). Esta fórmula dio a Gauss una nueva demostración de su «*Theorema egregium*», el cual está contenido en las «*Disquisiciones generales de superficies curvas*» de 1827.” (Boi, Flament & Salnaskis. 1992:17 y ss.).

g.3. Arthur Cayley, el cálculo matricial

En 1857 propició con sus investigaciones el origen y desarrollo posterior del cálculo matricial. De gran importancia hoy en día, ya que las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física y otros.

La utilización de matrices constituye actualmente una parte esencial de los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los computadores como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos. Es considerado como el tercer escritor más prolífico de matemática, siendo sólo superado por Euler y Cauchy. Hizo importantes contribuciones en la Teoría de curvas y superficies, en la geometría analítica, en la teoría de los determinantes y el desarrollo de la teoría de los invariantes.

h. Surge un intento por unificar la geometría con álgebra lineal y álgebra abstracta, topología y lógica

h.1. Emmy Noether

Emmy Noether, matemática alemana (figura 29) es conocida por su contribución al álgebra abstracta. Posiblemente ha sido la matemática más grande de la historia. En 1904, Emma Noether se matriculó en Erlanger y en 1907 obtuvo el doctorado por su trabajo «*Sistemas completos de Invariantes para formas ternarias bicuadráticas*». Entre los años 1908 y 1915, Noether trabajó en el Instituto de Matemáticas de Erlangen, pero sin remuneración, ni nombramiento oficial. Durante ese tiempo colaboró con el matemático algebrista Ernst Otto Fischer, y comenzó sus trabajos en álgebra teórica, por los cuales sería reconocida más tarde.²¹



Figura 29. Emmy Noether (1882 - 1935).

Fuente: <http://www.sdsc.edu/ScienceWomen/noether.html>

Durante la década de los años de 1920 Noether realizó estudios fundamentales sobre álgebra abstracta, trabajando en la teoría de grupo, en la teoría de anillos, grupos representativos, y teoría de número. Sus progresos en el desarrollo de las matemáticas resultaron de gran utilidad para los físicos y cristalógrafos. Entonces se debatía con mucha fuerza si las matemáticas deberían ser conceptuales y abstractas (intuicionista) o de mayor base física y precisión aplicada (constructivismo). Los conceptos algebraicos que Emmy desarrolló conducían a un grupo de principios que unificaban álgebra, geometría, álgebra lineal, topología, y lógica. El teorema que lleva su nombre, Teorema de Noether, es empleado en mecánica y teoría de campos. Pertenece al cálculo diferencial y pasó inadvertido en su momento. Actualmente goza

²¹ Los datos biográficos de Emmy Noether se hallan recopilados en: www.sdsc.edu/ScienceWomen/noether.html

de enorme prestigio entre los físicos de partículas. Las conclusiones más interesantes se obtienen en el caso de las transformaciones euclídeas (como las espaciales), esto es, en aquellos casos en que la transformación no deforma los objetos.

h.2. Los aportes computacionales al estudio de las superficies

Se abordará, a continuación, en primera instancia el tema de las Tecnologías Avanzadas de Comunicación (TAC) término que recoge conceptualmente al conjunto de instrumentos y procedimientos que permiten acceder, asimilar y manejar distintos tipos de informaciones. Claro está, el concepto (TAC), entre las cuales se ubica a la red de Internet, recoge las llamadas Nuevas Tecnologías (NT) cuya obsolescencia depende del surgimiento de innovaciones que van desplazando a las anteriores, lo que conlleva, sobre todo en el campo de la informática, a etapas superiores de comunicación y transmisión de los conocimientos.

Los caminos de la transmisión del conocimiento, en muchos de los casos, parecieran aún mantenerse al margen de esos cambios y cuando se otorga una respuesta mediante el empleo de herramientas computacionales se hace mediante habilidades y destrezas que han sido adquiridas a expensas de la formación impartida. En este punto se puede traer a colación lo dicho por Juan David García Bacca cuando expresó que: “Una manera fácil, más no elegante, de hacer el *elogio de la técnica* sería arremeter contra sus detractores...” (García Baca, 1997:9) ya que las Nuevas Tecnologías (NT) también tienen, y seguirán teniendo, sus detractores y también requieren de quienes las elogien.

En el siglo pasado, a finales de la década de los años 80, se posicionó en el mercado del trabajo de diseño asistido por computadora la versión 10 de *Autocad*[®], un programa realizado por y para ingenieros (fundamentalmente ingenieros civiles) el cual permitiría que profesionales de otras áreas, primordialmente los arquitectos, le sacaran bastante provecho. Tal hecho marcaba un adelanto sustancial en las laboriosas tareas de diseño, proyecto y ejecución de obras civiles. Ello no limitó para nada el que este software sea empleado para labores artísticas, de I+D y otras ramas de la ingeniería.

h.3. Aplicaciones de las tecnologías de la comunicación, mediante la informática, en provecho del estudio de las superficies

Desde la máquina de ruedas dentadas de Pascal²² (figura 30) hasta las determinaciones de John Von Neuman (figura 31) respecto a los “bits” como unidades para determinar la capacidad de memoria de los computadores, la humanidad hubo de recorrer un largo trecho.



Figura 12. La sumadora Pascalina construida por Blaise Pascal.
Fuente: Enciclopedia Temática PEV.

La sumadora de Pascal era capaz de sumar y restar mediante el posicionamiento de ruedas con diez dientes que representaban a su vez los números del 1 al 0. Cuando la rueda pasaba del 9 al cero se daba un salto en la rueda consecutiva ubicada a la izquierda.

A Von Neuman, quien aportó el bit como unidad de medida de la memoria almacenada en un ordenador, se debe también el concepto de CPU.



Figura 31. John Von Neuman (1903-1957)
Fuente: <http://www.atomicarchive.com/Bios/vonNeumannPhoto>.

²² La sumadora de Pascal era capaz de sumar y restar mediante el posicionamiento de ruedas con diez dientes que representaban a su vez los números del 1 al 0. Cuando la rueda pasaba del 9 al cero se daba un salto en la rueda consecutiva ubicada a la izquierda.

Capítulo 1. Marco teórico

No obstante, existió, para las primeras décadas del siglo XX, la imperiosa necesidad de desarrollar los llamados pre ordenadores que se colocaron al servicio de los conflictos bélicos, más que para el desarrollo científico, de la época.

La respuesta eran máquinas sumamente pesadas con lenta operatividad a partir del relé electrónico, requiriendo de grandes espacios para su funcionamiento y de edificios completos para albergar todos sus dispositivos.

En 1958, apenas un año después de la prematura muerte de Von Neuman, un ingeniero electricista de nacionalidad estadounidense, Jack Kilby (figura 32) desarrolló un circuito integrado construido con base en un sólo material: el selenio. Este sería el paso determinante para la construcción de microprocesadores que verdaderamente lograron revolucionar el campo de las innovaciones en las tecnologías avanzadas de las comunicaciones. Kilby, quien generó la innovación del circuito integrado de selenio para dar paso a los microchips y microprocesadores, junto a Von Neuman son algunos de los hombres que han influido de un modo determinante en los cambios que propiciaron las tecnologías avanzadas de la comunicación.



Figura 32. Kilby (1924- 2005)

Fuente: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2000/kilby

h.4. Uso del Internet en el estudio de las superficies alabeadas de doble curvatura

Para la evolución de la Internet se debe hacer alusión a las actividades del británico Tim Berners-Lee (figura 33) quien con 57 años, en la actualidad, es reconocido como uno entre los cien científicos que han influido más en el desarrollo de las Tecnologías Avanzadas de Comunicación. Se podría suponer, sólo por un momento, que lugar ocuparía entre los hombres más ricos del mundo si hubiese patentado su creación. Berners-Lee en 1989 desarrolló la World Wide Web (www).

Este científico

“inició el desarrollo del World Wide Web (Red Mundial), que inventó a finales de 1990. Berners-Lee redactó el HTML (Lenguaje de etiquetado hipertexto) estableciendo enlaces con otros documentos en una computadora y elaboró un esquema de direcciones que dio a cada página de la Red una localización única, o URL (localizador universal de recursos). Luego estableció unas reglas llamadas HTTP (Protocolo de transferencia de hipertexto), para transmitir información a través de la Red. En 1991 dio a los usuarios de Internet libre acceso a programas en el mundo entero. Los dos años siguientes perfeccionó el diseño de la Red aprovechando las observaciones de los que empleaban Internet.”²³



Figura 33. Tim Berners-Lee, (1955 -).

Fuente: <http://boingboing.net/2012/07/28/olympics-ceremony-honors-tim-b.html>

h.5. El software de Autocad® y otros similares

En la página 68 fue mencionado el modo como el *Autocad*® fue concebido para el uso de ingenieros.

Entre los distintos programas de diseño y representación por computadora el *Autocad*® es uno de los más difundidos. Su utilidad radica en la inmensa gama de posibilidades de representación, permitiendo que, con un mínimo de comandos que sean manejados por el usuario, se puedan realizar creaciones que conllevarían, bajo otras condiciones, horas y horas de trabajo ininterrumpido.

Se establece así la posibilidad de desarrollar tareas de representación con un nivel profesional, muy diferente al esperado en los casos en el que los trabajos fuesen solicitados por láminas dibujadas en mesas.

²³ www.unesco.org/corier/2000_09/sp/dires/htm

Existen otros software que también aportan soluciones favorables como son: *Vector's Work*[®], que es el programa *Minicad*[®] el cual equivaldría a un *Autocad*[®] que sólo puede ser trabajado bajo ambiente *Macintosh*[®]. En *Minicad*[®] pueden correr los archivos elaborados en *Autocad*[®] pero nunca viceversa.



Figura 34: Ejemplo de una representación computarizada de superficie en ambiente CAD.

Fuente: <http://descargasvirtuales.blogspot.com/2012/08/autocad-2011-full-multilinguaje.html>

h.6. Graficadores y software matemáticos

El verdadero salto vertiginoso en el dominio y difusión de la geometría respecto al estudio de las superficies ha quedado representado en los avances en los conocimientos computacionales. Estos han permitido el desarrollo de software especializados para los estudios matemáticos, entre los cuales se pueden mencionar: *Derive*[®], *Matlab*[®], *Maple*[®] y *Mathematica*^{®24}, entre otros, que han aportado soluciones mediante poderosos graficadores que aún no terminan de posicionarse debidamente en los medios de investigación de estructuras constructivas bajo la óptica de la geometrización y análisis numéricos. Aportando su mayor potencialidad para las soluciones de cálculo estructural, estática y resistencia de materiales con determinaciones numéricas de las condiciones de equilibrio. Mientras que en otra vertiente arquitectos e ingenieros, sobretodo de la rama de ingeniería civil, se avocan cada vez con mayor entusiasmo a las ejecuciones de modelado bi y tridimensional de edificaciones bajo software como el *Autocad*, *Vector Works* y *3D Studio* para la elaboración de maquetas electrónicas de representación.

²⁴ El Capítulo 2 denominado Using *Mathematica* Pgs 17 – 33 del libro GRAY, A., MEZZINO, M., PINSKY, M. (1997). **Introduction to ordinary differential equations with *Mathematica*[®]. An integrates multimedia approach.** Springer-Telos. Santa Clara, California. Recopila los comandos fundamentales que se podrían emplear para la determinación de las propiedades geométricas de las superficies que aquí se analizan.

1.4. Estado del arte de construcciones de sistemas de cubiertas con paraboloides hiperbólicos

1.4.1. Antecedentes internacionales de soluciones constructivas con paraboloides hiperbólicos

La evolución histórica de aplicaciones constructivas y edificatorias como sistemas estructurales y de cubiertas de las superficies alabeadas de doble curvatura –en los casos particulares de los paraboloides hiperbólicos– se clasifica en cuatro períodos diferentes:

Un primer período con los antecedentes de las bóvedas regladas de Gaudí que no fueron realizadas en concreto armado pero que son dignas de ser interpretadas y revisadas en virtud de que el arquitecto español fue el pionero en edificar superficies de doble curvatura y, además, no dejó nada escrito que describiera su obra.

Luego un segundo período que se inicia a partir de 1933 cuando el ingeniero francés Bernard Lafaille construyó, esta vez sí, en concreto armado (e incluso con postes prefabricados) una primera cubierta con cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos. La importancia de este período, además de la innovación mencionada, consistió en el aporte teórico que comienza con un primer tratado acerca del comportamiento geométrico y estructural de los paraboloides hiperbólicos escrito por el ingeniero francés Fernand Aimond.

Un tercer período que vio luz a comienzo de la década de los años 1950, en México, con la obra del arquitecto español Félix Candela. Registrándose allí las experiencias más emblemáticas construidas por él y por otros arquitectos hasta 1997 año en que fallece el arquitecto Candela.

Un cuarto y último período se inicia a partir del fallecimiento de Félix Candela hasta el presente en el cual se pretende indagar la continuidad adquirida en el diseño, cálculo y edificación de estas superficies construidas en concreto armado, su evolución, nuevas implantaciones de modelos, así como la conservación y demoliciones, toda vez que ha dejado de existir su principal mentor.

Desde la primera experiencia edificatoria de Lafaille, en 1933, hasta lo actual se realizará un análisis que abarca un lapso temporal de apenas 80 años.

a. **Un primer período: 1901, el antecedente de las bóvedas regladas de Gaudí. La Cripta Güell y la Sagrada Familia**

Si bien a partir del siglo IV a. de C. se cuenta con estudios de geometría que han determinado el conocimiento de las superficies alabeadas de doble curvatura no fue sino hasta el inicio de la primera década del siglo XX, con la obra del arquitecto español Antonio Gaudí (figura 35), que se desarrollan en la cripta de la Colonia Güel (figura 36) “...las primeras bóvedas tabicadas de paraboloides hiperbólicos en la historia de la arquitectura.” (Matzner, 1997).



Figura 35. Antonio Gaudí (1852-1926).
Fuente: Fotografía de Pablo Audouard.



Figura 36. Cripta de la Colonia Güell en Barcelona, España.
Fuente:
<http://www.experienciasnn.com/tag/colonia-guell>.

De hecho, Gaudí, para el período posterior a 1901, generó superficies, que provocaron interpretaciones místicas (figura 37) según Matzner: “...el paraboloides hiperbólico [representaba a] la Trinidad, porque está formado por 2 rectas directrices no paralelas (el padre, el hijo) y una tercera generatriz que se desplaza sobre ellas y genera la forma integral (el espíritu santo).” (Matzner, 1997).



Figura 37. Bóvedas regladas en la Sagrada Familia en Barcelona, España.
Fuente: <http://1.bp.blogspot.com>

b. Segundo Período, 1933, Lafaille construyó el primer paraboloides hiperbólico en concreto armado

En 1933 el ingeniero francés Bernard Lafaille (figura 38), desarrolló como innovación tecnológica la «*V Lafaille*», un poste prefabricado en concreto armado en forma de V (figuras 39 y 40) y ello le permitió construir, en la ciudad de Dreux, Francia, una cubierta formada por cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos en doble cantilever (figura 39).



Figura 38. Bernard Lafaille (1900-1955).
Fuente: <http://www.notre-dame-royan.com/expositions/notre-dame-le-symbole-de-royan/laffaille-et-sarger-ingenieurs-de-notre-dame/>

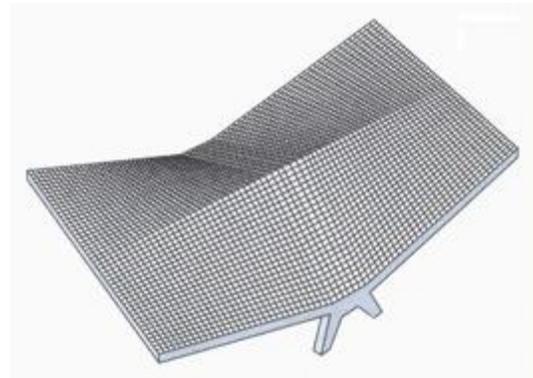


Figura 39. Primer techo de paraboloides hiperbólicos construido en concreto armado por Bernard Lafaille.
Fuente: elaboración propia con base en Eduardo Catalano (1962).

Lafaille supo solucionar importantes edificaciones con sus aportes constructivos que le dieron un sello arquitectónico a su obra construida: la «*V Lafaille*» (figura 40) y los techos de doble curvatura (figuras 41 y 42). Como ejemplo de esto se presentan seguidamente las imágenes de la Iglesia de Notre-Dame de la Paix construcción que data de 1955.

El techo de doble curvatura de Notre-Dame de la Paix fue resuelto bajo la condición geométrica de dos paraboloides hiperbólicos intersectados en la parte central de la edificación. Resolviendo de esta forma un innovador sistema de recolección de aguas de lluvias que no requería grandes voladizos no bajantes. Fue construido en concreto armado de bajo espesor.

La V Lafaille servía para dar apoyo a la cubierta y como detalle arquitectónico para enmarcar los accesos laterales a la iglesia.



Figura 40. La «V Lafaille» en el acceso norte de la iglesia Notre-Dame de la Paix, ubicada en París. Fuente: <http://notre-dame-villeparisis.ouvaton.org/architecture.htm>

La disposición de los paraboloides hiperbólicos en la techumbre de la iglesia de Notre-Dame de la Paix fue resuelta, además, con un nervio aperaltado para absorber las reacciones de borde, lo cual le otorgaba un efecto de mayor robustez al perfil de la losa. No se conocen detalles constructivos que permitan conocer los armados, tiempo de edificación, o participación de mano de obra que para ese entonces no disponía de la experticia para resolver con exactitud la disposición de un encofrado de doble curvatura mediante elementos de madera rectilíneos.



Figura 41. Detalle de la solución de conjunto.
Fuente: <http://notre-dame-villeparisis.ouvaton.org/architecture.htm>



Figura 42. Solución del paraboloide hiperbólico de la iglesia.
Fuente: <http://notre-dame-villeparisis.ouvaton.org/architecture.htm>

En 1966 el ingeniero André Paduart (figura 43), construyó una cubierta muy similar emulando a la de Lafaille, pero esta vez en la Universidad de Bruselas (Espion, Halleux, & Schiffman, 2003). Cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos, cubren un área de 235 m^2 sobre dos apoyos inclinados (figura 44) rememorando quizás las columnas prefabricadas de Lafaille. La cubierta fue vaciada en sólo un día y alcanzó un espesor de 7 cm y no 5 cm como fuera reportado en sus inicios por el mismo Paduart.²⁵



Figura 43. André Paduart (1914-1985).

Fuente:
www.ulb.ac.be/polytech/sgc/album/publicat/Espion_Paper_V4.pdf.



Figura 44. Cubierta de concreto armado formada por cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos, similar a la de Lafaille, construida por Paduart en la universidad de Bruselas.

Fuente:
http://www.ulb.ac.be/polytech/sgc/album/publicat/Espion_Paper_V4.pdf.

b.1. 1936, surge un primer Tratado del comportamiento geométrico y estructural del paraboloides hiperbólico

En 1936, Fernand Aimond (1902-1984), ingeniero francés, publicó un primer tratado: «*Etude statique des voiles minces en paraboloides hyperbolique travaillant sans flexion*» (Estudio estático de las bóvedas delgadas en paraboloides hiperbólicos trabajando sin flexión). Éste es publicado en los mismos Boletines, de la IABSE, esta vez en el Vol. IV (Catalano, 1962:7). Quince años más tarde las fórmulas y fundamentos geométricos contenidos en ese tratado llevarían, previa interpretación, adaptación y perfeccionamiento, a solucionar -estructural y especialmente- los prototipos desarrollados por Félix Candela.

²⁵ www.ulb.ac.be/polytech/sgc/album/publicat/Espion_Paper_V4.pdf

b.2. Publicación del primer libro para cálculos de paraboloides hiperbólicos

Un primer libro desarrolla las propuestas del comportamiento elástico de “Cubiertas parabólicas de hormigón, a base de láminas armadas...”, en 1936, Issenmann Pilarski, quien es su autor, publica: «*Calcule des voiles minces en béton armé*» (Cálculo de cascarones de concreto armado, de editorial Dunod, Paris).

En el Capítulo 4 de esta investigación se realiza un análisis del aporte de Pilarsky para las aplicaciones geométricas bajo condiciones de equilibrio estable de los paraboloides hiperbólicos.

b.3. 1938, Giorgio Baroni los primeros paraboloides hiperbólicos en Italia.

Un constructor italiano, el Ingeniero Giorgio Baroni desarrolló, a partir de 1938, unas cubiertas de paraboloides hiperbólicos descritas en sus propias palabras como un sistema “...qué marca un progreso revolucionario en la técnica y la teoría de la ciencia de construcciones”²⁶.

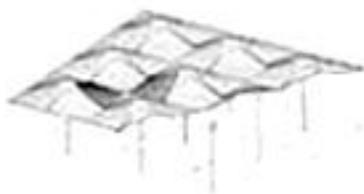


Figura 45. Boceto realizado por Baroni, en 1937, para la obtención de la 1ra patente italiana de construcción de paraboloides hiperbólicos en concreto armado. Fuente: http://www.area-arch.it/home.php?_



Figura 46. Boceto de Baroni, para la construcción de paraboloides hiperbólicos en concreto armado. Fuente: http://www.area-arch.it/home.php?_

²⁶http://www.area-arch.it/home.php?_idnodo=176335&PHPSESSID=c1949aa7b53359544f491e859ef05123

A Baroni se debe otra patente esta vez en Italia, la N° 346696, «*Método de producción de azoteas en concreto reforzado relativo*». Esta sería la segunda experiencia en Europa en la cual se proponía la fabricación de cubiertas de paraboloides hiperbólicos, luego de las construidas por Lafaille en Francia. Baroni, asombró a todos con su propuesta de construir los paraboloides hiperbólicos con 3 cm de espesor, lo cual alcanzó satisfactoriamente; (figuras 45 y 46), siendo sus primeras experiencias, con techos de paraboloides hiperbólicos, la cubierta del Club de Trabajadores de la Planta de Aceros de Milán así como la cubierta de un almacén de la planta de fabricación de Alfa-Romeo, en la misma ciudad. También Baroni realizó la primera experiencia de paraboloides hiperbólicos en forma de paraguas, los paraguas de la localidad de Tresigallo, cerca de Ferrara, los cuales en la actualidad se han conservado en buen estado con mínimo mantenimiento (figuras 47, 48 y 49).



Figura 47. Paraboloides hiperbólicos en fotografía captada por su constructor el ingeniero italiano Giorgio Baroni.

Fuente: http://www.area-arch.it/home.php?_



Figura 48. Paraboloides hiperbólicos en forma de paraguas normales. Fotografía de su constructor el ingeniero italiano Giorgio Baroni.

Fuente: www.area-arch.it/home.php?



Figura 49. Vista parcial del estado actual de los primeros paraguas construidos, en Europa, por el ingeniero Giorgio Baroni.

Fuente: www.area-arch.it/home.php?

El advenimiento de la Segunda Guerra Mundial trajo, entre otras consecuencias, la paralización de todos los avances en lo concerniente a construcción de superficies regladas de doble curvatura en Europa. No se conoce, algún otro antecedente de construcciones de paraboloides hiperbólicos importante durante el conflicto, ni en la etapa de la reconstrucción europea.

c. Tercer período: a partir de 1950, la experiencia mexicana con paraboloides hiperbólicos construidos por Félix Candela

Respecto a la vida de Félix Candela (Tonda, 2000) escribe lo siguiente: “Candela vivió 88 años, que es posible dividir en tres épocas de [aproximadamente] 30 años, respectivamente, correspondientes a sus estancias en España, México y Estados Unidos, aunque este último país fue su centro de operaciones mundiales.” (Tonda, 2000:15).

Candela (figura 50) nació en Madrid, el 10 de enero de 1910. Vivió en España, país donde cursó estudios de arquitectura. Al presentarse el conflicto de la Guerra Civil española se enroló como Capitán de ingenieros del lado de los republicanos. Y, por cuatro meses, fue hecho prisionero en un campo de concentración francés. Hasta la finalización del conflicto, en 1939, cuando es acogido por México en calidad de refugiado de guerra.



Figura 50. Félix Candela (1910-1997).

Fuente: <http://www.arquitecturablanca.com/>

La innovación que marcó la verdadera pauta en el inicio de construcciones con superficies regladas de doble curvatura fue el estudio y refinamiento de las fórmulas y ecuaciones contenidas en el trabajo de Fernand Aimond. La modalidad geométrico-cartesiana (figura 51) para el Pabellón de Rayos Cósmicos construido por Candela era la de un paraboloide

hiperbólico como superficie anticlástica²⁷. Esto permitió que, para 1950, Candela, resolviera eficazmente –junto al Arq. J. González Reyna– el encargo de diseñar y construir el Pabellón de Rayos Cósmicos en la Ciudad Universitaria en Ciudad de México (figura 52). Candela construyó esta primera cáscara reglada de doble curvatura, con forma de silla de montar sin cálculos estructurales previos (figura 53). Dijo Candela mencionado por Colin Faber que: “...la bóveda estaba a punto de ser colada, cuando un comité de supervisión pidió los cálculos. No había ningunos. [sic]” (Faber, 1970:51).

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

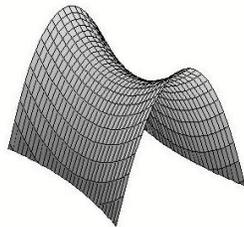


Figura 51. Ecuación cartesiana de la superficie alabeada de doble curvatura en su forma general y representación gráfica con sus líneas de contorno.

Fuente: elaboración propia.



Figura 52. Pabellón de Rayos Cósmicos.

Fuente: Cortesía Arq. Caro Carmona.

La condición explícita, solicitada a Candela fue que “El techo debía ser suficientemente delgado para dar paso a los rayos cósmicos: no más grueso que 15 mm. Tal dimensión era inusitada para la cubierta de concreto de un edificio permanente.” (Faber, 1970:51).

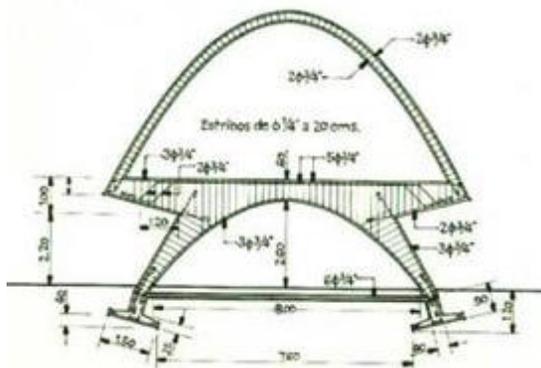


Figura 53. Detalle en corte del Pabellón de Rayos Cósmicos.

Fuente: Faber, 1970.

²⁷ En el glosario al final de esta investigación se explica que es una superficie anticlástica

Una vista del Pabellón en la actualidad refleja el buen estado de conservación y, al fondo, el edificio de la facultad de medicina de la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM (figura 54).



Figura 54. Vista del Pabellón y su entorno tal como pueden ser apreciados en foto reciente.
Fuente: Cortesía Arq. Caro Carmona.

Respecto a la obra construida por Candela, aquí sólo serán mencionadas la que corresponde a sus aportes a la implantación de paraboloides hiperbólicos. No negándose que otras edificaciones por él construidas y solucionadas con estructuras de cubiertas diferentes también lograron modificar toda la concepción constructiva que se tenía para la época. Es bueno recalcar que a partir de mediados de los años de 1950 hasta el momento de su muerte, acaecida en 1997, Candela comprobó mediante la construcción de miles y miles de metros cuadrados de cubiertas, edificadas en diferentes países, las ventajas y desventajas de estas superficies.

Dice Colin Faber (1970) al final de su obra escrita que las estructuras de paraboloides hiperbólicos propuestas por Félix Candela pueden clasificarse en cinco modalidades diferentes:

1. Paraguas simples
2. Eje z vertical
3. Bóveda por arista
4. Eje z no vertical
5. Bordes libres

Es necesario realizar aquí una observación. Faber, quien seguramente contó con la aprobación de Candela para realizar la agrupación de su obra en construcción de paraboloides hiperbólicos, coloca en una misma categoría a los paraguas invertidos y a las cúpulas rectangulares.

La propuesta para los fines de esta investigación es que en lugar de cinco categorías diferentes de tipos de paraboloides hiperbólicos se analicen agrupados en seis. Esto es: sólo deben ser considerados como *paraguas* los que disponen de un solo apoyo en la parte central. Y, de tal modo, otra categoría diferente es la conformada por los tipos de cubiertas de *cúpulas cuadrangulares* que disponen de apoyos hacia el suelo en cada una de las esquinas de la cubierta.

A su vez los paraguas, independientemente que sean cuadrados, rectangulares o que respondan a alguna otra geometrización, deben ser subdivididos en otras dos agrupaciones: la de paraguas invertidos, que es cuando un paraguas abre hacia arriba y la de los paraguas simples que es cuando abren hacia abajo. En ambos casos disponiendo de un sólo apoyo central.

c.1. Paraguas invertidos

La determinación de los esfuerzos y reacciones aportadas por Aimond, en 1936, fueron perfeccionadas por Candela, entre los años 1950-54. Esto le permitió crear cubiertas de concreto armado en forma de *paraguas invertidos* (figura 55) que, aun cuando poseían el eje z en posición vertical, podían construirse con los bordes inclinados para permitir el paso de luz y ventilación natural.



Figura 55. Paraguas invertido.
Fuente: elaboración propia con base en Faber (1970).

El primer prototipo de paraboloides hiperbólicos del tipo paraguas invertido fue el de Tecamachalco, México, D.F., construido en 1952 (figura 56) Según lo describe Candela fue solucionado “...con un peralte de 1 m, medía 10 x 10 m y un espesor de 4 cm. La flecha era escasa se produjeron deflexiones de cerca de 5 cm. La estructura también mostró tendencia a vibrar con el viento.” (Candela mencionado por Faber, 1970:84).

Capítulo 1. Marco teórico

Otro prototipo experimental fue el de la obra del almacén de Las Aduanas, en la zona de Vallejo, México, D.F., “...con dimensiones de 8 X 8 m y flecha de 60 cm.” (Faber, 1970:84). Fue allí donde 25 trabajadores junto a Candela posaron sobre la cubierta para demostrar la estabilidad de la misma al someterla a importantes cargas sin llegar a colapsar (figura 57).



Figura 56. Prototipo de paraguas invertidos de Tecamachalco en México, D.F.

Fuente: Colin Faber (1970).



Figura 57. Prototipo experimental en el almacén de Las Aduanas, Colonia Vallejo México, D.F.

Fuente: <http://www.skyscrapercity.com>

Seguidamente otro ejemplo de esta tipología de paraguas invertido el Almacén de Río, construido en 1954 en la zona de Linda Vista en México, Distrito Federal (figura 58). El Almacén de Río fue resuelto con 36 paraguas esta vez rectangulares de 10x15 m, con la particularidad de que los paraboloides hiperbólicos tenían inclinaciones que permitían el paso de luz y ventilación natural.



Figura 58. Almacén de Río. Construido en 1954 en Linda Vista, México, D.F. Fuente: <http://www.frente.com.mx/2011/10/13/felix-candela-y-max-cetto-en-el-mam/>

c.2. Cúpulas cuadrangulares

Ciertamente el almacén de Río, tal como ya fue analizado, es una estructura con paraguas invertido. Pero el almacén de Herdez (figuras 59 y 60), ubicado en San Bartolo, D.F., México (1955-56) no debe quedar agrupado en esa categoría.

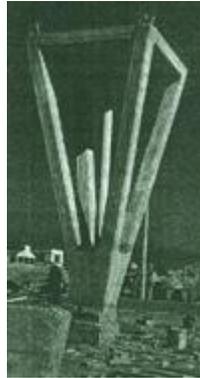


Figura 59. Columnas cuádruples para la cubierta de los almacenes Herdez.

Fuente: Faber, 1970.



Figura 60. Detalle de la cubierta de los almacenes Herdez.

Fuente: Faber, 1970.

La descripción que realiza Faber de esta cubierta es la siguiente:

“En el almacén de Herdez, cuatro delgadas columnas [no verticales] que parten de las esquinas de las cúpulas adyacentes se inclinan hacia una base común formando así un soporte en forma de V, cuyo quinto elemento (el único vertical) es un tubo de desagüe de asbesto que recoge el agua de lluvia de los cascarones...” (Faber, 1970:117).

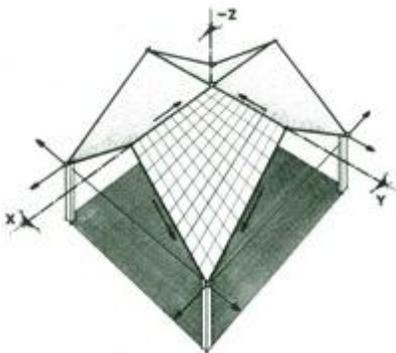


Figura 61. Cúpula cuadrada con cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos.

Fuente: Faber, 1970.

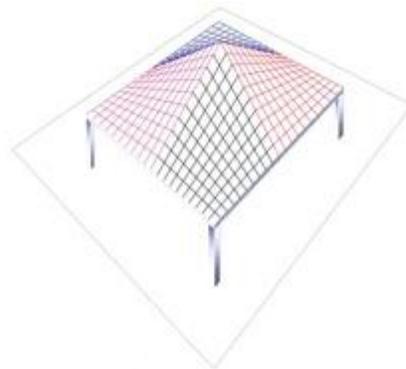


Figura 62. Cúpula cuadrangular con cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos esta vez con bordes horizontales rectos.

Fuente: Elaboración propia.

La razón que conllevó a permitir en que dos tipos diferentes de paraboloides hiperbólicos, los paraguas normales y los techos de cúpulas cuadrangulares (figuras 61 y 62) quedasen agrupados en una misma categoría se puede deber a lo escrito por Candela, mencionado en la obra de Faber, cuando expresa que:

“El cascarón de paraguas puede compararse con una lámina u hoja rectangular con el centro caído, dejando sus bordes horizontales. Las dos líneas rectas o pliegues que unen cada vértice lateral con su opuesto son horizontales y se intersecan en el centro de la hoja. Este es otro ejemplo de una superficie rectangular dividida en cuatro tímpanos alabeados y hasta donde yo sé, el mérito de la invención de la forma pertenece al imaginativo ingeniero francés Aimond.” (Candela, mencionado por Faber, 1970:116)

Hasta aquí la semejanza de las dos modalidades de paraboloides hiperbólicos propuesta por Candela es fundamentalmente en la forma. Ahora bien, una diferencia entre un paraguas (y algo que no lo es) no sólo estriba en el hecho de que estos cuentan con una sola columna que le sirve de apoyo al centro, mientras que a la cúpula rectangular le sirven cuatro elementos inclinados -como en el caso del Almacén Herdez- en cada una de las esquinas, pero que también pueden ser totalmente verticales y consiste en una sola columna en cada una de las esquinas en lugar de cuatro.

Pero existen diferencias adicionales, también expuestas por Candela, refiriéndose a las cúpulas cuadrangulares:

“El encofrado de este tipo de cúpula hyper es un trabajo sencillo para el carpintero. Pero puesto que todos los bordes del cascaron trabajan a compresión, se requiere un tirante perimetral para tomar los empujes, principalmente por esta razón la cúpula no es tan barata como el paraguas.

No obstante, tiene ciertas ventajas. El claro máximo práctico es algo mayor que el de un paraguas (...) el paraguas con su columna central produce claros más pequeños en el perímetro.” (Faber, 1970:116).

c.3. Eje z vertical²⁸

Como ejemplo de una edificación con cubierta de paraboloides hiperbólicos con el eje z en posición vertical será analizada la iglesia de La Medalla Milagrosa (figura 63), ubicada en la

²⁸ ¿En qué consiste un paraboloide hiperbólico con el eje z en posición vertical? Es respondido en el capítulo 3.

Capítulo 1. Marco teórico

zona residencial de Narvarte en Ciudad de México, la cual permitió a Candela desarrollar, entre los años 1954-55, junto a los arquitectos Arturo Sanz de la Calzada y Pedro Fernández Miret, una construcción de paraboloides hiperbólicos con mayor complejidad que los paraguas simples. Félix Candela describió el diseño así:

“Es un edificio notable. (...) La estructura es una combinación de superficies alabeadas todas ellas (excepto en la pequeña capilla lateral) paraboloides con el espesor usual de 4 cm o menos. Hasta el espigado campanario está hecho con hypares.” (Faber, 1970:99).



Figura 63. Vista exterior de la Iglesia de La Medalla Milagrosa.

Fuente: <http://www.google.co.ve/imgres?q=iglesia+de+la+medalla+milagrosa+felix+candela>

Todo el concreto fue vaciado a mano requiriéndose gran habilidad para los encofrados y al presentarse alguna falla en determinada columna (figuras 64 y 65) la superficie alabeada permitió su corrección sin conllevar al colapso de la estructura. “El diseño fue hecho en una tarde, dibujado en una semana y calculado durante la construcción.” (Candela, mencionado por Faber, 1970:102).

Los paraboloides hiperbólicos de La Medalla Milagrosa se elevan de forma inclinada por más de 20 metros a través de columnas contorneadas que transmiten los esfuerzos al débil subsuelo de la Ciudad de México. Las fundaciones fueron resueltas mediante una combinación de zapatas aisladas para las columnas y corridas para los cerramientos perimetrales mediante un innovador sistema estructural que permitió a Candela mostrar una innovación estructural que hasta ese entonces nunca se había aplicado para una iglesia: las fundaciones también tenían forma geométrica de paraguas invertidos de cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos.

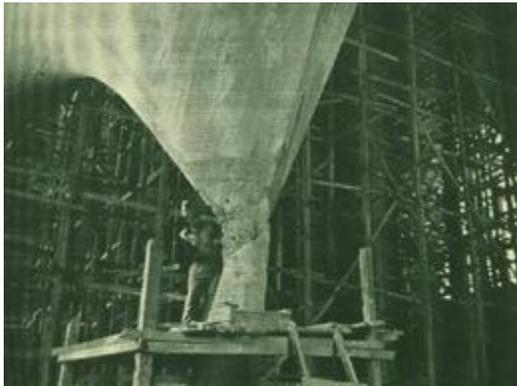


Figura 64. Columna colapsada que debió demolerse parcialmente en la Iglesia de la Medalla Milagrosa.
Fuente: Colin Faber (1970).



Figura 65. La misma columna colapsada en 1954 permanece en la actualidad en óptimas condiciones estructurales
Fuente: <http://hermanmao.com/>

c.4. Las Bóvedas por aristas una innovación constructiva que antecedió a los paraboloides hiperbólicos con bordes libres

Candela demostró que conocía el hecho de que constructivamente las bóvedas por aristas se emplearon desde el período románico (figura 66) y fueron el resultado de resolver geoméricamente la intersección perpendicular de dos bóvedas de cañón para cubrir espacios cuadrados o rectangulares. El término *aristas* se refiere a que las líneas de intersección entre las curvas diagonales de la bóveda conformaban arcos de semielipses que se unían en el vértice de la cúpula. Estas *bóvedas por aristas* dieron pie a una nueva particularidad que se denominó *bóveda de crucería* (figura 67) a partir de la intersección ya no de bóvedas de cañón sino de bóvedas apuntadas, que se difundió en las construcciones góticas renacentistas durante la Edad Media.



Figura 66. Bóveda por aristas romana.
Fuente:
http://es.wikipedia.org/wiki/B%C3%B3veda_de_arista.

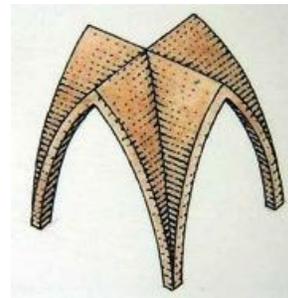


Figura 67. Bóveda de crucería gótica.
Fuente:
<http://darkdemons.uphero.com/Boveda%20de%20Crueria.html>

Capítulo 1. Marco teórico

El modo de interceptar dos o más paraboloides hiperbólicos en un mismo plano, aun cuando estaba geoméricamente concebida, debido a los antecedentes de las bóvedas de aristas romanas y de crucerías del gótico, era considerado como improbable de edificar debido a que no se lograba definir la magnitud de los esfuerzos que actuaban en las líneas de intersección de las superficies cuando estas eran doblemente regladas. Candela alcanzó a dar con la solución en términos prácticos y conceptuales.

Esas líneas de intersección de 4 paraboloides hiperbólicos en posición ortogonal 2 a 2 son llamadas tímpanos y su solución estructural fue un aporte de Candela a la comprensión de la respuesta estructural de los paraboloides hiperbólicos cuando trabajan como un todo en condiciones apremiantes de equilibrio estable.

La Sala de Remates de la Bolsa de Valores, ubicada en la calle Uruguay, de la ciudad de México fue proyectada, en 1954, por los arquitectos: Enrique de la Mora y Fernando López Carmona. Ambos pensaron que esta modalidad de bóvedas por aristas, propuesta por ellos, resultaba casi imposible llevarla a la práctica. Sin embargo, Candela expresó una opinión muy diferente señalando que el diseño era "...interesante, perfectamente lógico y no difícil de construir." (Candela mencionado por Faber, 1970:150). La bóveda de la Sala de Remates, de la ciudad de México fue solucionada bajo la condición geométrica de intersectar cuatro paraboloides hiperbólicos (figuras 68 y 69).

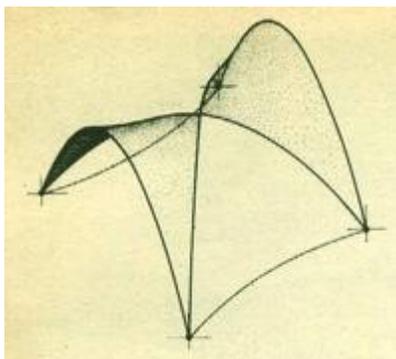


Figura 68. Modo de intersección de dos paraboloides hiperbólicos, empleado por Félix Candela, para responder al proyecto estructural del Edificio de la Bolsa de Valores.

Fuente: Colin Faber (1970).

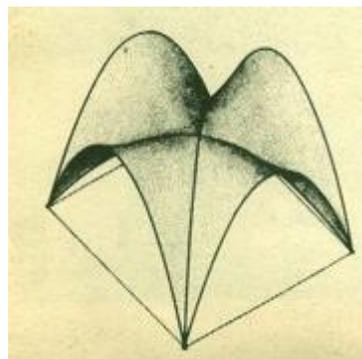


Figura 69. Representación de la intersección de los dos paraboloides hiperbólicos, para cubrir una planta de base cuadrada empleado por Félix Candela.

Fuente: Colin Faber (1970).

c.5. Eje z no vertical

Candela desarrolló una modalidad matemáticamente interesante de concebir los paraboloides hiperbólicos: la colocación del eje z en posición oblicua. Él fue el artífice de esa innovación constructiva.

Ante el reto de diseñar y construir estructuras con paraboloides hiperbólicos con el eje z no vertical y la existencia de muy pocos ejemplos para finales de los años 50, el Arq. Catalano escribió: “Quizás ello se deba a la mayor complejidad requerida en sus análisis estructural y evidentemente al hecho de hallarnos en los albores de su uso como estructura.” (Catalano, 1962:11).

En la solución del recinto de Nuestra Señora de La Soledad – 1955 (también conocida como Capilla del Alttillo, está ubicada en Coyoacán, ciudad de México), se conjugaron, además de la sencillez resultante, un empeño por mejorar las técnicas constructivas que conllevaron al empleo de materiales constructivos autóctonos en combinación con el concreto a la vista sin ningún tipo de tratamiento (figuras 70 y 71).

Candela supo interpretar con certeza la simplicidad arquitectónica con la alta complejidad estructural. El eje z no vertical rompió los esquemas superando todas las expectativas que determinan las reglas del equilibrio estable de las superficies doblemente regladas.



Figura 70. Capilla del Alttillo una vez vaciada la cubierta.
Fuente: Colin Faber (1970).



Figura 71. Vista de los accesos laterales de la Capilla del Alttillo.

Fuente:
<http://es.wikiarquitectura.com/index.php/Archivo:Capilla Soledad.jpg>

c.6. Bordes libres

Candela resolvió la implantación de un modelo de cubiertas totalmente diferente: el borde libre, que consistía en un sistema donde se proponía conservar los bajos espesores ya alcanzados, de aproximadamente 4 cm, mediante la eliminación de los refuerzos y de los elementos de rigidización rectilíneos que hasta ese entonces eran imprescindibles en todas las otras tipologías de cubiertas de paraboloides hiperbólicos, sustituyéndolos por arcos que transmitían los esfuerzos hacia los apoyos

La capilla de San Antonio de las Huertas (Calzada México-Tacuba, 1956) fue un proyecto de los arquitectos Enrique de la Mora y Fernando López Carmona. Una propuesta que brindó a Candela la posibilidad de abordar constructivamente este problema geométrico que aún quedaba por resolverse, la solución de cubiertas de paraboloides hiperbólicos con los bordes libres (figuras 72 y 73).

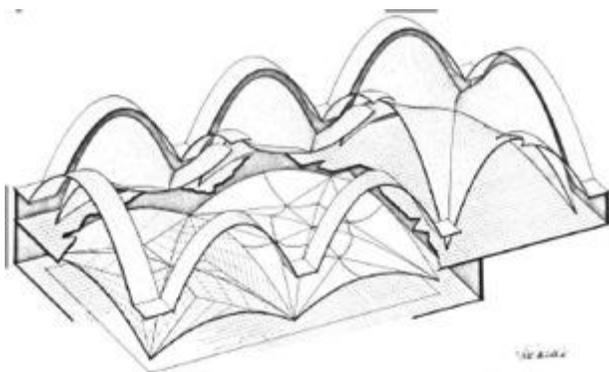


Figura 72. Capilla San Antonio de las Huertas.
Fuente: Colin Faber (1970).



Figura 73. Capilla de San Antonio de las Huertas. Calzada México-Tacuba D.F.1956.
Fuente: Faber, 1970.

Respecto a esta innovación constructiva Candela dijo que: “La significación real de las condiciones de borde, nunca explicitada claramente en la mayoría de los textos, fue finalmente clara para mí. (...) A pesar de que se me dio todo el tiempo necesario para hacer los cálculos, estos estaban equivocados en muchos detalles.” (Candela, mencionado por Faber, 1970:198-199).

Resulta casi imposible describir la obra de Candela sin relacionarla con el restaurante Los Manantiales (figuras 74 y 75) ubicado en Xochimilco, en México, D.F.-1958. El diseño arquitectónico de Joaquín y Fernando Álvarez Ordóñez. Cálculo estructural y construcción de Félix Candela. Esta nueva edificación tuvo como antecedente la iglesia de San Antonio de las Huertas. Además, todo constructor tiene una construcción a la cual considera como más emblemática y para Candela ése fue el significado que marcó el restaurante Los Manantiales: un antes y un después respecto a edificaciones con cubiertas de paraboloides hiperbólicos de concreto armado. Xochimilco es una zona de canales de agua dulce que constituyó el mejor paisaje natural para emplazar allí su obra cumbre. Respecto a este proyecto dice Faber que: “La estructura de Xochimilco es una bóveda por arista octogonal, compuesta por la intersección de cuatro hypars” (Faber, 1970:216).



Figura 74 Restaurante Los Manantiales.
Fuente: <http://blogs.iteso.mx/arquitectura/>

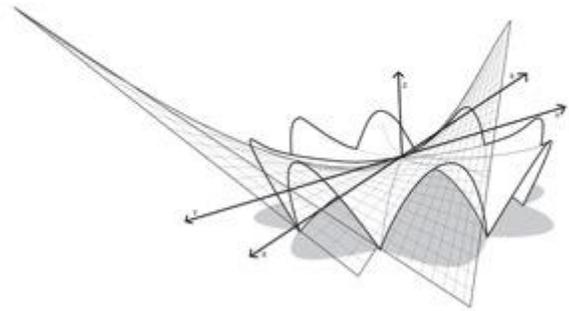


Figura 75. Esquema de intersección de los 4 paraboloides hiperbólicos que generan la cubierta de bordes libres del restaurante Los Manantiales.
Fuente: www.arquitecturablanca.com/

En 1977 cuando Félix Candela contaba con 67 años de edad recibió un llamado por parte del ingeniero alemán Jörg Schlaich, para asistir a Stuttgart. Allí presenciaría una interesante innovación, una cubierta con un espesor de 15 mm muy similar a la construida por él para el restaurant Los Manantiales.

La cubierta propuesta (figura 76) fue construida con un nuevo material: concreto armado con fibra de vidrio. Estas últimas permitían que el concreto, además de la ya comprobada resistencia a compresión, adquiriera propiedades físico mecánicas que lo hicieran resistente a esfuerzos de tracción.

“La losa está compuesta por 8 secciones de paraboloides hiperbólicos de 15 mm de espesor medio, que fueron "guindadas" sobre el encofrado. Cada una de ellas pesaba únicamente 2500 kg, con lo que una pequeña grúa fue suficiente para elevarlas.”²⁹

Dice Sanz (1999) que “Schlaich contemplaba este diseño como un reconocimiento a Félix Candela y, al mismo tiempo, como una investigación acerca del potencial real de este tipo de estructuras.” (Sanz, 1999:28).



Figura 76: Pabellón de exposiciones en Stuttgart, construida por Jörg Schlaich en 1977.
Fuente: <http://www.sbp.de/es/html/projects/detail.html?id=4>

La estructura para un Pabellón de exposiciones en Stuttgart, construida por Jörg Schlaich en 1977.

“La cubierta entusiasmó a Candela, entonces con 67 años, que inmediatamente subió a la misma y empezó a saltar en el vértice común de los ocho paraboloides para comprobar las flechas existentes. Con lágrimas en los ojos confesó que estaba emocionado de que sus ideas se hubieran sobrepasado y desarrollado de tal manera.” (Sanz, 1999:28).

d. Cuarto período, paraboloides hiperbólicos a partir del fallecimiento de Candela hasta la actualidad

El auge constructivo alcanzado por las construcciones de cubiertas con paraboloides hiperbólicos en concreto armado comenzó a extinguirse mucho antes de lo esperado.

²⁹ <http://www.sbp.de/es/html/projects/detail.html?id=4>

Capítulo 1. Marco teórico

Félix Candela percibió este cambio y como respuesta profesional abandona la empresa Cubiertas Ala de México que el mismo había fundado y deja sus destinos en manos de su hermano Antonio y de su hermana María.

El Palacio de los Deportes de Ciudad de México (figura 77) construido ex profeso para las olimpiadas de México, celebradas en el año de 1968, fue la última obra de mayor relevancia construida por Candela, junto a Enrique Castañeda y Antonio Peyri, bajo la tutela de *Cubiertas Ala*. Quizás como una premonición tecnológica del destino que aguardaba a los paraboloides hiperbólicos de concreto armado la solución estructural para este recinto fue resuelta con una estructura metálica y cerramientos de cobre.



Figura 77. Palacio de los deportes. México, D.F.
Fuente: <http://peristilo.wordpress.com>

De igual manera las condiciones laborales en la manufactura de la construcción, en el ámbito mundial, estaban cambiando. Estos cambios comenzaron a percibirse a inicios de la década de los años 60 (Duque 2010) y venían expresados por las siguientes condiciones:

“Por una parte, la mano de obra se había encarecido con la justa llegada de mejores salarios para los obreros, y por otra, la aparición de normas y reglamentaciones limitaron en alguna medida la libertad proyectual en muchos países, y además en el mercado internacional empezaron a aparecer nuevos materiales y patentes mucho más competitivas.” (Duque, 2010:19).

Capítulo 1. Marco teórico

No obstante la idea de concebir a los paraboloides hiperbólicos como una solución laminar para cubrir grandes áreas con poco material y mínima cantidad de columnas se había diseminado por todos los continentes y Europa, fundamentalmente España, no podía ser la excepción.

Fue así como Candela, quien había abandonado Madrid para marcharse al exilio en 1939, regresó treinta años después. Aun cuando había logrado mantener una presencia laboral debida a, entre otros, un proyecto importante: la iglesia de Nuestra Señora de Guadalupe, diseño de los arquitectos Enrique de La Mora y José Ramón Aspaizau, y propuesta y cálculo estructural de Félix Candela y de Eduardo Torroja.



Figura 78. Iglesia Nuestra Señora de Guadalupe. Madrid.
Fuente: <http://www.skyscrapercity.com>

Candela abandonó finalmente México para radicar en Estados Unidos de Norteamérica, en 1971, donde centró su actividad en labores de docencia en la Universidad de Illinois – Chicago. Obtuvo la nacionalidad estadounidense en 1978. Ya para ese entonces había sido profesor a partir de 1953 en la escuela de Arquitectura de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), desde donde contribuyó en la formación de varias generaciones de arquitectos de donde seleccionó a varios profesionales que pasaron a formar filas de su empresa, creando filiales en distintos países y convirtiéndolos en sus socios empresariales.

Candela dedicó los últimos años de su vida a los siguientes proyectos:

“En 1981 empezó a trabajar en Madrid en las oficinas de TYPESA, colaborando durante casi diez años en diferentes proyectos, entre ellos, la estación de metro de Puerta del Sol de Madrid, el Master Plan de la

Capítulo 1. Marco teórico

Universidad Islámica de Ryadh, las cubiertas de la Estación de Servicio y del Centro de los Boy Scouts, donde construyó sus últimos “paraguas” así como la cubierta del Estadio de la Universidad Islámica de Ryadh, que diseñó con estructura metálica (150 m de luz). Su último trabajo fue la colaboración en el proyecto de L’Oceanografic de Valencia, donde se construyó una réplica de su famoso “Restaurante Los Manantiales” de Xochimilco (México 1958).” (Duque, 2010:24).

La ciudad de las Artes y las es un diseño de edificaciones para actividades culturales ubicado en la ciudad de Valencia - España. Fue diseñado por Santiago Calatrava y Félix Candela, siendo inaugurado en 1998 con la apertura del edificio El Hemisférico.



Figura 79. L’Oceanografic en la Ciudad de Las Artes y las Ciencias. Valencia–España.
Fuente: <http://destinoarquitectura.blogspot.com>



Figura 80. L’Oceanografic vista posterior del conjunto.
Fuente: <http://buscardestinos.blogspot.com/>

Ya para esa fecha Candela había fallecido. El 7 de diciembre de 1997 el arquitecto español expiró como consecuencia de dolencias cardíacas en Carolina del Norte, Estados Unidos. Con su desaparición física comenzó a su vez una labor por preservar sus proyectos y darla a conocer a las nuevas generaciones de arquitectos. Su vida profesional quedó marcada por una labor que es considerada como uno de los mayores aportes al campo de los conocimientos del diseño, cálculo y construcción de estructuras laminares de concreto armado.

El legado de Candela dio paso, posterior a su desaparición física, al desarrollo de investigaciones de aplicaciones de estructuras de doble curvatura con materiales novedosos que en la actualidad se emplean en todo el mundo; tales como las estructuras de plástico, metal, madera, fibra de vidrio y tensiles.

e. **La obra del Arq. Eduardo Catalano, relacionada con superficies alabeadas de doble curvatura. La casa Raleigh**



Figura 81. Eduardo Catalano (1917-2010).
Fuente: www.trianglemodernist.com/catalano.

Eduardo Fernando Catalano fue un arquitecto argentino radicado por muchos años en los Estados Unidos donde realizó investigaciones de las aplicaciones de superficies alabeadas de doble curvatura paralelamente a las de Félix Candela en México.

En el año 1940 se graduó de arquitecto en la universidad de Buenos Aires, pero los estudios que realmente abrieron su participación en las corrientes modernistas fueron a partir de su llegada a los Estados Unidos en el año 1945 para cursar un Master en la Universidad de Pensilvania y Harvard.

Catalano fue a su vez profesor de arquitectura en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) entre los años de 1956 - 1977.

Es a su vez el diseñador y constructor de la Casa Raleigh (figura 82 y sucesivas) la cual será analizada seguidamente:

La casa Raleigh construida por el arquitecto argentino Eduardo Catalano, en 1954, quedaba ubicada en Carolina del Norte, en Estados Unidos.



Figura 82. En la biblioteca de la Escuela de Diseño de la NCSU, se exhibe la maqueta original elaborada por Catalano que sirvió para modelar la solución estructural de la Casa Raleigh.

Fuente: www.trianglemodernist.com/catalano

Al parecer la casa Raleigh no fue su primera experiencia en cuanto a diseños con paraboloides hiperbólicos. Ya en 1945 Catalano había participado en un concurso para una sede de la General Motors. La fuente electrónica *trianglemodernist* establece la siguiente afirmación: “In 1945, he entered a General Motors design competition using a hyperbolic paraboloid, and won second place out of 914 entries.” De ser así se estaría ante un hito que marca un antecedente importante en virtud de que la actividad de diseño, registro de patentes y construcción de cubiertas con paraboloides hiperbólicos se habían detenido por la Guerra en Europa. Los paraboloides hiperbólicos de Baroni en Italia y la experiencia de Francia, debido a la prematura muerte a los 55 años del ingeniero Lafaille, no sin antes dejar como legado las cubiertas de Tresigallo y edificaciones importantes como la Eglise Notre-Dame de la Paix, respectivamente³⁰. En cuanto al diseño propuesto por Catalano para General Motors no se conocen más que algunas referencias comentadas en infinidad de fuentes electrónicas sin que se logre dar con planos que señalen el aporte de esa iniciativa.

Se observa que las fases de construcción de la techumbre de la casa Raleigh, un paraboloides hiperbólico, como superficie anticlástica doblemente reglada (figuras 83, 84 y 85) deben haber presentado un alto nivel de complejidad ya que para 1954, su comportamiento estructural era comprendido sólo por muy pocos arquitectos en todo el mundo. El hecho de construirlo con madera significó además un salto donde la lógica estructural se complementó con la

³⁰ Ver páginas 75 Y 76 de este capítulo.

Capítulo 1. Marco teórico

originalidad tecnológica ya que hasta entonces los paraboloides hiperbólicos se resolvían comúnmente con concreto armado.



Figura 83. La cubierta de la casa Raleigh, construida con tablones de madera. Fuente: www.skyscrapercity.com/



Figura 84. Otra de las fases de construcción de la cubierta de la casa Raleigh, aplicación del cerramiento con tablas de madera. Fuente: www.skyscrapercity.com/



Figura 85. La cubierta de la casa Raleigh, finalmente la doble curvatura fue obtenida con elementos rectos que no requirieron doblez alguno. Fuente: www.skyscrapercity.com/

Seguidamente se observa parte del entorno urbano de la ciudad de Raleigh en el cual estuvo ubicada la vivienda:



Figura 86. Parte inferior izquierda (círculo azul) rematando la vialidad de tierra se puede observar el lugar donde, hasta la primavera de 2001, estuvo ubicada la Casa Raleigh.
Fuente: Google earth.

No caben dudas, Catalano fue un arquitecto aferrado a los cambios tecnológicos. La mejor muestra de esto fue la manera innovadora como concibió la respuesta formal, estructural y como seleccionó los materiales que incluiría en su solución: tres capas de madera laminada de 5.5 cm de espesor (Dias Comas, 2003:116) eran la mejor alternativa para brindarle la originalidad esperada a un techo con doble curvatura (figura 87).

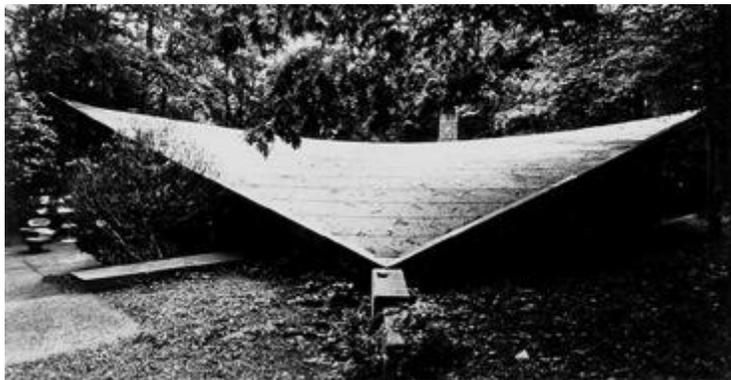


Figura 87. Vista exterior de la cubierta de doble curvatura de un paraboloides hiperbólico erigido por Eduardo Catalano, para su vivienda en Carolina del Norte. Fuente: www.jetsetmodern.com/catalano.

Un paraboloides hiperbólico de la forma que responde a la ecuación cartesiana $z=x.y$ construido con madera sirvió de cubierta para generar un espacio confortable que es separado de las terrazas exteriores por paredes de cristal traslúcido (figuras 88 y 89). “La casa de tres habitaciones ofreció una azotea de 4.000 pies cuadrados³¹ que era un paraboloides hiperbólico,

³¹ 4 mil pies² equivalen a 371.61 m²

Capítulo 1. Marco teórico

que se construyó con madera de una pulgada de espesor. La cubierta fue combada en dos curvas estructurales (similares a la forma de un calzador), con dos esquinas de la misma ancladas firmemente a la tierra y otras dos esquinas en el aire. Se abrigo debajo de la cubierta de doble curvatura un interior cuadrado rodeado enteramente en cristal. La ondulación de la cubierta lograba proporcionar terrazas en ciertas áreas y aislamiento y privacidad en otros.”³²

Refiriéndose a los años 50 la casa Raleigh fue catalogada y aceptada como «la casa de la década» en Estados Unidos. Esta fue una caracterización que hoy en día continúa despertando controversias debido al auge industrial que adquirió la construcción de nuevos urbanismos donde se alojaban las mejores representaciones de diseño para las familias de clase media americana en esa época.



Figura 88. Vista interna de los espacios de la Casa Raleigh.
Fuente: www.trianglemodernist.com/catalano.

Lo que si fue cierto –y no deja lugar a dudas- es que la casa Raleigh se convirtió en el modelo de vivienda más importante del estado de Carolina del Norte del siglo XX. Y, además, estuvo entre la lista de las diez mejores viviendas de toda la unión americana de la era de la postguerra. Todavía más, “... el diseño de Catalano sacó una respuesta favorable de Frank Lloyd Wright, quien era conocido por elogiar raramente el trabajo de otros arquitectos.” Un escrito de Lloyd Wright en la revista *House & Home* de 1956³³ se explaya en críticas

³² www.jetsetmodern.com/catalano. la cita original es en inglés.

³³ Se finaliza el presente escrito y hasta ahora ha sido infructuoso conseguir en físico la cita textual de F. Lloyd Wright mencionada. Sin embargo, son varias las fuentes electrónicas que hacen mención del elogio, tales como: jetsetmodern.com; trianglemodernist.com y otras. Además, el texto *La casa latinoamericana moderna* de Dias Comas también hace lo mismo sin describir siquiera el número del ejemplar de *House & Home*.

Capítulo 1. Marco teórico

favorables para Catalano y su vivienda en un artículo laudatorio escrito para tal fin.” (Dias Comas, 2003:116)

De acuerdo con el sitio electrónico <http://web.mit.edu/newsoffice/2010/catalano-obit.html> en el cual fue anunciado el fallecimiento de Catalano el comentario de Wright fue dicho en los siguientes términos: "Es refrescante ver que el refugio, que es el elemento más importante en la arquitectura doméstica, ha sido tan imaginativa y hábilmente tratada como en esta casa de Eduardo Catalano."³⁴



Figura 89. Vista de los espacios internos y terrazas de la Casa Raleigh.
Fuente: www.trianglemodernist.com/catalano.

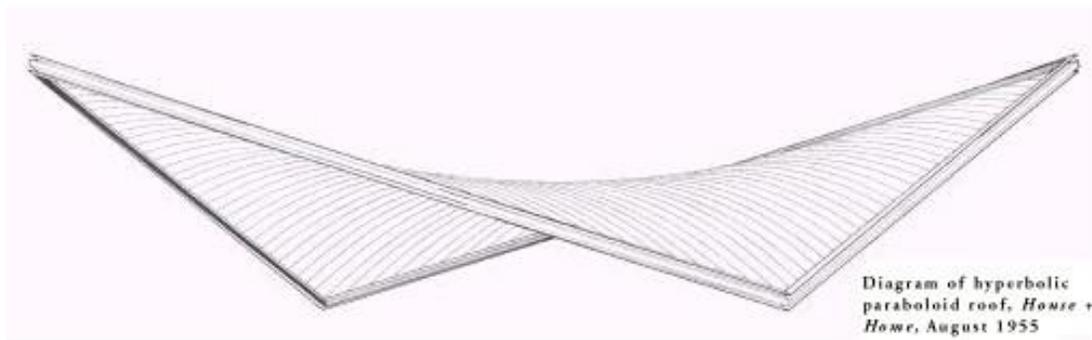


Figura 90. Ilustración que apareció en la revista House & Home de agosto de 1955, en la cual vio luz un artículo de Frank Lloyd Wright donde analizaba positivamente las cualidades de la Casa Raleigh.
Fuente: Extraída de www.jetsetmodern.com.

La casa Raleigh fue ocupada como vivienda por el arquitecto Eduardo Catalano, junto a su familia solo por muy pocos años, tres a lo sumo (figura 91). En 1978 la casa fue adquirida por

³⁴ <http://web.mit.edu/newsoffice/2010/catalano-obit.html>

su último ocupante el abogado Arch Lynch Jr³⁵, quien la habitó hasta 1996. Desde ese año y hasta 2001 la casa Raleigh permaneció deshabitada y en franco proceso de deterioro.

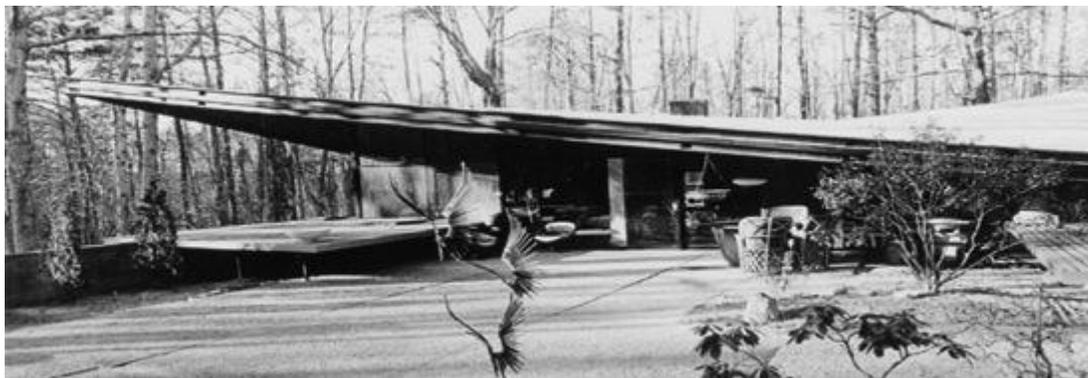


Figura 91. Vista exterior de una de las terrazas de la Casa Raleigh en sus tiempos de mayor esplendor.
Fuente: www.jetsetmodern.com/catalano.

La casa Raleigh que para su construcción en 1954 había alcanzado un precio de 40 mil dólares americanos, comenzó a ofertarse a mediados de la década de los años 90, por parte de la fundación para la Preservación de Carolina del Norte, por nueve veces dicha cifra para que fuera adquirida por cualquiera que estuviese interesado en cumplir con las cláusulas e invertir otros tantos miles de dólares en su restauración a las condiciones de diseño original.

Acciones de vandalismo, inclemencia del tiempo, pudrición y degradación de las piezas de madera que conformaban la cubierta conllevaron a que el daño se tornara irreparable (figuras 92 y 93).



Figuras 92. Restos de la casa Raleigh meses antes de ser demolida en su totalidad.
Fuente: www.jetsetmodern.com/catalano.



Figura 93. La Casa Raleigh días antes de su demolición. Fuente: www.jetsetmodern.com/catalano.

³⁵ El sitio web trianglemodernisthouses.com/catalano contiene toda la tradición de propiedad de la casa Raleigh.

Fue así como su último propietario, el abogado Arch Lynch, finalmente, vendió la casa a una inmobiliaria en marzo de 2001. Ese mismo mes fue demolida en su totalidad.

El abogado Arch Lynch hizo esfuerzos por alcanzar la recuperación de la casa Raleigh. Un compendio de las diligencias emprendidas por él se halla en un texto titulado «*Fine thoughts a story about a house and a vision*» que en formato pdf y bajo la designación de «archlynchbook» circula por internet Allí se incluyen visitas personales que le hiciera a Catalano, la primera vez el 10/septiembre/1992.

1.4.2. Experiencias venezolanas en construcción de paraboloides hiperbólicos de concreto armado

Se analizarán seguidamente algunas construcciones resueltas con paraboloides hiperbólicos de concreto armado en Venezuela. Dos grupos quedarán plenamente identificados: los de la provincia venezolana, en primera instancia, en virtud de que los paraboloides hiperbólicos construidos en Venezuela se iniciaron con las edificaciones que albergan al Club Playa Azul, que aun cuando para finales los años 50 políticamente pertenecía al Departamento Vargas, dependiente del Distrito Federal, en la actualidad su ubicación lo coloca como una parroquia del estado Vargas. Otro conjunto será el de los edificios con paraboloides hiperbólicos en la llamada *Gran Caracas*. Se hará una distinción entre las que aún se encuentran en pleno funcionamiento y buen estado de conservación y aquellas que hayan sido demolidas.

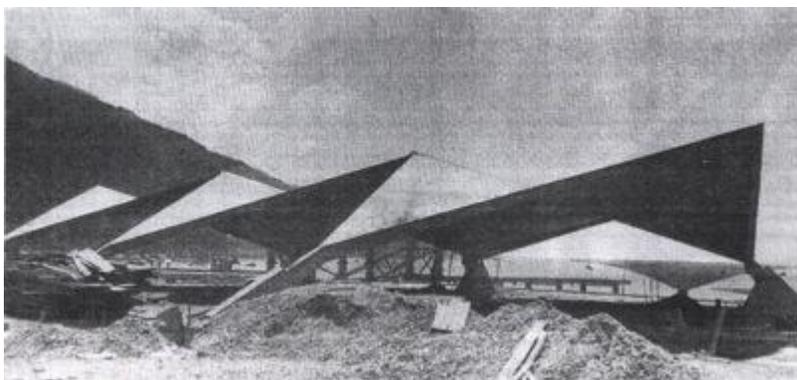
Entre las construcciones de paraboloides hiperbólicos en Caracas se hará mención a la vivienda del Arq. Julio Coll Rojas, por ser una de las pocas viviendas que fueron resueltas con paraboloides hiperbólicos dejando constancia de una respuesta tecnológica poco usual en los medios edificatorios venezolanos, lo cual marca un hito arquitectónico casi desconocido en materia de diseño habitacional en el país.

Un énfasis particular permitirá desarrollar un estudio de los diseños, patentes, y estructuras construidas y calculadas por Álvaro Coto Asenjo, arquitecto de origen mexicano, que fue representante en Venezuela de la oficina mexicana de diseño de Félix Candela, pero que con el correr de los años fundó otras firmas comerciales que dieron pie a la mayor cantidad de soluciones arquitectónicas con paraboloides hiperbólicos construidos en el país.

a. Paraboloides hiperbólicos de concreto armado construidos en la provincia venezolana

a.1. Club Playa Azul, Naiguatá, estado Vargas.

En Venezuela, se inicia la construcción de edificaciones con paraboloides hiperbólicos bajo la influencia de Félix Candela. Fue así como para el año 1958 queda construida, en concreto armado (figuras 94 y 95), una edificación original desde el punto de vista estético y estructural a la cual no se hallaban acostumbrados los diseñadores ni los obreros venezolanos. El Club Playa Azul, en el litoral central del hoy estado Vargas, contó con el diseño arquitectónico de Guillermo Shelley³⁶ y José Chávez. La obra se halla referida en el libro de «*Las estructuras de Candela*» de Colin Faber (1970:181), sin hacer mayor referencia en ese texto al proceso de contratación, respuesta de la mano de obra local ante una obra poco usual en el medio venezolano para esa época, tiempos de ejecución y costo final de la edificación. Todo lo cual deja entrever que la propuesta estructural haya sido determinada por Candela (figura 96).



Figuras 94. Vista de la construcción de las cubiertas de paraboloides hiperbólicos del Club Playa Azul. Naiguatá estado Vargas.

Fuente: extraída de Faber, 1970.

En un escrito reciente (Garrido, 2011) se menciona que el Arq. Shelley fue el primer representante de Félix Candela y sus empresas y diseños para las contrataciones en Venezuela.

“Félix Candela también tendrá presencia en Venezuela. Aparte de dictar una serie de conferencias, creará una sucursal de su empresa, *Cubiertas Ala*, en Venezuela. La misma será dirigida por el arquitecto mexicano Guillermo Shelley. Conjuntos como el del club Playa Azul y desarrollos industriales como la Fábrica de la Volkswagen que proyectan Dirk Bornhorst y Pedro

Neuberger en Morón, harán uso de los sistemas de cubiertas de la empresa.³⁷ (Garrido, 2011:1)

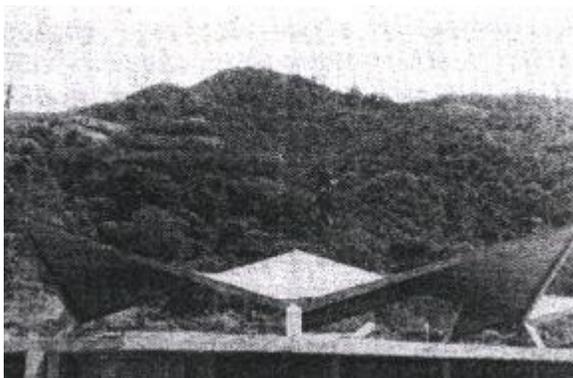


Figura 95. Cubierto de paraboloides hiperbólicos del Club Playa Azul. Naiguatá estado Vargas.
Fuente: extraída de Faber, 1970.

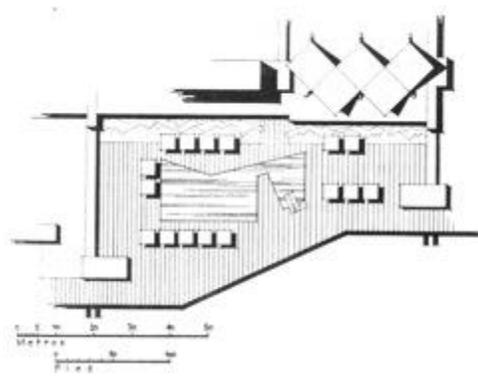


Figura 96. Planta arquitectónica del Club Playa Azul.
Fuente: extraídas de Faber, 1970.

En la actualidad y a pesar de los embates de los fenómenos naturales ocurridos en el año 2000 en el estado Vargas la edificación del Club Playa Azul se encuentra en buen estado de conservación y en pleno funcionamiento (figuras 97 y 98).



Figura 97. Vista interior de la edificación de paraboloides hiperbólicos.
Fuente: www.clubplayaazul.com.ve/



Figura 98. Vista exterior del paraguas invertido de concreto armado del Club Playa Azul, estado Vargas.
Fuente: www.clubplayaazul.com.ve/

A partir de esta experiencia inédita se define que en Venezuela, salvo contadas excepciones, básicamente se construyeron paraboloides hiperbólicos, en concreto armado, del tipo de

³⁷ <http://www.vitruvius.com.br/revistas/read/arquitextos/11.129/3753>

paraguas invertidos para sistemas de cubiertas. A continuación se realiza una semblanza de algunas de las edificaciones más importantes:

a.2. Mercado libre en Maracay

El mercado libre de Maracay (figuras 99 y 100) constituye, quizás, la edificación con mayor cantidad de cubiertas de doble curvatura de concreto armado en Venezuela. Son éstos 35 paraguas invertidos cada uno de ellos formados por cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos construidos en formaciones que alternan desniveles para permitir la entrada de luz natural al recinto. Aun cuando de esta edificación no se consiguen planos que den información de quién fue su diseñador pero se logró constatar que su construcción data de 1974-76, hallándose la estructura, para este momento, en buenas condiciones.



Figura 99. Vista interna de los paraguas de paraboloides hiperbólicos en el mercado Libre de alimentos de Maracay.

Fuente: Imágenes del autor.



Figura 100. Vista del exterior del mercado Libre de alimentos de Maracay.

Fuente: Imágenes del autor.

Como muchas instalaciones de expendio de alimentos el Mercado Libre de Maracay es frecuentado a diario por infinidad de consumidores que generan un alto volumen de residuos perecederos y basura sólida que aunado a las ramas y hojas secas de árboles se acumulan en las cubiertas convirtiéndose éstas en extensos depósitos de basura.

Como un antecedente de los paraboloides hiperbólicos a desnivel construido por Candela en el almacén de Río, 1954 (figura 58, pg. 76, capítulo 1) y la fábrica de cemento Tolteca, en la zona industrial Vallejo, D.F., México, en 1954, este mercado libre de Maracay posee las

Capítulo 1. Marco teórico

unidades de paraboloides en desnivel uno respecto a sus adyacentes para generar iluminación y ventilación natural. Claro está por entre tales desniveles también es arrojada la basura por algunos locatarios.

a.3.Plaza del paraboloides en el campus UCV de Maracay

En el campus Maracay de la UCV existen varios prototipos de paraboloides hiperbólicos en forma de paraguas abriendo normal hacia abajo. Uno de ellos –quizás el de mayor relevancia, ya que los otros generan cubiertas para espacios cerrados para actividades docentes– es el ubicado en un espacio abierto conocido por todos los que allí acuden como la Plaza del Paraboloides (figuras 101 y 102).

Con un considerable problema de pandeo en las vigas perimetrales el paraguas se abre con un solo apoyo central. Tal defecto no hace más que denotar por una parte la nobleza del concreto armado al resistir tales deformaciones y por otra la benevolencia de la superficie reglada de doble curvatura que no permite su colapso.

En la figura 102 se observa la enorme deformación horizontal que tiene el paraboloides en su perímetro sin afectar su estabilidad. Este defecto es fácil prevenirlo en el momento de su construcción mediante una contraflecha en los puntales del encofrado.



Figura 101. Plaza del paraboloides en la UCV, Campus Maracay.

Fuente: Imágenes del autor.



Figura 102. Detalle de la deformación perimetral en el paraguas de la Plaza del Paraboloides, UCV-Maracay.

Fuente: imágenes del autor.

a.4. Instalaciones de la Planta de productos Heinz

En la carretera regional del centro sentido Valencia - Caracas, a la altura del Km. 113, se halla la planta de los productos de alimentos Heinz; en cuyo estacionamiento para los empleados se han empleado unas unidades de paraboloides hiperbólicos de concreto armado (figuras 103 y 104) con una particularidad que sólo se ha observado en este sitio: las columnas en vez de ser con sección recta cuadradas de modo uniforme, como las observadas en otros ejemplos descritos en esta investigación, en estas es de sección variable decreciente de arriba hacia abajo.



Figuras 103. Paraboloides hiperbólicos en la Planta de procesamiento de alimentos Heinz, Km. 113 de la autopista regional del centro en Venezuela.

Fuente: Imágenes del autor.



Figura 104. Paraboloides hiperbólicos en el estacionamiento de la Planta de procesamiento de alimentos Heinz.

Fuente: Imágenes del autor.

a.5 Sede de Bomberos Marinos. Ocumare de la Costa - Aragua

La obra arquitectónica de los paraboloides hiperbólicos, en Venezuela, también ha sido objeto de una carencia de preservación de los valores construidos. Por ejemplo, las cubiertas de paraboloides hiperbólicos que son sede de la estación de los Bomberos Marinos en Ocumare de la Costa, en el estado Aragua, por años no recibió mantenimiento de ningún tipo. Incluyendo los impermeabilizantes, que hacía años dejaron de ser aplicados. Los paraboloides hiperbólicos de concreto armado, en forma de paraguas invertidos, se propuso que deberían ser demolidos muy pronto en virtud de los efectos del salitre sobre el acero de refuerzo lo cual

Capítulo 1. Marco teórico

ocasionó el desalojo de los bomberos de su propia sede. No obstante los trabajos de mantenimiento y recuperación lograron su cometido y la estructura fue recuperada en su totalidad (figuras 105 y 106).



Figura 105. Paraboloides hiperbólicos en Ocumare de la Costa, estado Aragua.

Fuente: imágenes del autor.



Figura 106. Paraboloides hiperbólicos ya recuperados en Ocumare de la Costa, estado Aragua.

Fuente: imágenes del autor.

a.6. Paraboloides hiperbólicos en Paracotos – estado Miranda

En la población de Paracotos, estado Miranda, a 34 km de Caracas, se halla una zona industrial donde quedó abandonada una empresa fabricante de artículos de oficina.

Allí se observan paraguas invertidos de paraboloides hiperbólicos en concreto armado que conforman el acceso principal un paraguas aislado (figura 107) y una de las zonas de maquila de la fábrica constituida como un espacio cerrado por paredes pero totalmente cubierta con paraboloides hiperbólicos de paraguas invertidos (figura 108).

Estas estructuras han logrado mantenerse a pesar de que en más de diez años no recibieron mantenimiento ni limpieza y en un período de dos años las edificaciones que conformaban el núcleo industrial han sido invadidas por ocupantes que no han realizado actividades de recuperación planificada de la planta física.



Figura 107. Paraboloides hiperbólicos del acceso de una Planta industrial en abandono ubicada en Paracotos, estado Miranda.

Fuente: imágenes del autor.



Figura 108. Paraboloides hiperbólicos de la Planta industrial de Paracotos, estado Miranda.

Fuente: imágenes del autor.

a.7. Estación de gasolina Los Guayos – estado Carabobo

En la estación de servicios del sector Los Guayos en la Autopista Regional del Centro (km 153 sentido a Caracas) se halla un centro comercial abandonado por años, debido a problemas legales. La totalidad de su cubierta es mediante paraboloides hiperbólicos tipo paraguas invertidos de diferentes luces (figura 109).



Figura 109. Paraboloides hiperbólicos de la estación de servicios de Los Guayos, estado Carabobo.

Fuente: imágenes del autor.

Curiosamente estos paraboloides hiperbólicos varían sus flechas teniendo columnas de baja altura en los paraguas más grandes mientras que en los paraboloides hiperbólicos de menor tamaño las columnas son más esbeltas.

Curiosamente estos paraboloides hiperbólicos varían sus flechas teniendo columnas de baja altura en los paraguas más grandes mientras que en los paraboloides hiperbólicos de menor tamaño las columnas son más esbeltas.



Figura 110. Paraboloides hiperbólicos de diferentes flechas y luces variadas en la estación de servicios de Los Guayos, estado Carabobo.

Fuente: imágenes del autor.

Curiosamente estos paraboloides hiperbólicos varían sus flechas teniendo columnas de baja altura en los paraguas más grandes mientras que en los paraboloides hiperbólicos de menor tamaño las columnas son más esbeltas.

A pesar del tiempo que ha permanecido esta edificación sin ocupación los techos se conservan impecablemente limpios.

Se desconocen datos de los propietarios, del arquitecto que propuso este diseño y no se pudo determinar a su vez la fecha exacta de su construcción. De igual modo ha quedado como una interrogante cuál será el destino de esta edificación que se haya en muy buen estado de conservación en virtud de que el resto de los servicios que se brindan en el predio funcionan a cabalidad.

a.8. Paraboloides hiperbólicos en la Av. Bolívar – Valencia

Esta construcción ubicada en la Av Bolívar de Valencia, estado Carabobo es un reflejo del destino de muchas de las edificaciones erigidas en Venezuela que han empleado cubiertas de paraboloides hiperbólicos de concreto armado. A pesar de su aporte estético poseen la desventaja de servir para edificaciones de un solo nivel; aunado esto a hallarse implantadas en lugares donde el uso del suelo urbano, por razones financieras o justificadas por la expansión

de redes de transporte público como en este caso ocurre que las estaciones del metro de Valencia han conllevado a su desaparición.



Figura 111. Paraboloides hiperbólicos en la Av. Bolívar de Valencia, estado Carabobo.

Fuente: imágenes del autor.

b. Algunos ejemplos de paraboloides hiperbólicos construidos en Caracas

b.1. Almacenes del IPSFA – Paseo Los Precursores

La cubierta de los almacenes del Instituto de Previsión Social de las Fuerzas Armadas, en Caracas (figuras 112 y 113) son la clara manifestación de lo que ocurre con unos sistemas rectangulares de paraguas invertidos de paraboloides hiperbólicos construidos en 1963, y que en el presente están en absoluto buen estado de conservación, pero que los usuarios de estos espacios no logran percibir estando dentro de ellos ya que por la parte interna han sido cubiertos con plafón de cielo raso de yeso.



Figura 112. Paraboloides hiperbólicos de los Almacenes militares del IPSFA en Caracas.

Fuente: imágenes del autor.

No se ha identificado aún al autor del diseño arquitectónico, pero los planos originales del proyecto estructural fueron firmados por el Ing. Omar Sotillo Parilli.

Hasta el presente son los paraboloides hiperbólicos que se han observado con un mejor mantenimiento externo de limpieza e impermeabilización y hace más de diez años se tuvo la oportunidad de observar el concreto armado por la parte inferior encontrándose éste en buen estado, al menos no existían problemas de filtraciones, deposiciones calcáreas propias del concreto armado que surgen con los años o descomposiciones de las capas de recubrimiento de concreto que dejan expuestas a las barras del armado de acero por efectos de la oxidación.

En la actualidad la cubierta de paraboloides hiperbólicos de paraguas invertidos de los almacenes militares del Paseo de Los Precursores aloja las instalaciones del supermercado Central Madeirense y otras dependencias comerciales (figura 113).



Figura 113. Almacenes militares del IPSFA en Caracas. Paraboloides hiperbólicos de concreto armado en forma de paraguas invertidos.

Fuente: imágenes del autor.

Los paraboloides hiperbólicos de los almacenes militares han sido objeto de demolición parcial en el pasado reciente. Tal es el caso del paraboloides hiperbólico en forma de paraguas invertido que daba acceso al conjunto general y otros que ahora albergan las ampliaciones para la construcción de tiendas y cines que antes no existían.

b.2. Concesionario Chevrolet - Los Ruices

Hasta donde se ha logrado observar se podrían calificar a estos paraboloides en forma de paraguas invertidos como los de mayor flecha y los de mayor voladizo que se han construido en Venezuela (figuras 114 y 115).



Figura 114. Cubiertas de paraboloides hiperbólicos de concreto armado del concesionario Chevrolet, Los Ruices, Caracas.

Fuente: imágenes del autor.



Figura 115. Vista exterior de las cubiertas de paraboloides hiperbólicos de concreto armado del concesionario Chevrolet, Los Ruices, Caracas.

Fuente: imágenes del autor.

Un concreto armado que no se halla en muy buenas condiciones, debido a las deposiciones calcáreas, es muy probable que existan problemas de infiltraciones por posible falta de mantenimiento en las capas externas de impermeabilización. A las columnas de los paraboloides hiperbólicos se les ha adicionado una estructura metálica para aprovechar la doble altura que estas presentan y construir un entresquejo de concreto armado.

La cubierta del concesionario Chevrolet ubicada en el ala norte de la Av. Francisco de Miranda constituye un ejemplo de lo que pudiese llegar a ser el destino de este tipo de edificaciones. Debido a lo costoso de los terrenos urbanos en esa zona, sobre una de las avenidas más concurridas de la capital, se le ha anexo a la estructura de concreto armado una armazón metálica para implantar un entresquejo que aloje a las oficinas y áreas de atención a los clientes (figuras 116 y 117). Se desconoce el autor de este diseño.



Figuras 116. Detalles de la estructura del Concesionario Chevrolet en la Av. Francisco de Miranda - Caracas.

Fuente: imágenes del autor.



Figura 117. Detalle del estado de conservación del concreto armado Concesionario Chevrolet en la Av. Francisco de Miranda - Caracas.

Fuente: imágenes del autor.

b.3. La cubierta el Club Táchira – Bello Monte

En distintas oportunidades algunos profesionales de la arquitectura y la ingeniería han planteado que es necesario describir la cubierta del Club Táchira entre los antecedentes de esta investigación. La cubierta de la concha del Club Táchira. Proyecto del Arq. Fruto Vivas y del Ing. español Eduardo Torroja no es un paraboloides hiperbólico. Es un conoide.³⁸. No obstante, en la azotea del edificio administrativo, dentro de las mismas instalaciones del citado Club, sí existen una serie de paraboloides hiperbólicos con forma de paraguas invertidos (figuras 118 y 119).



Figura 118. Vista de la cubierta de paraguas invertidos de paraboloides hiperbólicos del edificio administrativo en las instalaciones del Club Táchira en Caracas.

Fuente: imágenes del autor.

³⁸ Respecto a esta afirmación revisar a VILLANUEVA, M. (2002). El plano de la cubierta y su geometría. Evolución, clasificación y descripción sistemática de la geometría básica de la cubierta de doble curvatura usadas en la arquitectura. Análisis de tres proyectos de última década. Trabajo de ascenso en el escalafón universitario. Facultad de Arquitectura. UCV. Caracas.



Figura 119. Otra vista desde un ángulo diferente de la cubierta de paraguas invertidos de paraboloides hiperbólicos del edificio administrativo en del Club Táchira en Caracas.

Fuente: imágenes del autor.

b.4. Casa habitación del Arq. Julio Coll Rojas – Caracas

En un apacible conjunto residencial del noreste de Caracas el arquitecto Julio Coll Rojas (figura 120) construyó hace cincuenta años la vivienda para su familia. Paraboloides hiperbólicos de concreto armado, en la modalidad de cúpula cuadrangular en forma de paraguas normal, con bordes rectos horizontales sostenidos en el perímetro de las partes bajas de la techumbre por esbeltas columnas de sección cuadrada que le dan apoyo. Cada cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos otorgan a los espacios una sensación piramidal. Mientras que las paredes divisorias con una mínima separación o “junta en frío” de escasos 4 cm máximos permiten independizar a los muros de la cubierta (figuras 121 y 122).



Figura 120. Arq. Julio Coll Rojas (1933-2002).

Fuente: <http://cav.org.ve/v1/cms/eventos-especiales/2.html>



Figura 121. Detalles de la separación "en frío" entre los muros y la cubierta de paraboloides hiperbólicos en la casa Coll.

Fuente: Cortesía de Sr Carlos Coll.



Figura 122. Vista interna de los techos de la casa Coll.

Fuente: imágenes del autor.

Sin muros, en su fase de construcción, la disposición de algunas de las columnas se percibe desordenada, sin responder a una lógica estructural y con escasa separación entre ellas (figura 123). Sin embargo, una vez finalizada la vivienda se observa la intención de disponer las columnas en el perímetro prescindiendo a su vez de vigas horizontales en los bordes rectos de las partes bajas de los paraboloides hiperbólicos (figura 124).



Figura 123. Columnas en la casa Coll.

Fuente: Cortesía del Sr Carlos Coll.



Figura 124. Vista exterior desde los jardines.

Fuente: Cortesía del Sr Carlos Coll.

Quizás fueron las cúpulas cuadrangulares, entre las diferentes tipologías de paraboloides hiperbólicos, los techos más económicos de construir, después de los paraguas invertidos. También los más ligeros debido al bajo espesor de la sección transversal de la losa (4 a 6 cm)

Capítulo 1. Marco teórico

además de ser los que mejor responden ante movimientos telúricos, debido a la facilidad con que pueden ser arriostrados.



Figura 125. Estado de conservación de la casa de la familia Coll para el año 2007 fecha en la que se realizó la primera visita a los fines de esta investigación.

Fuente: imágenes del autor.

La construcción de la casa Coll denota un resultado que pareciera sumamente sencillo; sin embargo, para el momento de su edificación se contaba con una mano de obra preparada, por la fuerza de la costumbre, a responder eficientemente sólo a trabajos de edificación con encofrados, armados de acero y colocación de mampuestos (bloques de arcilla o de concreto) para la fabricación de estructuras rectilíneas y, en algún caso excepcional, alguna superficie curva de una sola curvatura, principalmente estructuras abovedadas.



Figura 126. Techos de paraboloides hiperbólicos de la casa de la familia Coll para el año 2007.

Fuente: imágenes del autor.

No existía para ese momento la experiencia ni la tradición que permitiera comprender las tareas de erigir paraboloides hiperbólicos. No se entendía del todo cómo realizando encofrados y armados lineales rectos que equivalían a las rectas generatrices guiadas por otros elementos

Capítulo 1. Marco teórico

rectos en los perímetros, que eran a su vez las rectas directrices, el resultado final era una superficie curva. No es difícil suponer que las tareas de supervisión y dirección de obra debían ser permanentes sin fallar la prosecución de una manufactura de la cual sólo quien la había concebido era capaz de imaginar; además de la participación de personal obrero que fuese capaz de aceptar ser dirigido para desarrollar tareas que iban muy lejos de las tradiciones constructivas en las que ya hubieran participado.

A simple vista desde el inicio de la construcción de la casa Coll ya aparentaba que resultaría una edificación no tradicional (figura 127). Las tareas de encofrado debieron contar con la participación de carpinteros de obra que entendieran la colocación de piezas de madera verticales que servían como “puntales” del modo tradicional; mientras que en lo horizontal se vieron forzados a entender la geometría de los paraboloides hiperbólicos ya que la doble curvatura se obtenía como resultado de encofrar con elementos rectos horizontales, algo inusitado dentro de la manufactura constructiva venezolana (figura 128).



Figura 127. Encofrados para las cubiertas de paraboloides hiperbólicos.

Fuente: Cortesía del Sr. Carlos Coll.



Figura 128. Los techos de la casa del Arq. Julio Coll Rojas una vez vaciado el concreto armado.

Fuente: Cortesía del Sr. Carlos Coll.

La casa del arquitecto Julio Coll Rojas con sus acabados sencillos pone de manifiesto la sobriedad con la cual pueden responder las superficies albeadas de doble curvatura para generar espacios arquitectónicos bastante agradables que muestran el confort y, algo que es muy importante, la conservación por muchos años de un inmueble, cuyo período de vida útil se puede ver alargado, gracias a una meticulosa técnica constructiva aunado a la inclinación de las unidades de paraboloides hiperbólicos cuando se comparan con otras viviendas de losa plana que requieren de mayores tareas de mantenimiento (figuras 129 a la 132).



Figura 129. Casa Coll vista exterior.
Fuente: Cortesía del Sr. Carlos Coll.



Figura 130. Vista del comedor, de hace algunas décadas.
Fuente: Cortesía del Sr. Carlos Coll.



Figura 131. Espacios internos de la casa Coll y su interconexión con los espacios externos dentro del mismo predio.
Fuente: Cortesía del Sr. Carlos Coll.



Figura 132. Espacios externos de la casa Coll y su interconexión con los espacios internos dentro del mismo predio.
Fuente: Cortesía del Sr. Carlos Coll.

c. La obra del arquitecto Álvaro Coto Asenjo solucionada con paraboloides hiperbólicos en Venezuela

Según Guido Bermúdez, los arquitectos Álvaro Coto Asenjo (figura 133), venezolano de origen mexicano y José Gabriel Loperena fundaron en Venezuela, para finales de los años 50, la empresa «*Cubiertas Ala de Venezuela S.A.*» filial y representante de los proyectos y contratos del ingeniero y arquitecto español Félix Candela (Bermúdez, 1993:354). Posteriormente ambos arquitectos registraron la empresa «*Coto & Loperena*» y finalmente, al romperse la sociedad, Coto Asenjo constituye otras dos firmas comerciales: «*Constructora Orión*», y «*Cubiertas Orientales*». Estas realizaron un buen número de diseños y construcciones de estructuras de paraboloides hiperbólicos de concreto armado en Venezuela; alcanzando un mayor auge durante los años 1960 hasta la década de los años 80, en la cual decayó casi por completo la edificación de este tipo de techos.



Figura 133. Álvaro Coto Asenjo (1928 - 2013).
Fuente: Cortesía de Arq.^a Carolina Coto.

En Venezuela básicamente se construyeron paraboloides hiperbólicos, en concreto armado, del tipo de paraguas invertidos para sistemas de cubiertas. Algunas experiencias específicas se resolvieron bajo otras modalidades y precisamente Coto Asenjo propuso otros materiales como la fibra de vidrio forrada en resinas plásticas.

A continuación serán analizados algunos casos de diseño, edificaciones y patentes solucionadas con paraboloides hiperbólicos que fueron propuestos por el arquitecto Álvaro Coto en Caracas y los que planteó en la provincia venezolana. Estos últimos incluyen las propuestas innovadoras de estanques y silos de uso agrícola. Se presenta a su vez una de las

patentes desarrolladas y registradas por él relacionada con paraboloides hiperbólicos que se construirían con fibra de vidrio.

c.1. Estaciones de gasolina en Caracas

A finales de la década de los años 50 y durante los 70 se construyeron en Caracas, al igual que en algunas otras ciudades de Venezuela, estaciones de gasolina³⁹ que emplearon cubiertas de paraboloides hiperbólicos construidos en concreto armado para el área de los surtidores del combustible (figura 134). Hoy son pocas las que aun funcionan perdurando algunas a la espera para ser demolidas.



Figura 134. Estación de gasolina Av. Río de Janeiro. Caracas.
Fuente: Fotografía del Autor.

En la Estación de Gasolina de Coche, en Caracas (figuras 135 hasta la 138) actualmente sólo se hallan en pie algunos de los paraguas invertidos de paraboloides hiperbólicos del área de servicio eléctrico automotriz, y los de las oficinas administrativas (figura137). El resto de estos techos ubicados en la zona de surtidores de combustible fueron sustituidos, posteriormente a su demolición, por estructuras metálicas ligeras (figura138).

³⁹ No se consiguen planos, cálculos, ni memorias descriptivas que demuestren con total certeza que estos paraguas de paraboloides hiperbólicos de las estaciones de gasolinas aquí relacionadas fueran diseñados por el Arq. Coto Asenjo. Sin embargo, nos fue asegurado que si eran proyectos de su autoría, en conversación personal con la Arq. " Alicia de Coto (31/octubre/2010).



Figura 135. Área de surtidores en la estación de gasolina de Coche, Caracas.

Fuente: imágenes del Autor.



Figura 136. Conjunto de cubiertas de paraboloides hiperbólicos en forma de paraguas invertidos ubicados en la estación de gasolina de Coche, Caracas los cuales fueron demolidos en su totalidad.

Fuente: imágenes del Autor.



Figura 137. Paraguas invertidos de paraboloides hiperbólicos del área de servicio eléctrico automotriz, y de las oficinas de la Estación de Gasolina de Coche en Caracas.

Fuente: Fotografías del Autor.



Figura 138. Estructuras metálicas ligeras con las cuales fueron sustituidos los paraboloides de concreto armado posterior a su demolición.

Fuente: Fotografías del Autor.

c.2. Centro comercial El Parque – Cine Canaima

Estuvo ubicado en la Av. Francisco de Miranda Norte, sector Los Palos Grandes, hasta su demolición con explosivos a finales de la década de los años 80 (figura 139) esta obra cedió paso a la construcción de una torre de oficinas de mediana altura que está enclavada con igual nombre en el mismo predio (figura 140).



Figura 139. Centro comercial El Parque. Los Palos Grandes, Caracas.
Fuente: <http://sieim2007.blogspot.com/>



Figura 140. Torre Canaima.
Fuente: <http://sp8.fotolog.com>

La Arq.^a Carolina Coto (hija del arquitecto Coto Asenjo) informó textualmente:

“El cine Canaima, el centro comercial y el Pin 5 (bowling) fue un proyecto que mi papá hizo junto a José Gabriel Loperena (Coto y Loperena Arquitectos). Luego del incendio que en los 80's destruyó gran parte de la mampostería (y sorprendentemente los paraboloides sobrevivieron), los dueños originales vendieron los "restos" a una constructora que demolió (dinamitó) el cine, cubrió el resto de los paraboloides y construyó la torre de oficinas que hoy existe.”

(C. Coto, comunicación personal, correo-e noviembre 29, 2010)

El predio donde se hallaba ubicado el Centro Comercial El Parque sumado a los altos costos que arrojaría su posible recuperación conllevaron a desestimar el buen estado de conservación en el cual quedaron las cubiertas y el resto de la estructura (figuras 141, 142 y 143). Las fotografías inéditas captadas por el arquitecto Álvaro Coto Asenjo, permiten observar las condiciones de los paraboloides hiperbólicos de concreto armado después del incendio devastador que acabó con su funcionamiento y que conllevaría a su demolición total.

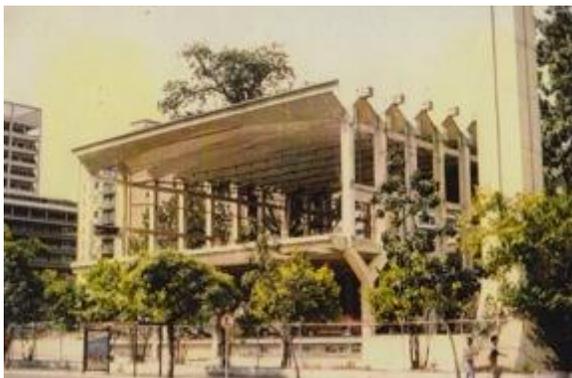


Figura 141. Condiciones de los paraboloides hiperbólicos de concreto armado después del incendio devastador que acabó con su funcionamiento y que conllevaría a su demolición



Figura 142. Cubiertas de paraboloides hiperbólicos de Centro Comercial Canaima se observan el logotipo de Automerados Cada y al fondo el edificio Parque Cristal.

Fuente: Cortesía de Arq.^a Carolina Coto.



Figura 143. Fotografía inédita captada por el arquitecto Álvaro Coto Asenjo, e se observan las condiciones de los paraboloides hiperbólicos de concreto armado del Centro Comercial Canaima, poco tiempo antes de la implosión.

Fuente: Cortesía de Arq.^a Carolina Coto.

c.3. Centro comercial 19 de Abril en Maracay

De más reciente edificación la sede del centro comercial 19 de abril, en la capital aragüeña, posee su cubierta con modelos de paraboloides hiperbólicos en concreto armado (figuras 144 y 145).

Estos paraboloides hiperbólicos, por ser de un centro comercial privado, se hallan en un buen nivel de conservación.

Sólo podría mencionarse que la pintura no los favorece pero estos son los colores representativos del centro comercial como tal y que el concreto a la vista quizás hubiese dejado expuestos defectos del encofrado por lo que se encuentran frisados.



Figura 144. Centro comercial 19 de Abril en Maracay.
Fuente: imágenes del autor.



Figura 145. Centro comercial 19 de Abril en Maracay.
Fuente: imágenes del autor.

c.4. Terminal de pasajeros de San Cristóbal

La Terminal de pasajeros de San Cristóbal, estado Táchira, es un ejemplo superior de empleo de paraboloides hiperbólicos en instalaciones para el transporte público en la provincia venezolana (figuras 146 hasta la 153). Limpieza en las instalaciones, condición que se refleja en las muy buenas condiciones en las que se halla el concreto armado de las superficies.

Los detalles de iluminación natural son resueltos mediante aberturas en las cúspides de los paraboloides donde se unen cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos. Mientras que en la parte interna cuelgan difusores metálicos con persianas también con forma de paraboloides hiperbólicos que permiten el paso de la luz solar diseminadamente (figura 146).

En la parte interna de la Terminal de autobuses de San Cristóbal se observan el buen nivel de conservación de la estructura y el gusto estético en la disposición de lámparas y diseminadores solares (figura 146). Mientras que las áreas exteriores denotan un contraste con

lo descuidado del entorno y la sobriedad de las cubiertas de paraboloides hiperbólicos que poseen un bajo espesor de sus losas aproximadamente menor de 5 cm (figura 147).



Figura 146. Vista interna de las cubiertas de paraboloides hiperbólicos de la terminal de pasajeros de San Cristóbal.

Fuente: imágenes del autor.



Figura 147. Vista interna de las cubiertas de paraboloides hiperbólicos de la terminal de pasajeros de San Cristóbal.

Fuente: imágenes del autor.

Estos paraboloides hiperbólicos desarrollan una doble curvatura mediante una flecha alta, un bajo espesor de losa y un volado grande (figura 147 y 148) aunque no tanto como el observado en el concesionario Chevrolet de Los Ruices, en Caracas, que ya fue analizado.



Figura 148. Vista de los paraguas invertidos de menores dimensiones que los restantes que cubren el andén de llegada de las unidades de transporte público.

Fuente: imágenes del autor.

Al observar las condiciones en que se encuentra el concreto armado por la parte inferior (figuras 149 y 150) se perciben algunas deposiciones calcáreas y pocos problemas de

infiltración de aguas pluviales. En general el concreto armado refleja una buena técnica de dosificación y un vaciado uniforme.



Figura 149. Condiciones y apariencia del concreto armado en el exterior de las cubiertas de la Terminal de pasajeros de San Cristóbal.

Fuente: imágenes del autor.



Figura 150. Vistas del concreto armado en el interior de las cubiertas de la Terminal de pasajeros de San Cristóbal.

Fuente: imágenes del autor.

c.5. Terminal de autobuses de Barinas

Si la Terminal de autobuses de San Cristóbal ha sido descrita aquí como un buen ejemplo de la aplicación de paraboloides hiperbólicos como solución de un sistema de cubiertas para instalaciones de transporte público extraurbano, de la Terminal de la ciudad de Barinas no se puede decir nada similar (figura 151)



Figura 151. Vista exterior de la cubierta de paraboloides hiperbólicos de la Terminal de autobuses foráneos de Barinas.

Fuente: imágenes del autor.

Y nada de lo que allí se observa puede atribuirse al sistema de paraguas invertidos de concreto armado. Quizás esto sea el paliativo visual que permite que la anarquía reinante no se convierta en un caos.

La Terminal de autobuses de Barinas se halla enclavada en un excelente entorno natural. Mas, sin embargo, no logra adaptarse –a pesar de las altas características estéticas de los paraboloides hiperbólicos– al medio ambiente que la circunda.

Obra con marcados contrastes en cuanto a su calidad constructiva de los paraboloides hiperbólicos en los cuales se observa por una parte el bajo nivel de mantenimiento que no resuelve los problemas de infiltraciones, al obstruirse los bajantes de aguas pluviales en los apoyos centrales. En ese mismo apoyo central (figura 152) se nota como el nivel del concreto de la columna no alcanzó la altura requerida y fue nivelada mediante un relleno a destiempo sin corregir el desperfecto. Y por otra (figura 153) una excelente calidad, tal y como si la obra hubiese sido ejecutada por diferentes contratistas.



Figura 152. Detalles de mala terminación en el concreto armado de la Terminal de Barinas.
Fuente: imágenes del autor.



Figura 153. Detalles de buenas terminaciones en el concreto de la Terminal de Barinas.
Fuente: imágenes del autor.

El concreto armado de estas instalaciones no es de la mejor calidad al menos visual. Se perciben fácilmente malas técnicas de encofrado y problemas de vaciados a destiempo entre las columnas y las superficies en si.

Capítulo 1. Marco teórico

La Terminal de pasajeros de Barinas coincidiendo con el diseño de la Terminal de San Cristóbal también tiene andenes techados con paraguas de paraboloides hiperbólicos (figura 154).



Figura 154. Andenes de la Terminal de Barinas.
Fuente: imágenes del autor.

Los andenes de paraboloides hiperbólicos en concreto armado de la Terminal de pasajeros de Barinas han sido empleados para apoyar una improvisada estructura metálica a dos aguas de perfiles livianos y lámina de zinc en uno de los extremos sobre columnas metálicas y en el otro extremo mediante dos perfiles metálicos a la cubierta en voladizo de las unidades de paraboloides hiperbólicos (figura 155).



Figura 155. Techumbre metálica improvisada a la que le sirve de apoyo la cubierta de concreto armado de los paraboloides hiperbólicos.

Fuente: imágenes del autor.

c.6. Sede del Colegio de Médicos del Zulia

EL Colegio de Médicos del estado Zulia (Maracaibo, 1964, figura 156) fue un proyecto del Arq. Casas Armengol y la solución estructural de los paraboloides hiperbólicos quedó a cargo del Arq. Coto Asenjo (C. Coto, comunicación personal, correo-e, noviembre, 30, 2010).



Figura 156. Colegio de Médicos del estado Zulia.
Fuente: www.comezu.com/instalaciones.html

Esta propuesta para la sede del Colegio de Médicos (figura 157) muestra una de las cubiertas de paraboloides hiperbólicos con mayor audacia geométrica y estructural que se han construido en Venezuela.

Además de la ubicación de un conjunto de paraguas invertidos el auditorio en si es una cubierta simétrica de ocho unidades de paraboloides hiperbólicos sobre cuatro apoyos oblicuos (figura 158).

En esta obra del Colegio de Médicos Coto Asenjo explota con originalidad la inclinación de las columnas que más que apoyos semejan la continuidad de los pliegues de la misma cubierta hacia el piso. La edificación se halla hoy día en excelentes condiciones de mantenimiento (figura157).



Figura 157. Cubierta del Colegio de Médicos del Zulia.
Fuente: www.comezu.com/instalaciones.



Figura 158. Parabolooides hiperbólicos del Colegio de Médicos del Zulia.
Fuente: Archivo del Arq. Coto Asenjo. Cortesía de Arq^a Carolina Coto.

c.7. Planta ensambladora de Volkswagen en Palma Sola. Diseño del Arq. Dirk Bornhorst, Proyecto y ejecución de los paraboloides hiperbólicos: Álvaro Coto en colaboración con Félix Candela

Para 1963 los Arquitectos Dirk Bornhorst y Pedro Neuberger proyectaron la Planta de ensamblaje de la Volkswagen en Palma Sola - Morón, estado Carabobo, la cual contó con la propuesta para el proyecto y ejecución de los paraboloides hiperbólicos de Álvaro Coto en colaboración con Félix Candela (figura 159).



Figura 159. Nave central Planta ensambladora Volkswagen.
Fuente: www.automotriz.net/articulos/entr-kozma-mayo2002.html

La nave de montaje (figuras 160 y 161) fue resuelta de acuerdo con el siguiente criterio:

“Después de estudiar distintos tipos de estructuras industriales corrientes, se llegó a la conclusión que los paraboloides hiperbólicos y estructuras de hormigón en forma de hongo con una columna central, por cuyo interior van las bajantes de aguas pluviales, era la solución favorable.” (Bornhorst mencionado por Vicente, 2001:11.).



Figura 160. Vista de conjunto de la Planta ensambladora Volkswagen en Palma Sola, Morón, estado Carabobo.

Fuente:

<http://www.dirkbornhorst.com/Cont3/obra5.htm>.

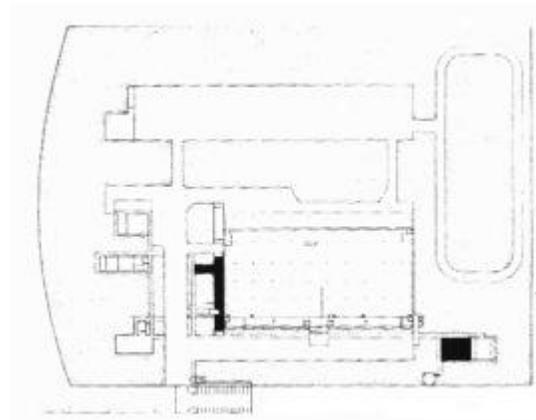


Figura 161. Plano de arquitectura de la Planta ensambladora Volkswagen.

Fuente: Extraída de Revista DADA (mayo-agosto, 2001).

Adicionalmente se describe que

“La particularidad del diseño de Bornhorst estriba en la inclinación dada los paraboloides. (...) [figura 162]

Los paraboloides se han inclinado ligeramente hacia el norte para obtener una ventilación e iluminación natural tipo diente de sierra controlada por ventanales de plástico translúcido y aluminio.”(Bornhorst mencionado por Vicente, 2001:11.).

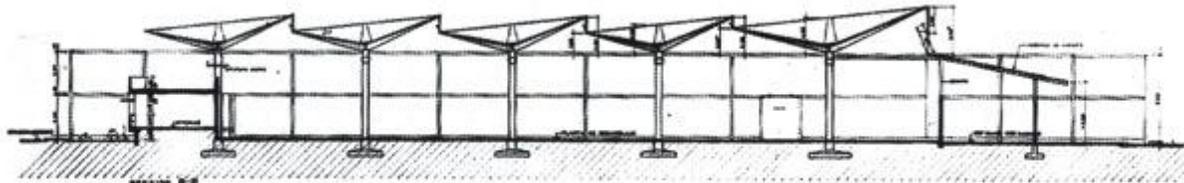


Figura 162. Corte estructural de la propuesta de paraboloides hiperbólicos en forma de paraguas invertidos desarrollada por Coto Asenjo para la Planta ensambladora Volkswagen.

Fuente: Extraída de Revista DADA (mayo-agosto, 2001).

Los paraguas invertidos han quedado como muestra fehaciente de un proyecto arquitectónico que supo conjugar los valores estéticos de la edificación con el uso de una tecnología constructiva que adaptó necesidades financieras y de producción industrial mediante el aprovechamiento espacial a cubierto resolviendo necesidades de ventilación e iluminación natural



Figura 163. Vista de la propuesta arquitectónica realizada por Dirsk Borhsnot para la Planta ensambladora Volkswagen.
Fuente: <http://ebay-venezuela.tumblr.com/post/36118974161/000li-planta-de-ensamblaje-volkswagen-palma>

A pesar de la importancia que tuvo la planta ensambladora de la Volkswagen de Palma Sola, para la industria automotriz venezolana, la edificación fue abandonada sin que hasta el presente se perciban acciones para su recuperación.

c.8. Propuestas innovadoras de Álvaro Coto para construcciones de Silos agroindustriales con paraboloides hiperbólicos

La empresa «Cubiertas Ala de Venezuela» planteó soluciones para generar edificaciones agroindustriales. Los primeros silos fueron concebidos para las unidades de almacenamientos de baja capacidad requeridos por Fedegro Araure y los silos de Fedegro Turen, ambos en el estado Portuguesa de Venezuela.

Una tipología de silos agroindustriales de gran capacidad, ubicados en la ciudad de Araure, estado Portuguesa, fueron diseñados en los años 80-90 por el Arq. Coto Asenjo para «Arquitectura Orión», otra de las empresas fundadas por él (figura 164).

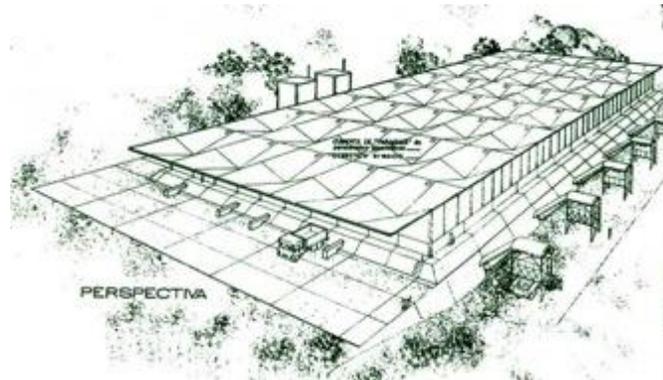


Figura 164. Vista de conjunto de la propuesta de silos.
 Fuente: Dibujos del Arq. Coto Asenjo. Cortesía de Sra. Alicia de Coto.

La propuesta se caracterizaba por una estructura de 40 paraboloides hiperbólicos de cuatro unidades de paraguas invertidos de 12 x 12 metros, para disponer 25 silos semienterrados, los cuales podían ser visitables por operarios facilitando su limpieza y disponían de sistemas de alimentación y descarga a cubierto mediante camiones. Esto se lograba gracias a voladizos perimetrales de la misma estructura de concreto reforzado (figura 165).

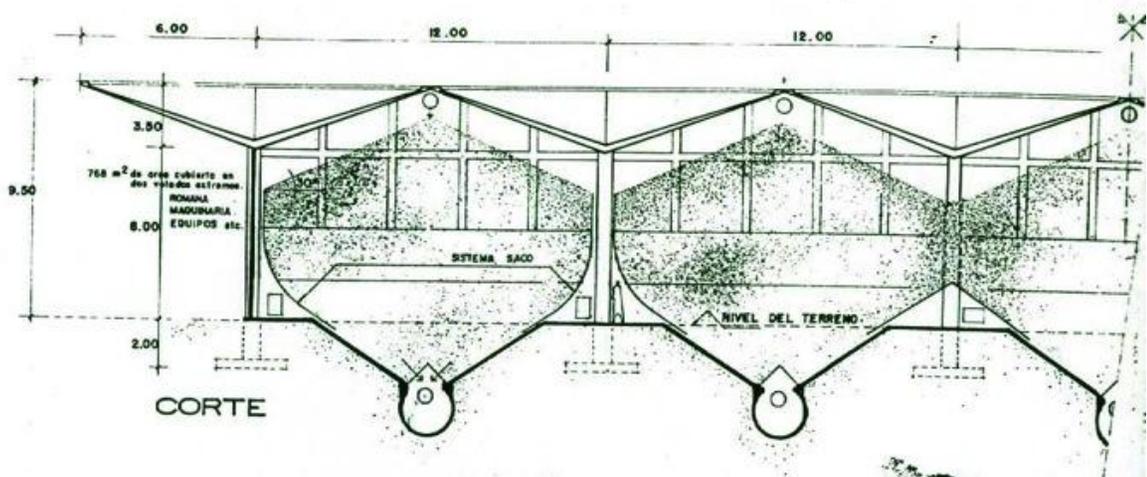


Figura 165. Detalle en corte de los silos agroindustriales para 20 mil TM de cereales diseñados por Coto con estructuras de paraboloides hiperbólicos.
 Fuente: Archivo de trabajos del Arq. Coto Asenjo. Cortesía de Sra. Alicia de Coto.

c.9. Estanques para agua potable de gran capacidad

Otra propuesta innovadora desarrollada por el arquitecto Álvaro Coto, para «*Cubiertas Orientales, C.A.*»; la última de las empresas registradas por él en la Isla de Margarita, estado Nueva Esparta, permitió, a través del dominio geométrico y estructural de los paraboloides hiperbólicos, generar estanques de agua potable de capacidad superior a los 500 mil litros que bien podían desplantarse semienterrados o elevados sobre el nivel del terreno (figura 166) según como fuesen las condiciones topográficas.

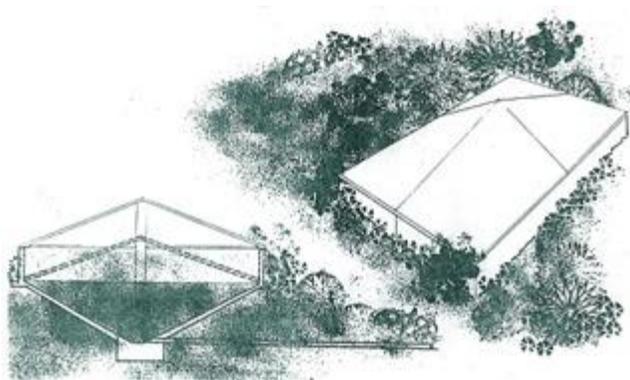


Figura 166. Estanques de agua potable.

Fuente: Dibujos inéditos del Arq. Coto Asenjo. Cortesía de Sra. Alicia de Coto.

La carencia de agua potable, en muchos meses del año, en gran parte del territorio nacional venezolano conllevó a que la idea original de la propuesta convirtiera las mismas cubiertas del paraboloides hiperbólico, además de la tapa del recinto, en superficie de captación de aguas de lluvia (figuras 167, 168 y 169).

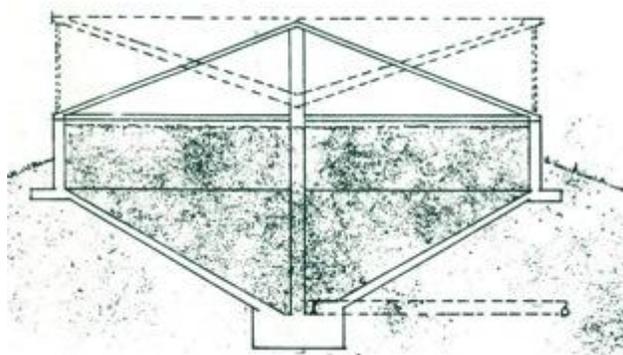


Figura 167. Detalle del corte estructural del estanque para depósito de agua.

Fuente: Archivo de trabajos del Arq. Coto Asenjo. Cortesía de Sra. Alicia de Coto.

Capítulo 1. Marco teórico

Las características geométricas de los paraboloides hiperbólicos empleados como paredes, pisos y techos de los estanques de doble curvatura para más de 500 mil lt, diseñados por Coto Asenjo (figuras 168 y 169) eran determinantes para lograr condiciones favorables tales como un bajo espesor del concreto armado, poco movimiento de tierras y rapidez de ejecución, lo que representaba una eficaz solución de almacenamiento en comparación con las soluciones de depósitos esféricos y cilíndricos que aún se emplean.

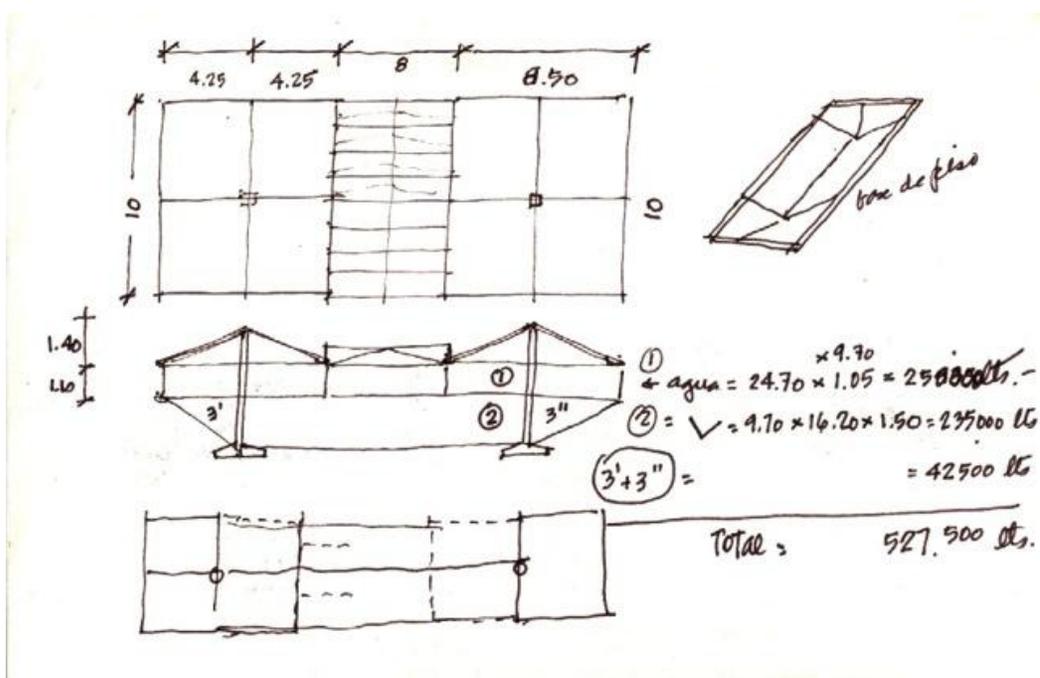
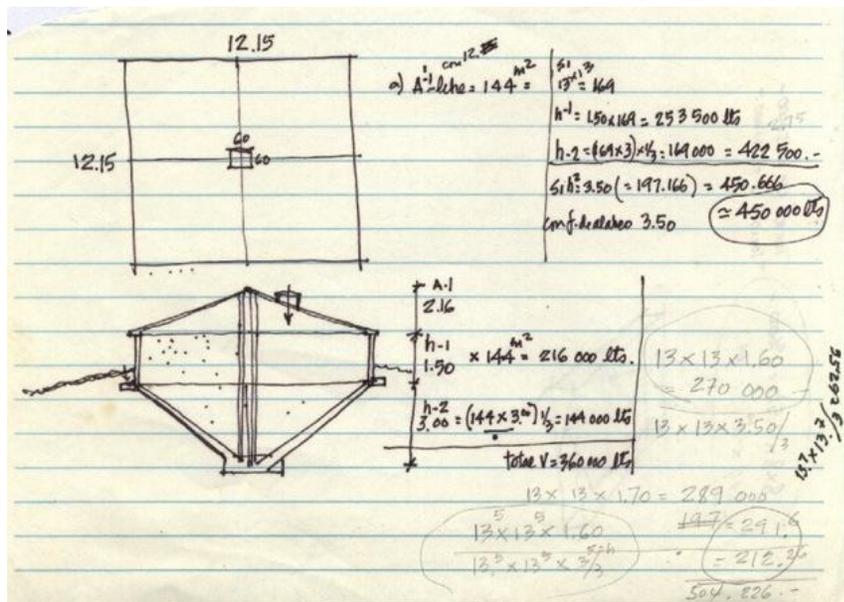


Figura 168. Croquis realizados por Coto Asenjo para concebir la idea original y cálculo del proyecto de los estanques de agua potable con solución estructural de paraboloides hiperbólicos.

Fuente: Archivo de trabajos del Arq. Álvaro Coto Asenjo. Cortesía de Sra. Alicia de Coto.



Figuras 169. Otra versión de los croquis para estanques individuales realizada por Coto Asenjo.

Fuente: Archivo de trabajos del Arq. Álvaro Coto Asenjo. Cortesía de Sra. Alicia de Coto.

c.10. Patente de Álvaro Coto con propuestas inéditas para generar paraboloides hiperbólicos con fibra de vidrio y resinas plásticas

Álvaro Coto, como investigador independiente, formuló innovaciones estructurales y aplicaciones de nuevas técnicas y materiales constructivos. Fue así como para el año 1994 realizó la solicitud para el registro de una patente con una propuesta inédita para fabricar cubiertas de paraboloides hiperbólicos (figura 170) que respondía a la siguiente denominación:

“Pieza reversible, prefabricada en forma de dos sectores de paraboloides hiperbólicos, usable en repetición ensamblada en la ejecución de cubiertas.”

En la memoria preliminar de la solicitud de registro de la patente No 1994-00417 el sistema estructural (figura 170) desarrollado por Coto Asenjo se mencionan las siguientes características:

“...un elemento formado por una superficie desarrollada en doble curvatura anticlástica en forma de un paralelogramo alabeado en dimensiones de 2.5 mts por 2.5 mts perfectamente cuadradas en proyección horizontal para efecto de ensamblaje, y con una flecha de alabeo de 0.80 mts. La superficie estará formada por una capa de un espesor máximo de 1.5 mm, reforzada con bordes de 12 cms de altura por 8 mm de espesor.”

(A. Coto, comunicación escrita enviada a la empresa «Fibro Productos CCB.», noviembre 11, 1994, requiriendo el presupuesto para la fabricación de los prototipos)

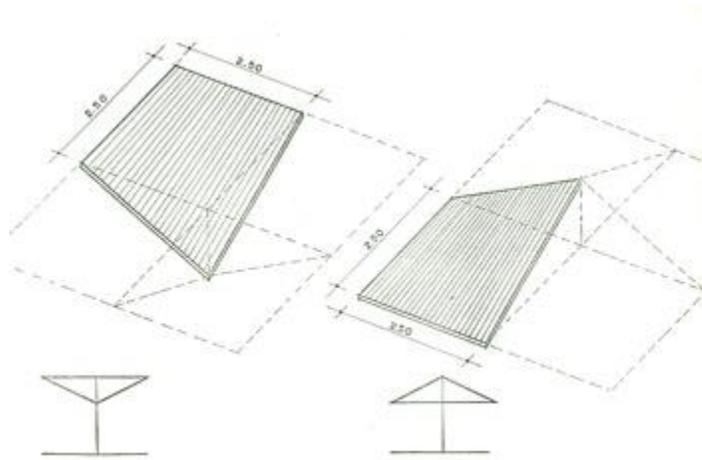


Figura 170. Modalidades de cubiertas propuestas por Coto Asenjo para ser fabricadas en plástico.

Fuente: Archivo de trabajos del Arq. Álvaro Coto Asenjo. Cortesía de Sra. Alicia de Coto.

Como detalle interesante que denota el nivel tecnológico de esta innovación se halla el sistema de ensamblaje de las piezas de paraboloides hiperbólicos con el poste estructural (figura 171 y 172) lo cual es descrito así:

“En una de las esquinas la pieza llevará un corte en sección de un cuarto de círculo para formar un círculo completo formado por 4 de las piezas alrededor de un tubo de hierro de tres pulgadas (3”), este corte deberá tener una prolongación de 13 cms angulada, en el caso de tener que colocar bridas, abrazaderas, etc., si se unieran unas con otras.”

(A. Coto, s/f. descripción del modelo de sujeción para la solicitud de patente No 1994-00417, información suministrada por la Sra. Alicia de Coto)

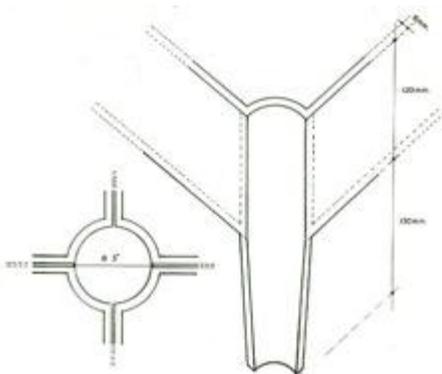


Figura 171. Detalles del sistema de ensamblado para las cubiertas de paraboloides hiperbólicos patentado por el arquitecto Álvaro Coto, los cuales serían fabricados en capas de resina y fibra de vidrio.

Fuente: Archivo de trabajos del Arq. Álvaro Coto Asenjo. Cortesía de Sra. Alicia de Coto.

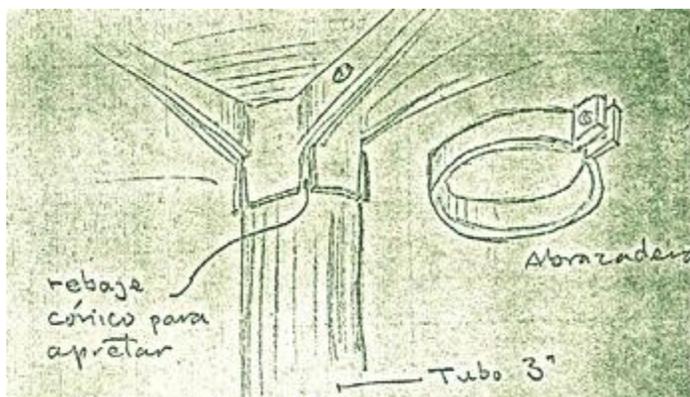


Figura 172. Boceto tomado de los apuntes originales que permitieron al Arq. Coto concebir esta innovación.
Fuente: Archivo de trabajos del Arq. Álvaro Coto Asenjo. Cortesía de Sra. Alicia de Coto.

1.5. Conclusiones del capítulo 1

Los conocimientos geométricos que determinan el comportamiento estable de las superficies de doble curvatura se originaron en el período Helénico. Entre los científicos que realizaron los mayores aportes y que sus postulados deben ser considerados para esta investigación estarían los estudios de Apolonio, respecto a los principios que determinan la representación de las cónicas, los estudios de geometría de Descartes y Fermat, el estudio del Cálculo Infinitesimal de Newton y Leibniz, los aportes de Monge y Poncelet para los campos de la Geometría Descriptiva y la Geometría Proyectiva y, finalmente, el gran salto en la aplicación de software computacionales para obtener la modelación gráfica de las superficies con un mínimo margen de error. De tal análisis se puede concluir que 2500 años de evolución de los conocimientos matemáticos conllevaron a la determinación de los principios geométricos que en el siglo XX la actualidad han servido

Entre los antecedentes que han sido estudiados en esta investigación destacan los ejemplos más emblemáticos de construcciones de superficies de parábolas invertidas (alabeadas de doble curvatura) realizados fundamentalmente bajo la obra del Arq. Félix Candela. Las estructuras de concreto armado que él logró resolver marcaron un hito que permitió la evolución tecnológica en cuanto a las aplicaciones del concreto armado como material moldeable. Las técnicas de encofrados y armados de acero en estructuras así como también las modificaciones a todas las normativas existentes para la década de los años 50 y 60, lograron, a partir de su obra, un antes y un después debido a las aplicaciones de este material realizadas

por Candela, que –sin llegar a los límites de condicionantes físico-mecánicas de un ferrocemento– permitieron disminuir los espesores de losa a 4 cm hasta los 1.5 cm aproximadamente conllevando esto a una considerable reducción de los recubrimientos del acero de refuerzo. No hubo norma, reglamento, ficha técnica de aplicaciones de concreto y acero de refuerzo en las edificaciones que antes de ser elaborada y publicada no fuese consultada y contara en cierta medida con la aprobación del arquitecto Félix Candela.

Las construcciones de paraboloides hiperbólicos como solución de sistemas de cubiertas han logrado demostrar altos niveles de estabilidad estructural. Se ha sostenido a lo largo de las indagaciones de los antecedentes en todo el mundo de estas aplicaciones constructivas que no se conoce un solo caso de colapso en los ejemplos edificados.

Se mencionarán dos ejemplos:

El terremoto de la ciudad de México del año de 1985, no sólo permitió dar a conocer el alto grado de vulnerabilidad al cual están expuestas las edificaciones, debido a la existencia de un subsuelo con baja capacidad de resistencia que muchos han dado en describir como «gelatinoso»; sino que además dejó expuesta a los ojos del mundo muchas experiencias de malas prácticas constructivas.

Entre algunas de las medidas extraordinarias dictadas por las comisiones encargadas de dictar las normas de emergencia para el reforzamiento y demolición de las construcciones existentes, que habían sido afectadas por el desastre telúrico, se incluyeron la implosión de los multifamiliares de la Unidad Nonoalco y de la unidad Benito Juárez que eran también edificios residenciales. Otros edificios fueron sometidos totalmente a demoliciones (156 en total) y otros tantos a demoliciones parciales de más de la mitad de los niveles superiores; además de la demolición total con explosivos del Centro Médico de Especialidades Benito Juárez, y otras edificaciones de suma importancia. Como característica esencial de estas construcciones todas ellas contaban con elementos estructurales de concreto armado y armados de acero de refuerzo de grandes dimensiones.

No obstante, no se dictó ninguna medida, hasta donde se conoce, que haya implicado siquiera reparaciones, o demolición por colapso, de alguna de las cubiertas de paraboloides hiperbólicos construidas por Candela y por otros arquitectos e ingenieros que siguieron su

línea de diseño y cálculo de estructuras -empleando mínimos espesores de concreto reforzado- ubicadas aún en zonas adyacentes a las de mayor desastre.

Aún más, en todos los paraboloides construidos por Candela se realizaron todos los encofrados totalmente con madera, pero los primeros fueron vaciados a mano y no dispusieron de equipos de bombeo ni concretos premezclados, no se aplicaron aditivos y en muchas ni siquiera usaron impermeabilizaciones de cualquier tipo. Ello se convirtió en una práctica a seguir, durante años, por muchos constructores.

Otro ejemplo más reciente lo constituyen "...los 8 hypar de hormigón armado que cubren las tribunas en el Estadio Marino de Miami, construido alrededor de 1960, soportaron el huracán Andrews, en 1992 y aprobaron una rigurosa inspección estructural posterior que incluyó muestras del hormigón y de su armadura."⁴⁰ El huracán Andrews en algunas zonas provocó la pérdida de un 75% de las edificaciones que encontró a su paso, lo que quiere decir que colapsó casi todo: viviendas de veraneo, conjuntos residenciales, mobiliario urbano y ornato paisajístico.

Es difícil pero no cuesta mucho sostener esta afirmación ya que hasta donde ha sido investigado es la desidia, como fenómeno cultural de los pueblos, lo que ha prevalecido para que una estructura de un paraboloide hiperbólico de concreto armado deba ser demolida. Tal es el caso de una de las obras del Arq. Eduardo Catalano. Su propia vivienda.

La casa Raleigh, del Arq. Catalano, en Carolina del Norte, debió ser demolida, tras años de completo abandono, en la primavera del año 2001.

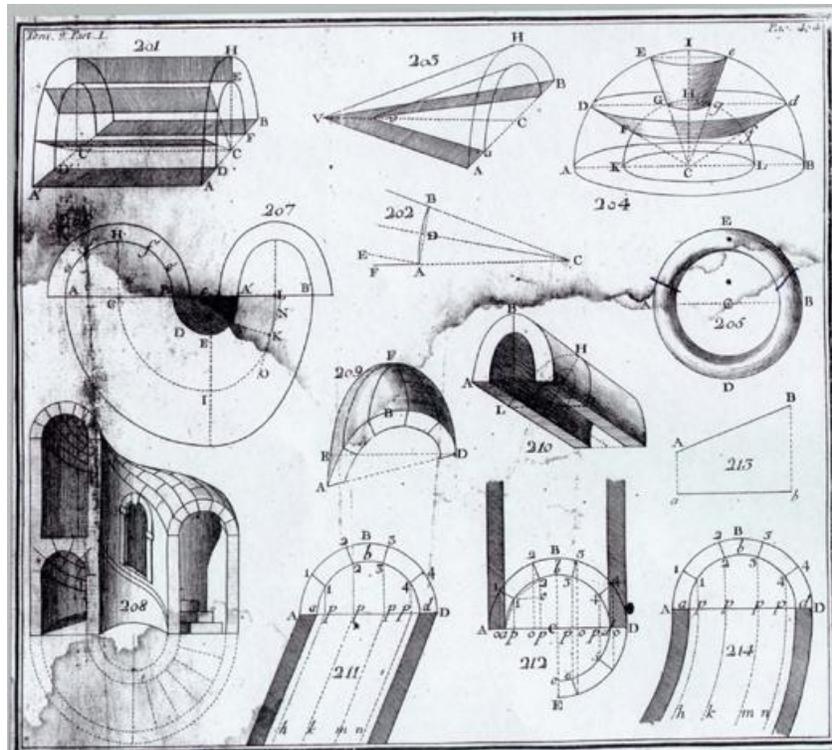
La obra arquitectónica de los paraboloides hiperbólicos, en Venezuela, también ha sido objeto de una carencia de preservación de los valores construidos. Por ejemplo, las cubiertas de paraboloide hiperbólicos que son sede de la estación de los Bomberos Marinos en Ocumare de la Costa, en el estado Aragua, por años no recibió mantenimiento de ningún tipo. Incluyendo los impermeabilizantes, que durante años dejaron de ser aplicados. Pese a ello los paraboloides hiperbólicos de concreto armado, en forma de paraguas invertidos, fueron recuperados en 2008 y permitieron que fueran ocupados de nuevo como sede de los bomberos.

⁴⁰ http://www.todoarquitectura.com/v2/foros/topic.asp?Topic_ID=560

Otro caso es el de los techos de las estaciones de gasolina en Caracas. Estos en su mayoría fueron demolidos para sustituirlos por perfiles livianos de acero y lámina metálica.

Esta investigación ha servido para corroborar que pesos muertos superiores constituidos por sólidos como basura, escombros, objetos metálicos, vegetación, restos de impermeabilizaciones, cuadrillas de trabajadores, todo a la vez, no ha sido capaz ni tan siquiera de lograr una deformación momentánea.

CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO: ARCOS, BÓVEDAS, CÚPULAS Y OTRAS SUPERFICIES



CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO: ARCOS, BÓVEDAS, CÚPULAS Y OTRAS SUPERFICIES. UN ANÁLISIS RETROSPECTIVO DE SUS APLICACIONES EN LAS ACTIVIDADES CONSTRUCTIVAS DE ACUERDO A SU CLASIFICACIÓN GEOMÉTRICA

"La arquitectura es la voluntad de la época traducida a espacio"
Mies Van der Rohe.

2.0. Introducción

Se presenta un análisis respecto a los diferentes sistemas constructivos que emplean elementos estructurales curvilíneos (exceptuando a las vigas curvas) sometidos a esfuerzos de flexocompresión. Desde el arco semicircular -erróneamente llamado de *medio punto*- de los constructores romanos, se inicia una recopilación de la información de las distintas innovaciones y de la influencia de la línea curva, para generar las diferentes tipologías de arcos, las bóvedas y de allí a las cúpulas (incluyendo a las conchas y cáscaras) que cubren los respectivos espacios arquitectónicos a los que han sido destinados.

Históricamente los procedimientos constructivos de la humanidad han estado ligados intrínsecamente a los avances de los conocimientos geométricos. Hubiese resultado imposible que algún constructor concibiera algún espacio habitable sin el dominio previo de las entidades geométricas que determinarían el comportamiento estructural estable de la edificación.

El primer paso que dado por la humanidad para procurarse un hábitat dio como resultado una arquitectura apegada al cobijo que brindaba la naturaleza sin alteración alguna: de morar en las ramas de árboles frondosos los hombres ocuparon las cavernas. No existía para ese entonces algún dominio de técnicas que permitieran modificar el medio ambiente en procura de espacios para cubrir sus necesidades.

Desde el momento en que los hombres se dieron a la tarea de modificar el medio ambiente para generar espacios construidos se presentó una disyuntiva: la de adecuar la forma

conceptual del objeto arquitectónico mediante la adaptación y manipulación de los conceptos geométricos.

Engel (1997) corrobora lo anterior así: “Todos los objetos materiales de la naturaleza y de la técnica se presentan con su correspondiente forma. La forma en el campo de los objetos materiales es la disposición característica en tres dimensiones: es geométrica” (Engel, 1997:23).

A partir de esas premisas se establecen parámetros comparativos entre cada uno de ellos con un enfoque geométrico y su respectiva incidencia en el comportamiento estructural dentro de las solicitaciones del equilibrio estable que pueden llegar a alcanzar.

Finalmente se determina que la aplicación de las superficies alabeadas de doble curvatura constituyen el gran salto cualitativo que los constructores contemporáneos han dado -entre los cuales se pueden mencionar las estructuras de paraboloides hiperbólicos del arquitecto español Félix Candela, que se iniciaron con la construcción del Laboratorio de Rayos Cósmicos de la Universidad Nacional Autónoma de México- y que puede ser, desde el punto de vista de los procesos edificatorios, equiparable al de las cúpulas geodésicas del arquitecto e inventor norteamericano Richard Buckminster Fuller así como también a las estructuras transformables de otro joven arquitecto español, esta vez de Emilio Pérez Piñero.

2.1. La línea recta

a. *Las vigas y columnas*

La línea recta pasó a prevalecer de un modo cuasi intuitivo. Cuando el hombre comienza a construir desconoce que los elementos estructurales obedecían a un sistema de soporte de esfuerzos y transmisión de fuerzas al piso. Sólo se había limitado a observar y copiar a la naturaleza: frondosos árboles para gruesos tallos, inmensas copas para grandes raíces, eran elementos que permitían –actuando al unísono– resistir los embates de la naturaleza: lluvia, viento, fuego; y aún así respondían a necesidades de cobijo y sustento.

La respuesta tecnológica fue la columna. En sus albores de simple piedra en bruto para posteriormente dar pie a unos sistemas estructurales ya preconcebidos como fueron los de poste y dintel y el sistema de marcos.

El salto tecnológico de la aplicación de la columna como elemento que responde eficientemente a las solicitaciones de compresión ya era conocida intuitivamente por el hombre desde hace miles de años. Sin embargo, aun cuando entreveían los principios de trabajo de los sistemas, más tarde conocido en medios constructivos como poste y dintel, donde un elemento horizontal era apoyado sobre dos verticales, debió transcurrir mucho tiempo antes de que se convirtiera en una innovación estructural en el desarrollo de alguna edificación. Las técnicas edificatorias debieron pasar por los saltos cruciales en los que se adaptaron los conceptos de horizontalidad y verticalidad a los de flujo de fuerzas, donde a algunos elementos estructurales le es posible recibir las cargas, a otros distribuirlos y otros transmitirlos al piso, como respuesta lógica a la determinación de condiciones de equilibrio en las estructuras.

La columna es el elemento estructural (lineal) que responde más eficientemente a solicitaciones de compresión.

Todos los componentes estructurales de una edificación poseen una representación tridimensional. Angerer (1982) establece que esta volumetría responde al siguiente orden: “Por un lado el bloque, cuyas tres dimensiones son del mismo orden; por otro lado la barra, en la que la longitud predomina sobre las otras tres dimensiones, y en medio la lámina, cuyo espesor es pequeño comparado con la longitud y la anchura.” (Angerer, 1982:1).

En el caso de las columnas se está en presencia de un elemento que tiene una de sus tres dimensiones, en este caso la altura, mucho mayor que las otras dos que son las dimensiones de la sección transversal. Ello en contraste con otras tipologías constructivas, *V. gr.* las construcciones laminares (grupo en el cual quedan incluidas, entre otras, las variantes de placas rectas delgadas, las conchas y las cáscaras) donde el espesor es mucho menor que el largo y ancho de la superficie. Tanto que, para los efectos de su cálculo y predimensionamiento, puede ser incluso despreciado.

Esta descripción es importante considerarla en virtud de que algunos arcos, tal como se verá más adelante, también poseen una dimensión: la longitud de curva, mucho mayor que las de la base y el peralte de su sección transversal.

Los principios estáticos que determinan el comportamiento de sistemas estructurales conformados por poste y dintel (figura 173) están constituidos por un elemento horizontal

(viga o trabe) que distribuye los esfuerzos a dos elementos verticales (columnas) que trabajan esencialmente a compresión como reminiscencia a la elevación de los dólmenes.

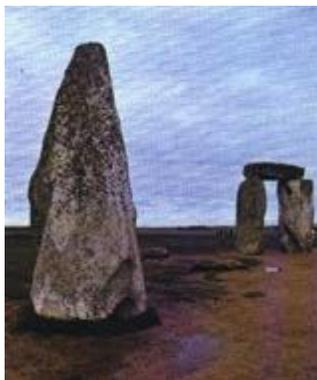


Figura 173. Dólmenes y menhires.
Fuente: Enciclopedia las Cien Maravillas.

La representación configurada a la disposición de dólmenes y menhires responde, de acuerdo con Mandolesi en 1981, a dos de los sistemas estructurales basados el primero de ellos en el *principio del trilito*, (figura 174) conocido como poste y dintel.

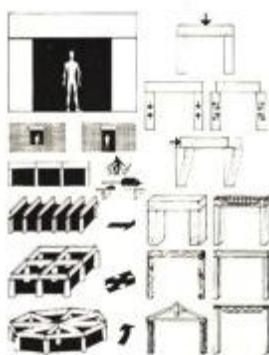


Figura 174. Principio del trilito.
Fuente: Imagen extraída con fines didácticos de Mandolesi, 1981:112.

Seguidamente, en nivel de complejidad estática, el sistema de marcos o «*bastidor*» se determina mediante “un elemento lineal el *travesaño* que está unido con los vínculos de solidaridad a dos elementos verticales, los *montantes* contrariamente al principio del trilito, el efecto de la continuidad, que determina una «colaboración» entre las partes al oponerse a las solicitaciones, implica que todos los elementos estén sujetos a flexión y esfuerzo cortante,...”

(Mandolesi, 1981:112). En la figura 15 se observa la representación idealizada del *principio de bastidor* que da pie a la configuración del sistema de marcos.

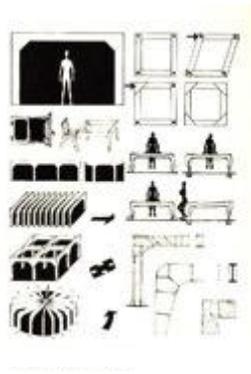


Figura 175. Principio del bastidor.

Fuente: Imagen extraída con fines didácticos de Mandolesi, 1981:112.

2.2. La línea curva.

Los principios estáticos que rigen el comportamiento estable de los arcos son conceptualizados como “*principios constructivos complejos*” (Mandolesi, 1981:112).

Pero, desde el punto de vista edificatorio ¿qué es un arco?; ¿es posible concebirlo como una entidad estructural aislada o siempre debe conceptualizarse como parte de un todo edificado?; ¿existe una connotación geométrica para un arco desde la visual geométrica y otra diferente cuando se refiere a un arco edificado?

La respuesta ante esta disyuntiva es aportada por muchos autores uno de ellos Saad, en 1985, quien fija la siguiente definición:

“En geometría se define como arco toda porción de una curva; mas en la técnica constructiva hay necesidad de precisar el concepto. En términos generales, por arco se entiende todo macizo u obra de fábrica, de perfil curvo alojado en un plano vertical, suspendido por encima de un vano o claro, descansando sobre dos apoyos que le sirven de soporte; o bien, toda obra de fábrica de poco espesor y de perfil curvo. (Saad, 1985:73).

Un arco es un elemento constructivo cuya cualidad fundamental es la forma curva (Fernández 1955), aunque cabría hacer la excepción en los casos especiales en que al apoyarse la barra arqueada isostáticamente el resultado sea una viga curva que no es precisamente un arco. Por lo que define que la condición esencial para que un elemento estructural curvilíneo responda

eficientemente al comportamiento que deben poseer los arcos sea el de “...tener la pretensión de configuración de esfuerzos, es decir, funicular de las fuerzas aplicadas. El grado mayor o menor en que esto se logra define la perfección de la estructura...” (Fernández, 1955:1)

2.3. El período románico

Los elementos estructurales que trabajan eficientemente en las edificaciones sometidos a esfuerzos de flexo-compresión se alejan bastante de los primeros modelos de arcos que fueron construidos por los romanos. Estos trabajan fundamentalmente a compresión. Es por ello que se justifica plenamente la sentencia (Torroja, 1976) que establece que lo más parecido a una columna es un arco. Dice Torroja que: “Después de la columna, las predilecciones del Arte han sido para el arco; ese arco que nunca duerme, según reza el proverbio árabe.”. (Torroja, 1976:101).

2.3.1. El arco semicircular (*medio punto*)

Las columnas del templo en honor a Castor y Pólux (figura 176) son fiel reflejo del modo constructivo en que quedaban enmarcadas por un arco semicircular, erróneamente llamado *arco de medio punto* (actualmente reconstruido) de la Basílica Emilia, en el Foro romano. Este edificio fue construido en el siglo I, d. de C.

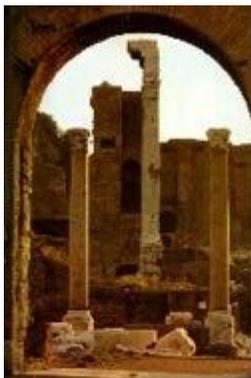


Figura 176. Columnas del templo en honor a Cástor y Pólux.
Fuente: Enciclopedia Las Cien Maravillas

Pero, además de su uso en la arquitectura monumental, donde los romanos demostraron el uso más eficiente del arco semicircular fue en la construcción de redes de infraestructura como se observa en el Acueducto de Segovia (figura 177). Construido en 18 km, desde su partida en el río Frío, con 958 metros sobre arcadas, sin que para su construcción haya sido empleado ningún material para unir las piedras de granito.



Figura 177. El Acueducto de Segovia.
Fuente: Enciclopedia Las Cien Maravillas.

Definitivamente, todas las eras de la humanidad han contado con un modelo de arco (y por ende también de una bóveda y de una cúpula) como solución constructiva.

Los romanos emplearon el *arco de medio punto* logrando con ello que la arquitectura estableciera un sistema de proporciones 1:1; donde los arcos semicirculares, sin sufrir ningún tipo de rebaja, eran todos iguales en sus escalas, proporciones y medidas por cada uno de los niveles en los que eran implantados (figura 178).



Figura 178. Arcos en la fachada del Foro romano.
Fuente: http://enzararte.blogspot.com/2010/10/blog-post_26.html

La importancia estructural del arco semicircular (Amerio & Canavero, 1996) es descrita así: “...el arco [semicircular] como un elemento arquitectónico que ha constituido una invención verdadera en el arte de construir.” (Amerio & Canavero, 1996:130). Es más, quizás sea ésta la configuración curvilínea de arco que más ha perdurado en la evolución de los procesos constructivos. Construido en piedra o lajas su equilibrio depende de la colocación de una pieza clave en la parte más alta de la curva la cual hace que todas las restantes permanezcan estables (figura 179).

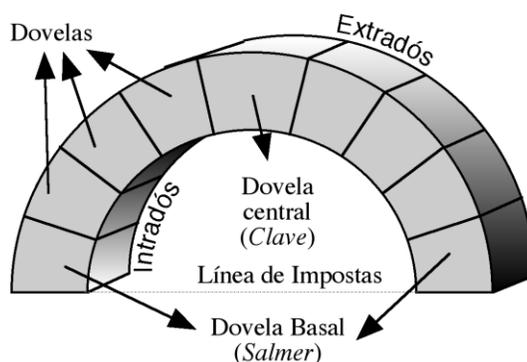


Figura 179. Componentes constructivos del arco semicircular (mal llamado de *medio punto*).

Fuente: [http://es.encydia.com/gl/Clave_\(arquitectura\)](http://es.encydia.com/gl/Clave_(arquitectura)).

De la comprensión del modo de construir un arco se logra entender cómo se transmiten los esfuerzos en un arco; sobre todo cuando éste es un arco semicircular y el material empleado es la piedra, lo cual podría ser válido también para otros mampuestos dígame, por ejemplo bloques de barro o de concreto. La técnica para construir un arco y su consecuente comportamiento ante un flujo de fuerzas de acuerdo a lo indicado por Huerta responde a la siguiente descripción:

“Un arco típico se construye apilando piedras unas al lado de las otras sobre una estructura auxiliar de madera o cimbra. La cimbra da la forma al arco; se empiezan a colocar las piedras a partir de los arranques y colocada la última piedra en el centro, la clave, el arco queda terminado. Al bajar la cimbra las piedras tienden a caer hacia abajo. Así, una dovela que intenta caer empuja a las dos dovelas colindantes que contrarrestan ese empuje, y los empujes se van transmitiendo, incrementados por los pesos. Si la forma del arco es correcta, y su espesor suficiente, estos empujes y contraempujes se anularán entre sí y el arco permanecerá en equilibrio. No obstante, las últimas piedras de los arranques del arco transmiten un empuje que debe ser

contrarrestado. El arco debe estar apoyado firmemente contra algo que resista su empuje: unos machones o estribos de fábrica.” (Huerta, 2004:12).

2.3.2. Superficie cilíndrica

a. La bóveda de cañón

Pero la innovación tecnológica no podía surgir solamente de la experiencia constructiva con arcos semicirculares. Fue necesario evolucionar en la comprensión de nuevos conceptos a partir de la aplicación de los conocimientos geométricos de una superficie cilíndrica que es producida por el movimiento de una *recta generatriz*, que se desliza manteniéndose siempre paralela a sí misma, apoyada en otra línea cualquiera plana un semicírculo como *directriz*, la mejor repuesta ante esta premisa aportada por los romanos consistió en la bóveda de cañón o bóveda semicircular.

Hay escritos que relacionan la conformación formal y la respuesta estructural de una bóveda de cañón (semicilíndrica) como el resultado de una sucesiva colocación de arcos de medio punto (semicirculares)

“Básicamente, una bóveda no es más que una suma de arcos: una superficie curva que recibe peso en su parte más alta, y lo transmite a la más baja haciéndole seguir la curva que ella misma describe. Por esto, puede constituirse por bloques en equilibrio que reciben, cada uno, el empuje del bloque superior, transmitiéndolo al inferior. Estos empujes se descargan sobre los apoyos, los cuales reciben un esfuerzo lateral de desplazamiento hacia el exterior. Está claro, por esto, que una bóveda no puede concebirse independientemente. Es necesario pensarla dentro de un organismo capaz de absorber los empujes que provoca. Por tanto, lo que determina el sistema es la mutua y férrea correspondencia de empujes y contra-empujes generado por la forma de la bóveda.”

(http://articulosdeestructura.blogspot.com/2009_09_01_archive.html)

Una representación –bastante idealizada- del encofrado y colocación de los mampuestos de barro para fabricar una bóveda de cañón; permite suponer que se requería, tal como fue, de un cementante en este caso la puzolana, para unir las piezas entre sí. Era un procedimiento que requería de la participación de una mano de obra cuantitativamente mayor a la que emprendía las tareas para fabricar arcos semicirculares, pero también con un mayor dominio del oficio constructivo (figura 180). Todo lo cual permitió que mediante una superficie cilíndrica se logaran cubrir espacios rectangulares.

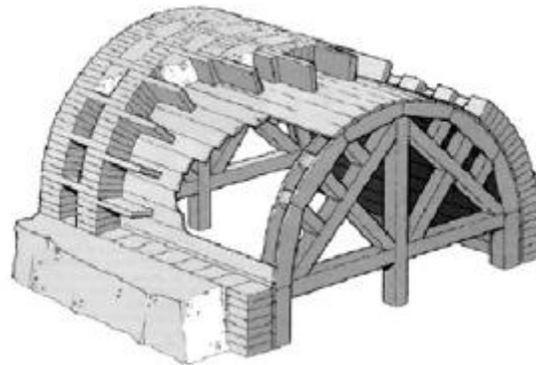


Figura 180. Bóveda de cañón.
Fuente: Blume, 1986:35

El templo de Constantino y Majencio (figura 181), terminada su construcción en el año 312 d. de C., es una clara demostración de cómo los constructores romanos resolvían la fabricación de bóvedas cilíndricas combinadas con arcos semicirculares en las fachadas



Figura 181. Templo de Constantino y Majencio.
Fuente: <http://www.imperioromano.com/75/templo-de-majencio-y-constantino.html>

b. *La bóveda de aristas*

Otra modalidad de bóveda que tuvo su origen en el período románico fue la bóveda de aristas, (figura 182). Concebida geoméricamente como el resultado de cruzar en ángulo recto dos bóvedas de cañón. Aquí la necesidad de un dominio de los conocimientos matemáticos aumentó considerablemente ya que en las vistas ortogonales de esta estructura se perciben arcos semicirculares ya que el espacio a cubrir era siempre una base cuadrada, mientras que las líneas curvas que unen las diagonales de la bóveda de aristas eran semielipses. Las crestas de los arcos de medio punto con su opuesto conformaban una línea recta horizontal, lo cual

generaba debilidades estructurales que podían causar deformaciones o flechas. Todo esto convirtió a esta bóveda en una “proeza constructiva” que hubiera sido imposible resolver sin antes no comprender cabalmente las implicaciones geométricas de estas estructuras.



Figura 182. La bóveda de aristas romana.

Fuente: <http://www.pingaweb.com/conunpar/canteria.htm>

2.3.3. Superficie esférica

a. La cúpula circular

Los romanos alcanzaron todos los límites constructivos posibles para la época de su mayor esplendor constructivo. Fue así como en el siglo I d de C. con base en un proyecto del arquitecto Apolodoro de Damasco construyeron la cúpula del Panteón romano (figura 183). Sobre una planta circular logran alcanzar un diámetro de 43 metros, mediante cinco hiladas de casetones, unidos con un mortero de piedra volcánica, que reducen su tamaño en la medida que se aproximan a la cresta, la cual es una claraboya que permite pasar luz natural y ventilación.

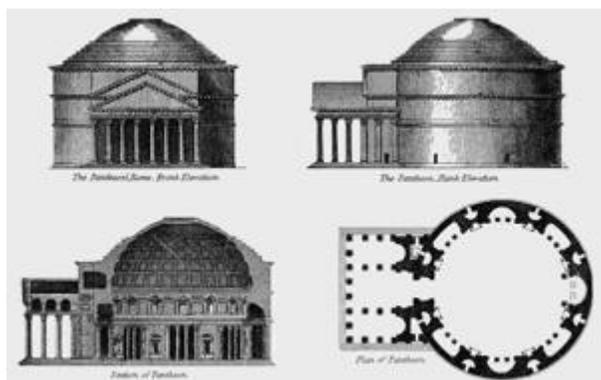


Figura 183. Panteón romano.

Fuente: www.todoarquitectura.com.

b. *La bóveda de pechinas*

La bóveda cilíndrica con base en los conocimientos constructivos del arco semicircular romano, permitió cubrir espacios rectangulares sobre dos elementos rectilíneos, macizos y paralelos. No obstante, ante la necesidad de cubrir espacios cuadrados evitando la línea horizontal que unía a los arcos opuestos en 180° de la bóveda de aristas, surgió la bóveda de pechinas (figura 184). “La innovación más significativa dentro de este sistema fue la introducción de pechinas como elegantes medio de transición el perímetro anguloso del espacio a cubrir y el circular de la cúpula.” (Blume, 1981:35).

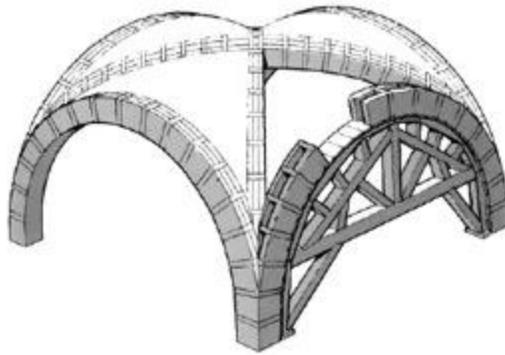


Figura 184. La bóveda de pechinas romana.
Fuente: Blume, 1986:36.

La pechina era una especie de nervio, fabricado con mampuestos de barro y unidos con cementante puzolánico -posiblemente de origen volcánico- que entrelazaba los extremos opuestos de los arranques de los arcos, y se entrecruzaban en la cresta de la bóveda. Estos avances marcaron un adelanto significativo en los procedimientos y técnicas constructivas de la época romana que estaban fundados en el dominio de los conocimientos geométricos de la época.

En el año 324 de la Era cristiana surgió un hecho político relevante: “Constantino trasladó la capital del imperio Romano de Roma a Bizancio en el año 324 de nuestra era.” (Blume, 1986:36). Situación que conllevó a que los constructores romanos aprendieran las técnicas de

trabajar el barro, que era el material más abundante en Constantinopla, con el cual se fabricaron los mampuestos que luego eran aplicados en la construcción de arcos, acueductos y bóvedas.

“La innovación más significativa dentro de este sistema fue la introducción de pechinas como elegante medio de transición el perímetro anguloso del espacio a cubrir y el circular de la cúpula. (...) Santa Sofía (532-537 DC) muestra muy claramente la potencia de los espacios de planta central cubiertos con cúpula. A pesar de ser un edificio de planta cuadrada, inspira una fuerte sensación de direccionalidad debida a la existencia de dos semi-cúpulas en los flancos este y oeste, respectivamente. Estas fueron construidas contra los arcos que soportan la cúpula principal y, así, el observador percibe una nave oval de 69 x 33 metros que alcanza 55 metros en la clave. La bóveda está construida con ladrillos planos cuadrados de 68 x 68 cm en las hiladas bajas y medias y de 61 x 61 cm en las proximidades de la clave, teniendo un grueso uniforme de 5cm. Iban recibidas sobre un grueso lecho de mortero que permitía dar a cada hilada un cierto ángulo respecto a la precedente, reduciendo así los empujes de la estructura.” (Blume, 1988:36).

Seguidamente (figura 185) se observa un corte longitudinal donde se distinguen los componentes arquitectónicos que fueron resueltos en la construcción de Santa Sofía.

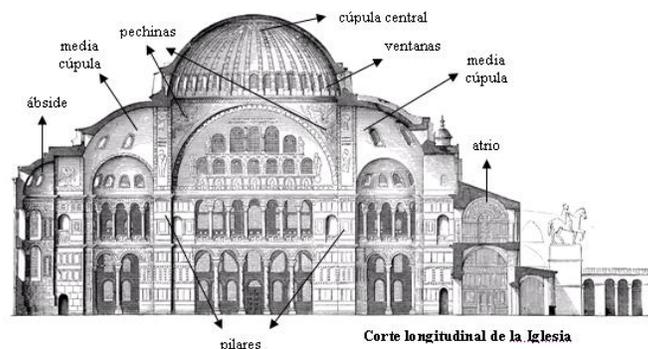


Figura 185. Santa Sofía.

Fuente: <http://www.monografias.com/trabajos55/iglesia-santa-sofia/iglesia-santa-sofia2.shtml>

Las pechinas permitieron resolver constructivamente las cúpulas de Santa Sofía, gracias al dominio de los conocimientos geométricos de las superficies esféricas y de la colocación de mampuestos unidos con barro los cuales han perdurado hasta hoy (figura 186).



Figura 186. Santa Sofía. Vista interna de una de las medias cúpulas.
Fuente: <http://www.turismoactual.net/europa/santa-sofia->

2.4. El período gótico

Los constructores europeos continuaron desarrollando edificaciones con arcos y cúpulas conformando evoluciones tecnológicas para intentar con gran éxito dar mayor altura a los arcos y por ende también a los espacios abovedados. Fue así como surgió ese estilo que supo conjugar los arcos ojivales con las bóvedas góticas que distinguieron a este período en el que se construyeron catedrales que quedaron diseminadas por toda Europa. No existe un acuerdo definitivo acerca de cómo fue la transición de los estilos románicos y bizantino para generar las formas espaciales que fueron desarrolladas con el gótico, lo cierto es que ya para el siglo XI se desarrollaron principalmente en Francia e Inglaterra, obras monumentales –las catedrales y abadías- que lograron conjugar la armoniosa técnica del estilo puntiagudo.

Para este período los principales aportes fueron: el arco ojival la bóveda de crucería que marcaron el desarrollo de un gran avance técnico en el aligeramiento de los elementos constructivos que la conformaban.

2.4.1. El arco ojival

Las parábolas y las ojivas fueron implantadas primordialmente en los vanos de las catedrales góticas modificando el canon adoptado por los romanos (figura 187). Por más de 500 años la proporción de la arquitectura pasó de ser de 1:1, empleada en sus arcos por los constructores

romanos, a una nueva proporción de 1:2 y 1:3 (entre la base o separación de los apoyos – y la altura desde el arranque hasta la cresta del arco).

Ejemplo de esta concepción arquitectónica se percibe en el arco ojival de la Catedral de Milán, (figura 188) perteneciente al gótico italiano del siglo XV.

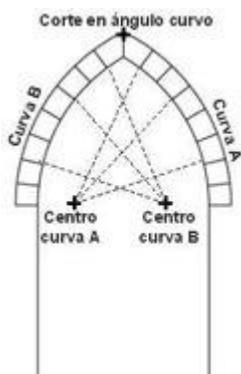


Figura 27. Trazo geométrico del arco ojival.

Fuente:

<http://artaula.files.wordpress.com/2009/05/gtc2k1.jpg>

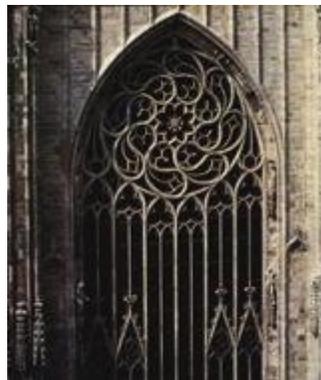


Figura 28. Arco ojival de la Catedral de Milán.

Fuente:

<http://33m.lista.cl/posts/info/14524756/El-arte-gotico.html>

2.4.2. Las bóvedas en el Gótico

a. La bóveda de crucería

Así como en el románico el proceso de intersección de dos bóvedas de cañón, dio como resultado la bóveda de aristas, en el gótico y gracias al avance tecnológico se construyeron bóvedas de crucería, (figura 189), procedimiento constructivo que consistió en la implementación de nervaduras conllevando a la posterior evolución del llamado arco toral solución no sólo estética sino también estructural mediante la cual se logró que las *bóvedas nervadas*, actuando en equilibrio para diferentes luces, transmitieran los esfuerzos tendiendo a una posición vertical; haciendo posible así conducir las cargas a las fundaciones disminuyendo considerablemente los empujes horizontales.

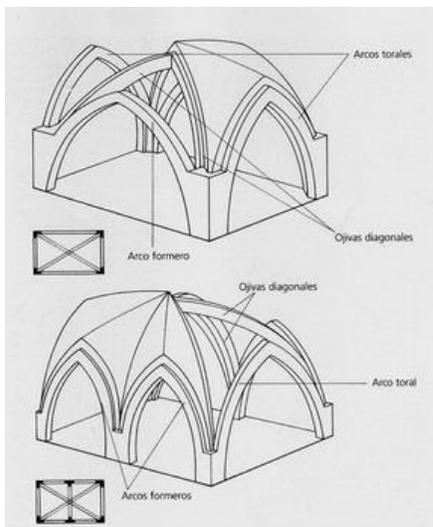


Figura 189. Trazo geométrico de la bóveda de crucería.

Fuente: <http://artaula.files.wordpress.com/2009/05/gtc2k1.jpg>

El período gótico perduró por aproximadamente uno quinientos años, depurando durante ese tiempo la forma de labrar y trabar las piedras para la construcción de edificaciones que mantenían una gran luminosidad y transparencia, mediante la aplicación de nervios en las bóvedas para, de esa manera, generar espacios que permitieran resolver dos alternativas, por una parte la solución de las formas planas y complejas que se dieron en el gótico inglés y por otra la respuesta estructural y funcional de que aportaron los constructores del gótico francés.

En Londres se construyó para el año de 1503, la Capilla de Enrique VII (figura 190), en ella se observa la implementación de la bóveda de abanico o palmeada.



Figura 190. Bóveda de la Capilla de Enrique VII en Londres.

Fuente: <http://fascinaciongoticanew.blogspot.com/2010/07/arquitectura-gotica.html>

Algo similar ocurre con la Abadía de Westminster, (figura 191) que fuera construida bajo la tutela de Enrique III, entre los años 1245–1269. En ella se puede observar la aplicación de una bóveda gótica de 31 metros de altura en la clave, constituyéndose como la más alta de todas las que se construyeron en ese Inglaterra.



Figura 191. Bóvedas de crucería en la Abadía de Westminster, Londres.
Fuente: <http://www.guiarte.com/fotos-usuarios/2386.html>

Mientras que en Francia se construyeron de forma expresiva la Catedral de Lyon, (1160–1225), la cual es considerada como la obra maestra de la arquitectura gótica francesa, (figura 192) y no menos importante la Catedral de Notre Dame, en París, (1163–1250), que sirvió de inspiración a muchas de las restantes catedrales que se construyeron en Francia durante ese período (figura 193).



Figura 192. Bóvedas de crucería en la Catedral de Lyon, Paris.
Fuente: <http://miradasvisuales.blogspot.com/>



Figura 193. Bóvedas de crucería en la Catedral de Notre Dame, Paris.
Fuente: Enciclopedia Las Cien Maravillas.

2.5. El Renacimiento

a. La cúpula del Renacimiento

El caso de la catedral de Florencia (figura 34) diseñada por Filippo Brunelleschi (1377–1446), en la ciudad italiana de Florencia, dio inicio al denominado período del Renacimiento. Fue en este período donde los constructores que dominaban verdaderamente el arte de reconocer y plasmar la escala de las distintas edificaciones, empezaron a ser designados como arquitectos.

En el Renacimiento surge uno de los tratados de arquitectura más completos «*De Re Aedificatoria*» de Alberti, quien al igual que Vitrubio relacionó todo lo que él consideró relevante ante el oficio constructivo y proyectual.



Figura 194. Catedral de Florencia.

Fuente: <http://comosuenau cuadro.blogspot.com/>

En lo que respecta a los constructores de la Edad Media y el Renacimiento, los avances se prestaron para la construcción de las catedrales, demostrando que la tecnología clásica se mantenía vigente. Fue este de la Basílica de San Pedro en Roma, obra que fuera concebida por el Arquitecto Donato Bramante para el año de 1505, por órdenes del Papa Julio II de La Rovere. Esta última cúpula cubre una luz de 40 metros y posee un peso de 9842 toneladas. (Blume, 1981:86).

La solución de la cúpula de San Pedro representó, entre otras cosas, la solución a un problema de escala monumental que sólo pudo ser resuelto con base en una propuesta arquitectónica que se adecuara a los fines de dominio religioso dentro de un marco comparativo con las otras cúpulas con las cuales establecía un patrón referencial; tal es el caso de las soluciones aportadas previamente para el Panteón romano y la cúpula de Santa Sofía. (figura 195).

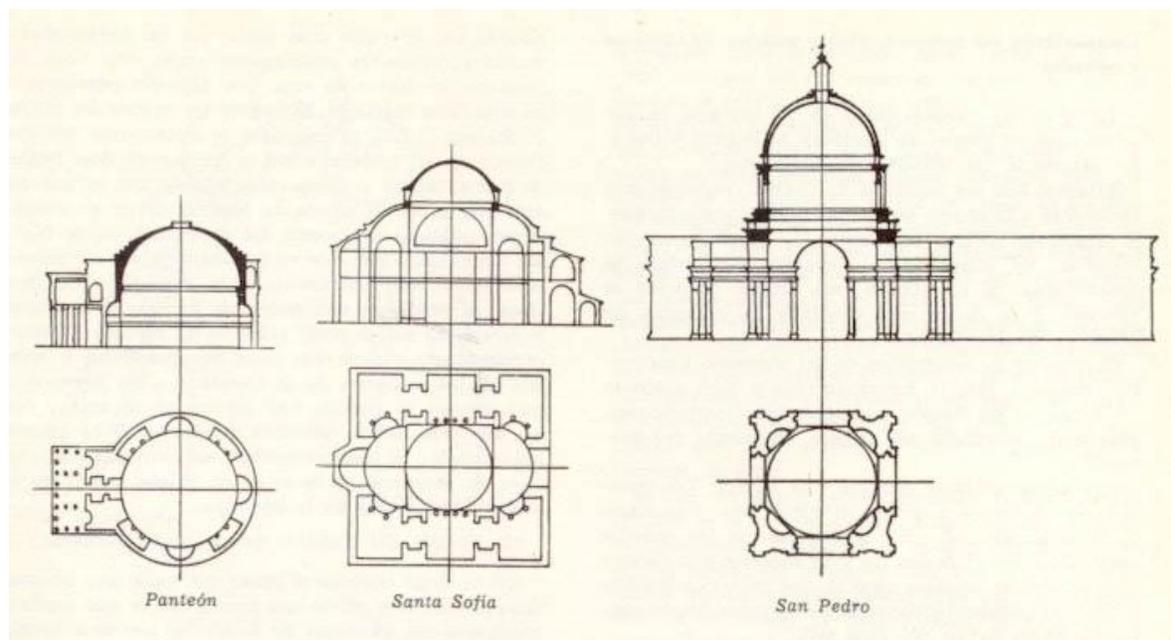


Figura 195. Esquemas referenciales y comparativos del Panteón romano, Santa Sofía y la Basílica de San Pedro.
Fuente: Angerer, 1981:17

b. El arco del Renacimiento, el arco carpanel

Las limitaciones de los materiales y la necesidad de servirse de un elemento estructural curvilíneo para salvar grandes distancias conllevaron a plantear la configuración de un arco con múltiples apoyos intermedios. Tales apoyos –en muchos de los casos- no eran otros más que arcos semicirculares que servían de sustento a la curva principal llamada *arco carpanel* el cual desde el punto de vista geométrico correspondía al trazo con regla, escuadra y compás de un arco de tres cinco o más centros (figuras 196 y 197). Bermúdez, en 1993, en una descripción bastante confusa, y por ende objetable, establece que el arco carpanel es: “El que tiene forma de elipse y se traza mediante varios arcos de circunferencia cuyos centros son siempre en número impar. Se le llama también «arco zarpanel».” (Bermúdez, 1993:70). Sin embargo, La forma de semielipse no corresponde nunca al perfil de un «arco carpanel». El trazado de arcos de tres, cinco, siete o más centros da como resultado una solución visual bastante aproximada a una semielipse pero geoméricamente inexacta como para coincidir con dicha cónica.

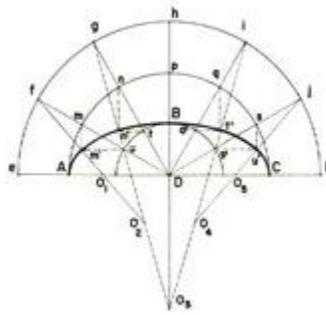


Figura 196. El «arco carpanel» propuesto por Saad (1985).
Fuente: Saad, 1985:77.

Desde luego, resulta imperativo señalar lo que es realmente un arco carpanel ya que se ha sostenido que hay una confusión entre lo que se describe como éste y deriva en ser una semilipse. La representación geométrica del arco carpanel la presenta el mismo Ing. Saad, cuando señala que son arcos de tres, cinco o más centros lo cual nos refiere es al trazo de un perfil de un semióvalo (figura 197).

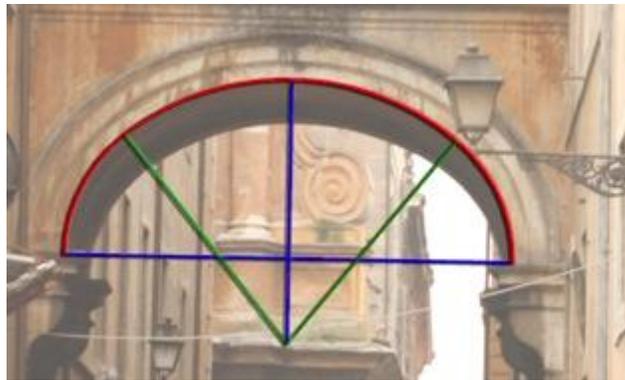


Figura 197. Arco carpanel de tres centros.
Fuente: http://www.departamentodedibujo.es/Dibujo_Tecnico_Primer/UD6/DT1_U6_T2_Contenidos_v01/12_arcos.html

Ya en el siglo XVI surgen algunos ejemplos de arcos carpaneles. Aquí se observa una arcada en canteras que integran los pasillos, alrededor de un patio central, en el Monasterio de Yuste, (figura 198) ubicado en Extremadura, en la Península Ibérica.

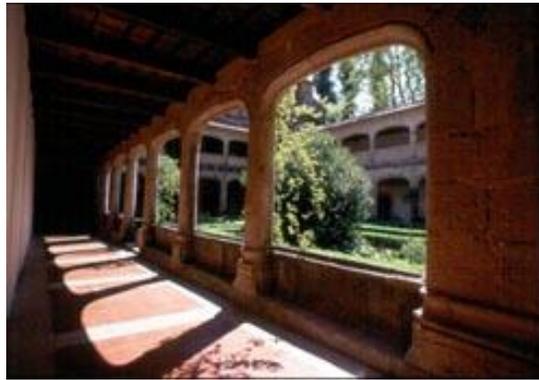


Figura 198. Arcos carpaneles en el Monasterio de Yuste.

Fuente: <http://www.destinoespana.com/2008/11/24/monasterio-de-yuste/>

Los arcos carpaneles se construyeron en toda Europa y fueron fabricados también en América en la época de la colonización española y siglos posteriores, quedando plasmados tal como se puede observar en la figura 199 en edificaciones donde la disposición de los mampuestos de barro no exigían el trabajo de la pieza clave de los arcos romanos. Nótese en el ejemplo como el arco (construido a finales del siglo XVIII) de la zona colonial del Cauca, en Popayán, Colombia, no es de circunferencia (medio punto) sin embargo a pesar de que en su perfil es una curva de tres centros posee elementos decorativos neoclásicos.



Figura 199. Arco carpanel del Alto Cauca. Ubicado en Popayán, Colombia.

Fuente: <http://picasaweb.google.com>

c. La arquitectura en Mesoamérica

Mientras Europa implantaba sus cánones renacentistas para definir una arquitectura más evolucionada el continente americano, recién descubierto en 1492, dejaba ejemplos de un amplio dominio de los procedimientos edificatorios.

Capítulo 2. Marco Teórico: Arcos, bóvedas, cúpulas y otras superficies

En las culturas prehispánicas se encontraron la aplicación de columnas, (figura 200), cerramientos horizontales, arcos y bóvedas construidos con piedra como muestras del dominio geométrico y de una mano de obra bien entrenada.



Figura 200. Columnas hexagonales Olmecas, en La Venta, Tabasco, México.
Fuente: Enciclopedia México Antiguo. Tomo I:195.

En lo que respecta al diseño y construcción de modelos de arcos y bóvedas las culturas prehispánicas no fueron la excepción.

El continente americano no quedó alejado de los conocimientos físico-mecánicos de las solicitaciones a las cuales podían someterse las columnas, los arcos y las bóvedas.

Los arcos mayas evolucionaron desde un modelo triangular (truncado) hasta uno trilobular sin despojarse de su sistema constructivo. En estos casos se repite el concepto de la pieza clave al centro que permitió dar estabilidad al resto de las dovelas que conformaban al arco. (figura 201).

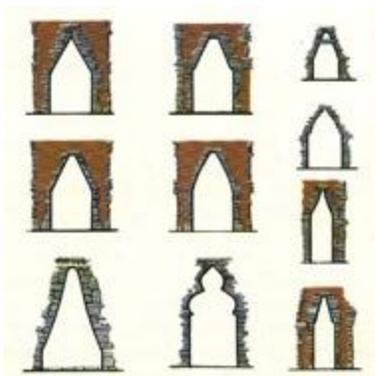


Figura 201. Representación de la clasificación de los tipos de arcos y bóvedas mayas.

Fuente: Enciclopedia México Antiguo. Tomo II:15.

El sistema constructivo maya ha sido estudiado en su evolución a partir de las columnas, como elementos que responden eficientemente a la compresión, hasta los arcos que sobrepasaron los estados límites de equilibrio con base a la sobre posición mecánica de piedras labradas, colocadas en muchos de los casos sin emplear morteros o materiales aglutinantes. (figura 202).

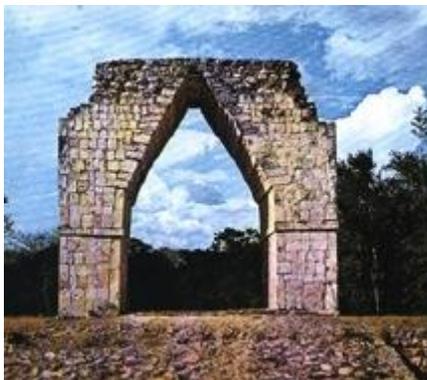


Figura 202. Arco maya en Kabah en Yucatán, México.
Fuente: Enciclopedia México Antiguo. Tomo II:168.

El autor Carlos Navarrete, en la obra «*México Antiguo*» sostiene que “El uso de la llamada ‘bóveda maya’ que parece haberse iniciado ocasionalmente para techar tumbas en un período más antiguo, se generalizó y permitió la sustitución de los techos de palmas por los de mampostería obviamente más resistentes y duraderos, tanto en los edificios destinados al culto como en las residencias de los privilegiados.” (Navarrete et al, 1978:15).

2.6. La Revolución Industrial: Nuevos materiales, nuevas tecnologías

2.6.1. Construcciones con hierro y acero

Ante la necesidad tecnológica en los procesos constructivos de salvar grandes distancias sin apoyos intermedios se ha logrado, por una parte, fundir las fronteras que separan a la arquitectura de la ingeniería y, por otra, adoptar unos modelos de curvas, algunas veces de configuración parabólica, de catenaria y otras veces elíptica creando un arco que permitió reducir la altura del semieje menor que, en este caso, corresponde a la altura desde el nivel de piso terminado hasta el punto más alto de la curva. Todo este efecto quedó aunado al surgimiento del acero como material de construcción.

La Revolución Industrial dio inicio en Inglaterra en 1760, a raíz de ello un nuevo material surgió para permitir una evolución tecnológica en los procedimientos edificatorios. Sin embargo, no fue sino hasta mediados del siglo XIX, en Francia e Inglaterra, cuando comienzan una rápida carrera por el dominio de las técnicas constructivas con hierro y acero que no tarda en llegar a los Estados Unidos y de ese modo posicionarse como el material constructivo que ha sido aplicado exitosamente en edificaciones en todo el mundo.

a. *Estructuras curvas en hierro de forma libre*

El hierro como material constructivo permitió dar un salto en cuanto a la esbeltez y libertad de las formas concebidas para los elementos portantes (figura 203) aspectos éstos que hasta entonces se habían visto muy limitados.



Figura 203. Puente en hierro fundido de Saint-Etienne-Le Molard, 1835.
Fuente: Architecture d'ingénieurs.

Más tarde, con la aparición del acero como material de construcción, se desarrollan modelos estructurales para puentes de configuración parabólica. Antoine Rémy Polonceau, (1778 - 1847), ingeniero francés, constructor de carreteras, resuelve los primeros puentes en acero con esta configuración (figura 204).



Figura 204. Puente en acero del Ing. francés Antoine Polonceau.
(siglo XIX).
Fuente: Architecture d'ingénieurs.

Sin embargo, la implantación de formas estructurales curvas lograron resolverse en la medida en la que se fue dominando la maleabilidad del acero sin que éste perdiese sus condiciones portantes, fue así como lograron erigirse puentes donde las líneas serpenteaban de un modo entrelazado permitiendo logros estructurales novedosos.

El puente sobre el río Elba, construido por el Ing. Lohse en 1872, en la ciudad alemana de Hamburgo (figuras 205 y 206) fue una de las muestras más atrevidas de demostración de lo que podía lograrse empleando el acero como material estructural para la construcción de puentes.



Figura 205. Puente sobre el río Elba, proceso de construcción.
Fuente: Architecture d'ingénieurs.



Figura 206. Puente sobre el río Elba.
Fuente: Architecture d'ingénieurs.

b. El hierro fundido

Pronto el hierro pasó a ser el material más idóneo para resolver los problemas constructivos que se planteaban los arquitectos e ingenieros de los Estados Unidos.

En 1982 Risebero, analizó la aparición del hierro en procesos constructivos estadounidenses así:

“En Estados Unidos más que en ningún sitio, con su enorme presión por la innovación, es donde la construcción de nuevos edificios alcanza su más alto grado. Desde mediados de siglo [XIX] en adelante, el hierro fundido fue uno de los materiales preferidos para los nuevos edificios comerciales.” (Risebero, 1982:108).

El hierro no solamente fue el material idóneo para edificios comerciales, también los monumentos políticos, edificios administrativos y de servicio eran estructuralmente resueltos por medio de estructuras metálicas. Según Bill Risebero (1982) fue gracias a este material que pudo resolverse exitosamente (figura 207) la “Cúpula con estructura de hierro de Thomas Walter para el Capitolio de los Estados Unidos de Washington (1855-1875).” (Risebero, 1982:110).



Figura 207. Capitolio de los Estados Unidos en Washington D.C.
Fuente: <http://topicalities.wordpress.com/>

En las estructuras parabólicas diseñadas por el Ing. francés Eugene Freyssinet (1879-1962) se nota la misma tradición que provenía de los constructores romanos: una pieza central o clave, colocada en la cresta de la curva, es lo que le otorga el equilibrio estable al arco (figura 208 y 209). Estas edificaciones que fueron construidas como naves agroindustriales en Francia fueron bombardeadas y destruidas por los aviones de Hitler bajo la sospecha de que pudiesen ser ocupadas para fabricar pertrechos de guerra antiaérea.



Figura 208. Montaje de la estructura de un hangar diseñado por Eugene Freyssinet.

Fuente: Architecture d'ingenieurs.



Figura 209. Colocación de cerramientos para la estructura parabólica en acero diseñada por Eugene Freyssinet.

Fuente: Architecture d'ingenieurs.

2.7. La arquitectura Moderna

2.7.1. Cúpulas en acero

a. La cúpula de Jena

Para el año de 1922, en la azotea de los talleres de la Factoría de Carl Zeiss, empresa avocada al estudio de los efectos de la óptica sobre los estudios de la astronomía, se planificó construir una esfera, (figura 210) para instalar un planetario, que permitiera la representación a escala de la bóveda celeste. Se planteaba la necesidad de cubrir una luz de más de 40 metros. Esta obra fue asignada al astrónomo Walter Bauersfeld, quien a su vez diseñó el proyector del planetario.

Bauersfeld fue quien por primera vez logra aplicar la geodésica para solucionar "...una cúpula hemisférica que reprodujera el cielo y que fuese ligera, pues descansaría sobre la azotea de la fábrica Zeiss. Se construyó entonces una estructura de barras con grandes arcos de circunferencia y un diseño de icosaedros sumamente subdivididos. Así, tanto la cúpula como el modelo del proyector se derivaban del icosaedro." (Blume, 1981:87).



Figura 210. La cúpula de Jena en Alemania.

Fuente: <http://almadeherrero.blogspot.com/>

La cúpula de Jena, en Alemania, (figura 211) requirió de seleccionar el cerramiento, decidir con cuál material se podrían cubrir las barras de acero que con la pequeña tolerancia de dos milésimas Bauersfeld había logrado armar para dar forma al esqueleto portante de la cúpula. Fue allí donde buscó la opinión de los expertos constructores, siendo uno de ellos Dyckerhoff Widmann, quien ante esta interrogante respondió: “Sí, precisamente acabamos de probar un nuevo sistema para proyectar cemento de consistencia viscosa mediante una manguera similar a la de los bomberos” (Blume, 1981:89). Surge de esta forma la primera posibilidad de vaciar una cúpula semiesférica con ferrocemento.



Figura 211. La cúpula de Jena en Alemania.

Fuente:
<http://negralaoveja.wordpress.com/2012/09/03/viaje-a-las-estrellas/>

Los archivos de la empresa de óptica y astronomía fueron saqueados durante la Segunda Guerra Mundial. Con esta acción se perdieron los planos, maquetas y detalles gráficos y constructivos de la Cúpula de Jena. Bauersfeld formó parte de las listas de prisioneros de guerra y nunca le fueron reconocidos sus méritos como ingeniero e inventor. Sin embargo, desde 1922, fecha en que se inició el diseño de la cúpula, debieron pasar más de treinta años para que surgiera otra innovación importante bajo este mismo modelo estructural.

b. La Geodésica de Buckminster Fuller

El 29 de Junio 1954 Richard Buckminster Fuller (1895-1983), registró una patente (figura 133) donde aporta las aplicaciones de la geodésica concepto que fuese aportado por primera vez por Hertz y que ya habían sido estudiados por Reinmann, Einstein, y otros matemáticos adaptándolos a los glosarios de términos estructurales y constructivos de procedimientos edificatorios.

Ese año Fuller dio a conocer lo que él consideró uno de los más importantes inventos realizados por el hombre para cubrir grandes espacios, con elementos de bajo peso y gran durabilidad, quedando allí registrados los términos dentro del conjunto de la estructura que fue designada como “*Tensegrity Geodesic*”, (figura 212).

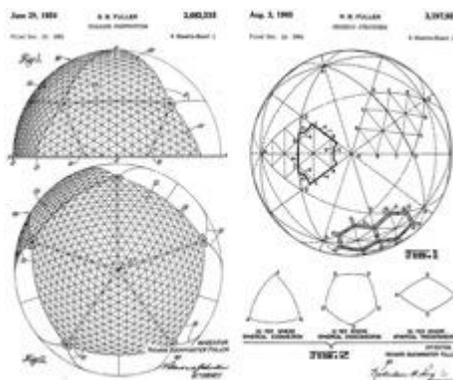


Figura 212. Dibujos de la Patente de Buckminster Fuller del 29/junio/1954, con la cual nacía el concepto de *Tensegrity Geodesic*.

Fuente: <http://istianjinelearning.org/georgebaxter/2010/10/11/buckminster-fuller-challenge/>

En ella plasmó un glosario de los conceptos que, desde la época de los geómetras clásicos del período helénico, ya habían sido estudiados como fueron la esférica, el icosaedro (veinte caras), el icosaedro esférico, la malla, el triángulo equilátero, la división modular, todos ellos reunidos para conformar una estructura que llegaría a pesar, tal como el propuso, menos de media tonelada. (Fuller, 1983:127-144) y expuso otros conceptos novedosos que hoy en día se emplean para el estudio y clasificación de las cúpulas de este tipo como son: la aplicación de los conceptos de la geodésica a la construcción arquitectónica, a la cual refiere su base perteneciente a grandes círculos de una esfera, arcos o algunos círculos menores, que constituyen líneas geodésicas que conforman a su vez un gran círculo o arco envolvente, bajo un cierto patrón geodésico. Éste a su vez es un patrón creado por las intersecciones de grandes círculos, líneas, arcos o sus cuerdas y así sucesivamente, hasta desarrollar un conjunto de elementos capaces de actuar en su conjunto para así transmitir los esfuerzos al suelo de una manera uniforme, no sin antes descomponerlos como vectores activos dentro de la estructura concebida.

Fuller patentó lo que él dio a conocer como uno de los más grandes avances en la historia de la construcción en todo el mundo, la Cúpula Geodésica, basado en el concepto del “círculo máximo”, (figura 213) el término de geodésica quedó registrado y plenamente definido en el oficio de su patente. La propuesta de Fuller con base en el principio de hacer más con menos tuvo entre otras finalidades reducir la masa de los componentes estructurales, separar los esfuerzos de tracción, compresión y corte y finalmente concentrar estos esfuerzos en nodos que trabajaban siempre en conjunto.

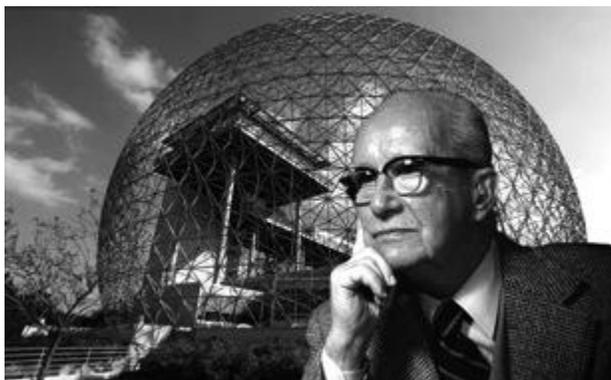


Figura 213. Pabellón de Estados Unidos en la Exposición de Montreal 1967, diseño de Buckminster Fuller.
Fuente: <http://control-zeta.org/archives/2058>

En 1980 Fuller, como un reconocimiento a sus inventos, había recibido 43 reconocimientos honoríficos otorgados por las más importantes instituciones de educación superior de Estados Unidos.

“Hacia 1966 se habían instalado más de cinco mil cúpulas distribuidas en cincuenta países.” (Rosen, 1970:149). Logrando además desarrollar sistemas de fabricación de cúpulas aligeradas para resolver casos tan resaltantes, como el audaz planteamiento de “el proyecto de cúpula [geodésica] para cubrir Manhattan en Nueva York, con diámetro de dos millas, que puede construirse en tres meses...” (Bermúdez, 1993:276).

c. Cúpulas reticulares

La innovación de la cúpula geodésica de Fuller conllevó a que se desarrollaran, haciendo mucho más énfasis en el cálculo geométrico de las cúpulas, propuestas de diferentes tipologías de cúpulas basadas en retículas (figura 214).



Figura 214. Emilio Pérez Piñero con una de las cúpulas rectangulares diseñadas por él.
Fuente: http://www.vedoque.net/emilio/?page_id=64

Paralelamente se desarrollaban estudios de nuevas aleaciones con materiales ya conocidos tales como el acero, aluminio estructural, madera y plásticos los cuales ya venían siendo empleados en los procedimientos edificatorios. De estos materiales dependían los flujos de fuerzas de las retículas y facilitaron aún más las diversas propuestas que interrelacionaban a las modelaciones de nodos, conexiones, barras, con la tríada de la forma - función y estructura que caracterizaban a la obra arquitectónica.

Fue así como las bóvedas y las cúpulas se mantuvieron como la mejor solución en las propuestas de cubiertas para salvar grandes luces con elementos estructurales ligeros que respondían eficientemente a todo tipo de esfuerzos (cargas accidentales y peso propio). Pero además solucionaban en términos prácticos los problemas de transporte, rápido montaje, economía financiera y participación de una mano de obra que no requería de una mayor especialización.

d. Estructuras transformables

En 1961, un estudiante del 4to año de arquitectura, de nacionalidad española, Emilio Pérez Piñero (figura 215) presentó un diseño en el *VI Congreso de la Unión Internacional de Arquitectos*, celebrada en Londres. El tema de la propuesta: “*Teatro Ambulante*”, propuso, mediante una estructura transformable, la geometría de los nodos, como un todo, mediante barras que, articuladas entre sí, giraban y se desplegaban de forma independiente resolviendo así las labores de rápido montaje y desmontaje.¹



Figura 215. Emilio Pérez Piñero explica al Duque de Edimburgo las características del diseño de Teatro Ambulante en 1961.

Fuente: <http://www.calasparra.org/>



Figura 216. Emilio Pérez Piñero muestra uno de sus inventos: una estructura transformable desplegable.

Fuente: CASIÑELO, 1992.

¹<http://www.calasparra.org/NOTICIAS/Personaje3.htm>

En esa ocasión para conformar el jurado del concurso fueron convocados Buckminster Fuller y Félix Candela quienes premiaron la idea de Emilio Pérez Piñero, en 1961. Todo lo cual conllevó a que Fuller le hiciese llegar posteriormente a Candela una copia de su patente a la que él, con su propio puño y letra, escribió: “esta es la articulación “*tensegrity geodesic*” similar a la del estudiante español”

Félix Candela en el prólogo del libro de su autoría «*Arquitectura Transformable*» (1993) expuso, con respecto al premio de la UIA otorgado a Piñero en 1961:

“Desconozco los motivos que impulsaron a Emilio a proponer y desarrollar una estructura desplegable para su proyecto. No existen, a mi entender, noticias en la literatura técnica de tales estructuras construidas con anterioridad. El único precedente de desplegables que conozco es la patente obtenida por Fuller en 1954, como parte del documento que protege la invención de la cúpula geodésica, y se refiere a la articulación llamada por Fuller como «*Tensegrity Geodesic*», esta cúpula se desplegaba por un complicado sistema neumático. Dudo mucho que Emilio tuviera conocimiento de esta patente porque la solución geométrica inventada por Emilio es mucho más completa que la de Fuller ya que resuelve tanto el nodo y el mecanismo de plegado más simple, estando las barras articuladas no solo en los extremos, como las de Fuller, sino también en el centro sugiriendo una gran cantidad de posibilidades.” (Candela, 1993:11)

Emilio Pérez Piñero, en su vida de estudiante de arquitectura, ganó diversos concursos de diseños y se hizo acreedor a numerosos reconocimientos de carácter internacional, todos ellos relacionados con sus proyectos inéditos de estructuras transformables que basaban su geometría en la solución de cúpulas reticulares (figura 216)

En 1963 fue designado Profesor adjunto de arquitectura en Madrid y expuso allí mismo el avance de sus estructuras. En 1964, ganó el «*Concurso para el Pabellón Transportable de Exposiciones*», el mismo que fue construido en el Patio de los Nuevos Ministerios del gobierno español. En 1965, construye teatros desmontables con cúpulas reticulares y en 1966 estudia una inmensa cantidad de modelos fabricados a escala hasta que en el mismo año de su muerte 1972, a la edad de treinta y seis años recibe el premio Auguste Perret de la UIA.²

² Los datos obtenidos sobre la biografía de Emilio Pérez Piñero son extraídos del artículo ESCRIG, F. «Arquitectura Transformable». En: *Revista de la Escuela Técnica Superior de arquitectura de Sevilla*. No. 1 Sevilla.1993.

No obstante, una de las ideas que le han otorgado mayor renombre a Emilio Pérez Piñero fue la solución presentada como proyecto el mismo año de su muerte en 1972, de una cúpula para cubrir el Museo de Salvador Dalí (figura 217).



Figura 217. Cúpula del Museo de Dalí, diseñada por Emilio Pérez Piñero.
Fuente: <http://www.calasparra.org/index.php?seccion=articulo&id=11>

e. Cúpulas de forma libre en acero

e.1. El Reichstag

El *Reichstag*, es un edificio ubicado en Berlín, Alemania, que fue objeto de un diseño para su remodelación, culminada en 1999, por el arquitecto de origen británico Norman Foster

La cúpula de Reichstag, (figura 218) construida con metal, representa un claro dominio de la geometrización de las estructuras. Su configuración corresponde a la espiral, la hélice, el cono y el ovoide como forma envolvente todas ellas conjugadas con cerramientos de cristal que generan espacios cerrados que permiten el contacto visual con el entorno (figura 219).



Figura 218. La cúpula de Reichstag de Norman Foster.
Fuente: <http://en.wikipedia.org>



Figura 219. La cúpula de Reichstag vista interna.
Fuente: <http://www.google.co.ve/>

e.2. DZ Bank

En la Plaza de París, en Berlín, se encuentra el edificio del *DZ Bank*, (figura 220) diseñado por el canadiense Frank Gehry, entre 1998 y 2000. Las bases del concurso especificaban que el edificio no podía sobrepasar la altura de la Puerta de Brandeburgo ni ser especialmente llamativo, de modo que el proyecto ganador, el de Gehry, logró establecer la armonía de un espacio interno cubierto con una malla que, si bien no responde a una geometría cartesianamente definida, puede percibirse como una solución integradora entre la forma los cerramientos traslúcidos y los materiales metálicos aplicados para solventar la estructura (figura 221).



Figura 220. Vista interna de la cúpula de DZ Bank, diseñada por Frank O. Gehry.
Fuente: <http://www.checkonsite.com/dz-bank-berlin/>



Figura 221. Malla diseñada por Gehry para la cúpula de DZ Bank, en Berlín.
Fuente: http://es.wikiarquitectura.com/index.php/Archivo:Banco_DZ_malla_estructural.jpg

*f. Arcos metálicos**f.1. Arcos de catenaria*

Robert Hooke (1635 - 1703) estudió la catenaria en el año 1670. Desde entonces esta curva se convirtió en un reto geométrico para la solución formal y estructural de los arcos. En 1697, David Gregory, (1659 – 1708) profesor de Oxford, sostuvo que la forma ideal para que un arco fuese realmente estable era bajo esta configuración, obtenida mediante la colocación de pesos a una cuerda sostenida en las puntas dejando que únicamente actúe sobre ella la fuerza de gravedad. (figura 222).

De acuerdo con Hodgkinson en 1976, en la «*Memorie Istoriche della Gran Cupola del Templo Vaticano*», escrita en 1748 por Giovanni Poleni (1685 – 1769) , se registra el estudio de dovelas que considera la concepción del arco realizada por Gregory, (figura 222), mediante la colocación invertida de la cuerda catenaria para dar forma a un arco. (Hodgkinson, 1976:13).

No fue sino hasta 1691 cuando Leibniz y Huygens definieron el modo geométrico y gráfico de obtención de esta curva, la cual fue publicada en la revista científica alemana, el «*Acta Eroditorum*» (figura 223).

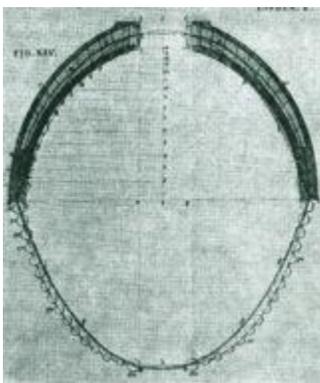


Figura 222. Propuesta de arco de configuración catenaria propuesto por Gregory.
Fuente: Hodgkinson, 1976:13

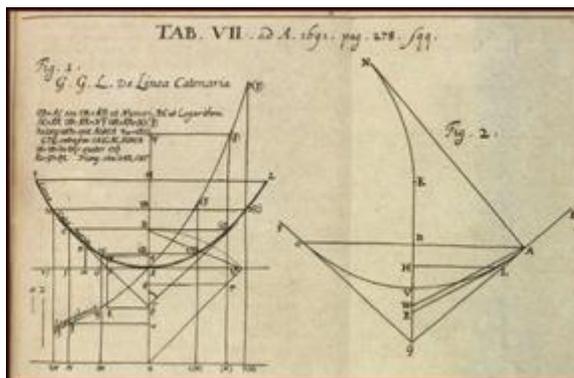


Figura 223. Modo de obtención de la catenaria Imagen publicada por Leibniz y Huygens en el Acta Eroditorum.
Fuente:
<http://curvebank.calstatela.edu/catenary/catenary.htm>

f.2. El arco de Gateway

Ya Freysinet había garantizado que el modo de recuperar la curvatura original de una catenaria o de un arco parabólico era disponiendo una cuña en la cresta del arco. El no hacerlo podría con toda seguridad llevar al colapso de la estructura.

Esta tradición en la aplicación de la lógica constructiva fue una vez más adoptada por Eero Saarinen (1910-1961) quien fue el arquitecto diseñador para el año de 1947, del Arco de Gateway en los Estados Unidos, (figura 224), el cual data el inicio de su construcción para 1963.



Figura 224. Arco de Gateway en San Louis Missouri. Fuente: <http://vaumm.blogspot.com/2012/01/jefferson-arch-gateway-by-eero-saarinen.html>

Toda la estructura es de acero inoxidable, aunque en algunas partes –para dar rigidez a los apoyos- está relleno de concreto armado, convirtiéndose en un símbolo de la ciudad de San Louis y a su vez en una obra de ingeniería al resolver tales dimensiones en una sola curva (figura 225).



Figura 225. Colocación de las piezas finales en el Arco de Gateway.
Fuente: <http://vaumm.blogspot.com/>

f.3. Arcos parabólicos en metal

Los arcos en metal de estructuras en configuración parabólica han sido empleados desde tiempos muy remotos. Gustave Eiffel, (1832 – 1923), ingeniero y constructor francés, no sólo alcanzó fama por la torre parisina que lleva su nombre sino que donde supo alcanzar los más grandes logros fue en la construcción de puentes fabricados con metal, de perfil parabólico desdénando otras posibilidades de ocupar curvas de diferente forma ya que veía en la parábola una de las curvas geométricas más interesantes para salvar grandes distancias entre los apoyos

adquiriendo también la posibilidad de alcanzar una gran altura entre el nivel de las aguas y la cresta de la parábola.

Eiffel solucionó en hierro, con una cercha de configuración parabólica, el puente de Maria Pia, sobre el río Duero en Oporto, Portugal, diseñado en 1877. (figura 226). Más tarde, en el año 1882, esta vez en Garabit, Auberneq, Francia, propone una vez más un arco parabólico para el viaducto que durante muchos años representó la obra de ingeniería que había sido capaz de construir el puente más largo del mundo.

Fue así como la tradición de construir estructuras con arcos parabólicos se esparció a nivel mundial y fue uno de los modos de salvar grandes luces sin apoyos intermedios, solución geométrico-formal que fuese más tarde adquirida pero con un material distinto ya que el concreto armado u hormigón pasó a suplir las debilidades que el metal presentaba como su poca resistencia a los efectos de la corrosión y el las consecuencias destructivas del fuego.

Aun así otros ingenieros y arquitectos contemporáneos continúan resolviendo sus propuestas con metales como lo es el caso del arquitecto Santiago Calatrava (1951 -) quien ha logrado desarrollar arcos parabólicos que abarcan la plasticidad con efectos estructurales de equilibrio estable desde las exigencias estructurales pero ante el espectador producen la sensación de un balance inestable entre las masas de los componentes y la forma que adquieren. Un ejemplo de lo anterior es el puente en estructura metálica sobre el río Turia en Valencia, España, el cual es un fiel reflejo de los efectos estéticos que signan la obra de Calatrava en materia de solución de Puentes (figura 227).



Figura 226. Puente de Maria Pia sobre el cauce del río Duero en Oporto, Portugal.

Fuente:

<http://epdip.com/arquitecto.php?id=39>



Figura 227. Puente en metal sobre el cauce del río Turia en Valencia – España.

Fuente: <http://mural.uv.es/>

2.7.2. Construcciones con concreto armado

Desde 1852 el Diccionario de la Lengua Castellana de la Real Academia Española estableció la definición del Hormigón como una “Mezcla compuesta de piedras menudas, cal y betún, la cual es tan fuerte y sólida que dura siglos y tan firme como la piedra”. Los estudios han conllevado a la evolución de su significado y hoy en día el mismo diccionario lo establece en su sentido lingüístico como una “Mezcla compuesta de piedras menudas y mortero de cemento y arena.” Pero este nuevo concepto también tiende a evolucionar.

El concreto armado hace su aparición, como material de construcción, a partir de la primera patente registrada en 1867 por Joseph Monier (1823-1906), para aplicaciones en recipientes de jardinería.

Ya en la Exposición Mundial de París de 1855 Joseph Lambort había mostrado un bote fabricado en concreto reforzado con malla metálica y barras de mayor diámetro. A pesar de la admiración que despertó y el haber solicitado una patente no tuvo mayor trascendencia. Aun así es reconocido como el inventor del ferrocemento.

Para 1880 François Hennebique construye la primera losa armada con elementos de sección circular de hierro. Posteriormente en 1888; construye un primer forjado de cemento armado con esa misma técnica: el Lombardzyde en Bélgica.

En Estados Unidos no tardan los constructores en ponerse al día con las nuevas técnicas de construcción. “En 1889 se construye “La Presa de San Mateo” (USA), a base de mampuestos unidos con mortero. Y ya en 1890 Ernesto Leslie Ransome y Ward Hyatt emplean el concreto armado a gran escala en Estados Unidos. “Museo Leland Stanfor, J.r”, “Pacific Borax Company”, “Academia Ciencias” en San Francisco. En esta última obra se emplean bovedillas de cemento armado sostenidas por columnas de hierro.” (<http://almale.blogia.com/2005/081507-siglo-xix-2-parte-.php>)

a. Arcos en concreto armado

Los arcos con mampuestos de barro curiosamente continuaron siendo una solución novedosa durante el siglo XX. La obra del arquitecto español César Martinell (figuras 228 y 229) son una de las muchas expresiones bien logradas de tales implantaciones. Sus edificaciones agrícolas conocidas como “la Catedral del Vino” son reconocidas como parte del patrimonio arquitectónico de España. La obra ha sido descrita así:

“Las bodegas fueron edificadas con las novedades técnicas incorporadas por Martinell: construcción de la estructura de las naves basada en arcos parabólicos de ladrillo, la situación de las ventanas para la ventilación de las naves, los lagares subterráneos cilíndricos y separados por cámaras aislantes ventiladas, y la composición de las texturas de las fachadas.”
http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A8sar_Martinell

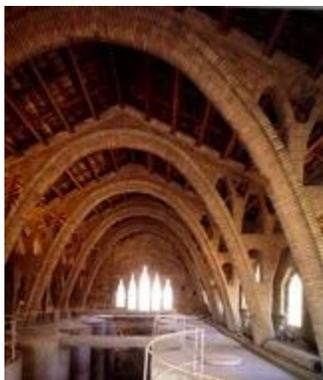


Figura 228. Arcos parabólicos con mampuestos de arcilla en la catedral del Vino en Pinell del Brai, Tarragona, España. Fuente: Cortesía del Arq. Domingo Acosta.



Figura 229. La catedral del Vino en Pinell del Brai, Tarragona, España. Fuente: Cortesía del Arq. Domingo Acosta.

a.1. Arcos parabólicos en concreto armado

La mejor manifestación de aplicaciones de arcos en concreto armado se percibe en los innumerables puentes y arcadas que salvan luces de gran longitud soportando cargas que el concreto armado admite sin llegar al colapso.

A partir de entonces comienza una vertiginosa carrera de ejemplos de aplicaciones de edificaciones de concreto armado donde el énfasis por unir a la arquitectura con la ingeniería,

léase el diseño estético con el cálculo estructural, se ve reflejado en las obras de Perret. Mas, la aplicación de arcos con estructuras de concreto armado en

“Su aspecto menos convencional y más espectacular se puede ver en las obras puramente ingenieriles del ingeniero suizo Robert Maillart (1872-1940). Partiendo no del ahorro que representa el encofrado repetitivo sino de las propias tensiones dentro de la estructura, diseñó puentes de hormigón armado con dinámicas formas parabólicas, bien adecuadas a la plasticidad del material. En sus primeros puentes, de Zuoz (1901) y Tavenasa (1905) desarrollaría una técnica, que donde mejor se manifiesta es en el Puente de la Garganta de Salgina (1929.1930),...” (Risebero, 1982:149).

El puente de Salgina (figura 230), obra del Ingeniero Maillart, sobre los Alpes Suizos, tiene 90 metros de luz, está resuelto con dos articulaciones y aún se halla en pleno funcionamiento.



Figura 230. Puente de la Garganta de Salgina.
Fuente: civilgeeks.com.

El concreto armado u hormigón facilitó considerablemente el diseño y construcción de arcos para salvar grandes luces sin apoyos intermedios, convirtiéndose en el material idóneo para casi todos los constructores debido a la condición de amoldamiento a cualquier forma preconcebida mediante encofrados algunas veces de formaleas metálicas, plásticas y, la más usual, de madera.

Sin embargo, la actividad proyectual retoma, gracias a los avances en diseño y cálculo, las soluciones planteadas mediante estructuras rectilíneas es así como se proponen obras de gran envergadura como lo es el caso del viaducto de Millau, (figura 231), que es el segundo puente más alto del mundo y el primero en Europa. “Un proyecto ideado por el arquitecto Norman

Foster y el ingeniero francés Michel Virlogeux mezcla de hormigón y acero, a lo largo de una longitud de 2.460 metros de largo, 32 metros de ancho y una altura de 343 metros.” (<http://www.miliarium.com/monografias/Puentes/PuentesMasGrandes.asp>)



Figura 231. Viaducto de Millau.
Fuente: www.urbanity.es

Venezuela no quedó alejada de los adelantos tecnológicos por el surgimiento del concreto armado. De hecho el país, en la década de los años 50-60 fue el principal exponente, a nivel de Sudamérica, de obras proyectadas y construidas, normativas y estudios teóricos sobre el comportamiento de este nuevo material.

Fue así como; mediante una tecnología de punta, Venezuela se colocó al frente de los procedimientos constructivos más avanzados para la década de los años 50, logrando la construcción del viaducto 1 Caracas-La Guaira (figura 232). “Fue proyectado en 1950 por la firma francesa Campenon Bernard, bajo la concepción y asesoría del eminente profesor Eugene Freyssinet. En esta foto, tomada a mediados de 1953, se aprecia en avanzada ejecución.” <http://www.geocities.com/spulidos/Historia.htm>



Figura 232. Viaducto caracas La Guaira.
Fuente: <http://www.geocities.com/>

a.2. Arcos de catenaria en concreto armado

La sede de la Antigua Reserva Federal de Minnesota, Estados Unidos (figuras 233 y 234) es una edificación de estructura mixta conformada por dos planos laterales de concreto armado con una separación de 100 metros que sirven de soporte a una estructura de acero. Consiste básicamente en dos grandes estructuras laterales de hormigón separadas 100 metros una de la otra que sirven de soporte en las que se anclan dos inmensos cables en forma de catenaria que sustentan la estructura del edificio de 11 pisos, la curva se reproduce en la fachada para resaltar el sistema constructivo empleado.



Figura 233. Arco de catenaria en el edificio Minneapolis, Estados Unidos.

Fuente: <http://mnhs.org>



Figura 234. Detalle del arco de catenaria como estructura portante en el edificio Minneapolis, Estados Unidos.

Fuente: <http://www.arch.mcgill.ca/>

El edificio diseñado por el arquitecto Gunnar Birkets (1925 -) es una muestra de las cualidades portantes de la curva catenaria cuando responde a condiciones estructurales portantes similares a la configuración empleada en puentes y otras estructuras.

b. Bóvedas y cúpulas en concreto armado

El neoclasicismo fue el período comprendido entre los años 1750 – 1840 (aprox). Surgió como respuesta al inicio de la decadencia del estilo barroco. Alcanzó una marcada influencia en los proyectos de arquitectura y urbanismo mediante una obtención simplificada de la forma

basada en la manipulación las figuras geométricas, que tales como la circunferencia eran plasmadas en el trazo de ciudades y en la solución de proyectos de edificaciones.

b.1. Arquitectura visionaria. Una concepción utópica de las cúpulas

En ese período destaca Etienne-Louis Boullée (1728–1799) quien elaboró una propuesta arquitectónica y estructural para un cenotafio a Newton. (figuras 236 y 237). La configuración geométrica resultó en una esfera de 150 metros de diámetro que sería rematado con un planetario y todo lo cual se ubicaría sobre un túmulo. Una solución descomunal para la época y que no había tecnología capaz de hacerla realidad por lo que el proyecto se convirtió en una utopía.

Gympel, EN 1996, registró las ideas de Boullée: “En Newton a través de la grandeza de su sabiduría y la elevación de su genio ha determinado la forma de la tierra, mi idea era involucrarme en su descubrimiento.”³ (Boullée mencionado por Gympel, 1996:63).

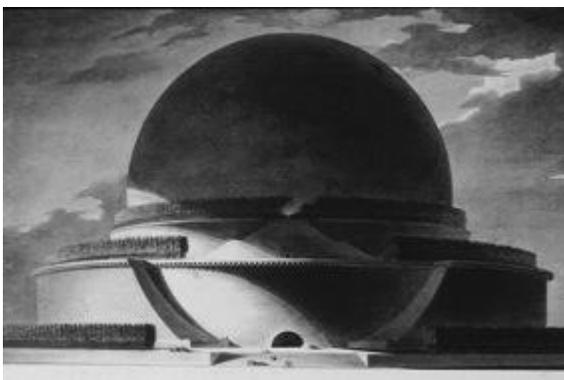


Figura 236. Proyecto utópico de 1784 elaborado por Etienne-Louis Boullée para un cenotafio a Newton.

Fuente: <http://sam-maya-architekt.blogspot.com/2011/05/cenotafio-de-newton.html>



Figura 237. Proyecto utópico de 1784 elaborado por Etienne-Louis Boullée para un cenotafio a Newton.

Fuente: <http://sam-maya-architekt.blogspot.com/2011/05/cenotafio-de-newton.html>

Boullée fue reconocido como un visionario y su idea que no fue más que una utopía para su época pudo cristalizarse hasta 1922, aunque a mucho menor, con la cúpula de Jena que ya ha sido analizada con antelación en esta misma investigación.

³ La cita original es en portugués: “Ó Newton, através du grandeza da tua sapiencia e da elevação do teu génio determinaste a forma da Terra; a minha ideia foi envolver-te na tua descoberta”

b.2. Bóvedas en concreto armado

En 1894 es finalizada en París la construcción de la iglesia de St. Jean de Montmartre (figuras 238 y 239) obra de Anatole de Baudot (1834 - 1915). Un conjunto de bóvedas góticas que emitían los esfuerzos sobre vigas rectas horizontales (elementos a tensión) y éstas las distribuían a las columnas (elementos a compresión).



Figura 238. Iglesia de St. Jean de Montmartre.

Fuente: <http://www.flickr.com/photos/32151025@N02/3379406933/>

El diseño para la iglesia de Saint Jean de Montmartre construida es descrita así:

“Anatole de Baudot Arquitecto francés. Discípulo de Labrouste y de Viollet-Le-Duc, su obra más importante es el edificio St. Jean de Montmartre de París (1894-1902), que fue el primero en que todas las partes estructurales, incluyendo los nervios de las bóvedas, se construyeron con hormigón armado al descubierto. De estilo aún gótico, se le puede considerar como la muestra de mayor éxito en la unión de lo antiguo y lo moderno defendida por Viollet-le-Duc en sus *Entretiens*.”
(www.biografiasyvidas.com/biografia/b/baudot_anatole.htm)



Figura 239. Vista interna de la iglesia de St. Jean de Montmartre.

Fuente: <http://www.flickr.com/photos/32151025@N02/3380223034>

La tendencia se ha mantenido hasta ahora a pesar de que en el siglo XIX se generó la aparición de las primeras grandes estructuras erigidas con concreto armado.

“Este material, que representaría más que ningún otro los métodos constructivos del siglo XX, tenía más de medio siglo de existencia. Fue posible su utilización en la práctica por el descubrimiento del Cemento Pórtland en 1820, utilizándose de forma primitiva en la construcción de la Fábrica Textil de Fairbairn en Manchester (1845). En 1861, el constructor francés Francois Coignet le dio la forma que prácticamente se conserva en la actualidad: una malla de acero embebida en el hormigón para lograr en cada elemento constructivo dos funciones estructurales: la resistencia a compresión del hormigón y la resistencia de tracción del acero.” (Risebero, 1982:149).

b.3. Cúpulas en concreto armado

Pier Luigi Nervi (1891 – 1979), arquitecto italiano, proyectó una cúpula de concreto armado: el Norfolk Scope Arena, en el estado de Virginia, Estados Unidos, (figura 240)



Figura 240. El Norfolk Scope Arena en Virginia, Estados Unidos.

Fuente: <http://www.pic2fly.com/Norfolk+Scope+Seating.html>

El antecedente del Norfolk Scape Arena fue un diseño del mismo Pier Luigi Nervi que fue construido en Roma, Italia, para las olimpiadas de 1960; el Palazzetto dello Sport, un domo en concreto armado de 51 metros de diámetro que albergó las actividades deportivas para 5 mil espectadores.



Figura 241. El Palazzio Sport proyecto de cúpula en concreto armado diseñada por Pier Luigi Nervi, Roma, Italia.
Fuente: <http://www.pic2fly.com/Norfolk+Scope+Seating.html>

b.4. Cubiertas de concreto armado con estructura de conoide. El Club Táchira

El arquitecto venezolano José Fructuoso Vivas – Fruto Vivas; (1928 -) diseño y construyó en 1955 la cubierta para el salon de eventos del Club Táchira en colinas de Bello Monte, Caracas. (figura 242).

Aún cuando el Torroja en 1976, no realiza alguna descripción del proyecto; sin embargo, registra una maqueta en fotografía de M. García Moya y coloca su nombre en el prototipo de esta cubierta. (figura 243). Torroja (1976) –sin mencionar en lo absoluto a Fruto Vivas en la autoría de este proyecto- sólo se limita a especificar lo siguiente:

“Y así se pueden construir con éxito formas tan variadas (...) que son solamente anuncio y pregón de la revolución que se avecina en el campo de la arquitectura, cuyo vocabulario de formas plásticas se va abriendo y ensanchando con rapidez y fecundidad imaginativa desconocidas en toda la historia de la construcción.” (Torroja, 1976:140)



Figura 242. La cubierta del Club Táchira en Caracas.
Fuente: santiagodeleondecarracas.blogspot.com/



Figura 243. Propuesta nunca construida de Eduardo Torroja para la cubierta del Club Táchira en Caracas.
Fuente: www.ciccp.es/

b.5. El hiperboloide como solución geométrica llevada a los diseños arquitectónicos

Si bien las cubiertas de paraboloides hiperbólicos construidas en Europa sufrieron un receso durante la II Guerra Mundial, llevando a la destrucción a algunas de ellas debido a bombardeos; las estructuras construidas con base en la superficie del hiperboloide tuvieron una suerte distinta.

Con el diseño de los arquitectos Arniches y Domínguez y del Ing. Eduardo Torroja fue construido el conjunto de las tribunas del hipódromo de la Zarzuela en Madrid, España, en 1935 e inaugurado en 1941. (figura 244).



Figura 244. La cubierta del Hipódromo de la Zarzuela, Madrid – 1935. Ing. Eduardo Torroja.
Fuente: <http://es.paperblog.com/hipodromo-de-la-zarzuela-madrid-198567/>

Ya la forma hiperbólica había sido empleada en 1919 cuando el ingeniero Vladimir Shujov, propuso la construcción de la Torre Shujov (160 m de altura). (figura 245)



Figura 245. La Torre Shujov. Moscú – 1919. Ing. Vladimir Shujov.

Fuente: wikimapia.com

Las propuestas de hiperboloides adoptadas por Oscar Niemeyer (1907–2012) en la catedral de Brasilia Nossa Senhora Aparecida (figura 246). La estructura inusualmente liviana es de hormigón armado y está compuesta por 16 columnas (equivalentes a las generatrices de un hiperboloide de revolución).



Figura 246. Catedral metropolitana de Brasilia. Oscar Niemeyer.

Fuente: <http://0.tqn.com/d/architecture/1/0/1/x/MetropolitanCathedral.jpg>

Las estructuras de hiperboloide continúan siendo dispuestas en proyectos algunos de ellos de corte utópico tal como el diseño del rascacielos de 300 m de altura denominado Barrio Capital (figura 247) de los arquitectos Eduardo Gorozpe y Ricardo Villagómez. La

idealización de la forma hiperboloide se concibe a partir de un cilindro con rampas que se constituyen con base en otra superficie: la cinta de Möbius.



Figura 247. Rascacielos de Barrio Capital. Ciudad de México. Arq. Eduardo Gorozpe. Fuente: <http://www.arqhys.com/rascacielos-publico.html>

c. La espiral y la helicoide en concreto armado

c.1. El monumento a la III Internacional. Una espiral utópica

Vladimir Tatlin (1885 – 1953), pintor, escultor y arquitecto ruso fundador en 1914 de la corriente artística rusa más conocida: el constructivismo. Bajo esa vanguardia diseñó la Torre a la Tercera Internacional, un monumento arquitectónico de 300 m

de altura con base en una estructura en espiral que como alegoría a el afán por considerar los sólidos geométricos en el interior de la estructura quedaban contenidas una esfera, un cilindro, un cubo y una pirámide (figura 248). No alcanzó a construirse. Sin embargo, la idea logró sentar el precedente necesario para demostrar la alta influencia que tenía la geometría de las estructuras en los inicios de la corriente constructivista.



Figura 248. Monumento a la Tercera Internacional. Vladimir Tatlin, Moscú. 1920.

Fuente: <http://gutierrezcabrero.dpa-etsam.com/>

c.2. El museo Guggenheim de Nueva York

El museo de Arte Moderno de Nueva York, (figura 249) obra diseñada por el arquitecto Frank Lloyd Wright (1867 – 1959; figura 250), posee una estructura de espiral, con una galería que en su recorrido de seis pisos describe a una helicoide alabeada. Todo esto dejando hacia el exterior una forma simple como lo es la de un cono truncado debido a que las paredes de la fachada son inclinadas.



Figura 249. Museo de Arte Moderno de Nueva York. Arq. Frank Lloyd Wright (1943).

Fuente: <http://www.disenoyarquitectura.net/2009/03/museo-guggenheim-frank-lloyd-wright.html>

También conocido como Museo Guggenheim el edificio fue diseñado por Wright en 1943, pero, no fue sino hasta 1956 cuando se dio inicio a su construcción.



Figura 250. Arquitecto Frank Lloyd Wright.

Fuente: http://www.designboom.com/cms/images/z101/frank-lloyd-wright_01.jpg

c.3. El Helicoide de Roca Tarpeya

Otra obra relevante que pudo haber marcado un antes y un después de proyectos con estructuras de concreto armado fue el Helicoide de la Roca Tarpeya en Caracas (figura 251). Concebida como un centro comercial y exposición de industrias. Proyectada por Jorge Romero Gutiérrez, Pedro Neuberger y Dirk Bornhost. El domo geodésico que fue dispuesto para coronar su azotea es un proyecto de Buckminster Fuller.



Figura 251. El Helicoide de la Roca Tarpeya en Caracas.
Fuente: Revista Dada.

d. El cilindro, el cubo, la pirámide

La arquitectura moderna continuó evolucionando en el transcurso del siglo XX y logra desarrollar tendencias de I+D+I que logran intervenciones y proyecto de edificaciones que manipulan volúmenes geométricos como el cilindro, el cubo la pirámide y los paralelepípedos rectangulares que aun cuando

Entre los ejemplos más significativos de esta tendencia se mencionan:

d.1. Edificios cilíndricos

Desde la antigüedad se conocía la aplicación del cilindro en bóvedas que alcanzaban estados de equilibrio sin que interviniesen materiales más idóneos que los mampuestos de barro y los cementantes con productos de origen vegetal y tierra. Sin embargo, disponer de un cilindro en edificaciones verticales para solucionar espacios habitables es un reto que posee dos vertientes distintas por una parte la de disponer elementos constructivos rectos como lo son la mayoría

de los que se consiguen en el mercado de insumos para la construcción y convertirlos en curvos y por otro la disposición de las paredes y muros que en línea recta de pronto se consiguen enfrentados a los elementos curvos generando una cantidad de espacios desperdiciados donde no se consigue la unificación espacial.

Tal fue el caso, por mencionar algunos ejemplos, el edificio sede de la empresa Seguros Capitolio (figura 252) en El Rosal, Caracas. El edificio geoméricamente es un cilindro resuelto con estructura de concreto armado diseñado por el arquitecto Álvaro Coto Asenjo.



Figura 252. Edificio de seguros capitolio. El Rosal, Caracas.
Fuente: Cortesía de la Arq.^a Carolina Coto.

El cilindro como solución volumétrica de las edificaciones contemporáneas ha sido utilizado a su vez en proyectos médico-asistenciales. Tal es el caso, también en Caracas, de la sede de la clínica Atías (figura 253) y el conjunto privado de Burjassot, provincia de Valencia, España (figura 254)



Figura 253. Clínica Atías, en Caracas.
Fuente: blogcaracas.com



Figura 254. Conjunto médico-asistencial de Burjassot en Valencia, España.
Fuente: www.skyscrapercity.com

d.2. Edificios con estructura formal inscrita en un cubo⁴

Algunos edificios de la arquitectura de todas las épocas han sido resueltos con una propuesta aproximada a la geometría del cubo. En la arquitectura contemporánea múltiples ejemplos dan prueba de que el cubo, como solución geoméricamente aproximada, sigue siendo una de las figuras volumétricas más explotadas en diseños arquitectónicos que se convierten en hitos culturales en los lugares donde son emplazados.

En la ciudad de Caracas esta vez en la Urb. Chuao se halla la torre Centro Banaven. Conocida como “el cubo negro”. Un edificio de oficinas diseñado, a finales de los años 70, por los arquitectos venezolanos Enrique Gómez y Carlos Gómez, con asesoría de la firma estadounidense Phillip Johnson. Aun cuando es un edificio de planta cuadrada, la construcción no es en si un cubo como tal; más que en la denominación con la cual ha sido identificado por las personas. (figura 255).

El cubo negro, además de una inigualable ubicación posee excelentes acabados cualidades que lo han convertido en un punto de referencia de la arquitectura venezolana.

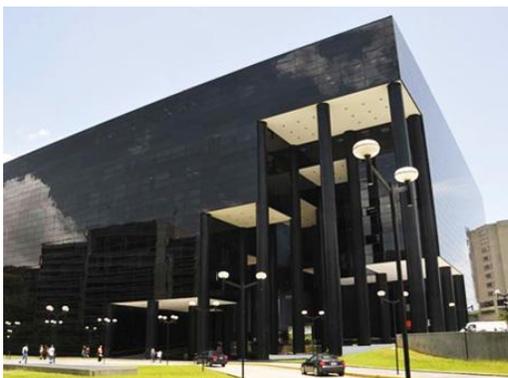


Figura 255. Torre Banaven “El cubo negro” en Caracas. Fuente: <http://centrobanaven.com/detalle.aspx?id=11&plantilla=1>

Otro edificio con una estructura de planta cuadrada, que es identificado por las personas como un cubo, corresponde a la respuesta estructural planteada por los arquitectos del grupo en la ciudad china de Jinjua. Quienes dispusieron una aplicación interesante de paredes y

⁴ Los dos ejemplos aquí indicados corresponden a edificios de planta cuadrada pero más que un cubo perfecto, debido a la altura que poseen, se constituyen geoméricamente como prismas rectangulares.

estructuras portantes de concreto armado con materiales contemporáneos como el acero esmaltado para recubrir vigas y columnas en el edificio conocido como “el cubo tubo” (figura 256).



Figura 256. Edificio conocido como “el cubo-tubo” en Jinjua, China.
Fuente: <http://www.arqhys.com/edificio-cubo-tubo.html>

d.3. La Pirámide del Museo Louvre de París

La evolución de las innovaciones estructurales para el diseño de rascacielos llevó a que durante el siglo XX desembocaran en la concepción de la armazón portante inscrita en un triángulo. Como consecuencia de este acontecer tecnológico se llegó a la concepción de intervenciones en edificios contemporáneos con volúmenes que remontan su surgimiento en el antiguo Egipto.

El arquitecto Leoh Ming Pei (1917-) diseñó en el patio del Museo Louvre de París una controversial pirámide recubierta de paneles de cristal.



Figura 257. Pirámide de cristal del Museo Louvre en París. Arquitecto Leoh Ming Pei.
Fuente: <http://tat.fotolibre.net/2006/03/09/paris-c%E2%80%99est-magnifique/>

e. La instauración de la forma libre en la arquitectura contemporánea

Las formas puras de la geometría han cedido paso, en muchos de los casos, a estructuras con una forma mucho más libre que no están determinadas por cánones que respondan a predeterminaciones estructurales

e.1. Kenzo Tange

El arquitecto japonés Kenzo Tange (1913-2005) es uno de los exponentes de la transformación de la tendencia que conlleva a la geometrización de la arquitectura bajo formas y volumetrías preestablecidas hacia una morfología diferente con una forma no preestablecida con edificaciones que adquieren un dinamismo sin alterar sus condiciones de equilibrio autosustentable.

Si se observa la figura del Monumento a la Paz de Hiroshima, Japón, (Peace Memorial Park) se percibe la rigidez que desarrolla un elemento abovedado, con perfil de parábola fabricada con concreto armado sobre un espejo de agua. La evolución desde una forma geoméricamente pura hacia una forma libre no obligatoriamente determinada ha sido asumida por K. Tange, marcando así una tendencia que gana cada día más adeptos dentro de los grupos de diseñadores de más prestigio. Un ejemplo de dicha implantación conceptual es el diseño del centro de actividades deportivas Yoyogi National Gymnasium, una edificación que sirvió de sede para los deportes de natación techados para las olimpiadas de Tokio de 1964.



Figura 258. Monumento a la Paz, diseñado por Kenzo Tange en Hiroshima Japón.

Fuente: www.viajesok.com



Figura 259. Yoyogi National Gymnasium, (1964) diseñado por Kenzo Tange en Tokio, Japón.

Fuente: www.flickr.com

e.2. Frank Gehry

Frank Gehry (1929-) en 1990 diseñó el edificio que alberga la sede del Museo de la Fundación Solomon Guggenheim en Bilbao, España. Philip Johnson, arquitecto estadounidense, mencionado como asesor en el proyecto del cubo negro caraqueño, elogio el resultado de esta edificación que sin duda alguna mediante la aplicación de formas libres que no responden a algún tipo de geometrización ha logrado romper los paradigmas en cuanto al empleo de volúmenes curvilíneos combinados con innovadores acabados como lo son las planchas de titanio.

El arquitecto Ghery ha logrado resolver una estructura portante manteniendo la prevalencia de las líneas curvas al grado de sostener que en su concepción arquitectónica no fue empleada en lo absoluto ningún segmento de línea recta.

¿Hasta dónde existe un material para ser empleado como recubrimiento exterior –como lo es el caso del titanio- que pueda ser sometido a la deformación curva y expuesto a la intemperie sin poner en riesgo la estabilidad estructural de la edificación?



Figura 260. Museo Guggenheim Bilbao. País Vasco, España. Arquitecto Frank Gehry.

Fuente: http://thumbs.dreamstime.com/thumblarge_552/12886126275t4Hav.jpg

Estas y muchas otras interrogantes quedan pendiente de responderse en el tiempo en la medida en que se logren otros avances innovadores en los conocimientos de la corriente arquitectónica que se ha dado en llamar el decosntructivismo quizás una de las corrientes arquitectónicas vigentes que están fundamentadas en la forma libre basada en curvas para la obtención de volumetrías bajo patrones orgánicos.

2.8. Conclusiones del Capítulo 2

Hasta aquí se ha hecho un recorrido retrospectivo analizando los diferentes sistemas constructivos que han prevalecido en el devenir arquitectónico de la humanidad, partiendo de la línea recta y de sus aplicaciones evolutivas que preceden al desarrollo de los conocimientos geométricos.

Esto es: siempre ha debido existir con antelación la comprensión geométrica para que pueda generarse el avance tecnológico-constructivo.

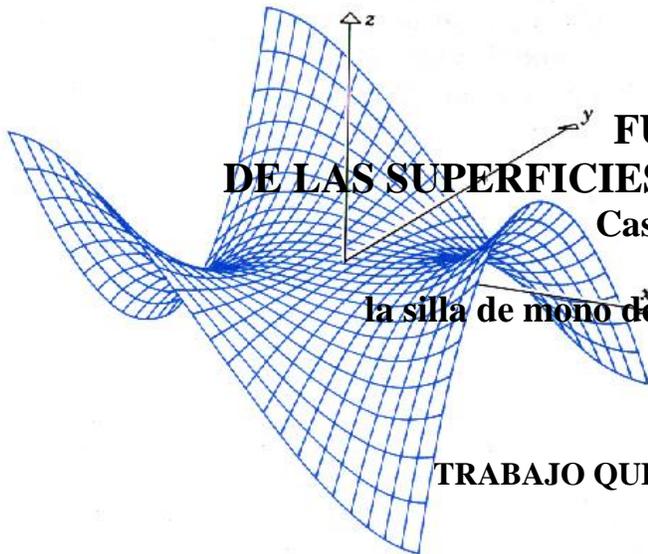
Describir la concepción de sistemas estructurales, arquitectónicos y constructivos que han empleado a los arcos, luego a las bóvedas, las cúpulas y otras superficies, entre las cuales tienen relevancia por el carácter de esta investigación la aplicación de las cuádricas, es, por sí misma, ya un intento por establecer un estado del arte, del perfeccionamiento que ha alcanzado la arquitectura, en la cual muchos estudiosos del tema no han logrado un acuerdo. Sobre todo al momento de seleccionar cuáles serían las obras más relevantes y significativas, sin que esto genere algún tipo de discriminación tecnológica. Pero, además, es sumamente difícil la selección de la “*muestra referencial de edificaciones*” cuando se incluyen en ella los ejemplos de la arquitectura e ingeniería venezolana, tal como aquí se ha hecho.

Cobra mayor relevancia aun, al revisar el análisis realizado, el hecho de concluir que no ha sido posible alcanzar una innovación tecnológica en los procedimientos constructivos de la humanidad sin antes haber existido un avance en el conocimiento geométrico que la logra determinar y afianzar.

Originalmente este capítulo 2 se titulaba Arcos, bóvedas, cúpulas y superficies alabeadas de doble curvatura... en el han sido obviadas precisamente estas últimas: las superficies alabeadas de doble curvatura; específicamente las comprendidas entre el conjunto de los paraboloides hiperbólicos, las sillas de mono de una o más colas; que son, precisamente, el objeto de estudio de esta investigación. La razón no es otra más que el hecho de que ya en el 1er capítulo se ha abordado el análisis histórico de las edificaciones construidas con soluciones estructurales de estas superficies. Necesario es hacer la salvedad nuevamente de que edificaciones resueltas con sillas de mono ordinarias para monos de una cola, *perturbadas* o sillas para monos de dos o más colas, hasta donde se ha indagado, no existen ejemplos edificados.



**UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
DOCTORADO DE FACULTAD V COHORTE**



**TESIS DOCTORAL
FUNDAMENTOS GEOMÉTRICOS
DE LAS SUPERFICIES DE PARÁBOLAS INVERTIDAS**
Caso de Estudio: Parámetros comparativos
del paraboloides hiperbólico,
la silla de mono de una cola y la silla de mono de dos colas

**TRABAJO QUE SE PRESENTA PARA OPTAR AL GRADO
DE DOCTOR EN ARQUITECTURA**

ALUMNO: M. Sc. Arq. RAFAEL GERARDO PÁEZ ESPINOZA

TUTOR: Dr. Ing. ALONSO ROMERO MARTÍNEZ

CARACAS, VENEZUELA; JUNIO DE 2013

Tomo 2

CAPÍTULO 3

Superficies, conceptualización, generación geométrico-analítica y clasificación. Sus propiedades y representación geométrica

3.0. Introducción al concepto de superficie	211
3.1. Superficies, definiciones generales, generación y clasificación	212
a. Definición de superficie	
b. Generación de las superficies	213
c. Clasificación de las superficies	214
3.2. El plano	
3.3. Superficies de generación cilíndrica: clasificación y representación geométrico-analítica de las superficies cilíndricas	215
3.3.1. Generación cilíndrica de curvas	216
3.3.2. Propiedades geométricas de las superficies cilíndricas que permiten sus aplicaciones constructivas	217
3.4. Superficies de generación cónica. Clasificación y representación geométrico-analítica	218
3.5. Las cónicas	220
3.5.1. La elipse	222
3.5.2. La hipérbola	224
3.5.3. La parábola	
3.6. Cuádricas. Definición y clasificación	225
3.6.1. El elipsoide, condiciones geométricas de los elipsoides, elipsoide de revolución	226
a. Condiciones geométricas de los elipsoides	
3.6.2. Superficie esférica	230
3.6.3. Hiperboloide de una hoja	232
3.6.4. Hiperboloide de dos hojas	
3.6.5. Paraboloide elíptico	233
3.6.6. Paraboloide hiperbólico	235
a. Punto de ensilladura	237
3.6.7. Parámetros geométricos que determinan la aplicación de las cuádricas como estructuras para sistemas de cubiertas en edificaciones	238
3.6.8. Silla de mono ordinaria para un mono de una cola	241
3.6.9. Silla de mono para un mono de dos colas	243
3.6.10. <i>Silla de mono perturbada para monos de una cola</i>	
3.7. Parámetros geométricos para la representación gráfica de las sillas de mono <i>perturbadas</i> para monos de una cola	244
3.8. Propiedades geométricas de las superficies alabeadas de doble curvatura clasificación y ecuaciones que las determinan	247
3.8.1. La primera forma fundamental	
a. El área bajo la superficie	
b. La curvatura	
3.9. Fundamentos geométricos de los paraboloides hiperbólicos comparados con las sillas de mono de una y de dos colas	248
a. El paraboloide hiperbólico. Modalidades geométricas de su representación gráfica	

b.	La curvatura gaussiana del paraboloides hiperbólico	251
c.	La curvatura media del paraboloides hiperbólico	
d.	Curvatura gaussiana de las sillas de mono	253
e.	Curvatura media de las sillas de mono	254
3.10.	Otras superficies con potencial aplicación en procedimientos constructivos	
3.11.	Conclusiones del capítulo 3	257

Capítulo 4

Estudio comparativo de sistemas estructurales de cubiertas de paraboloides hiperbólicos mediante su clasificación y representación geométrica – espacial

4.0.	Introducción	259
4.1.	La forma construida vs el equilibrio estructural	261
4.2.	Aportes de Issenman Pilarsky a la representación arquitectónica de los paraboloides hiperbólicos	262
4.2.1.	Paraboloides hiperbólicos como superficie anticlástica, de configuración geométrica espacial que generan planta cuadrada	263
a.	Propuesta de Issenman Pilarsky	
b.	Descripción hecha por Félix Candela, a partir del concepto de Pilarsky, para la obtención de la configuración geométrica – espacial de paraboloides hiperbólicos de planta cuadrada como superficie anticlástica	264
c.	Combinaciones de dos, tres o cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos de planta cuadrada (superficies anticlásticas)	268
d.	Condiciones geométricas que permiten el equilibrio estable en cubiertas de cuatro unidades cuadradas de paraboloides hiperbólicos	269
e.	Combinación de cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos configuración rectangular y bordes rectos	271
f.	Otros modelos de paraboloides hiperbólicos propuestos por Pilarsky	273
4.2.2.	Configuración geométrica-espacial de paraboloides hiperbólicos como superficie sinclástica o de traslación	275
4.3.	Heino Engel, propuesta de un sistema de clasificación de las estructuras	278
4.3.1.	Sistemas de superficie activa. Prototipos registrados por Heino Engel	280
4.3.2.	Sistemas de forma activa. Prototipos registrados por Heino Engel	282
4.3.3.	Sistemas de vector activo. Prototipos registrados por Heino Engel	283
4.4.	Aproximación a un sistema de representación espacial y clasificación de paraboloides hiperbólicos. El aporte de Fred Angerer	284
4.5.	Aportes de Eduardo Catalano para la configuración, clasificación y representación de paraboloides hiperbólicos	287
4.6.	Conclusiones del capítulo 4	291

Capítulo 5

Fundamentos geométricos de las superficies de parábolas invertidas Propuesta de la investigación

5.0.	Introducción	293
5.1.-	Estudio comparativo de los parámetros geométricos que determinan el equilibrio estable en las superficies alabeadas de doble curvatura como sistemas de cubiertas	294
a.	Posicionamiento del sistema de ejes de coordenadas cartesianas	295

b.	Comandos que determinan los parámetros geométricos de las superficies a representar	296
c.	Nomenclatura propuesta	298
d.	El software <i>Derive</i> [®] como herramienta computacional para la agrupación de familias de superficies alabeadas de doble curvatura	300
e.	Propuesta de aplicación de las superficies alabeadas de doble curvatura como sistema de cubiertas en edificaciones	302
5.2.-	Descripción de la metodología a seguir para el diseño de las familias de superficies propuestas	304
5.2.1.	Propuesta de parámetros geométricos para la modelación de paraboloides hiperbólicos y sillas de monos. Valores predeterminados para cada una de las posiciones	
a.	Valores predeterminados en la posición <i>n.1</i>	
b.	Valores predeterminados en la posición <i>n.2</i>	306
c.	Valores predeterminados en la posición <i>n.3</i>	307
d.	Valores predeterminados en la posición <i>n.4</i>	309
e.	Valores predeterminados en la posición <i>n.5</i>	311
f.	Valores predeterminados en la posición <i>n.6</i>	312
g.	Valores predeterminados en la posición <i>n.7</i>	314
h.	Valores predeterminados en la posición <i>n.8</i>	316
i.	Valores predeterminados en la posición <i>n.9</i>	317
5.2.2.	Resumen de las ecuaciones de las familias de superficies que serán representadas. (nueve posiciones por cada tipo de familia de superficies)	320
5.3.	Familias de superficies de paraboloides hiperbólicos	321
5.4.	Familias de sillas de monos ordinarias para monos de una cola	331
5.5.	Familias de sillas de mono <i>perturbadas</i> para monos de una cola	337
5.6.	Familias de sillas de mono para monos de dos colas	343
5.7.	Conclusiones del capítulo 5	349

CAPÍTULO 6

Resultados, conclusiones y recomendaciones de la investigación

6.1.	Resultados de la investigación	351
a.	Superficies estudiadas en la investigación	
b.	Superficies de parábolas invertidas. Una nueva denominación para las superficies alabeadas de doble curvatura estudiadas	354
c.	Importancia de los resultados de esta investigación	355
d.	Aplicabilidad del software matemático <i>Derive</i> [®] en las actividades de diseño y construcción de cubiertas para edificaciones	357
d.1.	Resultados para la posición <i>n.1</i>	
d.2.	Resultados para las posiciones <i>n.2</i> a la <i>n.5</i>	358
d.3.	Resultados para la posición <i>n.6</i>	363
d.4.	Resultados para la posición <i>n.7</i>	364
d.5.	Resultados para la posición <i>n.8</i>	365
d.6.	Resultados para la posición <i>n.9</i>	366
e.	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas	368

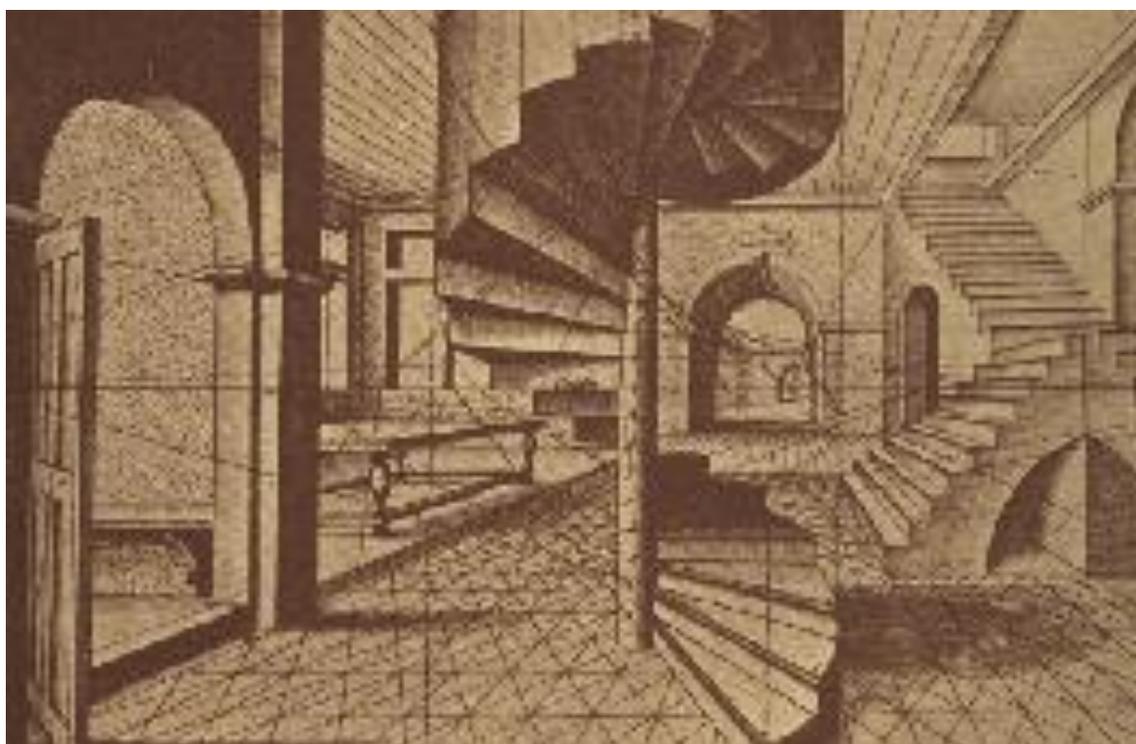
e.1. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.2</i>	369
e.2. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.3</i>	371
e.3. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.4</i>	373
e.4. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.5</i>	375
e.5. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.6</i>	377
e.6. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.7</i>	379
e.7. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.8</i>	381
e.8. Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.9</i>	383
6.2. Conclusiones y recomendaciones de la investigación.	385
6.3. Trabajos de investigación a futuro	387
6.3.1. Descripción de las variantes para la posición <i>n.3</i> , <i>n.3-a</i> , <i>n.3-b</i> , .y. <i>n.3-c</i> de las superficies de parábolas invertidas	
6.3.2. Descripción de las variantes para la posición <i>n.10</i> , <i>n.10-a</i> , <i>n.10-b</i> , y <i>n.10-c</i> de las superficies sillas de mono <i>perturbadas</i> para monos de una cola	390
Anexos	
Anexo 1. Conceptos de Geometría Descriptiva que se relacionan con esta investigación.	393
Apéndice 1. Modo de obtener las cónicas curvas descrito por Thomas.	404
Bibliografía	406
Glosario	407
	412

Nº	ÍNDICE DE CUADROS	Pg.
	Descripción	
	Capítulo 3	
3.1	Propiedades geométricas de las superficies cilíndricas	217
3.2	Propiedades geométricas de las cónicas curvas.	223
3.3	Clasificación de los elipsoides según la longitud y características de los semiejes	229
3.4	Condiciones de los planos de coordenadas y secciones ante la representación de un elipsoide cuya expresión analítica es de la forma	230
	<i>; a, b y c ≠ 0</i>	
3.5	Condiciones de los planos de coordenadas y secciones ante la representación de un paraboloides hiperbólico de la forma	236
	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$; a y b son positivos y c ≠ 0.	
3.6	Fundamentos geométricos de las cuádricas según sus trazas	255
3.7	Otras superficies con potencial aplicación en procesos edificatorios	261
	Capítulo 4	
4.1	Condiciones de equilibrio estable en cubiertas de paraboloides hiperbólicos de configuración geométrica-espacial cuadrada y bordes rectos	270
4.2	Condiciones de equilibrio estable en cubiertas de paraboloides hiperbólicos de configuración geométrica-espacial rectangular y bordes rectos	272
	Capítulo 5	
5.1	Variaciones del sistema de coordenadas cartesianas para las posiciones <i>n.1</i> hasta <i>n.9</i> en la representación de las familias de superficies diseñadas de paraboloides hiperbólicos, sillas de monos para monos de una cola ordinarias y <i>perturbadas</i> y para monos de dos colas	297
5.2	Obtención de las vistas o proyecciones de un objeto arquitectónico	304
5.3	Resumen de las ecuaciones de las familias de superficies representadas	320
	Familias de paraboloides hiperbólicos	
5.4	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 1 $z = x^2 - y^2$	321
5.5	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 2 $z = 2x^2 - y^2$	322
5.6	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 3 $z = y^2 - x^2$	323
5.7	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 4 $z = 2y^2 - x^2$	324
5.8	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 5 $z = x^2 - 2y^2$	325
5.9	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 6 $z = 2x^2 - 2y^2$	326
5.10	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 7 $z = x^2 - 3y^2$	327
5.11	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 8 $z = x^2 - 3y^2$	328
5.12	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 9 $z = 3x^2 - 2y^2$	329
5.13	Paraboloides hiperbólico tipo Ph 10 $z = x y$	330

Familias		
de sillas de mono ordinarias para monos de una cola		
5.14	Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 1 $z = x^3 - 3xy^2$	331
5.15	Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 2 $z = x^3 - 2xy^2$	332
5.16	Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 3 $z = x^3 - xy^2$	333
5.17	Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 4 $z = 2x^3 - 3xy^2$	334
5.18	Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 5 $z = 2x^3 - 2xy^2$	335
5.19	Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 6 $z = 2x^3 - xy^2$	336
Familias		
de sillas de mono perturbadas para monos de una cola		
5.20	Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo Sm _{pert} 1 $z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$	337
5.21	Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo Sm _{pert} 2 $z = x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$	338
5.22	Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo Sm _{pert} 3 $z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$	339
5.23	Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo Sm _{pert} 4 $z = 2x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$	340
5.24	Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo Sm _{pert} 5 $z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$	341
5.25	Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo Sm _{pert} 6 $z = 2x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$	342
Familias de sillas de mono para monos de dos colas		
(Sm₂)		
5.26	Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 1 $z = 4xy (x^2 - y^2)$	343
5.27	Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 2 $z = 3xy (x^2 - y^2)$	344
5.28	Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 3 $z = 2xy (x^2 - y^2)$	345
5.29	Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 4 $z = xy (x^2 - y^2)$	346
5.30	Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 5 $z = \frac{1}{2} xy (x^2 - y^2)$	347
5.31	Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 6 $z = \frac{3}{4} xy (x^2 - y^2)$	348
Capítulo 6		
6.1	Superficies estudiadas en la investigación	352
6.2	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.2</i>	359
6.3	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.3</i>	360
6.4	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.4</i>	361
6.5	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.5</i>	362

6.6	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.6</i>	363
6.7	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.7</i>	364
6.8	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.8</i>	365
6.9	Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.9</i>	366
6.10	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.2</i>	369
6.11	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.3</i>	371
6.12	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.4</i>	373
6.13	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.5</i>	375
6.14	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.6</i>	377
6.15	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.7</i>	379
6.16	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.8</i>	381
6.17	Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas. Posición <i>n.9</i>	383
6.18	Parámetros geométricos comparativos para la representación gráfica de las familias de superficies de parábolas invertidas para las posiciones <i>n.3</i> , <i>n.3-a</i> , <i>n.3-b</i> , y <i>n.3-c</i> .	388
6.19	Parámetros geométricos comparativos para la representación gráfica de las familias de superficies de parábolas invertidas para las posiciones <i>n.10</i> , <i>n.10-a</i> , <i>n.10-b</i> , y <i>n.10-c</i> .	390

CAPÍTULO 3 SUPERFICIES



CAPÍTULO 3

SUPERFICIES, CONCEPTUALIZACIÓN, GENERACIÓN GEOMÉTRICO-ANALÍTICA Y CLASIFICACIÓN. SUS PROPIEDADES Y REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

3.0. Introducción al concepto de superficie

El término *superficie* es motivo de diversas acepciones en el argot de arquitectos, ingenieros y constructores, acepciones que en mucho de los casos desvían la comprensión de su concepto geométrico.

Una clara demostración de la inadecuada aplicación de este término lo constituye la autora Juracek¹, en 2005, quien ha publicado libros que se ocupan de registrar diferentes tipos de texturas o acabados finales empleados en las edificaciones. Bajo esta acepción la superficie es un término equiparable a *piel* y completamente alejado de su verdadero significado el cual encierra implicaciones meramente geométricas y matemáticas.

Es imposible negar que *superficie* sea un concepto adoptado por otras disciplinas y es así que cuando en geografía se refieren a la extensión del territorio de un país o región se designa la medida del área con este vocablo. Otras acepciones se encuentran en la física, en medicina, ramas del conocimiento artístico pero todas ellas de la conceptualización requerida para este escrito donde la superficie debe entenderse como una entidad geométrica que posee únicamente dos dimensiones: el largo y el ancho.

¹Entre otros títulos publicados por Judy A. Juracek se hallan: «*Soft surfaces: visual research for artists, architects, and designers*»; «*Natural surfaces: visual research for artists, architects, and designers*»; «*Architectural surfaces: details for artists, architects, and designers*»; «*Surfaces : visual research for artists, architects, and designers*».

3.1. Superficies, definiciones generales, generación y clasificación

a. Definición de superficie

El Diccionario de la Real Academia Española define así el término superficie:

(Del lat. *superficiēs*).

1. f. Límite o término de un cuerpo, que lo separa y distingue de lo que no es él.
2. f. Extensión de tierra.
3. f. Aspecto externo de algo.
4. f. *Fís.* Magnitud que expresa la extensión de un cuerpo en dos dimensiones, largo y ancho. Su unidad en el Sistema Internacional es el *metro cuadrado* (m²).
5. f. *Geom.* Extensión en que solo se consideran dos dimensiones.

~alabeada.

1. f. *Geom.* La reglada que no es desarrollable, como la del conoide.

~cilíndrica.

1. f. *Geom.* **superficie** generada por una recta que se mueve paralelamente a sí misma y recorre una curva dada.

~ cónica.

1. f. *Geom.* La generada por una recta que pasa por un punto fijo, el vértice, y recorre una curva dada.

~ curva.

1. f. *Geom.* La que no es plana ni compuesta de **superficies** planas.

~ de onda.

1. f. En un movimiento ondulatorio, **superficie** formada por los puntos que, en un momento dado, se hallan en la misma fase.

~ de revolución.

1. f. *Geom.* La engendrada por el movimiento de una curva que gira alrededor de una recta fija llamada eje.

~ desarrollable.

1. f. *Geom.* La reglada que sin dislocación de sus partes se puede extender sobre un plano, como la cilíndrica y la cónica.

~ plana.

1. f. *Geom.* La que puede contener una recta imaginaria en cualquier dirección.

~ reglada.

1. f. *Geom.* Aquella sobre la cual se puede aplicar una regla en una o en más direcciones.

grandes ~s.

1. f. pl. Centros comerciales de grandes dimensiones.” (DRAE; falta citar correctamente)

Como se puede ver una definición de un término tan complicado resulta difuso al confrontarlo con la conceptualización de un diccionario. La dificultad va más allá de una significación de cualidad semántica.

Para la geometría como rama de la matemática de acuerdo con Osers el concepto de superficie es descrito así:

“La superficie se puede definir como el lugar geométrico de una línea denominada generatriz, que se desplaza a través del espacio, según una cierta propiedad, pudiendo esta generatriz cambiar de forma durante el desplazamiento” (Osers, 2006:257).

¿Qué es una superficie para los profesionales de la arquitectura? ¿Se concibe la superficie, en el campo de los conocimientos arquitectónicos, como un ente diferente a lo que es para los conocimientos de la geometría pura?

En respuesta a lo anterior Bermúdez, en 1993, define a la superficie como una “Extensión en la que solamente se consideran dos dimensiones: largo y ancho”. (Bermúdez, 1993:524). Conceptualización simple pero que no deja de ser válida y compatible con una amplia gama de disciplinas con las cuales están familiarizados los arquitectos en su dominio cognitivo de la profesión.

b. Generación de las superficies

En el estudio de la generación geométrica de las superficies es importante definir dos acepciones de índole lineal. Una superficie es producida por el movimiento de una línea cualquiera esta es llamada **generatriz**. Mientras que la línea cualquiera y otros elementos que rigen ese movimiento se llaman **directrices**.

Es así como, por ejemplo desde el punto de vista de la geometría descriptiva, se puede definir a una superficie como el lugar geométrico en el espacio tridimensional que comprende las posiciones de una línea generatriz que cambia de posición regida por determinados principios directrices.

c. *Clasificación de las superficies*

Las superficies se pueden agrupar en los siguientes conjuntos:

- I. *Superficies irregulares* como son aquellas que no están sometidas en su generación a ningún precepto matemático. Aquí se incluyen a las superficies topográficas aun cuando sus características puedan ser calculadas y determinadas mediante métodos matemáticos.
- II. *Superficies regulares*, reúne a las *superficies regladas* (desarrollables) ente las cuales se hallan las superficies de *generación cilíndrica* representadas por el cilindro y el prisma y las de *generación cónica* que son el cono y la pirámide. O las que son *alabeadas* (no desarrollables) que comprenden al hiperboloide, paraboloides hiperbólico, conoide y helicoides alabeado. Adicionalmente se hallan comprendidas las *superficies de revolución* que son: la esfera, el toro, elipsoide, paraboloides de revolución e hiperboloide de revolución.

3.2. El plano

El lugar en el espacio de los puntos

$$P(x, y, z)$$

que satisfacen a una ecuación de primer grado del tipo

$$F(x, y, z) = 0$$

son concebidos como un plano. Los planos son las superficies que ofrecen mayor facilidad para representarlos como ecuaciones lineales, mediante una ecuación de primer grado en tres variables x, y, z . de tipo:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

“donde los coeficientes A, B y C son reales y por lo menos uno de ellos nos es cero.”
(SELBY, 1988:224).

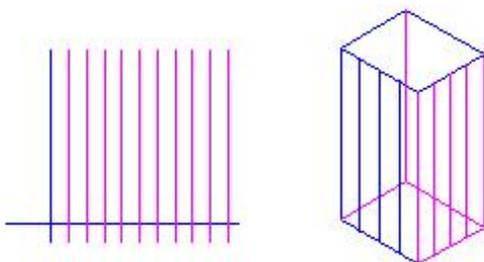


Figura 261. El plano y el prisma como modalidades geométricas de generación cilíndrica.
Fuente: Elaboración propia con base en De la Torre Carbó, 1978:133.

Seguidamente, después de los planos, las superficies que presentan menor dificultad para su generación y representación son las superficies cilíndricas.

3.3. Superficies de generación cilíndrica: clasificación y representación geométrico-analítica de las superficies cilíndricas

Son generadas por el movimiento de una recta generatriz que se desplaza manteniéndose siempre paralela a sí misma, apoyada en otra línea cualquiera directriz (que tiene todos sus puntos en un mismo plano) o una línea de doble curvatura (que no tiene todos sus puntos contenidos en un mismo plano). En la siguiente figura se aprecian los principios geométricos que determinan a las superficies de generación cilíndrica: aun cuando el modo más aplicado es el de la representación de una superficie cilíndrica mediante el desplazamiento paralelo de una generatriz recta teniendo como directriz a una curva cualquiera, este orden descriptivo puede ser invertido, y el desplazamiento paralelo puede ser realizado por la misma línea curva (figura 262).

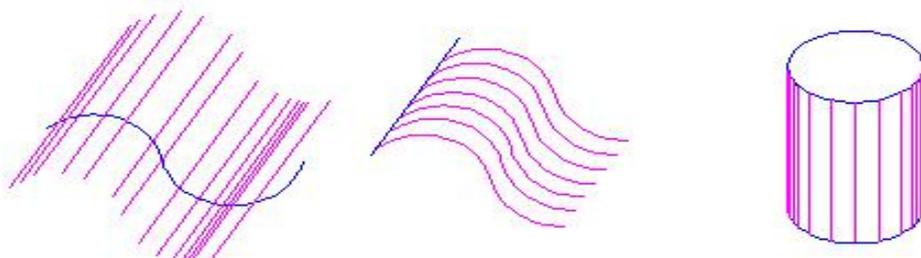


Figura 262. Superficies cilíndricas.
Fuente: Elaboración propia con base en De la Torre Carbó, 1978:132.

Torre, en 1978, identificó otras modalidades geométricas de generación cilíndrica tales son los casos del plano y el prisma lo cual describe cuando establece que:

“Si la directriz del cilindro puede ser una línea cualquiera, tomemos como tal una recta [figura 261] y deslicemos sobre ella la generatriz también recta, paralela a si misma. El resultado será un plano, de lo que podemos afirmar que el plano es también cilindro, o bien que tiene una forma de generación cilíndrica, y por tanto las superficies formadas de caras planas, que se cortan en aristas paralelas, las conocidas con el nombre de prismas pertenecen también al género cilindro” (subrayado nuestro). (Torre, 1978:133).

Las superficies cilíndricas están representadas en el espacio mediante una ecuación en un sistema de coordenadas cartesianas x,y,z , en la cual falta una de las tres variables. Estas variables son constituidas como las generatrices rectas paralelas (paralelismo al eje de la variable que está faltando) siendo la directriz una curva cualquiera dada por una ecuación que cumple con las propiedades que se describen en el cuadro resumen No 3.1 (página siguiente).

3.3.1. Generación cilíndrica de curvas

En la generación cilíndrica de curvas, mediante la intersección de un plano secante con un cilindro de base circular o de base elíptica, se cumplen algunas de las siguientes condicionantes:

Es posible la visualización de la línea recta, en el caso específico en el que un plano secante, toca de modo tangencial al cilindro a lo largo de una y sólo una de sus líneas generatrices (figura 263).

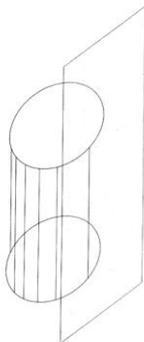
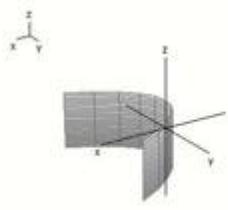
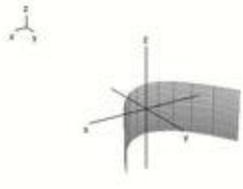
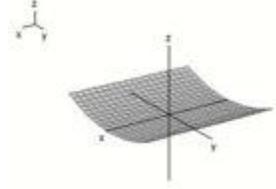


Figura 263. Generación cilíndrica de la línea recta.
Fuente: Elaboración propia.

3.3.2. Propiedades geométricas de las superficies cilíndricas que permiten sus aplicaciones constructivas

Cuadro Resumen N° 3.1 Propiedades geométricas de las superficies cilíndricas Que permiten sus aplicaciones constructivas				
Casos	Ecuación de la directriz curva	Condición de la generatriz recta	Coordenadas del punto P	Representación espacial
Caso I	$F(x, y) = 0$	Paralela al eje $0z$	$P_0(x, y, 0)$ $P(x, y, z)$	 <p>Cilindro parabólico $y = x^2$</p>
Caso II	$F(x, z) = 0$	Paralela al eje $0y$	$P_0(x, 0, z)$	 <p>Cilindro parabólico $x = y^2$</p>
Caso III	$F(y, z) = 0$	Paralela al eje $0x$	$P_0(0, y, z)$	 <p>Cilindro parabólico $z = y^2$</p>

Cuadro de elaboración propia. Referencias: Thomas, 1980:609.

La generación cilíndrica de la elipse se produce mediante la intersección de un plano secante con un cilindro de revolución (figura 264).

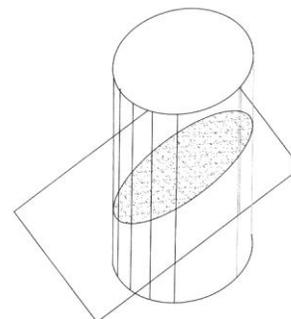


Figura 264. Generación cilíndrica de la elipse.
Fuente: Elaboración propia.

No existe modo alguno de visualizar la generación de un único punto ni de las hipérbolas; lo cual permite precisar que la diferencia de la obtención de estas entidades es una de las distintas características que hace más completa a la generación cónica con respecto a la generación cilíndrica.

3.4. Superficies de generación cónica. Clasificación y representación geométrico-analítica

Un cono es una superficie que se produce por el movimiento de una recta *generatriz* que tiene dos *directrices*, un punto llamado vértice y una línea cualquiera bien sea plana o de doble curvatura (figuras 265). Cuando la directriz curva es abierta la superficie cónica es abierta o es una superficie cerrada cuando la línea cualquiera directriz es cerrada (figuras 265 y 266).

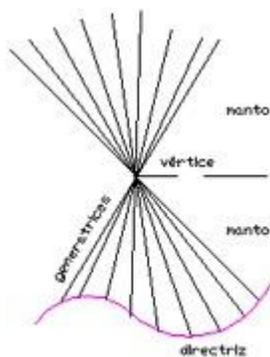


Figura 265. Rectas generatrices y curva directriz en la generación de la superficie cónica.
Fuente: Elaboración propia.

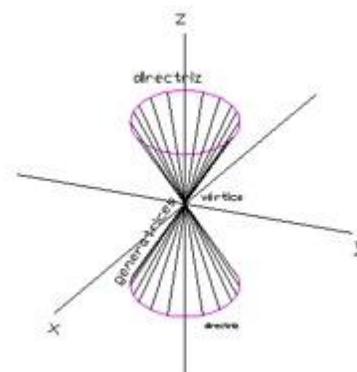


Figura 266. Representación de un cono de doble manto.
Fuente: Elaboración propia.

Entre las muchas aplicaciones constructivas de los conos se halla una singular modalidad de silos que son fabricados para el resguardo y depósito de granos (figura 267).



Figura 267. Aplicación de la superficie cónica para construcción de silos.
Fuente: Imágenes del autor.

Siendo que las generatrices rectilíneas de la superficie cónica se apoyan en un vértice éste presenta dos porciones simétricas llamadas mantos. Esto es: la representación geoméricamente cabal de un cono es con dos secciones opuestas o mantos aunque en muchos de los casos es designado como un cono a la mitad de la superficie.

Un cono está generado por una ecuación de tres variables y cada uno de sus términos es de segundo grado. Uno de los modos más usuales de representarlo es cuando el eje del cono se halla ubicado en el eje coordenado z (figura 268) mediante la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (\text{Thomas, 1980:614})$$

que describe un cono elíptico con vértice en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas $(0,0,0)$. Razón por la cual serán elipses todas las secciones del cono cortadas por un plano $z = k$ (constante).

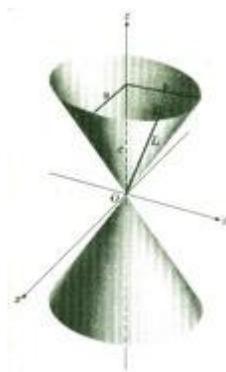


Figura 268. Cono elíptico.
Fuente: Thomas, 1980:614

Seguidamente se realiza un estudio para la determinación de las propiedades geométricas de las secciones cónicas.

3.5. Las cónicas

Desde el siglo IV a de C en la Grecia antigua se comenzaron a estudiar las curvas que posteriormente pasarían a conocerse como las cónicas. Menaechmo un joven matemático discípulo de Platón y de Eudoxo, llegó a estudiarlas bajo conceptualizaciones muy distintas a las que ahora se admiten. Para los griegos antiguos parábola era designada como deficiencia, elipse equiparable e hipérbola de exceso.

Las cónicas se dividen en dos grupos: las cónicas curvas que son la parábola, la elipse, y la hipérbola (figura 269) y las cónicas degeneradas que son: el punto, la recta inclinada y las rectas que se cortan. (figura 270)

Pero en sí las cónicas, tal como ya ha sido descrito con amplitud en el capítulo 1 de esta investigación, deben su denominación a los estudios realizados y a los libros escritos por el geómetra griego Apolonio de Pérgamo (262 – 190 a de C) quien en el año 232 al 225 a de C, escribió –como ya fue indicado- los postulados respecto a las cónicas los cuales han permanecido inalterables hasta la actualidad. No fue sino hasta el año 1822, cuando el geómetra y matemático belga Gustav Dandelin, (1794 – 1847), deduce el primer teorema

innovador, que lleva su nombre, mediante el cual se deducen analíticamente las condiciones de homologación entre las circunferencias y las elipses.

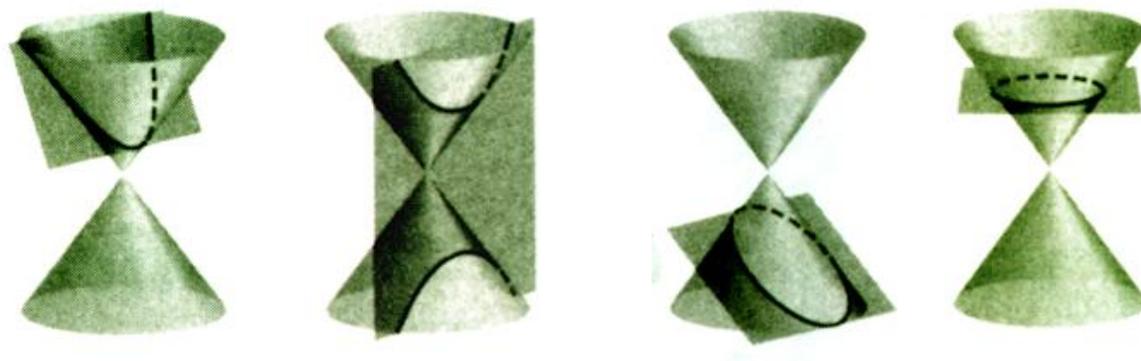


Figura 269. Cónicas curvas: la parábola, hipérbola, elipse y circunferencia.
Fuente: Larson, 1996.



Figura 270. Cónicas degeneradas: el punto, recta inclinada y rectas que se cortan.
Fuente: Larson, 1996.

La obtención de las cónicas debe cumplir con una serie de “...condiciones geométricas que pueden imponerse a una curva de segundo orden y su equivalencia, para poder establecer ecuaciones de cónicas que han de llenar ciertos requisitos, dando las normas para acabar de determinarlas” (Mataix, 1957:334). De la misma forma, “La sección plana de un cono que

tiene por base una curva de 2° grado, debe ser también una curva de 2° grado (de allí el nombre para estas curvas «las cónicas».)” (Osers, 2006:185)

De igual modo las cónicas se obtienen mediante cortes o secciones de sus respectivos volúmenes genéricos. Tal es el caso de que las parábolas, hipérbolas, elipses y circunferencias, que son curvas que se desarrollan a un nivel estrictamente bidimensional, dentro de un sistema de coordenadas cartesianas x,y , como el más común de los casos; dejando expuesto que un plano de coordenadas así determinado, es a su vez tridimensional, sólo que el tercer eje de coordenadas, el eje z , equivale a cero, o se halla con sus valores negativos correspondientes, ubicado en posición posterior al plano y no son perceptibles para el observador. Pero, también es bajo otras configuraciones cartesianas bidimensionales, como lo son: x,z o y,z ; que las superficies planas pueden demostrar las mismas condiciones geométricas.

3.5.1. La elipse

La elipse es una curva plana, cerrada y está definida geoméricamente como el conjunto de infinitos puntos tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos llamados focos es siempre constante (figura 271).

En la descripción geométrica de las elipses se destaca que estas se obtienen cuando un cono de revolución de uno o de doble manto es interceptado por un plano secante bajo dos condicionantes esenciales: la primera, que dicho plano no pasa en ningún caso por el vértice del cono, pues en este caso la figura resultante sería una cónica degenerada” (Larson, 1996:775); la segunda condición es que el plano secante es oblicuo a las líneas generatrices del cono.

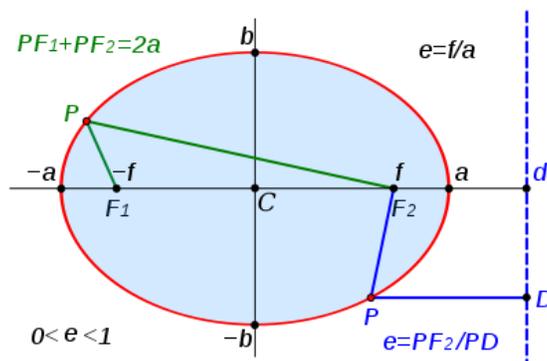


Figura 271. La elipse.

Cuadro N° 3.2.				
Propiedades geométricas de las cónicas curvas que permiten sus aplicaciones constructivas				
Tipo de curva	Concepto	N° de vértices	excentricidad	Ecuaciones
Circunferencia	Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto llamado centro.	2	$e = 0$	$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$
Elipse	Lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es una cantidad constante, mayor que la distancia entre los focos.	2	$0 < e < 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Hipérbola	Lugar geométrico de los puntos para los cuales la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es una cantidad constante.	1	$e > 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parábola	Lugar geométrico de los puntos para cada uno de los cuales la distancia a un punto fijo del plano llamado foco, es igual a la distancia a una recta fija.	1	$e = 1$	$y^2 = 2px$

Elaboración propia. Referencias: Selby, (1988), Kletenik. (s.f), Taylor, (1962).

3.5.2. La hipérbola

La hipérbola (figura 272) es una cónica que consiste en una curva abierta de dos ramas definida como "...el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante." Selby, 1988:111).

En la figura 272 se representa una hipérbola que posee las siguientes características geométricas: la hipérbola es simétrica respecto a los ejes de coordenadas cartesianas y tiene centro (C) en el origen; las líneas rectas segmentadas que se cortan en el centro de la hipérbola son las asíntotas. Los dos vértices q se encuentran sobre el eje transversal $+a$ y $-a$ son equidistantes al centro. Los dos focos los cuales se identifican como F_1 y F_2 y se hallan también a su vez sobre el eje de las abscisas que coincide en este caso con el eje conjugado. D_1 y D_2 son las directrices, paralelas al eje conjugado.

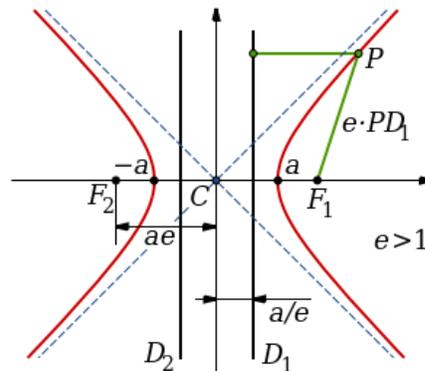


Figura 272. Representación geométrica de la hipérbola.

3.5.3. La parábola

Una parábola (figura 273) es una sección cónica definida como el lugar geométrico de los puntos de un plano de tal forma que su distancia a un punto fijo exterior llamado foco es siempre igual a su distancia a una recta fija llamada directriz.

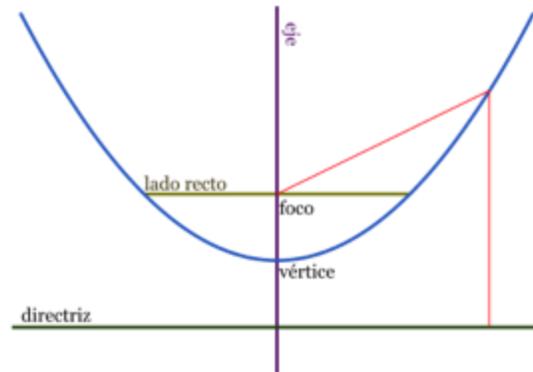


Figura 273. Representación de la parábola.
Fuente: Carmona y Pardo, 1983:109.

3.6. Cuádricas. Definición y clasificación

Una superficie cuadrática (cuádrica) es la gráfica de una ecuación de los puntos reales o imaginarios de segundo grado que se representa en el espacio en la siguiente forma de la ecuación general de una cuádrica:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + j = 0$$

“...donde A, B, C, \dots, J son constantes, pero por traslación y rotación puede llevarse a algunas de las dos formas estándar

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + j = 0$$

ó

$$Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

Las superficies cuadráticas son las análogas de las secciones cónicas del plano, pero en tres dimensiones.” (Stewart, 1999:696).

Las superficies cuádricas son: el elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, cono elíptico, paraboloides elíptico y paraboloides hiperbólico.

3.6.1. El elipsoide

4. El elipsoide (figura 274) corresponde a la siguiente ecuación cartesiana

$$5. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

6. Donde a , b y c son los semiejes del elipsoide.

El elipsoide es una cuádrica que responde a la siguiente representación gráfica

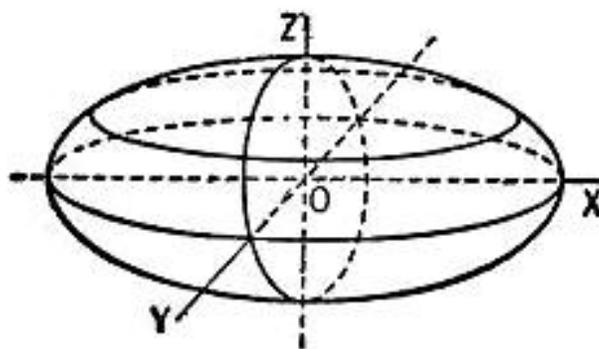


Figura 274. El Elipsoide.
Fuente: elaboración propia

a. Condiciones geométricas de los elipsoides

En virtud de que la ecuación cartesiana del elipsoide sólo presenta potencias pares de las variables x, y y z la superficie es simétrica respecto a cada uno de los planos coordenados. Todas las secciones determinadas por dichos planos son elipses;

Ejemplo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Cuando } z = 0 \text{ (Stewart, 1999:696)}$$

Cualquier sección por un plano $z = z_1$, , $|z| < c$

es una elipse

$$\frac{x^2}{a^2(1-\frac{z_1^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1-\frac{z_1^2}{c^2})} = 1$$

con centro sobre el eje z , y cuyos semiejes son:

$$\frac{a}{c} = \sqrt{c^2 - z_1^2} . \quad y \quad \frac{a}{c} = \sqrt{c^2 - z_1^2}$$

Los elipsoides disponen de una diversa cantidad de aplicaciones. Quizás la más conocida sin que por ello los usuarios la identifiquen plenamente con la cuádrica que la genera es la de un balón para la práctica de futbol americano.



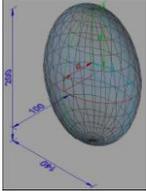
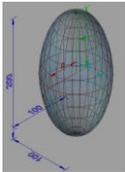
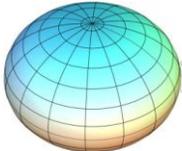
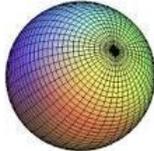
Figura 275. Una aplicación muy usual de los elipsoides: el balón de futbol americano.

El conocimiento de las propiedades geométricas de los elipsoides llevó a la solución estructural de la edificación construida con arcos sin apoyos intermedios más grande que hasta ahora ha sido construida empleando madera laminada. El Pabellón Utopía de Portugal fabricado para la Expo-Sevilla 1998, donde toda la volumetría está basada en la geometría de esta cuádrica (figura 276).

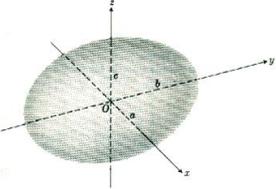


Figura 276. Pabellón Utopía de Portugal para la Expo Sevilla 98.
Fuente: Rodríguez Nevado, 1999.

Los elipsoides cumplen con la siguiente clasificación de acuerdo a la longitud y características de los semiejes:

Cuadro Resumen N° 3.3			
Clasificación de los elipsoides según la longitud y características de los semiejes			
Representación espacial	Características de los semiejes	Tipo de elipsoide	Ecuación Canónica
 Fuente: cad-projescts.com.ar	$a \neq b \neq c$	Escaleno	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Elipsoides como superficies de revolución (con Oz como eje de revolución)			
 Fuente: cad-projescts.com.ar	$a = b < c$	Alargado	
 Fuente: es.wikipedia.org/wiki/Esferoide	$a = b > c$	Achatado (esferoide oblató)	
	$a = b = c = 0$	Esfera (centro en el origen)	Ecuación <i>centro-radio</i> $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$
 Fuente: enciclopedia.us.es.index/php.esfera	$a = b = c \neq 0$	Esfera	Ecuación <i>general</i> $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ $X^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Yz + J = 0$

Cuadro de elaboración propia. Referencias: Selby, 1998:250 y ss. Osers, 2006:260. Kletenik, (s/f): 166-167

Cuadro resumen N° 3.4				
Condiciones de los planos de coordenadas y secciones ante la representación de un elipsoide cuya expresión analítica es de la forma				
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; a, b \text{ y } c \neq 0$				
Planos	Secciones por los ejes coordenados	Planos	Ecuación de la elipse	Referencia
	$x = \pm a$ $(\pm a, 0, 0)$	$x = 0$	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Stewart, 1999:696
	$y = \pm b$ $(0, \pm b, 0)$	$y = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
	$z = \pm c$ $(0, 0, \pm c)$	$z = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	

Cuadro de elaboración propia. Referencia indicada

3.6.2. Superficie esférica



Figura 277. Aplicaciones de la esfera.

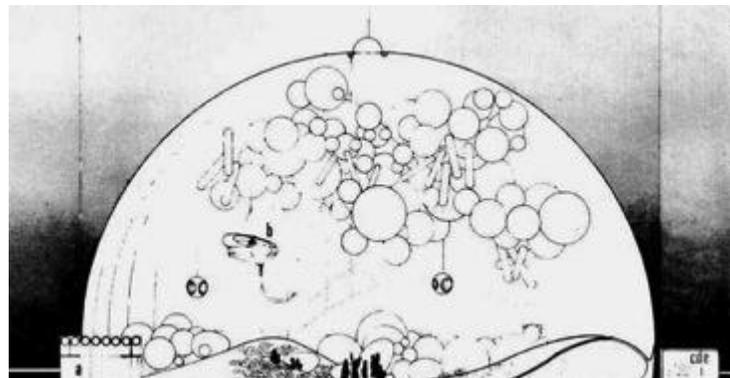


Figura 278. Estructura neumática de configuración geométrica esférica.

Fuente:

http://arqueologiadelfuturo.blogspot.com/2012_07_01_archive.html

Una esfera es el conjunto de todos los puntos en el espacio tridimensional equidistantes a un punto fijo llamado centro de la esfera y la medida, en línea recta, constante desde un punto cualquiera que forma parte de la superficie esférica a ese centro, en un sistema de coordenadas rectangulares.

Ecuación de la esfera de centro con coordenadas $C(a,b,c)$ y radio r considerando un punto cualquiera de la esfera $P(x,y,z)$

Cuando

$$|\overline{CP}| = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$$

al elevar al cuadrado los dos términos de la ecuación

$$(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2})^2 = r^2$$

se obtiene la ecuación de la esfera de radio r y centro en el punto $C(a,b,c)$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Que es la ecuación *centro-radio* de la esfera o lo que es lo mismo

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

ecuación que es de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + j = 0$$

conocida como la *ecuación general de una esfera*.

Si el centro está en el origen entonces $C(0,0,0)$, por tanto

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

De un modo recíproco, dada la ecuación dada de esta forma,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0$$

se prueba que representa una esfera, pues se tiene

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta = r^2$$

luego representa una esfera cuyo centro es $C(-\alpha, -\delta, -\gamma)$ y el radio

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}$$

esfera que será real, imaginaria o reducida en un punto, según que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta \leq 0$$

3.6.3. Hiperboloide de una hoja

El hiperboloide de una hoja (figura 279) es la superficie generada mediante el giro de una hipérbola alrededor de uno de sus ejes de simetría. Está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

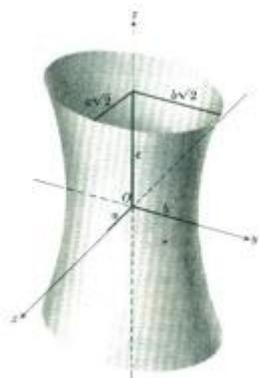


Figura 279. Hiperboloide de una hoja.
Fuente: extraído con fines didácticos de Thomas, 1980:615.



Figura 280. Las chimeneas de calderas industriales.

3.6 4. Hiperboloide de dos hojas

El hiperboloide de dos hojas (figura 281) como superficie de revolución resulta de hacer girar las dos ramas de una hipérbola alrededor del eje de simetría que corta a las dos ramas. Cuando la simetría de un paraboloides de dos hojas está respecto al plano xy tal como se representa en la figura 281 responde a la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{(-z)^2}{c^2} = 1$$

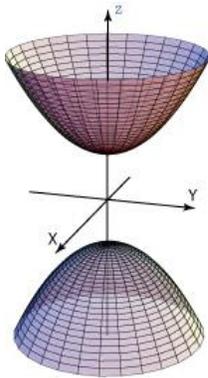


Figura 281. Hiperboloide de dos hojas.
Fuente: tec-digital.itcr.ac.cr

3.6.5. Paraboloide elíptico

El paraboloides elíptico (figura 282) responde a la siguiente ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

Si $a = b$ el paraboloides elíptico se convierte en un paraboloides de revolución.

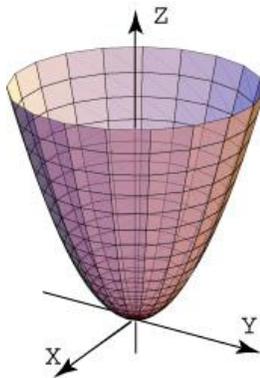


Figura 282. Paraboloide elíptico.
Fuente: tec-digital.itcr.ac.cr



Figura 283. Paraboloide elíptico en una de sus aplicaciones más frecuentes, las antenas parabólicas.

3.6.6. Paraboloide hiperbólico

Se percibe claramente que su nombre responde a las cualidades geométricas de generación de parábolas e hipérbolas en su configuración espacial. Lo mismo ocurre con sus aplicaciones más comunes. Tal es el caso de las sillas de montar a caballo que ciertamente es una de las maneras más usuales con que se conoce a una de las modalidades de los paraboloides hiperbólicos, pero que sin embargo han venido siendo fabricadas durante siglos sin que quienes las elaboran cuenten con alguna idea de que la forma que ellos elaboran está relacionada con las condiciones geométricas de una superficie.



Figura 284. El paraboloides hiperbólico en su forma tridimensional más empleada en todo el mundo: la silla de montar a caballo.



Figura 285. Escultura compuesta de paraboloides hiperbólicos.

Fuente:
mathcurve.com/surfaces/paraboloidhyperbolic

El paraboloides hiperbólico es la superficie doblemente reglada parametrizada por:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, uv)$$

El paraboloides hiperbólico es la primera de una serie de superficies, grafos de la parte real (o de la parte imaginaria) de la función

$$z \rightarrow z^n$$

siendo z un número complejo; de forma más precisa, superficies parametrizadas por:

$$\mathbf{x}[n](u, v) = (u, v, \operatorname{Re}(u + i v)^n)$$

El paraboloides hiperbólico de la forma cartesiana $z = xy$ (figura 286) es el primero de la representación de los grafos de superficies doblemente regladas.

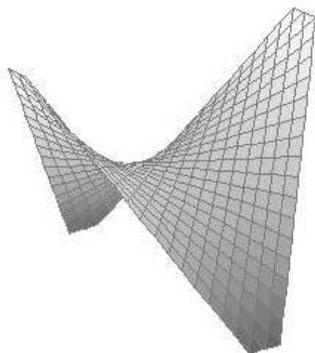


Figura 286. El paraboloides hiperbólico de la forma cartesiana $z = xy$.
Fuente: Elaboración propia.

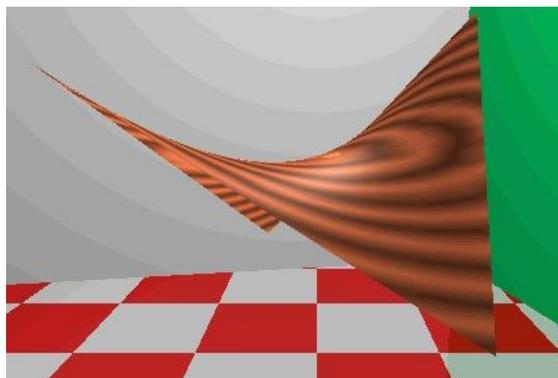


Figura 287. Representación idealizada del paraboloides hiperbólico según Cordero.
Fuente:
<http://xtsunxet.usc.es/curvasplanas/curvasplanas.htm>

En la actualidad los paraboloides hiperbólicos continúan siendo empleados como solución geométrica para erigir estructuras que generen espacios cubiertos. La principal aplicación que se observa, toda vez que los que fueron construidos en concreto armado cayendo en un inexplicable desuso, es en estructuras tensiles con materiales vinílicos. (figura 288).



Figura 288. El paraboloides hiperbólico construido como cubierta de tenso-estructura vinílica.
Fuente: www.foro3d.com.

El paraboloides hiperbólico responde a la siguiente ecuación cartesiana

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

es simétrico respecto a los planos $x = 0$ y $y = 0$.

Las secciones por esos planos se presentan con las siguientes condiciones:

Cuadro Resumen N° 3.5 Condiciones de los planos de coordenadas y secciones ante la representación de un paraboloides hiperbólico de la forma $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$; a y b son positivos y $c \neq 0$.				
Planos	Secciones por los planos	Ubicación del vértice	Sección cónica	Concavidad
$x = 0$	$y^2 = b^2 \frac{z}{c}$	origen	parábola	Hacia arriba
$y = 0$	$x^2 = -a^2 \frac{z}{c}$	origen	parábola	Hacia abajo
$z = z_1 > 0$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_1}{c}$	Sobre la parábola cuando $x = 0$ (eje focal paralelo al eje y)	hipérbola	
$z = z_1 < 0$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{-z_1}{c}$	Sobre la parábola cuando $y = 0$	hipérbola	

Cuadro de elaboración propia.
Referencia; Thomas, 1980:617.

a. *Punto de ensilladura*

El cuadro resumen N° 3.5 indica las condicionantes de los planos de coordenadas y secciones de un paraboloides hiperbólico de la forma

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c};$$

donde a y b son positivos y $c \neq 0$. respecto a los planos $x = 0$ y $y = 0$.

Una de las particularidades de estas superficies es la obtención del *punto de ensilladura*, la figura 289 muestra un paraboloides hiperbólico $z = y^2 - x^2$ señalando el punto de ensilladura en el origen $(0,0,0)$ de un sistema de coordenadas cartesianas.

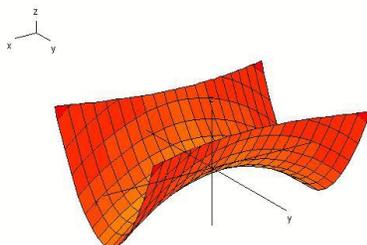


Figura 289. Representación del paraboloides hiperbólico $z = y^2 - x^2$ señalando el punto de ensilladura.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

En geometría un punto de ensilladura (figura 290) se calcula mediante la obtención de la primera derivada (el punto donde este sea nula); el signo de la segunda derivada dependerá de la dirección en que se calcule.

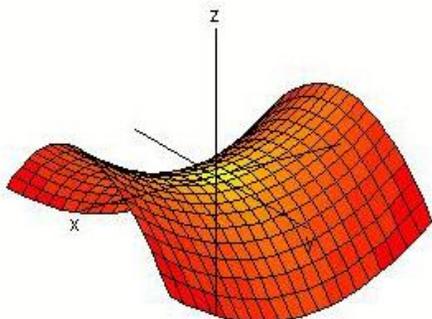


Figura 290. Paraboloides hiperbólico $z = x^2 - y^2$ señalando el punto de ensilladura.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

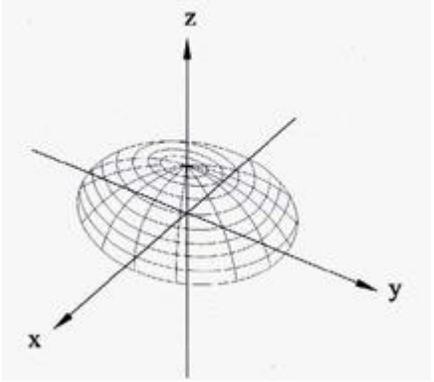
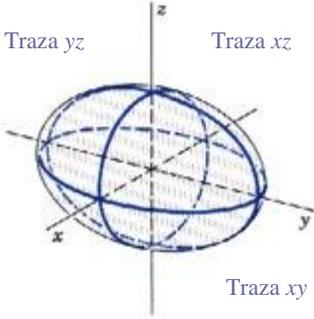
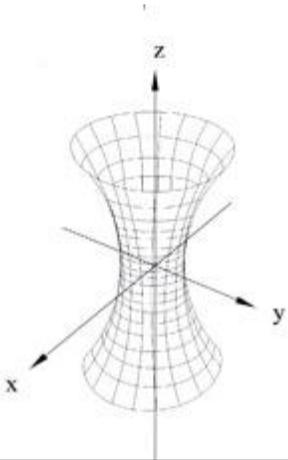
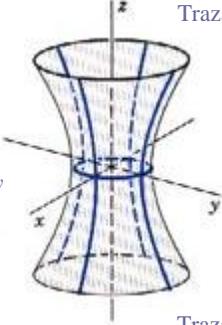
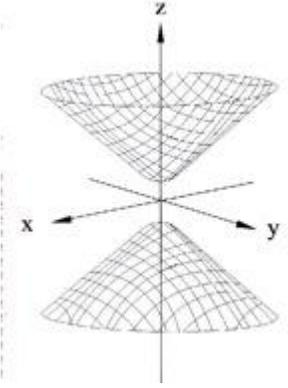
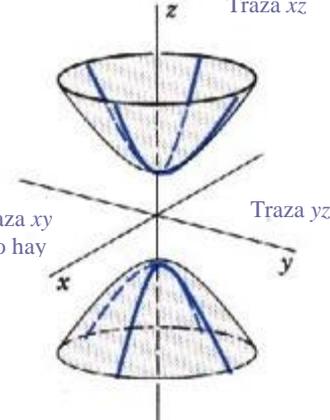
A continuación se describe la secuencia para la verificación del punto de ensilladura de un paraboloides hiperbólico $z=x^2-y^2$

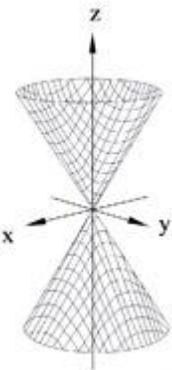
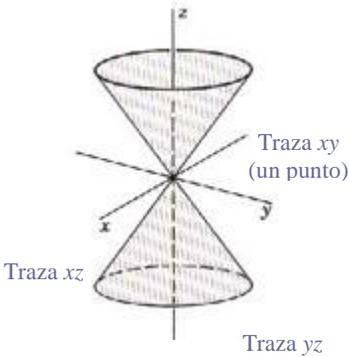
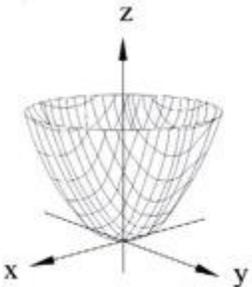
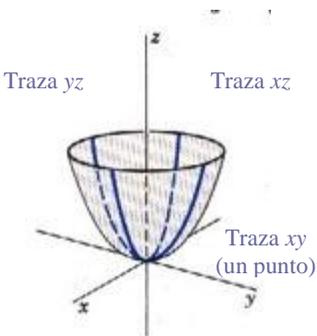
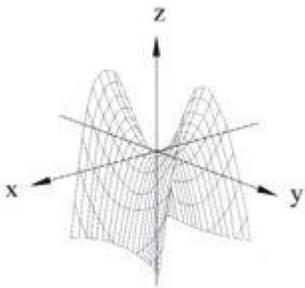
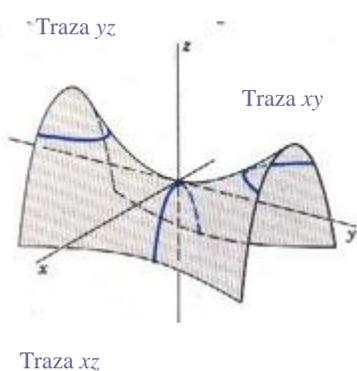
Paraboloides hiperbólico $z=x^2-y^2$		
	Derivada parcial respecto a x	Derivada parcial respecto a y
Cálculo de derivadas parciales	$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$	$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$
Cálculo de extremos relativos	$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ $2x = 0$ $x = 0$	$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ $-2y = 0$ $y = 0$
El punto de la gráfica donde las derivadas parciales es cero es un extremo relativo		
Cálculo de las derivadas segundas	$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} = 2$	$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = -2$
	Es un mínimo en $x=0$	Es un máximo relativo en $y=0$ Máximo relativo

3.6.7. Parámetros geométricos que determinan la aplicación de las cuádricas como estructuras para sistemas de cubiertas en edificaciones

Las propiedades geométricas de las cuádricas, el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas, cono elíptico y paraboloides hiperbólico que han sido estudiadas poseen características representativas de acuerdo a sus trazas (intersecciones de la superficie con los planos de proyección) que determinan su potencialidad para emplearlas en propuestas de diseño en proyectos arquitectónicos de sistemas de cubiertas para edificaciones.

Seguidamente se representan estas propiedades geométricas (ver cuadro 3.6)

Cuadro N° 3.6 Fundamentos geométricos de las cuádricas según sus trazas										
	<p style="text-align: center;">Elipsoide</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <table border="0"> <tr> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle;">Trazas</td> <td>Elipse</td> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle;">Planos</td> <td>Paralelo al plano xy</td> </tr> <tr> <td>Elipse</td> <td>Paralelo al plano xz</td> </tr> <tr> <td>Elipse</td> <td>Paralelo al plano yz</td> </tr> </table> <p>Cuando $a = b = c \neq 0$ la superficie es una esfera</p>	Trazas	Elipse	Planos	Paralelo al plano xy	Elipse	Paralelo al plano xz	Elipse	Paralelo al plano yz	 <p style="text-align: center;">Trazas: xy, xz, yz</p>
Trazas	Elipse		Planos		Paralelo al plano xy					
	Elipse				Paralelo al plano xz					
	Elipse	Paralelo al plano yz								
	<p style="text-align: center;">Hiperboloide de una hoja</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <table border="0"> <tr> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle;">Trazas</td> <td>Elipse</td> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle;">Planos</td> <td>Paralelo al plano xy</td> </tr> <tr> <td>Hipérbola</td> <td>Paralelo al plano xz</td> </tr> <tr> <td>Hipérbola</td> <td>Paralelo al plano yz</td> </tr> </table> <p>“El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.” (Leithold, 1972:959)</p>	Trazas	Elipse	Planos	Paralelo al plano xy	Hipérbola	Paralelo al plano xz	Hipérbola	Paralelo al plano yz	 <p style="text-align: center;">Trazas: xy, xz, yz</p>
Trazas	Elipse		Planos		Paralelo al plano xy					
	Hipérbola				Paralelo al plano xz					
	Hipérbola	Paralelo al plano yz								
	<p style="text-align: center;">Hiperboloide de dos hojas</p> $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <table border="0"> <tr> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle;">Trazas</td> <td>Elipse</td> <td rowspan="3" style="vertical-align: middle;">Planos</td> <td>Paralelo al plano xy</td> </tr> <tr> <td>Hipérbola</td> <td>Paralelo al plano xz</td> </tr> <tr> <td>Hipérbola</td> <td>Paralelo al plano yz</td> </tr> </table> <p>“El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.” (Leithold, 1972:959)</p>	Trazas	Elipse	Planos	Paralelo al plano xy	Hipérbola	Paralelo al plano xz	Hipérbola	Paralelo al plano yz	 <p style="text-align: center;">Trazas: xy, xz, yz No hay traza en el plano xy</p>
Trazas	Elipse		Planos		Paralelo al plano xy					
	Hipérbola				Paralelo al plano xz					
	Hipérbola	Paralelo al plano yz								

Cuadro N° 3.6 (continuación) Fundamentos geométricos de las cuádricas según sus trazas		
	<p style="text-align: center;">Cono elíptico</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ <p>Elipse Paralelo al plano xy</p> <p>Trazas Hipérbola Planos Paralelo al plano xz</p> <p> Hipérbola Paralelo al plano yz</p> <p>“El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a ese eje son rectas que se cortan.” (Leithold, 1972:960)</p>	
	<p style="text-align: center;">Paraboloide elíptico</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ <p>Elipse Paralelo al plano xy</p> <p>Trazas Hipérbola Planos Paralelo al plano xz</p> <p> Hipérbola Paralelo al plano yz</p> <p>El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la potencia unidad. (Leithold, 1972:960)</p>	
	<p style="text-align: center;">Paraboloide Hiperbólico</p> $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = z$ <p>Elipse Paralelo al plano xy</p> <p>Trazas Hipérbola Planos Paralelo al plano xz</p> <p> Hipérbola Paralelo al plano yz</p> <p>El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la potencia unidad.” (Leithold, 1972:960)</p>	

3.6.8. La silla de mono ordinaria para un mono con una cola

La silla de mono ordinaria para un mono con una cola (figura 291) es la superficie parametrizada por:

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^3 - 3uv^2) \quad (\text{Cordero, 2006}).$$

Si el paraboloides hiperbólico es la primera de las superficies descritas y representadas mediante soluciones gráficas que generan “*sillas*” entonces, la silla de mono ordinaria para monos de una sola cola es la segunda de esta serie de superficies, grafos de la parte real (o de la parte imaginaria) de la función

$$z \rightarrow z^n$$

siendo z un número complejo; de forma más precisa, superficies parametrizadas por:

$$\mathbf{x}[n](u,v) = (u, v, \text{Re}(u + i v)^n) \quad (\text{Cordero, 2006}).$$

La presente superficie se obtiene para $n=3$.²

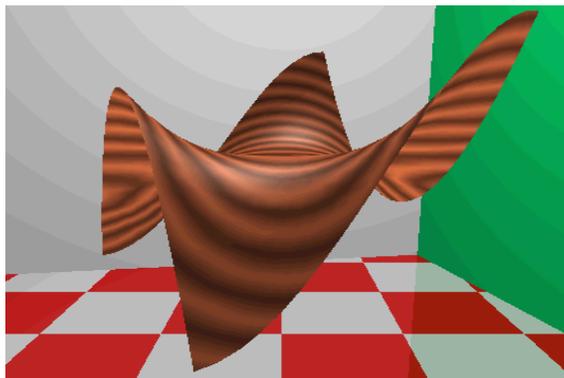


Figura 291. Representación de la superficie silla de mono ordinaria para monos de una sola cola realizada por Cordero.
Fuente: <http://xtsunxet.usc.es/curvasplanas/curvasplanas.htm>

² <http://xtsunxet.usc.es/curvasplanas/curvasplanas.htm>

La silla de mono posee condiciones geométricas que elevan su potencial para emplearla como estructura portante en la edificación de sistemas de cubiertas. Aún así, hasta ahora no se conoce de alguna aplicación de este tipo de superficie en algún procedimiento constructivo o de diseño donde se describa con exactitud que se ha empleado esta configuración geométrica para cubrir espacios. Su representación gráfica, tal como se notará en el capítulo 5 de esta investigación puede ser desde una superficie doblemente reglada obtenida mediante algún software matemático o también mediante obtenciones más estilizadas para lo cual se pueden ocupar herramientas computacionales con fines de diseño artístico.

Seguidamente (figura 292) se observa la representación de una silla de mono ordinaria para monos de una sola cola. Anton, en 1980, describe, al igual que otros autores, a la silla de mono ordinaria para monos de una sola cola como una superficie que forma parte del conjunto de las cuádricas que genera espacialmente una curvatura para dejar libre la cola y una curvatura para cada una de las patas de un mono.³

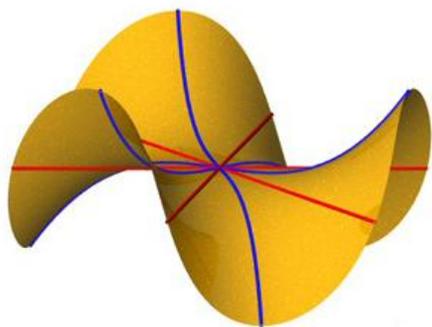


Figura 292. Representación estilizada de la silla de mono de una cola.

Fuente:

<http://www.mathcurve.com/surfaces/selle/selle.shtml>

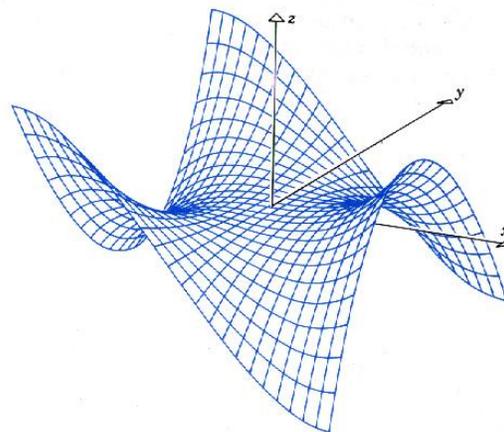


Figura 293. Representación de la superficie silla de mono ordinaria para monos de una sola cola realizada por Cordero.

Fuente: extraída con fines didácticos de Anton, 1980:864.

³ La cita textual de Anton e la siguiente: "...get an excellent picture of the surface $z = x^3 - 3xy^2$ from the traces shown. (This surface is called a "monkey saddle" because a monkey sitting astride the x-axis has a place for its two feet and tail.)" (Anton, 1980:864).

3.6.9. Silla de mono para un mono con dos colas (figura 291)

“La silla de mono para un mono con dos colas, es la tercera de una serie de superficies, grafos de la parte real (o de la parte imaginaria) de la función

$$z \rightarrow z^n$$

siendo z un número complejo; de forma más precisa, superficies parametrizadas por:

$$\mathbf{x}[n](u,v) = (u,v, \operatorname{Re}(u + i v)^n)$$

La presente superficie se obtiene para $n=4$.⁴

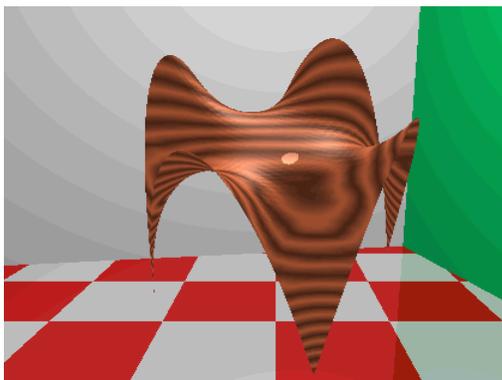


Figura 294. Silla para un mono de dos colas según el autor Cordero.

Fuente:
<http://xtsunxet.usc.es/curvasplanas/curvasplanas.htm>

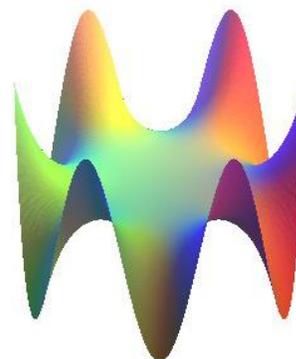


Figura 295. Silla para un mono de dos colas según el autor Robert Ferreol.

Fuente:
<http://www.mathcurve.com/surfaces/selle/selle.shtm>

3.6.10. Silla de mono perturbada para monos de una cola

Según Cordero la descripción de esta superficie que corresponde a una modalidad particular de la silla de mono (ordinaria) es la siguiente:

“Silla de mono perturbada por un paraboloides circular. Su parametrización es la siguiente:

$$\mathbf{x}[a][u,v] = \{u,v,u^3 - 3uv^2 + a(u^2 + v^2)\}$$

⁴ Página web de Cordero: <http://xtsunxet.usc.es/curvasplanas/curvasplanas>

Gráfica para $a=-1$.

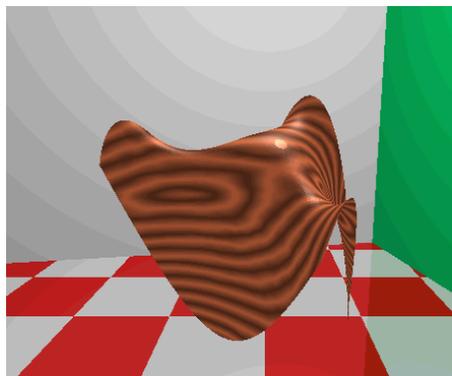


Figura 296. La silla de mono perturbada: una representación particular de esta superficie, realizada por el autor Cordero.

Fuente: <http://xtsunxet.usc.es/curvasplanas/curvasplanas>

3.7. Parámetros geométricos para la representación gráfica de las sillas de mono perturbadas para monos de una cola

¿En qué consiste una silla de mono *perturbada*? ¿Cuál es la utilidad que esta superficie posee para los procesos constructivos de sistemas de cubiertas en edificaciones?

La representación gráfica de la silla de mono *perturbada* para monos de una cola no consiste en una intersección de dos superficies diferentes.

Nótese en las siguientes figuras la secuencia de visualización de dos ecuaciones diferentes:

- a) el paraboloides circular

$$z = x^2 + y^2 \quad (\text{figura 297})$$

- b) la silla de mono ordinaria para un mono de una cola

$$z = x^3 - 3xy^2 \quad (\text{figura 298}).$$

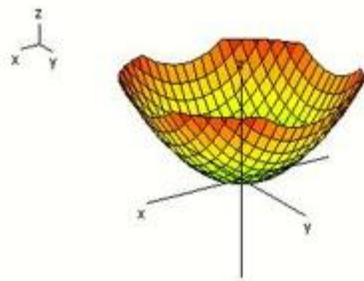


Figura 297. Paraboloide circular $z = x^2 + y^2$.
Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

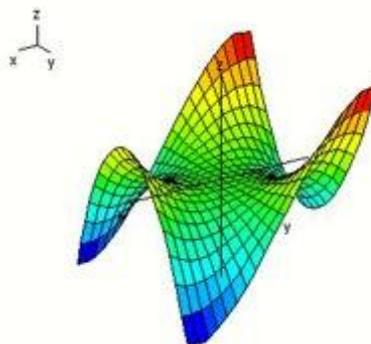


Figura 298. La silla de mono ordinaria para un mono de una cola $z = x^3 - 3xy^2$.
Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

Seguidamente se representan dos modelos de intersección en las figuras 299 y 300 se observan variantes de intersección, bajo diferentes parámetros de visualización en el caso de intersección de las dos superficies la silla de mono ordinaria para un mono de una cola $z = x^3 - 3xy^2$ con un paraboloide circular $z = x^2 + y^2$.

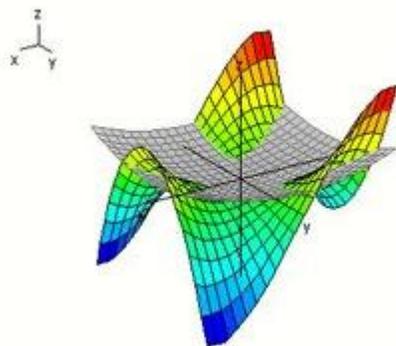


Figura 299. Representación de un modelo de intersección de un paraboloide circular $z = x^2 + y^2$ y de la silla de mono ordinaria para un mono de una cola $z = x^3 - 3xy^2$.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

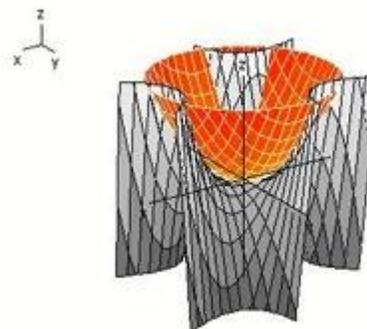


Figura 300. Representación de otra visualización del paraboloide circular $z = x^2 + y^2$ y de la silla de mono ordinaria para un mono de una cola $z = x^3 - 3xy^2$.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

Una silla de mono *perturbada* para un mono de una cola consiste en la representación gráfica de la modificación (o alteración si se prefiere) de la ecuación de la silla de mono ordinaria cuya ecuación cartesiana es de la forma

$$z = x^3 - 3xy^2$$

mediante la adición de otra superficie cuya ecuación, en este caso mediante un paraboloides circular

$$z = x^2 + y^2$$

lo cual genera la “*perturbación*” que en definitiva da como resultado una modificación en toda la estructura geométrica de la superficie. (figura 301).

Resultando así

$$z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$$

ecuación que es representada en la siguiente gráfica

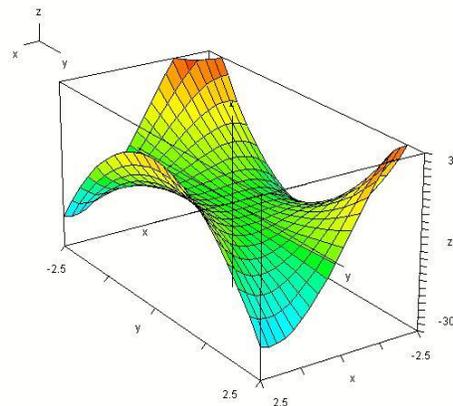


Figura 301. Silla de mono *perturbada* para monos de una sola cola que responde a la ecuación $z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

3.8. Propiedades geométricas de las superficies alabeadas de doble curvatura clasificación y ecuaciones que las determinan

3.8.1. La primera forma fundamental

a. El área de la superficie

Para la determinación del área de una superficie Do Carmo describe las siguientes dos definiciones:

“Sea $R \subset S$ una región limitada de una superficie regular contenida en la vecindad de la parametrización $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$.

El número positivo

$$\iint_Q |x_u \wedge x_v| dudv = A(R), \quad Q = x^{-1}(R)$$

Es llamada el área de R .

Nótese que

$$|x_u \wedge x_v|^2 + \langle x_u, x_v \rangle^2 = |x_u|^2 |x_v|^2,$$

La integral de $A(R)$ se puede escribir como

$$|x_u \wedge x_v| = \sqrt{EG - F^2} \quad \text{Carmo, 1976:}$$

b. La curvatura

“De hecho, existen varias nociones que pueden competir entre sí para ser consideradas como la curvatura de una superficie en \mathbb{R}^3 , a saber:

- La curvatura normal \mathbf{k} ;
- Las curvaturas principales \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 ;
- La curvatura media \mathbf{H} ;
- La curvatura de Gauss \mathbf{K} .” (Cordero, 1995:313)

3.9. Fundamentos geométricos de los paraboloides hiperbólicos comparados con los de las sillas de mono de una cola y de dos colas

A continuación se hace hincapié en algunos de los principios geométricos fundamentales de las superficies alabeadas de doble curvatura, con la recopilación de algunas aplicaciones con el software computacional *Mathematica*[®], el cual es descrito por los autores Cordero, Gray & Fernández en el texto «*Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica*»⁵. De igual modo se describen los pasos para la obtención gráfica de estas superficies mediante el software *Derive*[®]. Ambas secuencias permitirán abordar la determinación de los parámetros que servirán para obtener los resultados de la investigación.

a. El paraboloides hiperbólico. Modalidades geométricas de su representación gráfica

El paraboloides hiperbólico responde a dos modalidades de ecuaciones cartesianas. La primera como superficie de traslación (figura 302) y la segunda opción (figura 303) con el paraboloides hiperbólico como superficie anticlástica doblemente reglada de generatrices y directrices rectas.

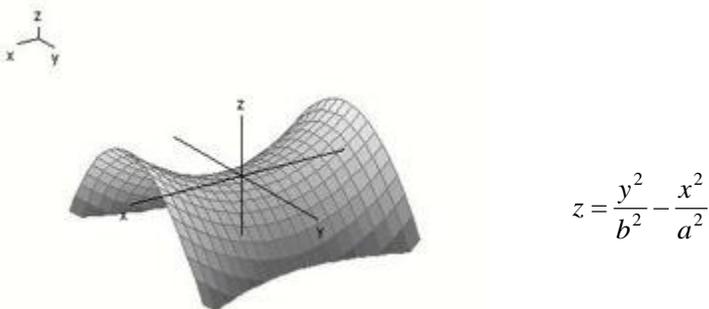


Figura 302. Paraboloides hiperbólico como superficie de traslación.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*[®]

⁵ El texto mencionado reúne una serie de miniprogramas para la representación de las superficies que son estudiadas en esta investigación. Sin embargo, el libro más sustancial para realizar las secuencias de visualización gráfica con el software *Mathematica*[®] es: Stephen Wolfram, autor del texto «*The Mathematica Book*»

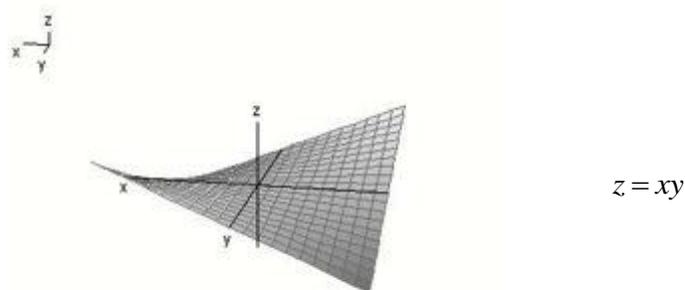


Figura 303. Paraboloide hiperbólico como superficie doblemente reglada.
Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

Ambas modalidades representan la cualidad de doble curvatura.

“La parametrización más sencilla del paraboloide hiperbólico es

$$\mathbf{hyperbolicparaboloid}(u, v) = (u, v, uv)$$

o, en *Mathematica*®,

$$\mathbf{hyperbolicparaboloid}[u, v] := \mathbf{u} \mathbf{v}, \mathbf{u} \mathbf{v}$$

Se puede representar gráficamente con *Mathematica*®, por ejemplo, ejecutando el comando

```
ParametricPlot3D[Evaluate[
hyperbolicparaboloid[u, v] ],
{u, -1.5, 1.5}, {v, -1.5, 1.5},
ViewPoint-> {1, 3, 1},
PlotPoints-> {20, 20},
Axes->None, Boxed->False];
```

(La opción **Boxed**→**False** representa la superficie sin la caja que la contiene, y la opción **Axes**→**None** suprime en la figura los ejes coordenados.)” (Cordero, 1995:244).

“Para la obtención de grafos de funciones se dispone del comando gráfico *Plot 3D*; este comando es mucho más rápido que *ParametricPlot3D* utilizando el comando

```
Plot 3D[u v, {u, -1.5, 1.5}, {v, -1.5, 1.5};
```

Se obtiene la siguiente representación gráfica (figura 304) del paraboloides hiperbólico: (Cordero, 1995:245).

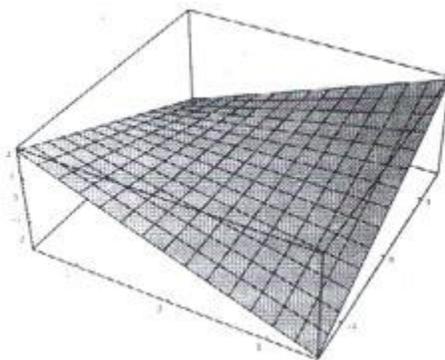


Figura 304. El paraboloides hiperbólico $(u,v) \mapsto (u,v,uv)$ dibujado con *Plot 3D*.

Fuente: Imagen extraída con fines didácticos del texto *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica*®.

Los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = 1 + v^2$$

$$F = uv$$

$$G = 1 + u^2$$

Y los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$e = 0$$

$$f = (1 + u^2 + v^2)^{-1/2}$$

$$g = 0 \quad (\text{Weisstein, 2006})$$

b. *La curvatura gaussiana del paraboloide hiperbólico*

$$K = -(1 + u^2 + v^2)^{-2}$$

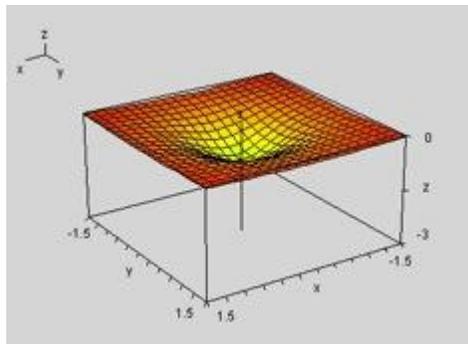


Figura 305. Representación gráfica de la curvatura gaussiana del paraboloide hiperbólico obtenida con *Derive*[®].
Fuente: elaboración propia con software *Derive*[®]

c. *La curvatura media del paraboloide hiperbólico*

$$H = -\frac{uv}{(1 + u^2 + v^2)^{3/2}}$$

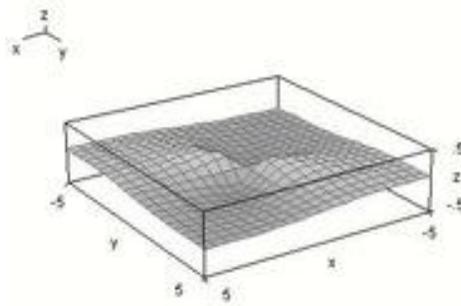


Figura 306. Representación gráfica de la curvatura media del paraboloide hiperbólico.

“parametrizada por

$$\text{Monkeysaddle}(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$$

o, en *Mathematica*[®],

$$\text{monkeysaddle}[u_ , v_] : \{u, v, u^3 - 3uv^2\}$$

Y se obtiene su representación gráfica utilizando *Mathematica*[®] al ejecutar el comando

```
ParametricPlot3D[Evaluate[
  monkeysaddle[u, v] ], {u, -1.5, 1.5}, {v, -1.5, 1.5},
  ViewPoint-> {1, 3, 1}, PlotPoints-> {20, 20},
  Axes->None, Boxed->False, AspectRatio-> 1.2];
```

El paraboloides hiperbólico y la silla de mono ordinaria para monos de una cola son los dos primeros miembros de una serie de superficies o grafos de las partes reales (o de las partes imaginarias) de las funciones $z \square z^n$ donde z es un número complejo

Donde

$$\begin{aligned} x(u, v) &= u \\ y(u, v) &= v \\ z(u, v) &= u^3 - 3uv^2 \end{aligned} \quad (\text{Weisstein, 2006})$$

“Se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} \mathbf{monkeysaddle}_u(u, v) &= (1, 0, 3u^2 - 3v^2), \\ \mathbf{monkeysaddle}_v(u, v) &= (0, 1, -6uv), \\ \mathbf{monkeysaddle}_{uu}(u, v) &= (0, 0, 6u), \\ \mathbf{monkeysaddle}_{vv}(u, v) &= (0, 0, -6uv), \\ \mathbf{monkeysaddle}_{uv}(u, v) &= (0, 0, -6v). \end{aligned} \quad (\text{Cordero, 1995:323}).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E &= 1 + (3u^2 - 3v^2)^2, \\ F &= -18uv(u^2 - v^2), \\ G &= 1 + 36u^2v^2 \end{aligned} \quad (\text{Weisstein, 2006})$$

Además, una normal unitaria (U) de la superficie es

$$U = \frac{(-3u^2 + 3v^2, 6uv, 1)}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}, \quad (\text{Cordero, 1995}).$$

de donde se sigue

$$e = U \cdot \text{monkeysaddle}_{uu} = \frac{6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}$$

$$f = U \cdot \text{monkeysaddle}_{uv} = \frac{-6v}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}$$

$$g = U \cdot \text{monkeysaddle}_{vv} = \frac{-6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}$$

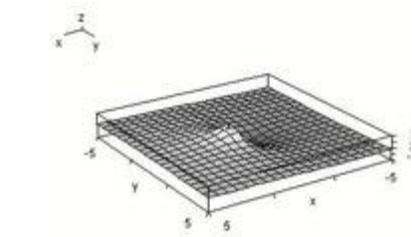


Figura 307. Representación gráfica de la curvatura media del paraboloides hiperbólico. Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

(Cordero, 1995:323)

d. Curvatura gaussiana de las sillas de mono

La curvatura de Gauss (K) para la silla de mono (figura 308) resulta

$$K = \frac{-36(u^2 + v^2)}{(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^2},$$

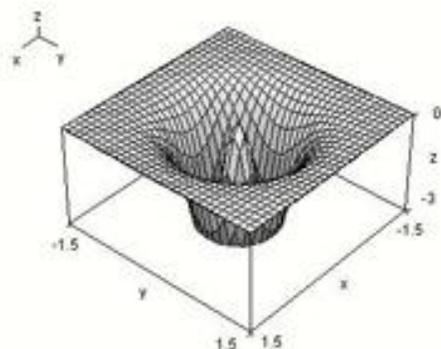


Figura 308. Representación gráfica de la curvatura gaussiana de la silla de mono. Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

e. *Curvatura media de las sillas de mono*

La curvatura media (H) para la silla de mono es calculada mediante la siguiente ecuación (Cordero, 1955:323).

$$H = \frac{-27u^5 + 54u^3v^2 + 81uv^4}{(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^{3/2}}$$

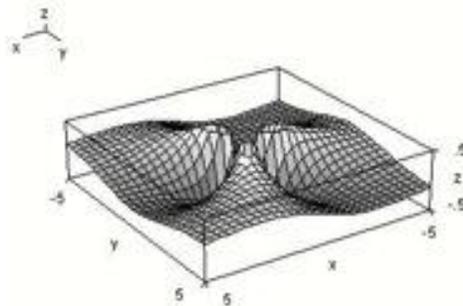
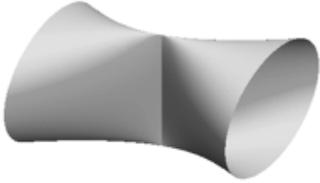
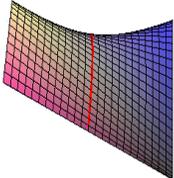
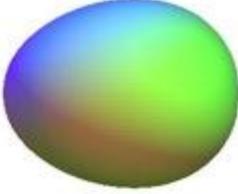
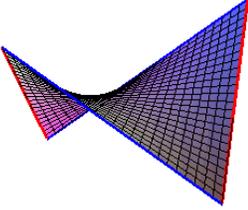
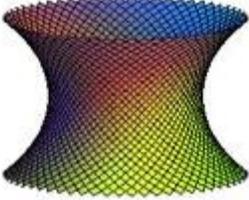
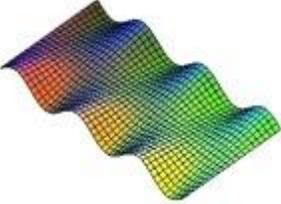


Figura 309. Representación gráfica de la curvatura gaussiana de la silla de mono.
Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

3.10. Otras superficies con potencial aplicación en procedimientos constructivos

Existen otras superficies que, aunque no son abordadas en esta investigación para su análisis, revisten importancia elemental para el estudio por parte de los ingenieros, arquitectos, constructores y estudiantes. De hecho algunas de ellas han sido empleadas por arquitectos para dar solución formal y estructural a sus proyectos de edificaciones y estructuras. De allí que alguna de ellas son inclusive identificadas para la comunidad científica con el nombre o apellido del arquitecto que las aplicó en su quehacer proyectual. Una recopilación de estas superficies es presentada a continuación. Nótese que algunas de ellas presentan la cualidad de estar generadas mediante la traslación de parábolas o bien son solucionadas espacialmente con rectas generatrices.

Cuadro No 3.7			
Otras superficies con potencial aplicación en procesos edificatorios			
Superficie	Descripción	Ecuación	
<p>Arista cónica de Wallis</p>  <p>Fuente: www.mathcurve.com</p>	<p>Superficie estudiada por Wallis. Nombre arquitectónico: Arco Posterior de Saint Antoine</p>	$x^2z^2 = b^2x^2 - a^2y^2$	
<p>Cinta de Moebius</p>  <p>Fuente: http://newundersol.blogspot.com/2011/02/our-universe-is-disappearing.html</p>	<p>Superficie estudiada por August Moebius en 1858.</p>	$x = \frac{at + bt^3 + ct^5}{1 + d^2t^2 + 2det^4 + e^2t^6}$ $y = \frac{dt + et^3}{1 + d^2t^2 + 2det^4 + e^2t^6}$ $z = \frac{-f}{1 + d^2t^2 + 2det^4 + e^2t^6}$ <p>con</p> $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{6}, d = \frac{2}{3}, e = \frac{1}{3}, f = \frac{4}{5}$	
<p>Superficie asteroidal</p>  <p>Fuente: www.mathcurve.com</p>	<p>Superficie generada con base en las curvas estudiadas por Romer en 1674, Bernoulli en 1691, Leibniz en 1715, DAlembert en 1748 y por Littrow en 1838 quien le puso el nombre por su relación con los asteroides.</p>	$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} = \sqrt[3]{a^2}$	$\begin{cases} x = a \cos^3 u \cos^3 v \\ y = a \sin^3 u \cos^3 v \\ z = a \sin^3 v \end{cases}$
<p>Superficie seudoesfera</p> 	<p>Superficie que fue estudiada por Ferdinand Minding & Eugene Beltrami en 1868.</p>		$\begin{cases} x = a \cos u \cos v \\ y = a \cos u \sin v \\ z = a(Gd^{-1}(u) - \sin u) \end{cases}$
<p>Superficie envase de carton (berlingot)</p>  <p>Fuente: www.mathcurve.com</p>	<p>Esta superficie genera una modalidad de paraboloides hiperbólicos.</p>	$\begin{cases} x = ka(1 + u) \cos v \\ y = ka(1 - u) \sin v \\ z = au \end{cases}$	

Superficie	Descripción	Ecuación
<p>Superficie de Héctor Guimard</p> 	<p>Superficie creada con base en los diseños de cubiertas para el Metro de París del Arq. H. Guimard (Art Noveau).</p>	$\begin{cases} x = ((1-u)a + ub) \cos v \\ y = bu \sin v \\ z = cu \sin^2 v \end{cases}$
<p>Ovoide</p> 		$\rho^2 = f(z)$
<p>Superficie de Bezier</p> 	<p>Esta superficie genera una modalidad de paraboloides hiperbólicos. Toda superficie algebraica polinómica es una superficie de Bezier.</p>	$M = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} C_n^i u^i (1-u)^{n-i} C_m^j v^j (1-v)^{m-j} A_{ij}$ <p>Para $n=m=1$ la superficie es un paraboloides hiperbólico</p>
<p>Catenoide</p> 	<p>Esta superficie fue estudiada por Euler en 1740. Se forma por la rotación de una catenaria alrededor de un eje central.</p>	$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} u \cos v \\ y = a \operatorname{ch} u \sin v \\ z = au \end{cases}$
<p>Conoide de Gaudí</p> 	<p>Variedad del Conoide recto empleada por Gaudí en la construcción de la Sagrada Familia en Barcelona, España.</p>	$z = kx \sin \frac{y}{a}$

3.11. Conclusiones del capítulo 3

El vocablo *superficie* uno de los que cuenta con mayor uso en el argot cotidiano de arquitectos, ingenieros y constructores llega a ser empleado, en algunos casos, con suma ligereza.

En este 3er capítulo se hace énfasis en la importancia de la comprensión geométrica de las superficies como entidades cuyas propiedades, de estricta índole matemática, deben ser comprendidas por el proyectista diseñador para obtener una acertada aplicación en soluciones espaciales que permitan una concepción arquitectónica respaldada por una representación gráfica, descriptiva y analítica en fin: dar una respuesta artística y tecnológica que esté sustentada por principios científicos comprobables y de carácter meramente universal.

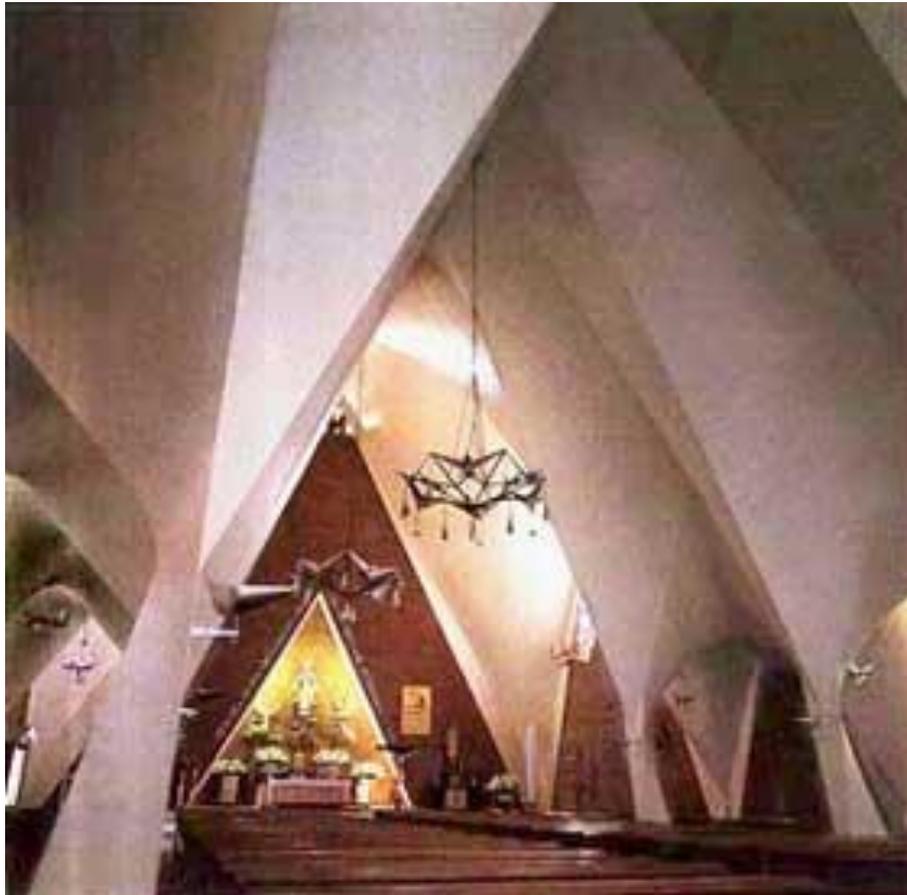
En las superficies alabeadas de doble curvatura (paraboloide hiperbólico, silla de mono de una, dos o más colas) se observa que son generadas espacialmente a partir del posicionamiento de parábolas con las ramas hacia arriba que son geoméricamente idénticas a otras, que dentro de la misma superficie, se hallan representadas con las ramas hacia abajo.

En las superficies doblemente regladas, como también han sido designadas hasta ahora estas superficies, la única denominación que considera a las hipérbolas es en el caso de los paraboloides hiperbólicos; en las otras grafías que son las sillas de monos para monos de una, dos o más colas hacen a un lado la generación tanto de parábolas como de las hipérbolas en su obtención gráfico—visual.

¿Pueden las superficies alabeadas de doble curvatura denominarse, tal como aquí se ha hecho, SUPERFICIES DE PARABOLAS INVERTIDAS?

Ciertamente es una designación nueva que en esta investigación se propone considerando que es de mucho mayor valor con carácter científico que determina al menos la propiedad aquí descrita comparada con las usuales “*silla de montar a caballo*”. “*silla de mono ordinaria*” o “*silla de mono perturbada*”. Sin negar que tales designaciones son las que se poseen un mayor nivel de difusión.

CAPÍTULO 4
GEOMETRÍA DE CUBIERTAS
DE PARABOLOIDES HIPERBÓLICOS



CAPÍTULO 4

ESTUDIO COMPARATIVO DE SISTEMAS ESTRUCTURALES DE CUBIERTAS DE PARABOLOIDES HIPERBÓLICOS MEDIANTE SU CLASIFICACIÓN Y REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA – ESPACIAL

4.0. Introducción

“La observación de los ejemplos de la naturaleza (...) nos demuestra que los cascarones más eficientes son siempre de doble curvatura, constituidos por superficies no desarrollables.”
Félix Candela.¹

Se realiza en este capítulo un análisis comparativo de los distintos sistemas estructurales solucionados con paraboloides hiperbólicos, aplicando para tal fin una clasificación de la variedad de tipologías lograda mediante su representación geométrica – espacial.

Issenman Pilarski, Ingeniero de Artes y Manufactura, de nacionalidad francesa, tal como ya fue indicado en la página 78, del capítulo 1 de esta investigación, escribió en 1935, un texto al que tituló «*Calcul des voiles minces en béton armé*» (Cálculo de cascarones en concreto armado), publicado por la editorial Dunod, Paris; donde se explican con detalle los procedimientos a considerar para el cálculo estructural y para las aplicaciones arquitectónicas de los paraboloides hiperbólicos como sistemas de cubiertas en edificaciones.

La segunda edición francesa del texto de Pilarski contó posteriormente con una traducción realizada por el Ingeniero Civil Miguel Echegaray, para la editorial Continental (mexicana); en 1960, 25 años después de que saliera a la luz la edición francesa original. Esa primera edición de dicha obra en lengua castellana, en un período comprendido entre 1960 y 1962 alcanzó otras dos reimpresiones que lo convirtieron en un texto de consulta obligatoria para los estudiantes y profesionales de habla hispana que deseaban conocer el camino para

¹ Prólogo a la traducción y publicación española en 1960 del libro «*Calcul des voiles minces en béton armé*»

discernir, bajo una estricta exactitud matemática, las reglas del comportamiento estable de las estructuras laminares de doble curvatura. Y allí se detuvo en el tiempo pasando a ser un libro de difícil obtención y consulta tal como lo es en la actualidad: no existen ejemplares a la venta en librerías de la especialidad y en las bibliotecas posiblemente haya sido desincorporado.

La obra escrita de Pilarski es de difícil consecución. Claramente es un libro antiguo pero que no por ello se podría descalificar su contenido ni considerarlo en desuso. Aún más: todo investigador que pretenda clarificar el comportamiento geométrico - espacial y estructural de las cubiertas laminares de doble curvatura debe, venciendo todos los obstáculos atribuibles al tiempo transcurrido, contar con los aportes de esta obra escrita.

La primera clasificación de aplicaciones arquitectónicas con modelos de paraboloides hiperbólicos empleados en procesos edificatorios se debe a Issenman Pilarski, quien desarrolló además los aportes teóricos para el cálculo estructural de los paraboloides hiperbólicos de concreto armado.

Sin embargo, Issenman Pilarski no fue el primero en contribuir con las fórmulas y ecuaciones de la teoría membranal que permiten determinar las condiciones de equilibrio estable de los paraboloides hiperbólicos. Antes que él, en 1935, Fernand Aimond, Doctor en Ciencias, Ingeniero de Puentes y Caminos que laboraba como especialista en el diseño y cálculo de cubiertas para aeródromos en el Ministerio del Aire francés publicó un primer tratado: «*Etude statique des voiles minces en paraboloïde hyperbolique travaillant sans flexion*» (Estudio estático de las bóvedas delgadas en paraboloïde hiperbólico trabajando sin flexión). Tratado en el cual Aimond planteó las modalidades formales y estructurales de cubiertas de paraboloides hiperbólicos construidos en concreto armado. Esto es reconocido por el mismo Pilarski. Incluso antes que la obra de Pilarski fuera editada, Bernard Lafaille, ingeniero civil de nacionalidad francesa, había publicado las «*Memoires sur l'etude generale des surfaces gauches minces*» (Memorias sobre el estudio general de las superficies alabeadas). También a él se debe, además, la primera patente registrada en Europa de estos sistemas de cubiertas. Ambos escritos, tanto la memoria así como la documentación de la patente, han resultado imposible de conseguirse, a pesar de las indagaciones todas ellas infructuosas, para documentar aquí su contenido.

Ambos escritos, el de Lafaille y el de Aimond, fueron publicados en los «*Boletines del Segundo Congreso de la Asociación Internacional de Puentes y Estructuras*» (IABSE, International Association for Bridges Structure Engineering), el primero de ellos en Vol. III, y el correspondiente a la autoría de Aimond en el Vol. IV, (Zúrich, 1935) pero a pesar de que son mencionados en diversos escritos de otros autores la divulgación de estos artículos ha sido escasa, al menos en Venezuela, y no ha sido posible obtenerlos por medios electrónicos.

Lafaille en su patente de cubiertas de doble curvatura en concreto armado explicaba el modo de construirlos como superficies que se agrupaban en dos grandes conjuntos las que espacialmente poseían rectas generatrices y directrices (como por ejemplo los paraboloides hiperbólicos construidos en Dreux, Francia (figura 39 en la página 75 del Capítulo 1 de esta investigación) y el segundo conjunto los de generación parabólica.

4.1. La forma construida vs el equilibrio estructural

Convertir una superficie de doble curvatura definida desde una acepción meramente geométrica en una estructura edificable no fue una tarea fácil.

Mucho más difícil aún fue establecer cuáles eran las ecuaciones que demostraban el comportamiento en condiciones de equilibrio estable de éstas; ya que se conocían a plenitud los métodos para el cálculo de los esfuerzos y reacciones de arcos, bóvedas, cúpulas. No obstante, respecto a las superficies regladas de doble curvatura era un camino que había sido inexplorado para los calculistas de estructuras.

Fue así como se justificó plenamente el hecho de que el ingeniero Pilarski escribiera en su obra el capítulo 11 que se titula *Los cascarones en la arquitectura*. Allí se establece la determinación de las aplicaciones constructivas mediante el establecimiento de las configuraciones geométricas y espaciales que dieron pie a toda la gama de variantes que cubrieron la actividad proyectual en torno a las aplicaciones de superficies alabeadas de doble curvatura; haciendo la salvedad de que el análisis y las representaciones gráficas de Pilarski, en el mencionado capítulo, corresponden a un período histórico donde las soluciones estructurales con paraboloides hiperbólicos eran producto de unas innovaciones que no se habían explotado más que por muy pocos ingenieros: entre los cuales se contaron a Aimond,

Lafaille, y él. Ante esto el ingeniero Pilarski, en 1935, dijo: “la búsqueda de nuevas líneas es una de las grandes preocupaciones de los constructores; sin embargo el cascarón ha permanecido ignorado de estos, fuera de raras excepciones, contra las grandes posibilidades de innovación que aporta.” (Pilarski, 1935:221).

Entre otras razones pesaba mucho el hecho de que en 1935, año de la aparición del libro de Pilarski, el concreto armado tenía menos de un siglo de aplicaciones y específicamente para la construcción de cubiertas con superficie alabeadas de doble curvatura resueltas con paraboloides hiperbólicos no alcanzaba siquiera un lustro. En medio de esas condiciones Pilarski escribió su obra de cálculo estructural.

Señaló Pilarski, en 1935, que los paraboloides hiperbólicos en concreto armado responden a las siguientes propiedades:

Primera propiedad. El paraboloide hiperbólico es un cascarón de igual resistencia para todo sistema de cargas uniformemente repartido y paralelo a la dirección de su eje.

Segunda propiedad. En todo punto de los bordes de un paraboloide hiperbólico, se pueden siempre encontrar dos direcciones según las cuales es posible equilibrar en el cascarón, por tensiones o compresiones simples, las reacciones de borde.

Tercera propiedad. En todo paraboloide [hiperbólico] de igual resistencia, a lo largo de un borde rectilíneo cualquiera, las reacciones normales a ese borde son nulas; dicho de otra forma, sobre todo borde rectilíneo, el empuje hacia fuera es nulo.” (Pilarski, 1935:179).

4.2. Aportes de Issenman Pilarski a la representación arquitectónica de los paraboloides hiperbólicos

Para comprender cuál fue el aporte de Pilarski a la representación geométrico – espacial en soluciones arquitectónicas de los paraboloides hiperbólicos hay que situarse en la época histórica en la cual él realizó su obra escrita. Para ese período los techos reglados de doble curvatura no eran una respuesta frecuente otorgada por los profesionales del diseño.

Seguidamente se presenta una recopilación de las aplicaciones geométricas – espaciales de los paraboloides hiperbólicos como sistemas de cubiertas propuestas por Pilarski.

4.2.1. Paraboloides hiperbólicos como superficie anticlástica, de configuración geométrica – espacial que generan planta cuadrada

a. Propuesta de Issenman Pilarski

La figura 310 describe la representación más sencilla, propuesta por Pilarski, del esquema de una cubierta doblemente reglada de paraboloides hiperbólicos como superficie anticlástica de ecuación cartesiana $z=xy$; con vértice en el centro de un sistema de coordenadas (oblicuas o rectangulares según sea el caso, de acuerdo con el ángulo establecido entre las coordenadas x y y), donde las rectas generatrices coinciden con coordenadas ox y oy mientras que el eje del paraboloides hiperbólico como tal coincide con el eje oz .

$$z = hxy \quad (\text{Pilarski, 1935:143}).$$

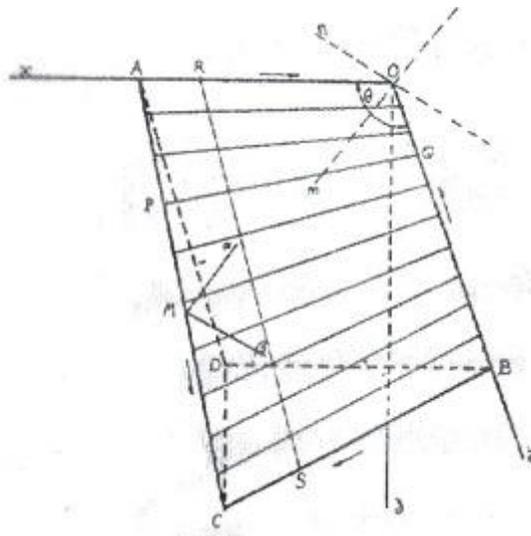


Figura 310. Esquema de cubierta doblemente reglada de paraboloides hiperbólicos.
Fuente: extraída con fines didácticos de Pilarski, 1935:177.

Se establece así que para un paraboloides hiperbólico doblemente reglado de configuración cuadrada y rectangular, además de cumplir con la condición de que el eje oz esté confundido con el eje de la misma superficie se cumple con la siguiente regla general:

“En un punto cualquiera de un paraboloides, [hiperbólico] además de las compresiones o tensiones a lo largo de las generatrices, provenientes de las reacciones en el borde, no se ejercen sino esfuerzos tangenciales según las generatrices que pasan por ese punto.” (Pilarski, 1935:141).

b. Descripción hecha por Félix Candela, a partir del concepto de Pilarski, para la obtención de la configuración geométrico - espacial de paraboloides hiperbólicos de planta cuadrada como superficie anticlástica

Las superficies alabeadas de doble curvatura se obtienen, en el caso específico de los paraboloides hiperbólicos –geométrica y gráficamente, según la descripción hecha por Candela– como superficie anticlástica (figuras 311 y 312) a partir de “...dos sistemas de líneas rectas h_n e i_n , cada sistema paralelo a un plano director y ambos planos formando un ángulo arbitrario ω .” (Faber, 1970: 27).

La correlación entre las líneas generatrices y el plano director fue definida por Candela así:

“Las líneas rectas h_n que intersecan a ambas directrices, siendo al mismo tiempo paralelas a un plano xOz llamado *plano director*, definen la superficie. Se les denomina el *primer sistema de generatrices*.” (Faber, 1970:27).

El *segundo sistema de generatrices* i_n son rectas paralelas a un segundo plano director yOz , el cual, a su vez, también es paralelo a las directrices HOD y ABC .

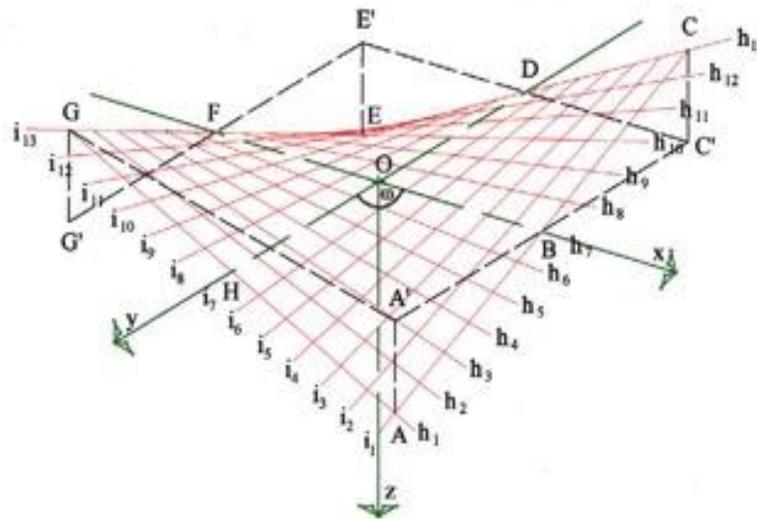


Figura 311. Representación, según lo explica Candela, del modo de generar un paraboloides hiperbólico como superficie anticlástica mediante dos tipos de rectas generatrices, h_n e i_n , con eje z vertical.

Fuente: extraída con fines didácticos de Faber 1970:27

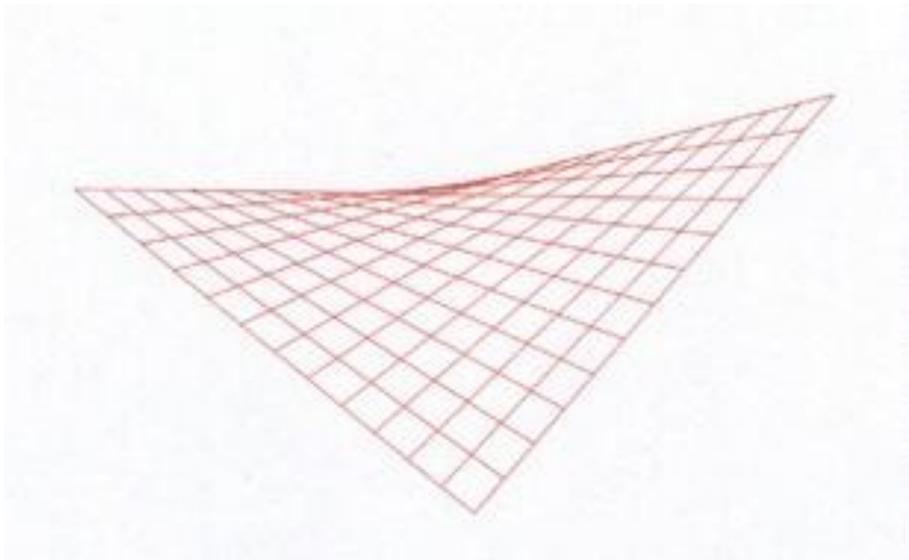


Figura 312. Configuración geométrica de las rectas generatrices y directrices que se conforman para la superficie doblemente reglada.

Fuente: elaboración propia.

El modo de representar una cubierta o techo para edificaciones de planta cuadrada o rectangular empleando una sola unidad de paraboloides hiperbólico, de acuerdo a lo explicado por Félix Candela, como superficie doblemente reglada es factible de aplicarse mediante un procedimiento geométrico que tiene como pauta inicial la configuración de un cuadrado y un sistema de ejes coordenados para luego aplicar un procedimiento de perspectiva isométrica y posicionar el cuadrado que deberá conformar espacialmente a la superficie doblemente reglada.

En las figuras 313 y 314 se visualiza la configuración geométrica del área que deberá cubrir la superficie del paraboloides hiperbólico con diferentes posibilidades de alabeamiento.

La doble curvatura es posible aumentarla o disminuirla adquiriendo mayores condiciones de equilibrio estable en la medida en que la superficie reglada genere más curvatura.

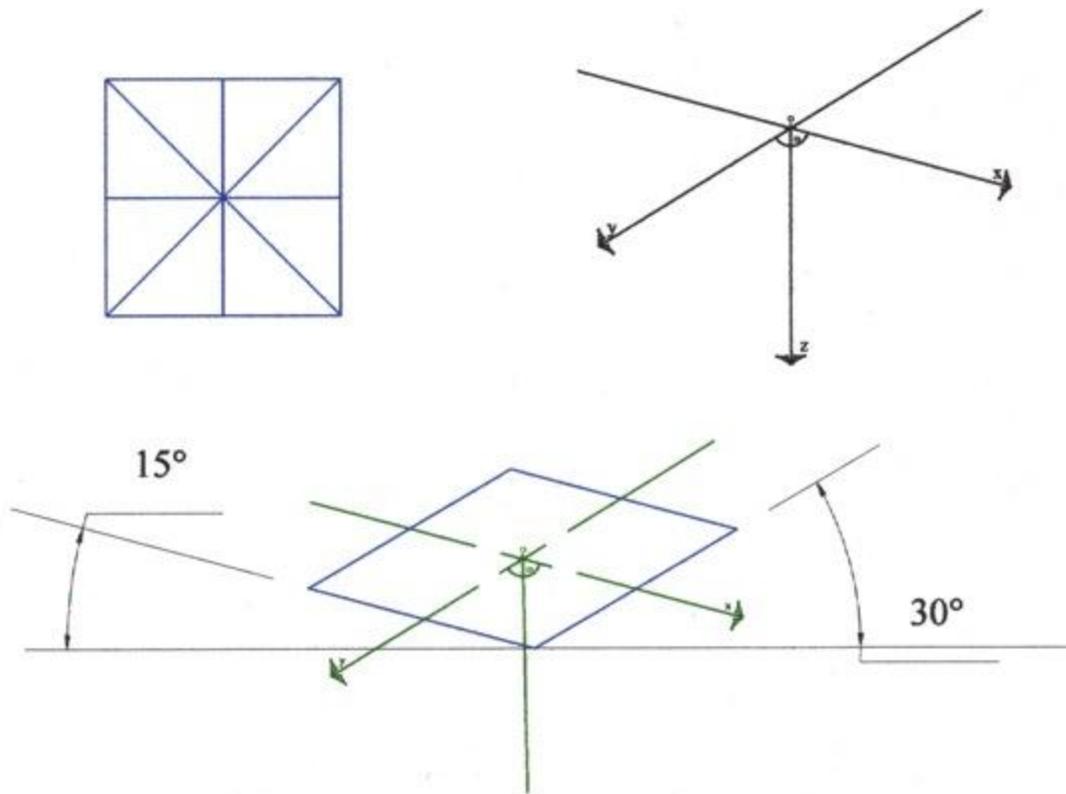


Figura 313. La generación geométrica de un paraboloides hiperbólico como superficie doblemente reglada partiendo de un cuadrado unitario.
Fuente: elaboración propia.

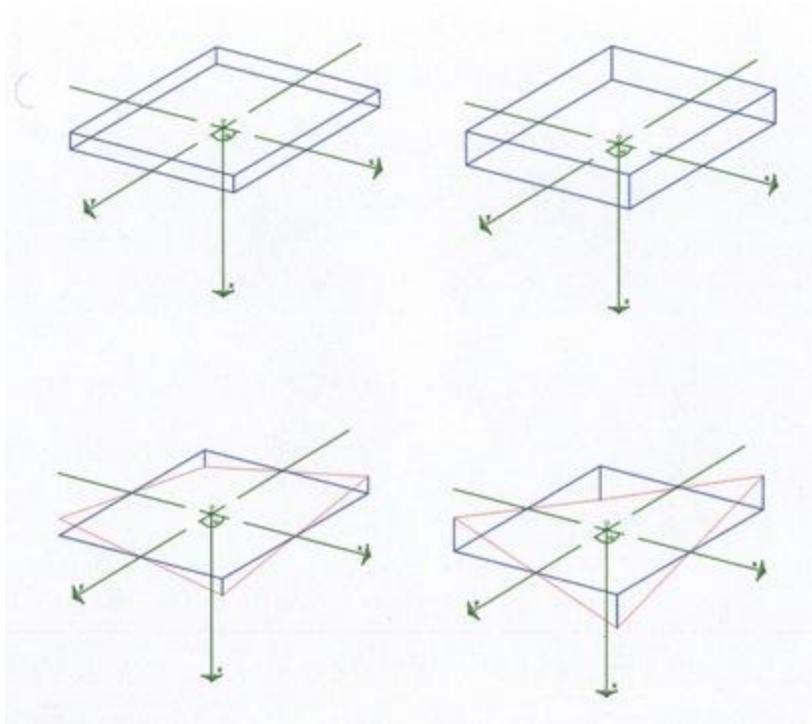


Figura 314. Visualización de la variación de la curvatura en la generación geométrica - espacial de modelos de paraboloides hiperbólicos como superficie doblemente reglada partiendo de un cuadrado unitario.
Fuente: elaboración propia.

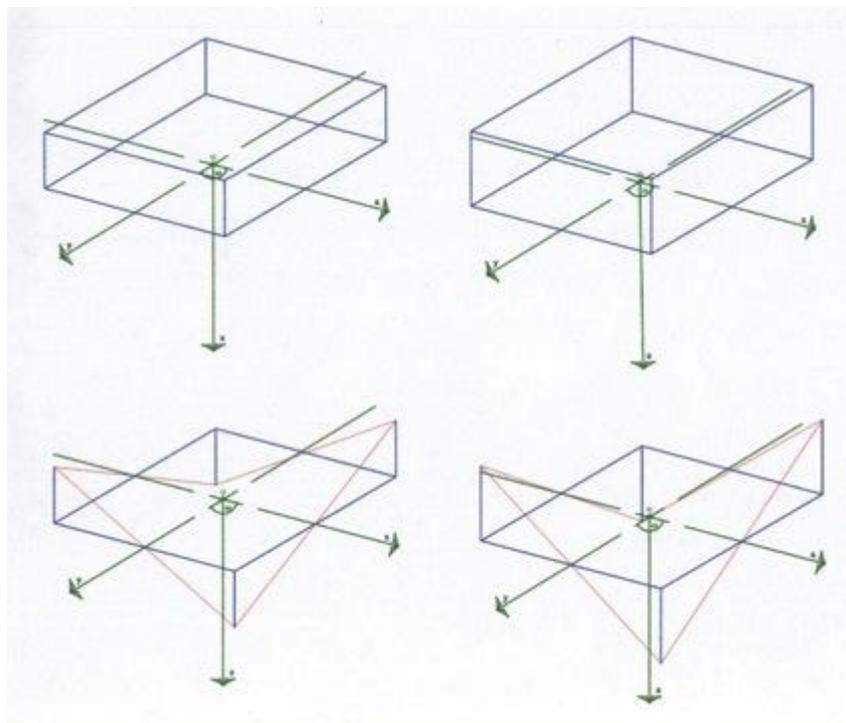


Figura 315. Diferentes configuraciones para la generación geométrica - espacial de un paraboloides hiperbólico como superficie doblemente reglada partiendo de un cuadrado unitario.
Fuente: elaboración propia.

c. Combinaciones de dos, tres o cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos de planta cuadrada o rectangular (superficies anticlásticas)

¿Cómo influye la geometría en el comportamiento bajo condiciones de equilibrio estable de estas cubiertas del *Primer Tipo*?

La combinación de dos unidades de paraboloides hiperbólicos doblemente reglados empleados como sistemas de cubiertas fue representada por Pilarski, en 1935, y descrita como un sistema en voladizo empotrado en los puntos más elevados (de acuerdo a la flecha) de la techumbre. Las figuras 316, 317 y 318 indican la configuración geométrica – espacial de esta modalidad.

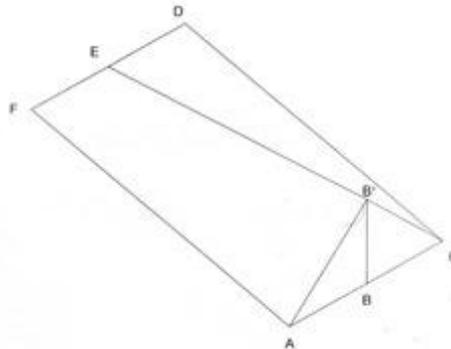


Figura 316. Esquema de la representación de dos unidades de paraboloides hiperbólicos con configuración geométrica – espacial de un voladizo, según Pilarski.

Fuente: extraída con fines didácticos de Pilarski, 1935:148.

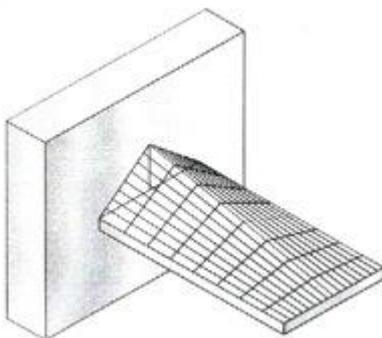


Figura 317. Representación de dos unidades de paraboloides hiperbólicos con configuración geométrica – espacial de un voladizo.

Fuente: elaboración propia.

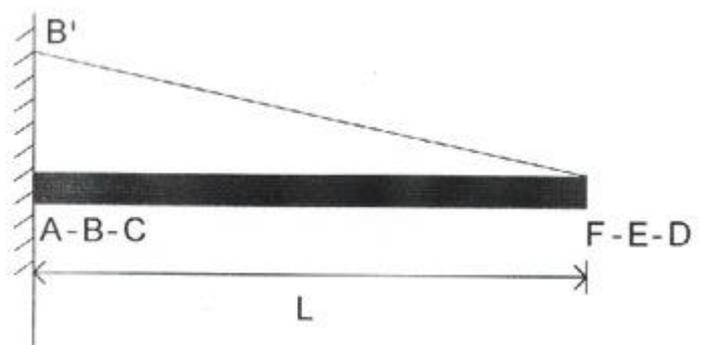


Figura 318. Esquema estructural para un cantiliver de con configuración geométrica – espacial de dos unidades de paraboloides hiperbólicos.

Fuente: elaboración propia.

d. Condiciones geométricas que permiten el equilibrio estable en cubiertas de cuatro unidades cuadradas de paraboloides hiperbólicos

La figura 319 muestra la representación esquemática de una de las cubiertas más fáciles de modelar y también de construir constituida por cuatro unidades doblemente regladas de paraboloides hiperbólicos inscritos en un cuadrilátero. Su sencillez geométrica está caracterizada por la horizontalidad de sus cumbreras identificadas con las líneas $A-A'$ y $B-B'$. Pilarski estableció que los paraboloides hiperbólicos poseen una clasificación geométrico - espacial de acuerdo con las tipologías de los bordes, en este caso los de borde recto, de configuración cuadrada pertenecen al *Primer Tipo*. Este modelo es descrito por el mencionado autor así:

“Una propiedad particular [de esta tipología] reside en el hecho que, siendo los bordes generatrices, no se ejerce a lo largo de ellos sino esfuerzos tangenciales puros; dicho en otra forma, en un punto M cualquiera, los esfuerzos principales que se ejercen alrededor de este punto, según Ma y Mb , se componen para dar una resultante siempre paralela al borde.” (Pilarski, 1962:189).

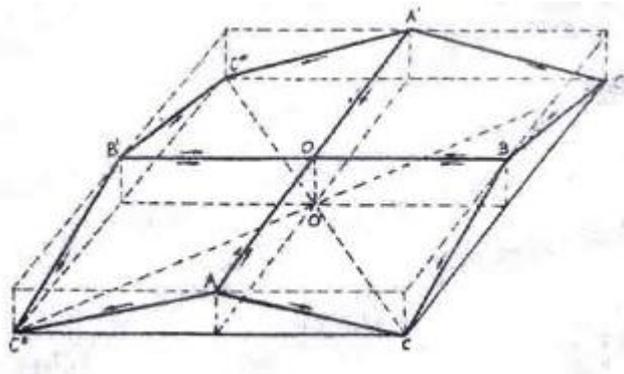


Figura 319. Cubierta esquemática de cuatro unidades doblemente regladas de paraboloides hiperbólicos.
Fuente: extraída con fines didácticos de Pilarski, 1935:177.

La configuración geométrica del cuadrilátero permitía lograr la estabilidad de la cubierta mediante la colocación de tirantes en $C-C' C''- C'''$.

Seguidamente se describen las características del equilibrio estable de cubiertas de paraboloides hiperbólicos de configuración geométrica – espacial de planta cuadrada y bordes rectos. Se obtienen así las siguientes condiciones:

Cuadro 4.1	
Condiciones de equilibrio estable en cubiertas de paraboloides hiperbólicos de configuración geométrica-espacial cuadrada y bordes rectos²	
Elementos tipo vigas rectas	Cumbreras AoA' y BoB' ; y todos los bordes CAC' ; CBC' ; $C''AC''$ y $C''BC''$
Puntos a compresión nula	En los puntos A , B , A' y B' ; va aumentando hasta llegar a la compresión máxima en o' . En todos los bordes de las cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos, las compresiones también son nulas.
Puntos a Compresiones máximas	En los puntos o , C , C' y C''
Reacciones verticales	En los puntos C , C' , C'' y C''' (que equivalen al peso total de la cubierta).
Flecha	Dada por la longitud $o-o'$

Cuadro de elaboración propia con base en Pilarski, 1962:191.

² Las condiciones de equilibrio aquí descritas son válidas sólo para los casos de cascarones (placas delgadas).

e. Combinación de cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos de configuración rectangular

¿Cuáles son las condiciones de equilibrio estable de acuerdo con esta modalidad geométrico – espacial de paraboloides hiperbólicos de configuración rectangular y bordes rectos?

La descripción de las reacciones de esta tipología geométrica la realiza Pilarski estableciendo las siguientes condicionantes:

Dado un rectángulo cuyos vértices sean $MNPQ$; (figura 320) el segmento $o-o'$ perpendicular al plano del rectángulo permite trazar, hacia los puntos medios de cada uno de los lados, las rectas oA , oB , oC y oD . Las unidades de paraboloides hiperbólicos se inscribirán en cada uno de los tableros $AMBo = \alpha$, $BNC_o = \beta$, $CPDo = \gamma$, y $DQA_o = \delta$.

Los vértices de las unidades de paraboloides hiperbólicos serán los puntos M , N , P y Q respectivamente.

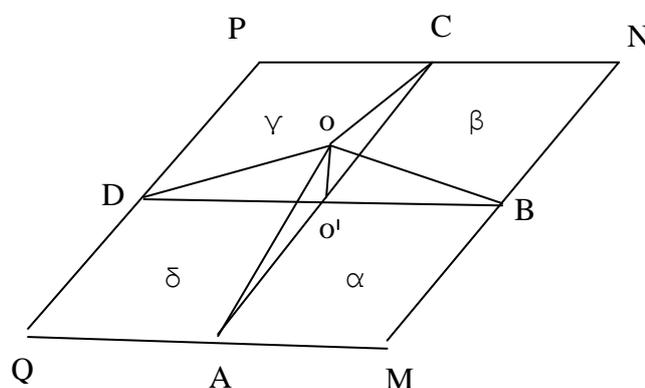


Figura 320. Cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos que generan una cubierta de configuración rectangular.

Fuente: extraída con fines didácticos de Pilarski, 1935:149.

Las condiciones de equilibrio estable de cubiertas de paraboloides hiperbólicos de configuración geométrica – espacial de planta rectangular y bordes rectos, de acuerdo a los aportes de Pilarski, (cuadro 4.2) permiten describir las siguientes modalidades:

- a. El caso en que la cubierta está sostenida por un solo poste central que coincide verticalmente con el segmento $o-o'$.
- b. El caso en que se dispongan apoyos verticales en cada una de las esquinas del cuadrilátero en los puntos $M-N-P$ y Q . Lo cual conlleva a prever que los bordes $QM = NP$, y $MN = QP$, actúan como vigas rectas.
- c. Esta última modalidad corresponde a la disposición de los apoyos verticales que a diferencia del caso anterior esta vez se disponen en los puntos medios de los lados del rectángulo en los puntos $A-B-C$ y D .

Cuadro 4.2 Condiciones de equilibrio estable en cubiertas de paraboloides hiperbólicos de configuración geométrica-espacial rectangular y bordes rectos³	
Elementos tipo vigas rectas	Todos los bordes MBN , NCP , PDQ y QAM
Puntos a compresión nula	En los puntos M , N , P y Q .
Puntos a Compresiones máximas	En los puntos A , B , C y D . De igual modo que la compresión en MA es equilibrada con la de QA MB es equilibrada con la de NB ; NC es equilibrada con la de PC y PD es equilibrada con la de DQ .
Reacciones verticales	No se produce en los bordes ningún esfuerzo vertical. Cuando la cubierta es apoyada con una columna en el centro alineada con $o-o'$ la resultante vertical es equivalente al peso de la cubierta mediante cuatro fuerzas dirigidas por oA , oB , oC y oD . Si el sistema se apoya en cuatro columnas ubicadas en los puntos A , B , C y D ; las aristas oA , oB , oC y oD . actúan a compresión y se requieren tirantes en AoC y BoD .
Flecha	Dada por la longitud $o-o'$

Cuadro de elaboración propia con base en Pilarski, 1962:192.

³ Las condiciones de equilibrio aquí descritas son válidas sólo para los casos de cascarones (placas delgadas).

f. Otros modelos de paraboloides hiperbólicos propuestos por Pilarski

Ciertos modelos de paraboloides hiperbólicos no fueron jamás construidos tal y como fueron vislumbrados y presentados por Pilarski en su texto de la década de los años 30 (figuras 322, 325 y 326). Es de suponer que tales dibujos significarían el principio y fin de la implantación de paraboloides hiperbólicos ya que se hallaban revestidos de un halo de antigüedad. Ante esto Candela señaló en el prefacio de la reedición del texto de Pilarski para 1962 lo siguiente: “Conviene, por tanto, al enfrentarnos a un libro como el de Pilarski, tratar de definir a qué problemas se refiere y cuál puede ser su campo de vigencia.” (Pilarski, 1962:7). Por lo que no sería una exageración suponer que en cuanto a la vigencia de algunas tipología de cubiertas de paraboloides hiperbólicos contenidas en la obra de Pilarski pronto dejarían de tener vigencia a no ser por las innovaciones de otros ingenieros, como fue el caso de Candela, quien se planteó depurar tales modelos y adecuarlos a las exigencias normativas de la construcción contemporáneas.

La configuración de cubiertas constituidas por cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos se propuso indistintamente para apoyarse sobre columnas verticales (figura 322) lo cual era muy simple de representar y también de resolver en términos prácticos, mientras que el planteamiento de colocar el vértice de los paraboloides hiperbólicos directamente al piso (figura 321) requirió de un mayor nivel de determinación constructiva para que la geometría de las superficies no deformaran a los bordes y a los tímpanos de la estructura. Esto fue suficientemente resuelto, unas tres décadas después, de la propuesta hecha por Pilarski, gracias a la obra construida por Candela (figura 324).

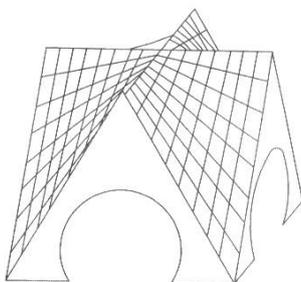


Figura 321. Cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos que generan una cubierta de configuración cuadrada.

Fuente: extraída con fines didácticos de Pilarski, 1935:149.

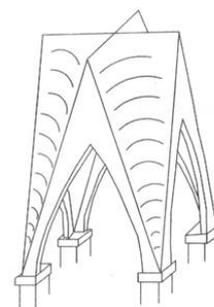


Figura 322. Cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos que generan una cubierta de configuración cuadrada.

Fuente: extraída con fines didácticos de Pilarski, 1935:225.

Capítulo 4. Sistemas estructurales de cubiertas
con paraboloides hiperbólicos

La geometrización de las reacciones de un novedoso sistema de cubiertas, propuesto en 1932) conformado por la intersección de cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos, fueron representadas en la obra de Pilarski y esto conllevó a que Candela resolviera los aspectos que habían quedado sin definir como fueron las respuestas y deformaciones que se presentaban en las cumbreras o tímpanos de la estructura.

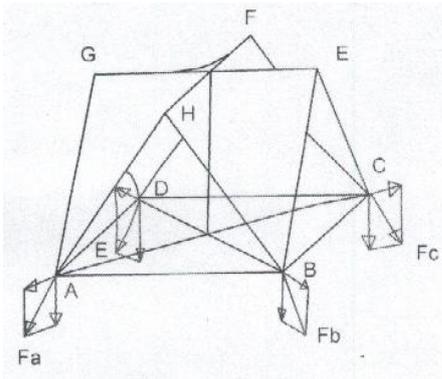


Figura 323. Reacciones que generan los esfuerzos de una cubierta de paraboloides hiperbólicos de configuración cuadrada.

Fuente: extraída con fines didácticos de Pilarski, 1935:225.

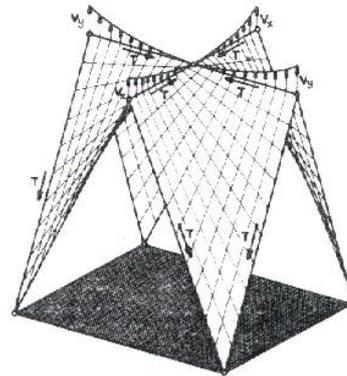


Figura 324. Deformaciones que se producen en los tímpanos de una cubierta de cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos de configuración cuadrada.

Fuente: extraída con fines didácticos de Faber, 1970:32.v

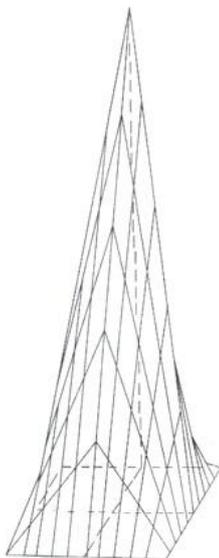


Figura 325. Estructura de una cubierta de cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos de configuración cuadrada que no llegó a edificarse.

Fuente: extraída con fines didácticos de Pilarski, 1935:228.

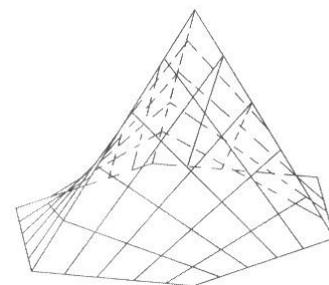


Figura 326. Estructura de una cubierta de tres unidades de paraboloides hiperbólicos de configuración hexagonal.

Fuente: extraída con fines didácticos de Pilarski, 1935:229.

4.2.2. Configuración geométrica – espacial de paraboloides hiperbólicos como superficie sinclástica o de traslación

Otra modalidad de cubiertas de paraboloides hiperbólicos de una sola unidad es la configuración geométrico–espacial de un paraboloide hiperbólico como superficie de traslación de una parábola (figura 327 y 328). Pilarski (1935) la describe (figura 329) como “...un paraboloide hiperbólico $ABCD$ cuyos cuatro lados son arcos de parábolas y en el cual, un solo lado forma un borde rígido que puede equilibrar todos los esfuerzos horizontales que le son transmitidos.” (Pilarski, 1935:145).⁴

Engel (1997) define a la superficie de traslación como aquella que se genera haciendo girar una curva *generatriz* en paralelo teniendo como directriz a otra curva *directriz* cuyo plano director sea perpendicular a la curva generatriz.

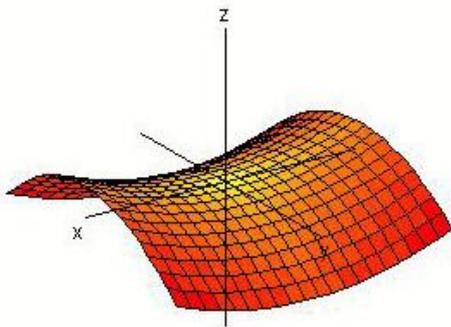


Figura 327. El paraboloide hiperbólico dibujado con *Derive*® como superficie de traslación cóncava hacia abajo.

Fuente: elaboración propia.

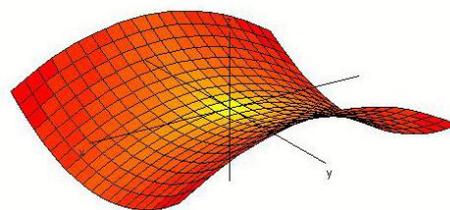


Figura 328. El paraboloide hiperbólico dibujado con *Derive*® como superficie de traslación cóncava hacia arriba.

Fuente: elaboración propia.

Ahora bien: ¿cuáles son las condiciones geométricas que determinan el equilibrio estable de esta modalidad de paraboloides hiperbólicos en forma de silla de montar a caballo? Pilarski (1962) establece la siguiente descripción:

“ESTUDIO DE LOS BORDES DEL PARABOLOIDE EN FORMA DE SILLA DE CABALLO. Consideremos un paraboloide $ABCD$ cuyos cuatro lados son arcos de

⁴ Pilarski en su obra escrita describe esta tipología de paraboloides hiperbólicos como *PARABOLOIDE EN FORMA DE SILLA DE CABALLO*. Sin embargo, para los fines de esta investigación tal denominación no ha sido empleada en virtud de que la silla de montar a caballo es, entre las múltiples aplicaciones de los paraboloides hiperbólicos, la menos usual en la descripción de las cubiertas de edificaciones.

parábolas, y en el cual un solo lado forma un borde rígido que puede equilibrar todos los esfuerzos horizontales que le sean transmitidos.” (Pilarski, 1962:186, figura 329). Sin embargo, ese no es el único caso de paraboloides hiperbólicos como superficies de traslación. Existen además los que poseen dos bordes rígidos y los que se equilibran mediante las reacciones con todos los bordes rígidos. Aún más: el caso de la unión de paraboloides hiperbólicos como superficies de traslación o sinclástica fue una de las modalidades donde Félix Candela logró realizar importantes aportes a las innovadoras tendencias de construcción de superficies alabeadas y logró imponer una tendencia constructiva en la cual se colocaban dos cascarones, unidos precisamente por el borde rígido, en el cual las reacciones se equilibraban por efectos de simetría de la estructura.

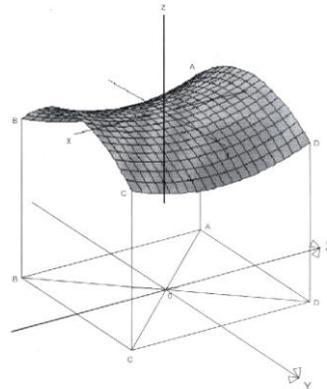


Figura 330. El paraboloides hiperbólico como superficie de traslación para cubrir un cuadrilátero ABCD.
Fuente: elaboración propia con base a la figura extraída con fines didácticos de Pilarski, 1935:187.

Seguidamente, también con el eje z vertical, se representan a los paraboloides hiperbólicos como una superficie de traslación (figura 330) generados por una parábola principal que se mueve paralelamente a si misma, a lo largo de otra parábola principal invertida. “Por consiguiente la superficie tiene dos sistemas de generatrices parabólicas. Cada sistema está compuesto por parábolas idénticas, situadas en planos paralelos.” (Faber, 1970:28).

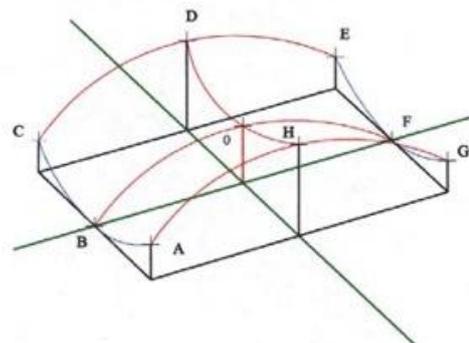


Figura 330. El paraboloides hiperbólico dibujado con Autocad® como superficie de traslación.
Fuente: elaboración propia con base a la figura extraída con fines didácticos de Faber, 1970:28

Los paraboloides hiperbólicos como superficie de traslación contienen un área común en la que logra observarse a las parábolas generatrices y directrices y un área donde puede generarse una superficie doblemente reglada de paraboloides hiperbólicos anticlástica (figuras 331, 332 y 333) en el que las generatrices y directrices son rectas

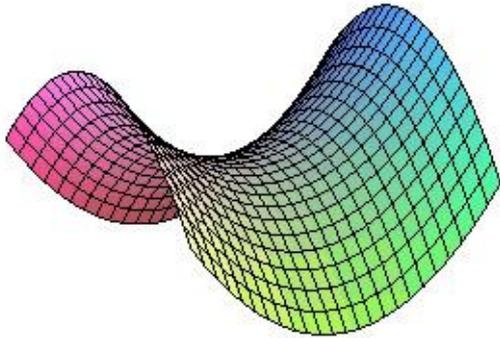


Figura 331. Paraboloides hiperbólico como superficie de traslación
 $z = x^2 - y^2$.

Fuente: extraída con fines didácticos de <http://fcm.ens.uabc.mx/>

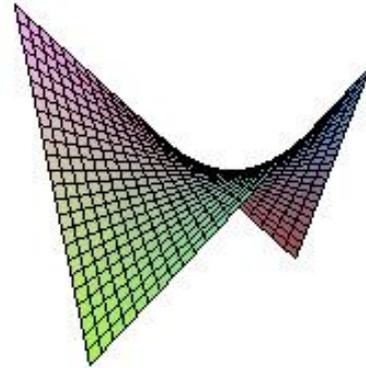


Figura 332. Paraboloides hiperbólico como superficie doblemente reglada
 $z = xy$.

Fuente: extraída con fines didácticos de <http://fcm.ens.uabc.mx/>

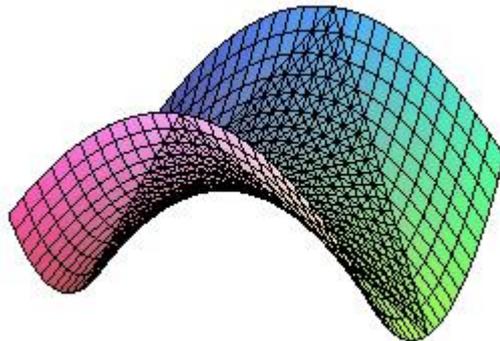


Figura 333. Representación del paraboloides hiperbólico como superficie de traslación $z = x^2 - y^2$ y su área común donde se genera una superficie doblemente reglada.

Fuente: extraída con fines didácticos de <http://fcm.ens.uabc.mx/>

4.3. Heino Engel, propuesta de un sistema de clasificación de las estructuras

Engel (1997) clasifica a los mismos en las siguientes categorías:

Forma activa
Vector activo
Sección activa
Altura activa
Sistemas de estructuras híbridos
Superficie activa

Según Engel (1997) los paraboloides hiperbólicos, y es lógico admitirlo así, son superficies que quedan agrupadas dentro del conjunto que este autor denomina «*Sistemas de estructuras de superficie activa*» aun cuando el avance de las innovaciones formales y la aplicación de novedosos sistemas constructivos y materiales conllevaría a dejar sentado que las superficies alabeadas de doble curvatura poseen condicionantes estructurales que encajan en al menos otras de las agrupaciones como son; los sistemas estructurales de forma activa, los de vector activo y los sistemas de estructuras híbridos. Quizás las menos afines serían las comprendidas dentro de los conjuntos de sistemas de altura activa (rascacielos y estructuras de muy gran altura) y los de sección activa que basan su comportamiento estable en la transmisión de esfuerzos lineales que se asemejan al sistema de marcos (vigas y columnas).

Sin embargo, es apropiado convenir que las propiedades de los paraboloides hiperbólicos los incluyen como sistemas estructurales de superficie activa y que estos deberán cumplir con la siguiente premisa:

“En los sistema de estructuras de superficie activa es fundamental una forma correcta que transmita las fuerzas externas y las distribuya uniformemente en pequeñas unidades por toda la superficie. Dar con la forma apropiada para una superficie –desde el punto de vista estructural, funcional y estético – es un acto creativo: es arte” (Engel, 1997:211).

Definiendo aún más la estructura de los paraboloides hiperbólicos Engel (1997) describe así el mecanismo portante de una superficie de doble curvatura: (figura 334)

“...funciona a lo largo de un eje como un mecanismo de arco y, a lo largo del otro, como un mecanismo suspendido. Mientras que los esfuerzos de compresión tienden a deformar la membrana según un

eje, los esfuerzos de tracción según el otro eje tienden a contrarrestar esta deformación.” (Engel, 1997:257).

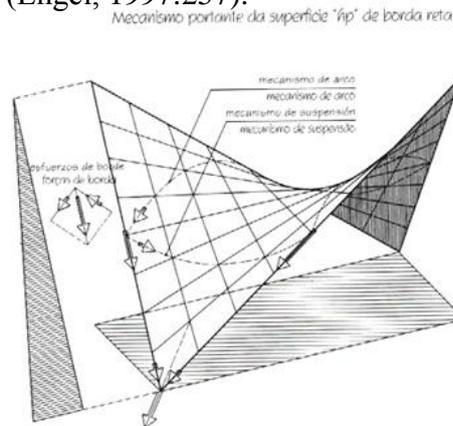


Figura 334. Respuesta estructural de un paraboloides estructural cuadrado de bordes rectos.
Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:257.

Engel (1997) fija las condiciones geométricas que diferencian a un paraboloides de base elíptica (figura 335) con respecto a un paraboloides hiperbólico ambos como superficies de translación. En el caso del paraboloides elíptico la generación de la curvatura es sinclástica, mientras que en la del paraboloides hiperbólico (figura 336) la curvatura es de dirección opuesta o anticlástica. En este último caso “Debido a su forma de arco (hipérbola) la viga de borde puede transmitir estos esfuerzos horizontales a las esquinas sin apenas flexión.” (Engel, 1997:256)

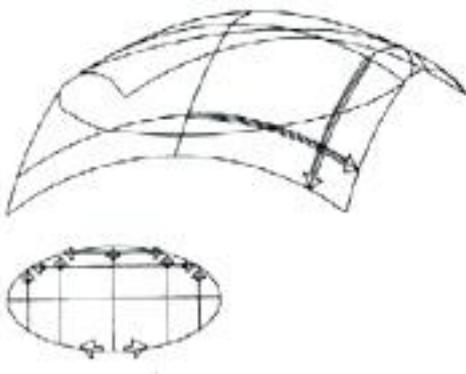


Figura 335. Paraboloides elíptico como superficie de translación sinclástica.
Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:256.

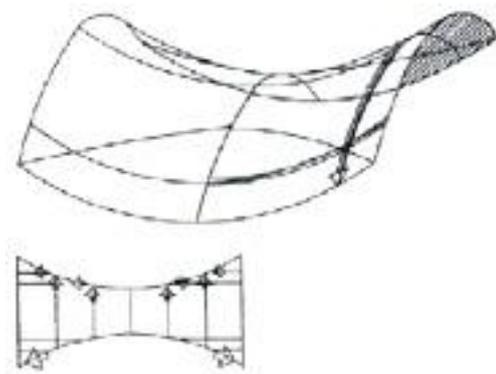


Figura 336. Paraboloides hiperbólico como superficie de translación anticlástica
Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:256.

4.3.1. Sistemas de Superficie activa. Prototipos registrados por Engel (1997)

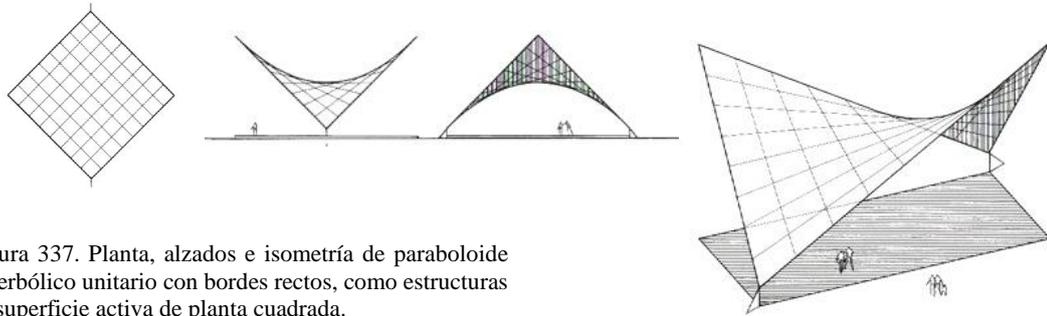


Figura 337. Planta, alzados e isometría de paraboloides hiperbólico unitario con bordes rectos, como estructuras de superficie activa de planta cuadrada.

Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:84.

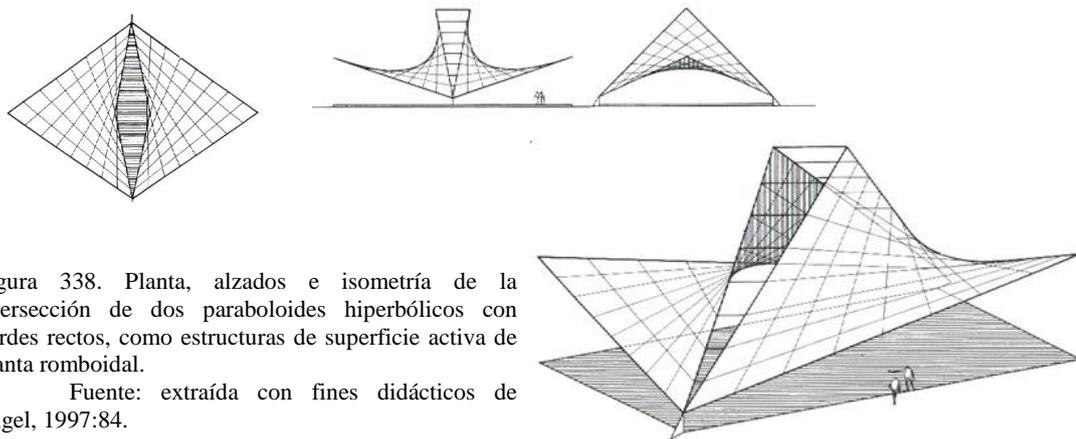


Figura 338. Planta, alzados e isometría de la intersección de dos paraboloides hiperbólicos con bordes rectos, como estructuras de superficie activa de planta romboidal.

Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:84.

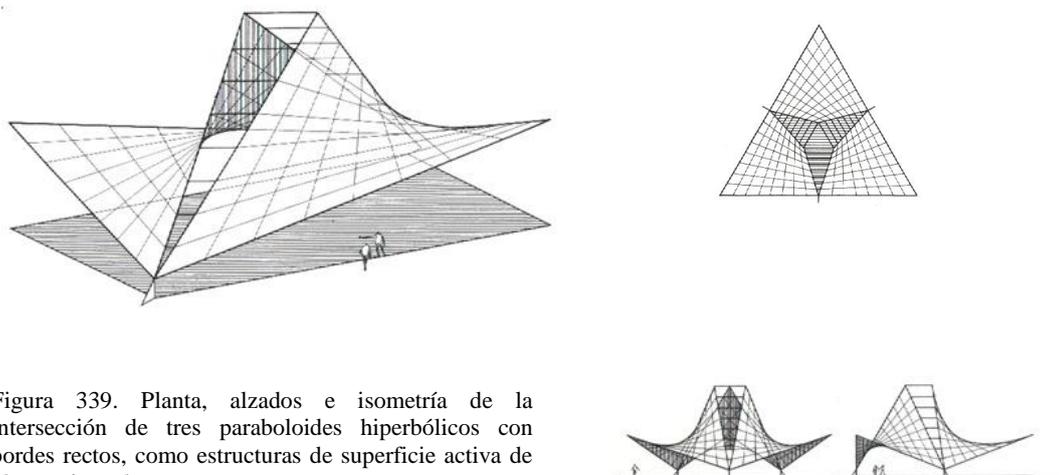


Figura 339. Planta, alzados e isometría de la intersección de tres paraboloides hiperbólicos con bordes rectos, como estructuras de superficie activa de planta triangular.

Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:84.

Sistema de Superficie activa. Prototipos registrados por Heino Engel (cont.)

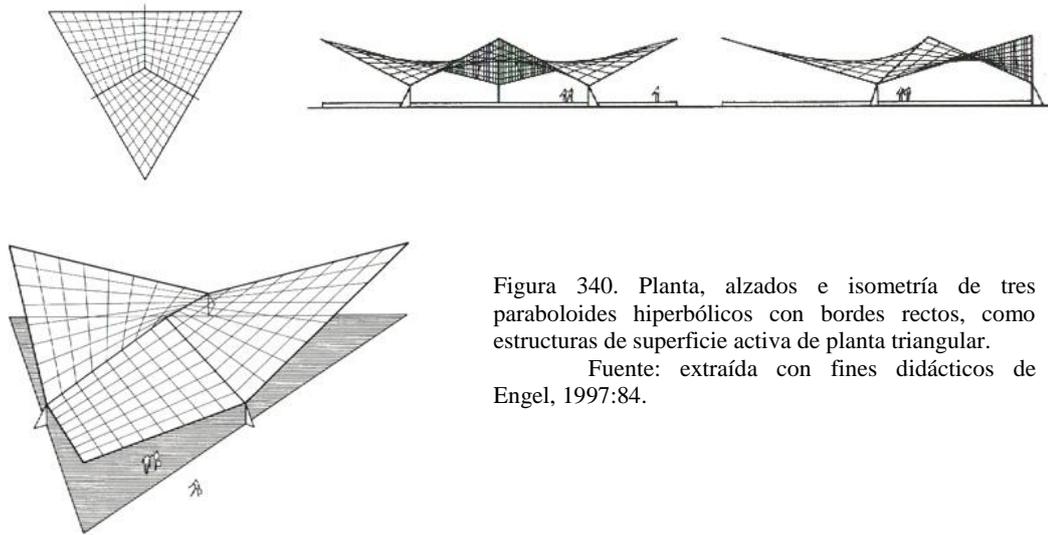


Figura 340. Planta, alzados e isometría de tres paraboloides hiperbólicos con bordes rectos, como estructuras de superficie activa de planta triangular.

Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:84.

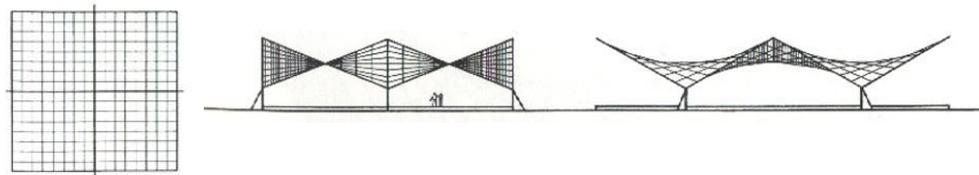


Figura 341. Planta, alzados e isometría de cuatro paraboloides hiperbólicos con bordes rectos, como estructuras de superficie activa de planta cuadrada.

Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:84.

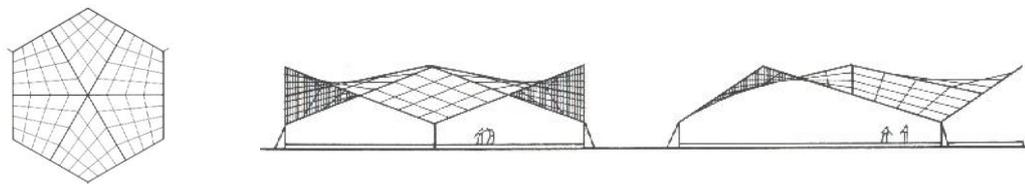
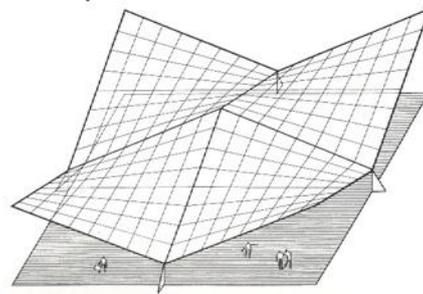
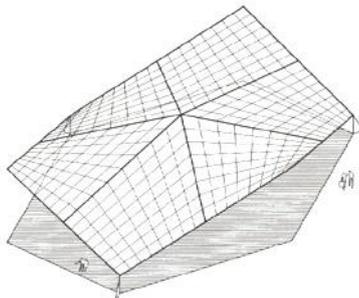


Figura 342. Planta, alzados e isometría de seis paraboloides hiperbólicos triangulares, con bordes rectos, como estructuras de superficie activa de planta hexagonal.

Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:84.



4.3.2. Sistema de forma activa. Prototipos registrados por Engel (1997)

Sistema	Material empleado	Descripción estructural
Forma activa	Materiales flexibles que adquieren la forma como mecanismo portante de acuerdo con los dispositivos de fijación	Sistemas de cable portante suspendido, Tracción) poste (compresión) y puntos de anclaje (fuerzas horizontales)

Modelos de ejemplos propuestos por Engel

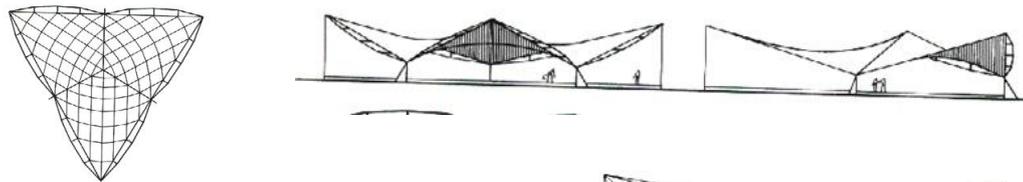


Figura 343. Planta, alzados e isometría de superficies de doble curvatura con bordes rectos como estructuras de forma activa, de tres unidades para planta triangular.

Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:84.

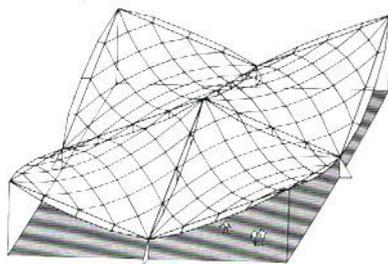
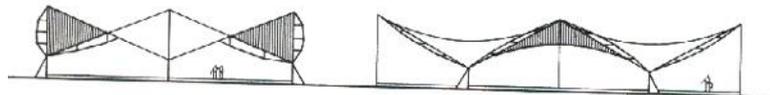
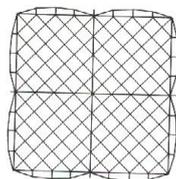
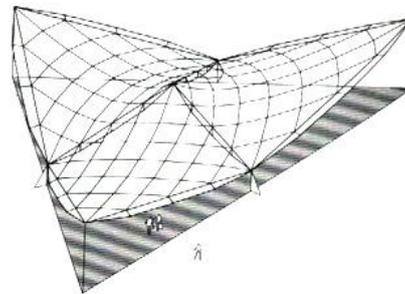


Figura 344. Planta, alzados e isometría de superficies de doble curvatura con bordes rectos como estructuras de forma activa, de cuatro unidades para planta cuadrada.

Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:84.

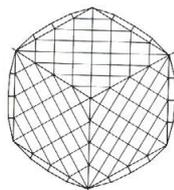
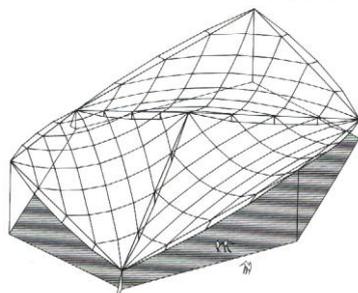


Figura 345. Planta, alzados e isometría de superficies de doble curvatura con bordes rectos como estructuras de forma activa, de tres unidades para planta hexagonal.

Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:84.



4.3.3. Sistema de vector activo. Prototipos registrados por Heino Engel

Sistema Vector activo	Material empleado	Descripción estructural
		Sistemas de barras cortas que implantadas espacialmente en ángulos de $45^\circ - 60^\circ$ desarrollan respuestas vectoriales bajo sollicitaciones de tracción y compresión.

Modelos de ejemplos propuesto por Engel

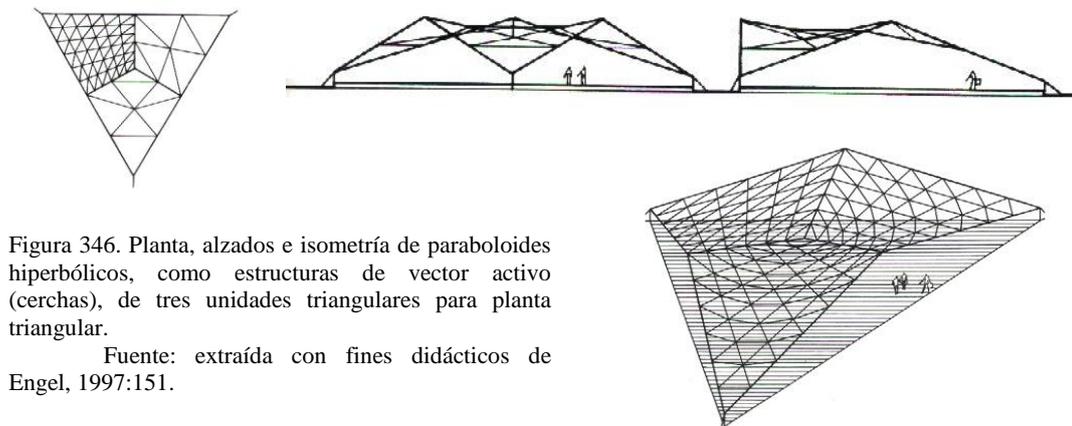


Figura 346. Planta, alzados e isometría de paraboloides hiperbólicos, como estructuras de vector activo (cerchas), de tres unidades triangulares para planta triangular.

Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:151.

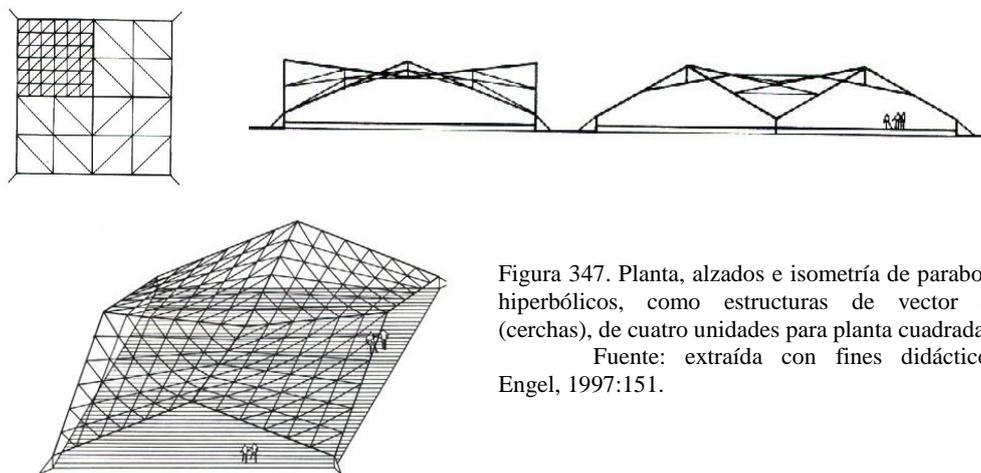


Figura 347. Planta, alzados e isometría de paraboloides hiperbólicos, como estructuras de vector activo (cerchas), de cuatro unidades para planta cuadrada.

Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:151.

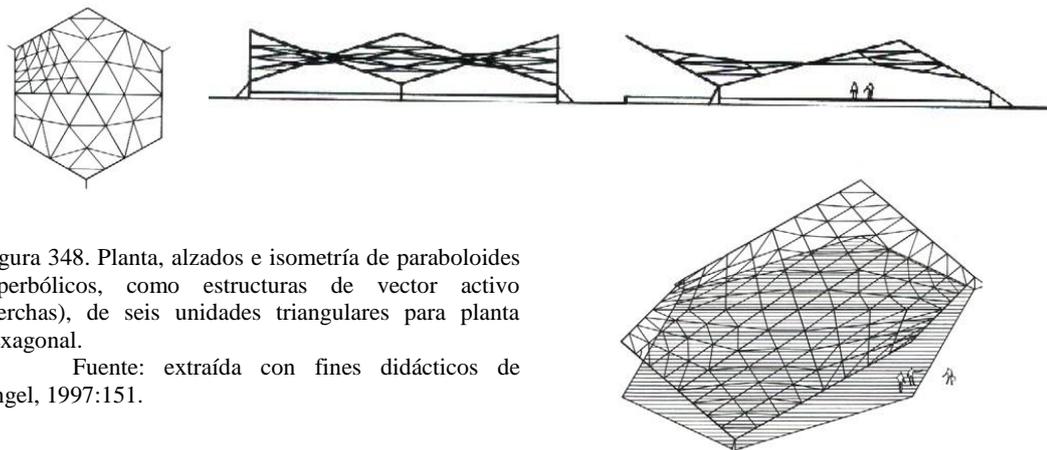


Figura 348. Planta, alzados e isometría de paraboloides hiperbólicos, como estructuras de vector activo (cerchas), de seis unidades triangulares para planta hexagonal.

Fuente: extraída con fines didácticos de Engel, 1997:151.

Las estructuras de paraboloides hiperbólicos que han sido extraídos de Heino Engel (1997) representan modelos que ya habían sido implantados por otros investigadores. El verdadero aporte de este autor debe ser aceptado como un intento por clasificarlos y representarlos dentro de categorías que ni siquiera fueron descritos de tal manera por sus autores. Ciertamente esto ocurre debido a que dicho texto elabora un recorrido por los prototipos más representativos de los sistemas de cubiertas de doble curvatura.

Realmente los verdaderos artífices de algunos de estos prototipos de superficies alabeadas de doble curvatura, registrados por Heino Engel (1997) son Félix Candela y Eduardo Catalano.

Tal es el caso de los paraboloides hiperbólicos construidos por Candela para la iglesia de San Vicente de Paúl⁵ (Coyoacán, México, D.F., 1959-1960) los cuales son descritos en su configuración espacial bajo el mismo modelo que es explicado por Engel (1997) en la figura 339 (ver página 274 de este capítulo) donde se representan la planta, alzados e isometría de la intersección de tres paraboloides hiperbólicos con bordes rectos, como estructuras de superficie activa de planta triangular.

De igual modo la iglesia de San José Obrero (Monterrey, Nuevo León, México, 1959) un diseño de los arquitectos Enrique de la Mora y Fernando López Carmona, construida y calculada por Félix Candela es un proyecto que describe la intersección de dos paraboloides hiperbólicos como superficies doblemente regladas de bordes rectos, con el eje z inclinado y corresponde a la misma configuración geométrico espacial descrita en la figura 338 (ver página 274 de este capítulo) que representa la planta, alzados e isometría de la intersección de dos paraboloides hiperbólicos con bordes rectos, como estructuras de superficie activa de planta romboidal.

4.4. Aproximación a un sistema de representación espacial y clasificación de paraboloides hiperbólicos. El aporte de Fred Angerer

Fred Angerer (1982) emite una conceptualización y representación gráfica de la generación de distintas modalidades de superficies de paraboloides hiperbólicos. Según Angerer la descripción hiperbólica-parabólica de estas superficies cuando se constituyen como superficie de traslación (figura 349) responde a las siguientes características:

⁵ La descripción de la iglesia de San Vicente, diseñada y construida por Candela, está relacionada en Faber, 1970:236 y ss.

“Se engendra un paraboloides hiperbólico cuando una parábola HBH (generatriz) se desliza paralelamente a sí misma sobre otra parábola BSD (directriz) cuyo plano es perpendicular al de la generatriz. Por cada punto de la superficie así obtenida pasan dos rectas que pertenecen a la superficie. El vértice de la parábola directriz BSD es así mismo el vértice S del paraboloides hiperbólico. Las dos rectas del paraboloides que se cortan en el vértice son horizontales, si son verticales los planos de la directriz los planos de la generatrices. Las secciones verticales son parábolas que, según la orientación del plano de la sección, presentan curvatura positiva o negativa y que para una orientación intermedia se convierten en rectas. Las secciones horizontales son hipérbolas cuyo eje real disminuye al aumentar la altura de la sección y que en el vértice del paraboloides se convierten en dos rectas que se cortan.” (Angerer, 1982:34).

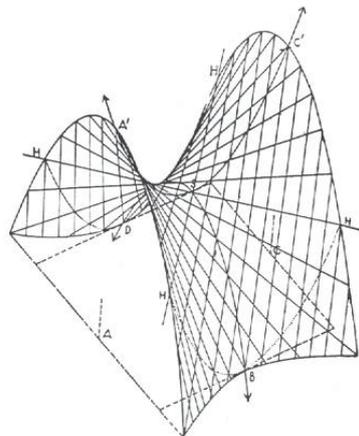


Figura 349. Paraboloides hiperbólico como superficie de traslación.
Fuente: extraído con fines didácticos de Angerer 1982:34.

Angerer, en 1982, definió una variante dentro de esta misma modalidad (figura 350) cuya característica geométrica esencial consiste en una menor curvatura y en el cual la red de rectas generatrices se proyecta en la planta según un cuadrado (Angerer, 1982:34).

La otra tipología explicada por Angerer (1982) consiste en una superficie de paraboloides hiperbólico doblemente reglada (figura 350). Es descrita así: “El cuadrado $ABCD$ es la proyección horizontal del cuadrilátero alabeado $A'BC'D'$ de lados inclinados y rectos. Recíprocamente, es posible construir sobre un cuadrado de base un paraboloides hiperbólico de bordes rectos siempre que los vértices del cuadrilátero alabeado no se encuentren a la misma altura.

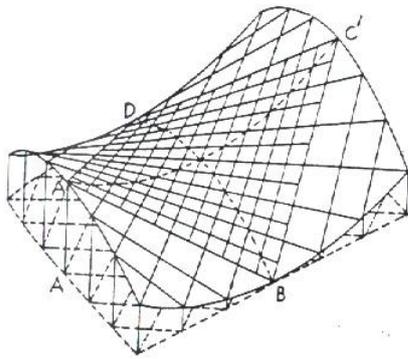


Figura 350. Paraboloides hiperbólico como superficie de traslación.

Fuente: extraído con fines didácticos de Angerer 1982:34.

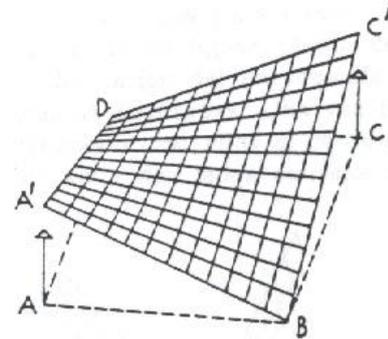


Figura 351. Paraboloides hiperbólico como superficie doblemente reglada.

Fuente: extraído con fines didácticos de Angerer 1982:34.

Los paraboloides hiperbólicos geoméricamente en su configuración espacial es posible generarlos sobre plantas no cuadradas, conservando aun los bordes rectos. Estas tipologías de paraboloides hiperbólicos fueron un aporte de Félix Candela cuando desarrollo soluciones de cubiertas de doble curvatura que se iniciaron con la propuesta para la Capilla del Altílo.

Describiendo este aporte que hasta ese entonces no había sido dilucidado por otro investigador dijo Candela:

“La estructura es una sola hoja de hyperboloides, limitada por generatrices rectas. El eje de este paraboloides no es vertical (su planta es un romboide y, consecuentemente, las proyecciones horizontales de las generatrices no son paralelas) por lo tanto, las cargas tienen componentes según los tres ejes, esto es, el eje del paraboloides y las dos generatrices que se intersecan en la corona, dando lugar a un análisis más complicado y más largas expresiones para los esfuerzos.” (Candela mencionado por Faber, 1970:161).

A continuación se representan algunos modelos de paraboloides hiperbólicos como superficie doblemente reglada con planta romboidal que se registran en el texto de Angerer como ejemplos de las múltiples posibilidades de aplicar efectos geoméricos de asimetría que no alteran el comportamiento estructural bajo condiciones de estabilidad de los sistemas de cubiertas que emplean dicha modalidad⁶

⁶ Los primeros paraboloides hiperbólicos con esta configuración de planta romboidal fueron construidos por Candela en los años 50 y aun hoy permanecen en pie a pesar de los embates de la naturaleza propios del subsuelo de México D.F. lo cual es una muestra más de las ventajas del dominio geomérico de las superficies alabeadas aplicadas a los sistemas de cubiertas.

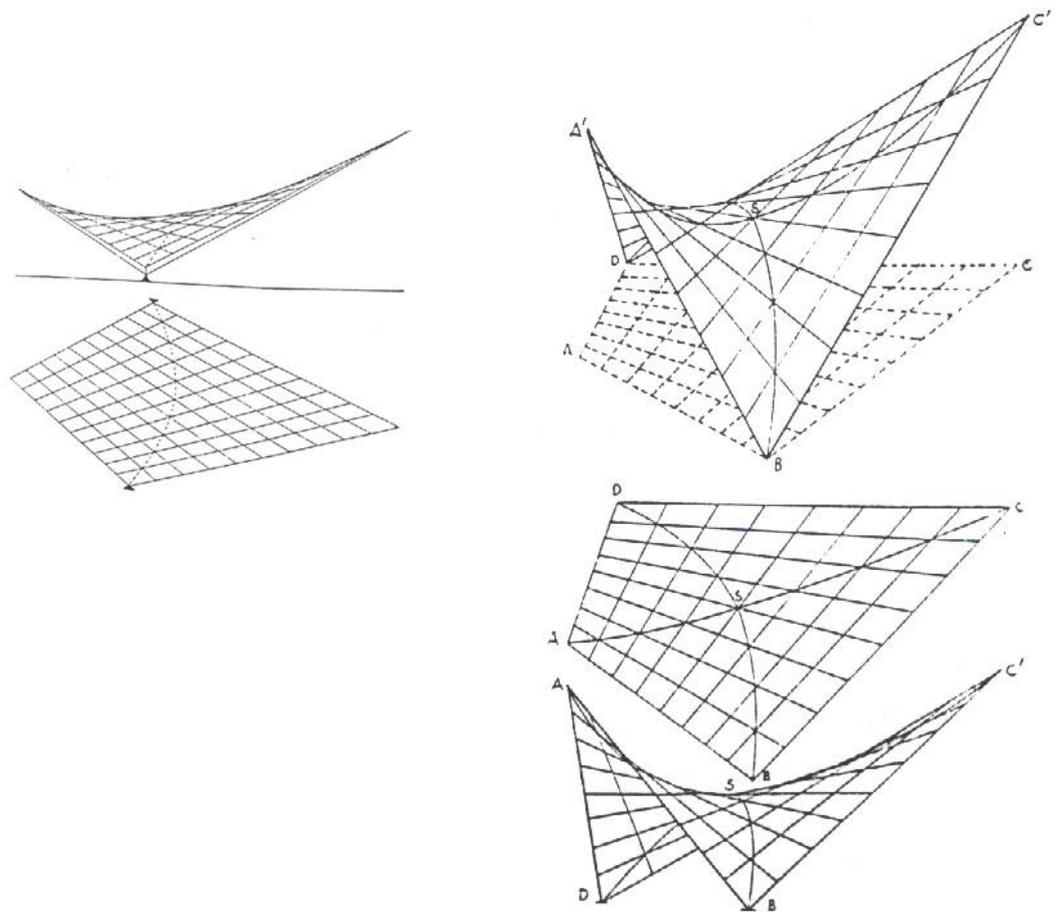


Figura 352. Paraboloides hiperbólicos como superficies doblemente regladas de planta romboidal.
Fuente: extraído con fines didácticos de Angerer 1982:34.

4.5. Aportes de Eduardo Catalano para la configuración, clasificación y representación geométrica de paraboloides hiperbólicos

El arquitecto argentino Eduardo Catalano (1962) en la década de los años 60 realizó un importante aporte para la clasificación y representación geométrica de cubiertas de paraboloides hiperbólicos. Los cursos que eran impartidos por él en el Instituto tecnológico de Massachusetts (*MIT* por sus siglas en inglés) sirvieron para que los estudiantes realizaran los dibujos y grabados que bajo su orientación ilustraron las distintas posibilidades de combinar unidades de paraboloides hiperbólicos que fueron clasificados de acuerdo con el número de unidades de paraboloides hiperbólicos que ocupaban en su configuración espacial.

Aunque los dibujos no especifican el material con el cual podrían construirse estas superficies se percibe una apariencia de concreto armado de bajo espesor

Las diferentes láminas que contienen las vistas de la configuración geométrico-espacial de las superficies alabeadas de doble curvatura (figura 353) se convirtieron en un material gráfico de obligatoria consulta para arquitectos, ingenieros, constructores, diseñadores, estudiantes, investigadores y; en fin, de todo aquel que requiriera explorar las posibilidades estéticas y estructurales de los paraboloides hiperbólicos.

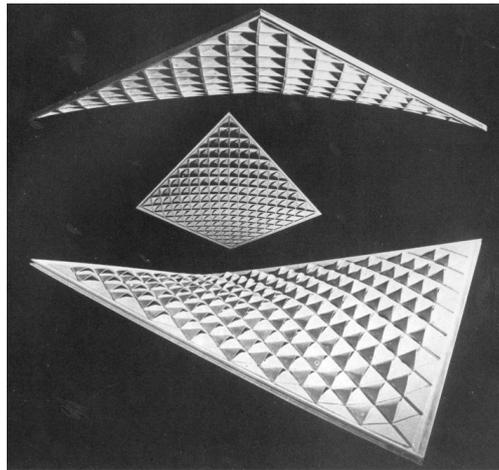


Figura 353. Paraboloides hiperbólicos de una sola unidad
Fuente: extraída con fines didácticos de Catalano, 1962:69.

Ejemplos de cubiertas de bordes rectos, con eje z en posición vertical, formadas por cuatro unidades combinadas de paraboloides hiperbólicos entre las cuales se incluyen las modalidades de paraguas normal, y paraguas invertidos. El aporte de Catalano consistió en señalar las posibilidades geométricas de las distintas tipologías resultantes de las combinaciones de paraboloides hiperbólicos, su representación, clasificación y agrupación cuando el conocimiento de tales superficies, empleadas como sistemas de cubiertas para techar espacios construidos, era del dominio de muy pocos profesionales que se atrevían a desentrañar las dificultades geométricas de este tipo de estructuras.

La figura 354 ilustra la representación gráfica de las cubiertas de paraboloides hiperbólicos que resultaron las más sencillas de concebir, las más económicas, las que se erigían en menor tiempo, y que fueron replicadas en mayor cantidad de diseños en todo el mundo. Ellas dieron pie a la combinación de módulos de cuatro unidades generando cubiertas para cubrir grandes espacios con la menor cantidad de apoyos lo cual conllevó a la aplicación de principios geométricos que otorgaban un alto valor

estético y estructuralmente facilitaban las condiciones de equilibrio estable logrando cubrir grandes áreas con un mínimo de apoyos verticales.

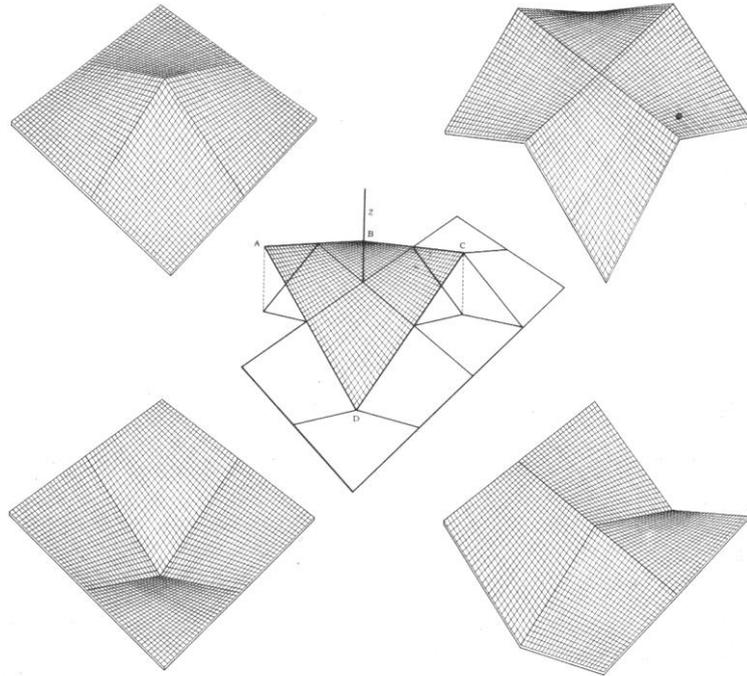


Figura 354. Cubierta de cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos
Fuente: extraída con fines didácticos de Catalano, 1962:13.

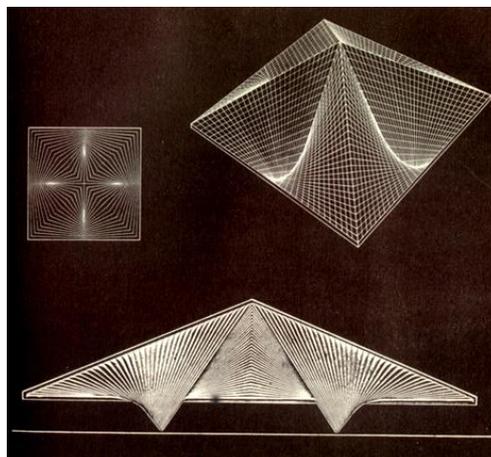


Figura 355. Planta, vista y alzado de una estructura de doce unidades de paraboloides hiperbólicos.
Fuente: extraída con fines didácticos de Catalano, 1962:46.

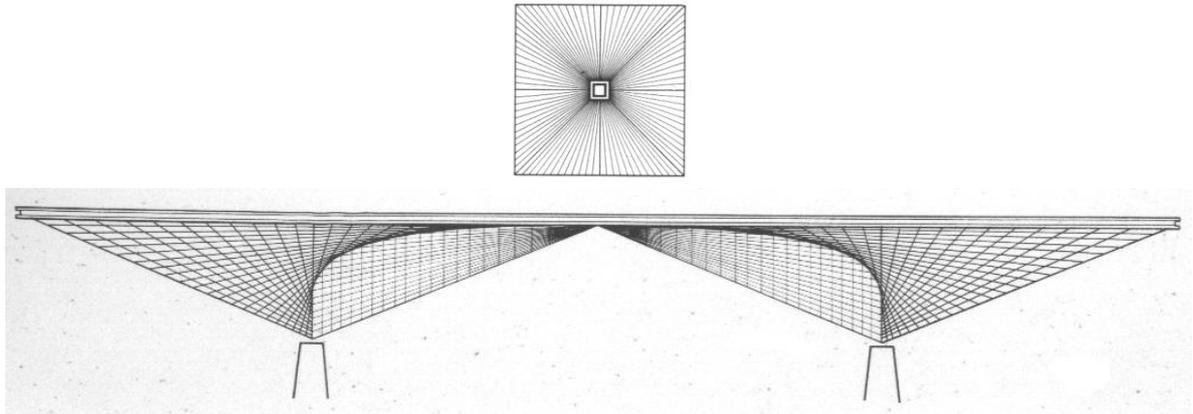


Figura 356. Planta y alzados de una estructura de cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos.
Fuente: extraída con fines didácticos de Catalano, 1962:27.

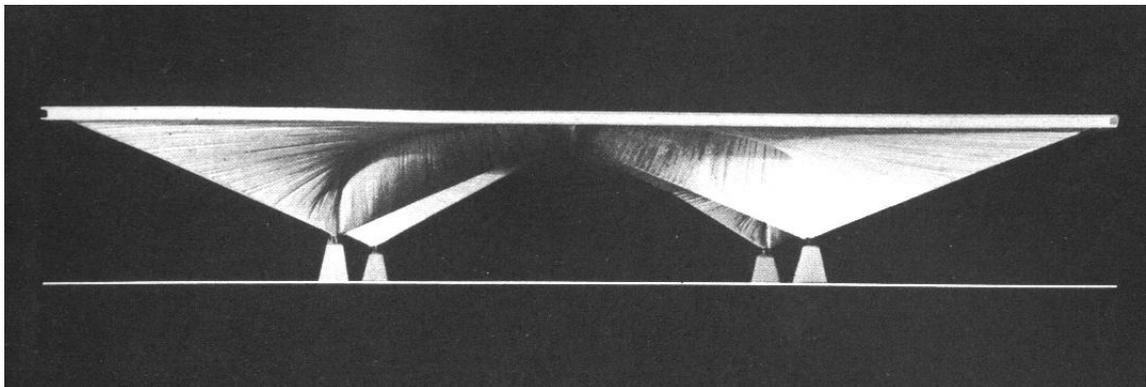


Figura 357. Representación de la elevación del conjunto de cuatro estructuras de paraboloides hiperbólicos.
Fuente: extraída con fines didácticos de Catalano, 1962:27.

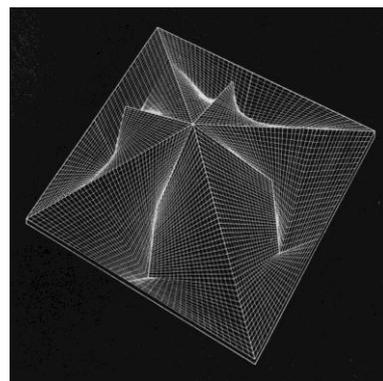
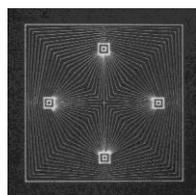


Figura 358. Representación de la planta e isometría de una estructura de dieciséis unidades de paraboloides hiperbólicos apoyadas en cuatro puntos.
Fuente: extraída con fines didácticos de Catalano, 1962:48.

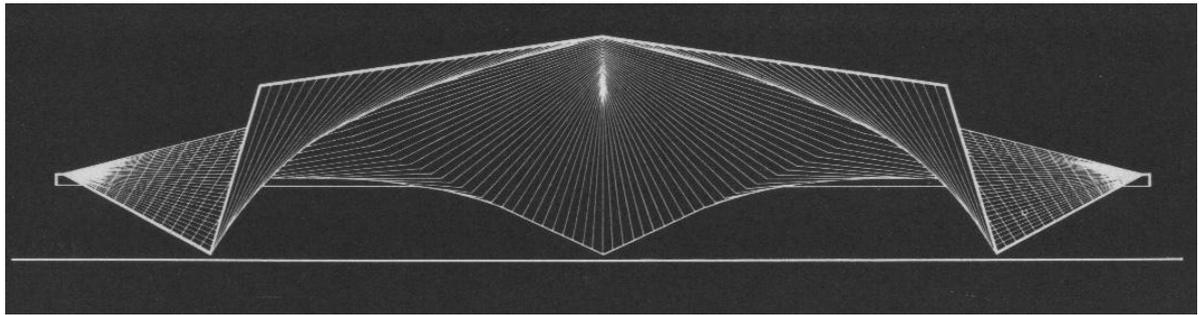


Figura 359. Representación de la elevación del conjunto de dieciséis unidades de paraboloides hiperbólicos.
Fuente: extraída con fines didácticos de Catalano, 1962:48.

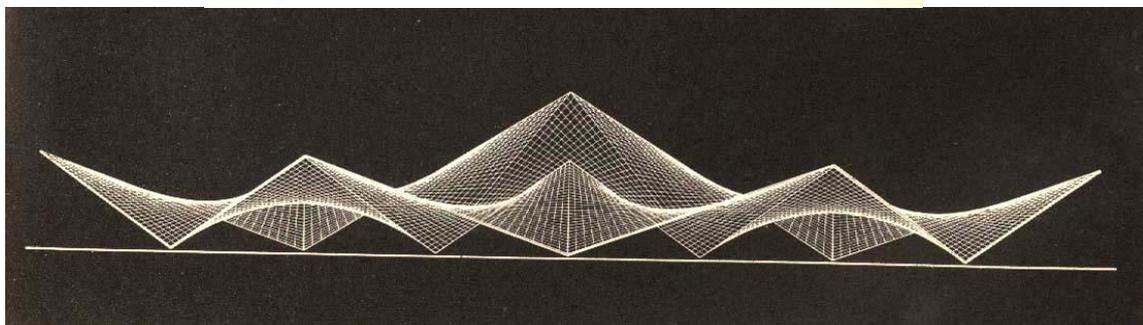
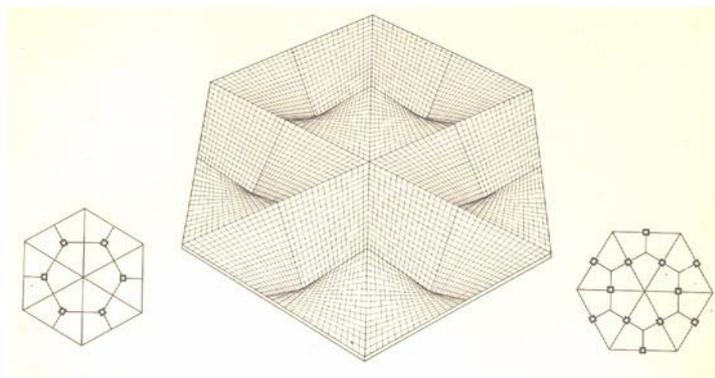


Figura 360. Representación de la planta, vista y elevación del conjunto de dieciocho unidades de paraboloides hiperbólicos con planta hexagonal.

Fuente: extraída con fines didácticos de Catalano, 1962:66.

Conclusiones del capítulo 4

En este cuarto capítulo se registran los principales aportes geométricos, de menos de un siglo de aplicaciones constructivas y espaciales, de los paraboloides hiperbólicos como sistemas de cubiertas en edificaciones arquitectónicas.

Dos mil quinientos años de estudios y avances en el campo de los conocimientos matemáticos no fueron suficientes. Los constructores que antecedieron a los ingenieros

del siglo XX no hallaron el modo de convertir una superficie reglada en un techo edificado. Las innovaciones en este aspecto se vieron rezagadas. Los paraboloides hiperbólicos solo alcanzaron a materializarse toda vez que el concreto armado se convirtió en el material constructivo idóneo.

Algo similar ha ocurrido esta vez con las otras superficies que son objeto de la presente investigación: las sillas de mono no han alcanzado la misma cuantía de aplicaciones con las que cuentan los paraboloides hiperbólicos.

Es por ello que en este capítulo sólo se abordan los análisis y representaciones de los fundamentos geométricos, con base en los aportes de Pilarski, Candela, Engel, Angerer y Catalano, de los paraboloides hiperbólicos; obviando, como se ha visto, las sillas de mono ya que, hasta ahora, no existe bibliografía que determine los aportes de otros investigadores en el comportamiento estructural, bajo condiciones de equilibrio estable, de estas últimas como sistemas de cubiertas en edificaciones.

Los ingenieros pioneros en construcciones de paraboloides hiperbólicos asumieron la modalidad anticlástica, doblemente reglada, como primera experiencia.

La cubierta de Dreux, construida por Lafaille (ver figura 39 – pg. 75 del Capítulo 1 de esta investigación) fue una techumbre muy sencilla, cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos, que contó con el aporte de los postes prefabricados y un claro dominio de las reacciones de bordes rectos que han sido analizadas en este capítulo.

Unir cuatro unidades de paraboloides hiperbólicos para generar una cubierta cuadrada conllevó a que en un tiempo muy breve se registrará una primera patente, se escribiera un tratado y un libro en el cual su autor Pilarski dedujo de manera exhaustiva los pasos para calcular estas superficies poniendo un énfasis anticipado en la configuración geométrica. Curiosamente debió pasar algún tiempo para que se implantaran paraboloides hiperbólicos de una sola unidad, a pesar de la cualidad estética que esta modalidad representaba. Pero es que el reto estribó en cubrir grandes espacios con un mínimo de apoyos mediante el dominio geométrico al servicio de la estabilidad estructural.

Las cubiertas de paraboloides hiperbólicos que han sido presentadas en este cuarto capítulo conllevan a visualizar la importancia de la geometría en la respuesta estable de las unidades de paraboloides hiperbólicos. La combinación de unidades para generar

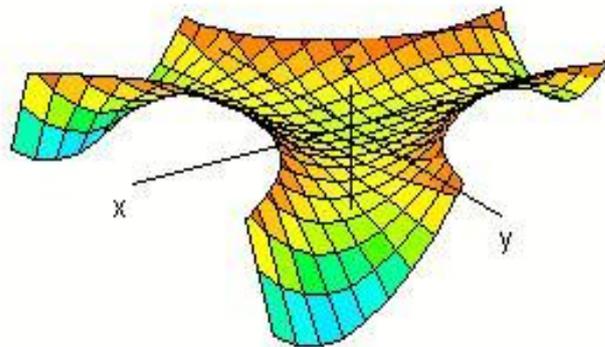
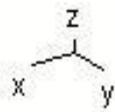
cubiertas de plantas rectangulares o cuadradas no fue la única respuesta a la necesidad de salvar grandes luces con un mínimo de apoyos como ha sido el resultado de la implantación de estos sistemas estructurales. Fueron si las más usuales, pero también se emplearon para cubrir espacios de planta triangular, hexagonal, pentagonal y otras, que por razones de extensión no fueron presentadas aquí.

Sin embargo, la altísima difusión que alcanzaron los proyectos con soluciones de paraboloides hiperbólicos en todo el mundo se debió entre muchas otras razones a los bajos costos que alcanzaban. Construir con economía no sacrificando la seguridad ni el valor estético son valores cualitativos que muy pocos sistemas estructurales permiten.

Entre los aportes que se han registrado en este capítulo el de Catalano (1962) es el que posee mayor estimación. No fue fácil realizarlo con el apoyo de estudiantes en una época del desarrollo tecnológico en que no existían muchos ejemplos construidos en los cuales fijar la atención. Aún más, los modelos presentados en el texto de Catalano sirvieron de guía visual para propuestas de soluciones en muchos otros proyectos que requirieron de una respuesta rápida en tiempos en que los dibujos de proyectos y representación de modelos a escala se hacían sin ayuda de ordenadores.

El texto de Catalano (1962), de muy difícil consecución, debido a los años que distan de su publicación, aunado al bajo tiraje, constituye una obra de obligatoria referencia a pesar de que, con toda seguridad, existen muy pocos ejemplares disponibles para que accedan los investigadores. De allí la importancia de haber dejado en esta investigación una muestra de los modelos más representativos por él propuestos.

CAPÍTULO 5 PROPUESTA DE LA INVESTIGACIÓN



CAPÍTULO 5

FUNDAMENTOS GEOMÉTRICOS DE LAS SUPERFICIES DE PARÁBOLAS INVERTIDAS. PROPUESTA DE LA INVESTIGACIÓN

5.0 Introducción

La propuesta de esta investigación plantea un análisis de las condicionantes geométricas que ostentan las superficies de parábolas invertidas (alabeadas de doble curvatura) para lograr su aplicación como soluciones en sistemas de cubiertas en espacios construidos.

Hasta ahora los diseños, de no pocos arquitectos e ingenieros civiles, han logrado, con bastante éxito, la disposición de los paraboloides hiperbólicos como estructuras laminares en procesos edificatorios. No obstante, propuestas edificadas en concreto armado de soluciones con sillas de monos para monos de una cola y para monos de dos colas no se han logrado incluir en los conocimientos que permiten el desarrollo del oficio arquitectónico.

De acuerdo con Engel “Las formas de las estructuras están sometidas a las leyes de la gravedad y a la mecánica de las fuerzas: por consiguiente se pueden calcular, comprobar y ejecutar; poseen una lógica propia; representan un lenguaje formal independiente: la geometría de las estructuras.” (Engel, 2001:329). Es así como los fundamentos geométricos aquí descritos pueden asumirse bajo dos corrientes diferentes de conocimiento; por una parte, para los estudios de la geometría diferencial mediante la agrupación de las familias de superficies de una misma ecuación matemática con diferentes representaciones visuales. Y, por la otra, como una gama de aplicaciones gráficas y espaciales que lograrían erigirse como soluciones estructurales y formales para sistemas de cubiertas en edificaciones mediante la selección de materiales constructivos, incluyendo los armados de refuerzos, sistemas de fundaciones, planificación del sistema constructivo, estimación de costos de obra y sobretodo la selección del personal verdaderamente capacitado.

Los análisis y representaciones de los paraboloides hiperbólicos se logran en esta propuesta de la investigación mediante las modelaciones geométricas de la superficie doblemente reglada que da como resultado a un paraboloides hiperbólico como superficie anticlástica. Además se estudian a las grafías de sillas de mono ordinarias

para monos de una cola, de dos colas y las sillas de mono *perturbadas* para monos de una cola.

No se estudiarán configuraciones mediante ecuaciones en las que se modelen superficies, distintas a las señaladas, constituidas por sillas de mono para monos de más de dos colas. Tal es el caso por ejemplo de la silla del mono para un mono con dos patas y tres colas la cual es mencionada por distintos autores.

La figura 361 muestra una de las modalidades gráficas de una silla de mono para monos de tres colas que para su obtención se empleó el software computacional *Mathematica*[®] ejecutando el comando

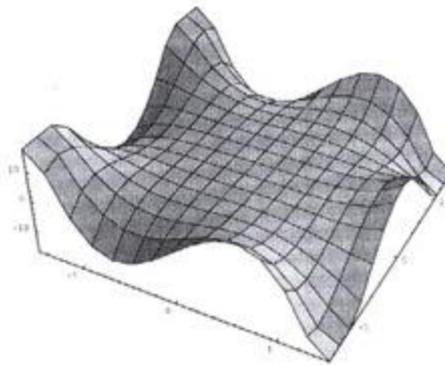
$$\text{Plot } 3D[\text{Re}[(u+I v)^5], \\ \{u, -1.5, 1.5\}, \{v, -1.5, 1.5\}, \text{Boxed} \rightarrow \text{False}]; \quad (\text{Cordero, 1995:246}).$$


Figura 361. “La silla de mono generalizada $(u, v) \mapsto (u, v, \text{Re}((u + iv)^5))$ obtenida con *Plot 3D*”
Fuente: Cordero, 1995:246.

5.1 Estudio comparativo de los fundamentos geométricos que determinan la representación gráfica de las superficies de parábolas invertidas como sistemas de cubiertas

Se agruparán las gráficas representadas dentro del conjunto de familias de superficies de paraboloides hiperbólicos, las sillas para un mono de una cola ordinarias y las sillas para un mono de una cola perturbadas (por un paraboloides de base circular) y las sillas para monos de dos colas las cuales se han elaborado mediante el software computacional *Derive*[®] v.5. Éste permite realizar la representación de una ecuación matemática bajo parámetros que se adaptan a los requerimientos que sean previamente determinados.

A continuación se estudiarán los parámetros geométricos que condicionan la representación para cada una de las posiciones en las familias de las superficies propuestas

Cuando se menciona la ecuación de un paraboloides hiperbólico o de una silla de mono *Tipo n* se hace referencia a nueve (09) diferentes posibilidades de representación de una misma gráfica, donde *n* representa las posiciones diseñadas desde *n=1* hasta *n=9*. Intentando, con cada una de esas posiciones, explorar las modalidades de modificación de las siguientes condiciones:

a. Posicionamiento del sistema de ejes de coordenadas cartesianas

En lo que respecta a este parámetro no se constituye como un comando en sí del software *Derive*[®]. Es más bien un efecto que conlleva a su manipulación manual mediante su escogencia por dos grupos de comandos “*Girar la gráfica*” que permite, como su nombre lo indica, girar la gráfica hacia la izquierda o hacia la derecha y – cambiando el comando- permite también “*Rotar la gráfica*” hacia arriba o hacia abajo. Esto ha permitido seleccionar manualmente la variación del posicionamiento del sistema de ejes de coordenadas cartesianas.

La generación de las superficies aquí propuestas responden a la adaptación de las gráficas a las necesidades de aplicarlas como soluciones para un sistema de cubiertas en edificaciones arquitectónicas. Procurándose, en el caso específico de las representaciones de paraboloides hiperbólicos, que éstas sean aproximadamente parecidas a los ejemplos internacionales más emblemáticos que han sido edificados en la experiencia internacional y particularmente en la venezolana de construcción en concreto armado de estas superficies. Caso distinto ocurre con las sillas de mono ordinarias para monos de una cola y dos colas, en estos las propuestas son inéditas, ya que no se encuentran –hasta donde ha sido estudiado- ejemplos de edificaciones o algún otro procedimiento constructivo (incluyendo casos de proyectos arquitectónicos no realizados) que describan estas superficies como integrantes de sus soluciones formales ni estructurales.

b. Comandos que determinan los parámetros geométricos de las superficies a representar

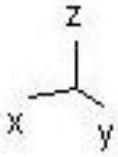
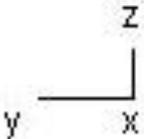
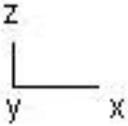
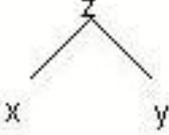
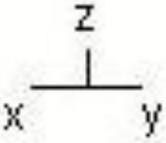
Los parámetros empleados en esta propuesta para la ejecución gráfica mediante el *Derive*[®], de las superficies de parábolas invertidas a estudiar, son:

Comando “*Seleccionar/Rango de la gráfica 3D*”

Comando “*Seleccionar/Relación de aspecto/Ajuste del tamaño*”

Ambos comandos permiten que una misma ecuación matemática pueda ser visualizada bajo condiciones diferentes de manipulación de los parámetros de curvatura y de tamaño de algunos de los tres ejes coordenados.

Las posiciones *n.1*, *n.2*, *n.3*, *n.4* y *n.5* poseen idénticos parámetros para posicionar el sistema de coordenadas cartesianas en todas las familias de superficies de paraboloides hiperbólicos, sillas de mono ordinarias para monos de una cola, y sillas para monos de dos colas diseñadas. Siendo *n* el número correspondiente al tipo de la superficie que está representada.

Cuadro 5.1.				
Variaciones del sistema de coordenadas cartesianas para las posiciones <i>n.1</i> hasta <i>n.9</i> en la representación de las familias de superficies diseñadas de paraboloides hiperbólicos, sillas de monos para monos de una cola ordinarias y <i>perturbadas</i> y para monos de dos colas				
<i>n.1</i>	<i>n.2</i>	<i>n.3</i>	<i>n.4</i>	<i>n.5</i>
<i>Superficie geométrica vista como un plano</i>	<i>Proyecciones isométricas</i>			
				
<i>Proyecciones ortogonales</i>				
<i>n.6</i> <i>Fachada principal</i>	<i>n.7</i> <i>Fachada lateral</i>	<i>n.8</i> <i>Fachada de azotea</i>	<i>n.9</i> <i>Axonometría Bimétrica</i>	
				

Cuadro de elaboración propia.

c. Nomenclatura propuesta:

Ph = paraboloides hiperbólico
 Sm = silla de mono ordinaria para monos de una cola
 Sm_{pert} = silla de mono *perturbada* para monos de una cola
 Sm2 = silla de mono para monos de dos colas

Posición *n.I*

(valores para todas las familias de superficies de paraboloides hiperbólicos y sillas de mono que han sido diseñadas).

Para todas las familias de las superficies de parábolas invertidas que son analizadas en la presente investigación la posición *n.I* corresponde a una malla plana ortogonal o retícula de 20x20 subdivisiones unitarias y adimensionales (figuras 362 y 363).

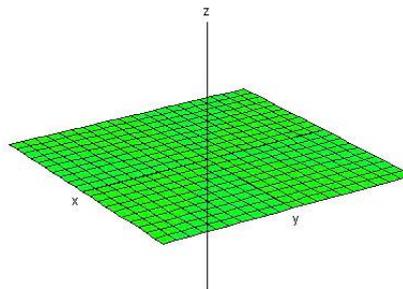


Figura 362. Representación de las superficies de parábolas invertidas en su posición *n.I* que corresponde a un plano horizontal en forma de cuadrado reticular de 20x20.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

Ello permite proponer la agrupación en familias de superficies de parábolas invertidas. Formándose, para tal fin, las distintas agrupaciones de superficies independientes, a partir de un sistema de planta modular cuadrada. Se logra satisfacer, con cada uno de ellos, la unidad adimensional o módulo que permitirá establecer su implantación como estructuras que pudieran aplicarse en procedimientos constructivos bajo condiciones de equilibrio estable. Requiriéndose determinar, comparativamente, los parámetros geométricos a través de un sistema de modelación y graficación mediante una estructura modular de un cuadrado unitario. Es por esto que la agrupación de las familias de superficies propuestas de paraboloides hiperbólicos, sillas de mono ordinarias para

monos de una cola, sillas de mono perturbadas para monos de una cola y sillas de mono para monos de dos colas se comienza a partir de la representación de una posición $n.2$.

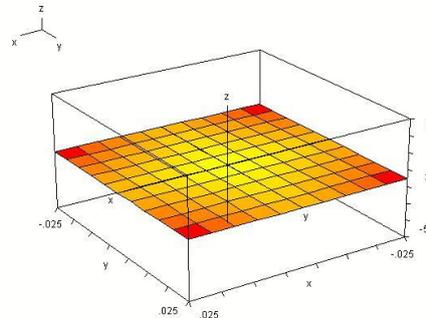


Figura 363. Representación de la superficie de parábolas invertidas en su posición $n.1$.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

En cada una de las modalidades obtenidas desde el tipo $n=1$ hasta $n=9$, se ha conservado en las imágenes la representación del sistema de coordenadas x,y,z para dejar constancia de la posibilidad de obtener diferentes posiciones que conforman a la familia de superficies.

Las posiciones comprendidas entre las posiciones $n.1$ hasta $n.5$ poseen una ubicación de los ejes coordenados tal y como las proporciona el software *Derive*® por defecto.

Nótese en las figuras 364 y 365 que las superficies indicadas están inscritas dentro de un sistema tridimensional o “caja” de acuerdo con los siguientes ejemplos comparativos:

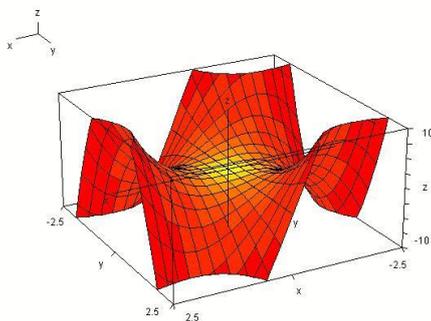


Figura 364. Representación de las posición 1.4 para la silla de mono para un mono de una cola que responde a la ecuación $z=x^3-3xy^2$.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

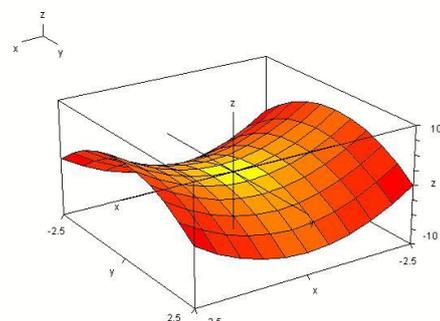


Figura 365. Paraboloide hiperbólico $z=x^2-y^2$ representado en la posición 1.4

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

A partir de la posición *n.6* hasta la *n.9* se registra una variación en el sistema de coordenadas cartesianas, buscando que cada grupo de posiciones coincida, de manera aproximada, con los métodos de perspectivas isométricas y dibujo de fachadas (incluyéndose la planta de azotea o quinta fachada) que se ejecutan con reglas y escuadras, al igual que con herramientas para el dibujo computacional, con el cual están familiarizados los estudiantes de pregrado, los constructores y profesionales de las carreras de ingeniería y arquitectura. (ver cuadro 5.1, pg 305).

d. El software *Derive*[®] como herramienta computacional para la agrupación de familias de superficies alabeadas de doble curvatura

El software *Derive*[®] permite a partir de una ecuación dada dividir la pantalla en dos porciones, (figura 366). La parte izquierda registra la ecuación y la gráfica. Mientras que la porción derecha facilita la posibilidad de modificar los parámetros de representación visual que, al recibir la orden, quedarán registrados nuevamente en la porción izquierda.

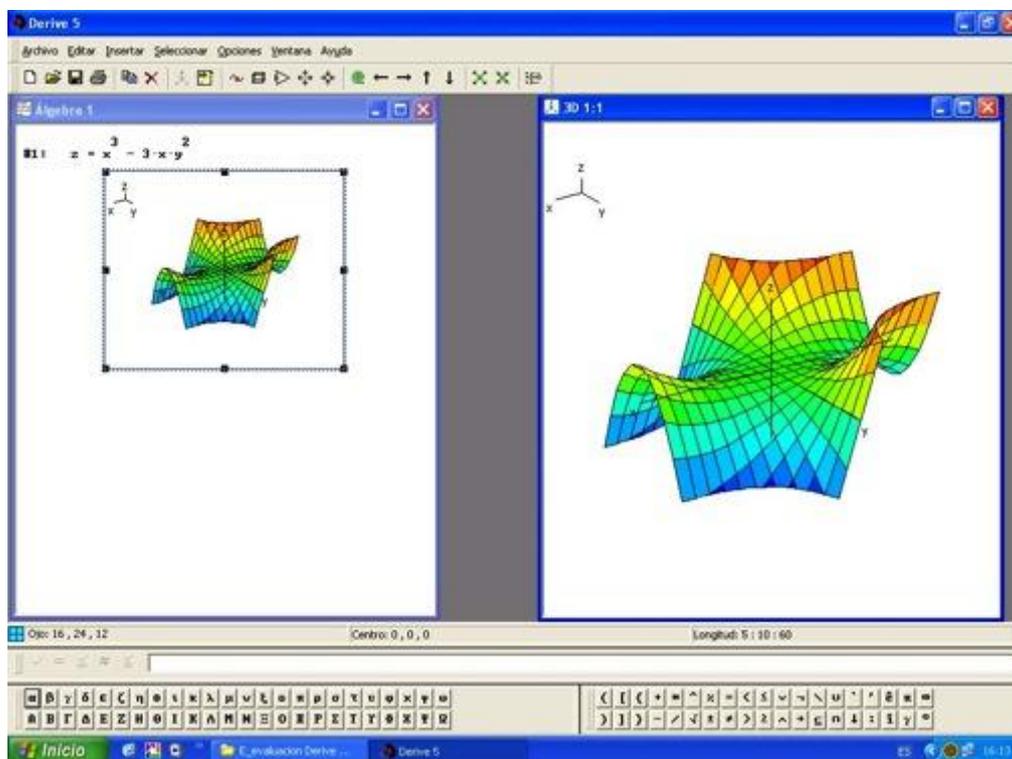


Figura 366. Pantalla que genera el software *Derive*[®] dividida verticalmente para modificar parámetros de la gráfica y observar simultáneamente la ecuación representada.

Fuente: elaboración propia extraída para fines didácticos como imagen de pantalla del software *Derive*[®]

Las modelaciones de las superficies alabeadas de doble curvatura analizadas en esta investigación no se realizan con el sistema de coordenadas “tipo caja”; en virtud de que este elemento geométrico no es decisivo en la representación que se pretende lograr de una superficie como objeto que pudiera aportar una solución formal, estructural y estética para un posible aplicación como sistema de cubiertas para un proceso edificatorio.

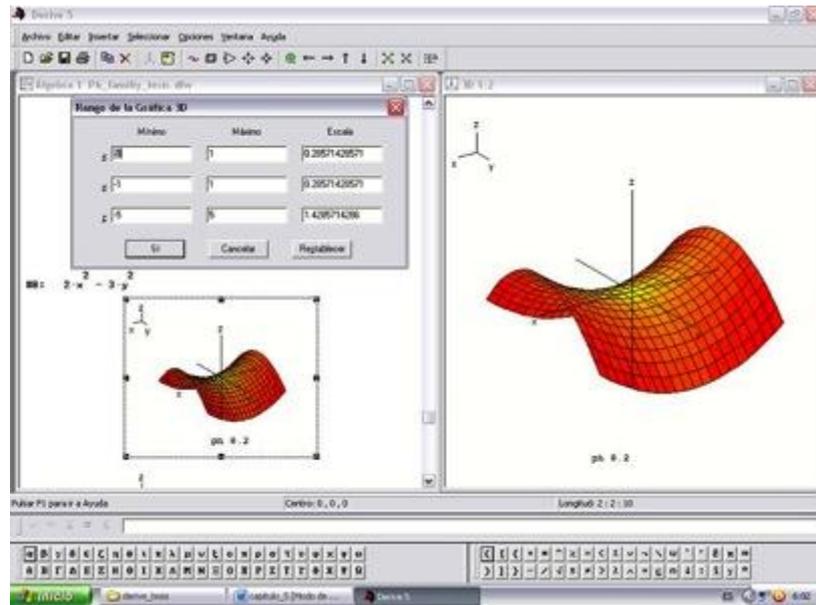


Figura 367. Pantalla que genera el software *Derive*[®] dividida verticalmente para modificar parámetros de *Rango de la gráfica 3D* y observar simultáneamente la ecuación representada.

Fuente: elaboración propia extraída para fines didácticos como imagen de pantalla del software *Derive*[®]

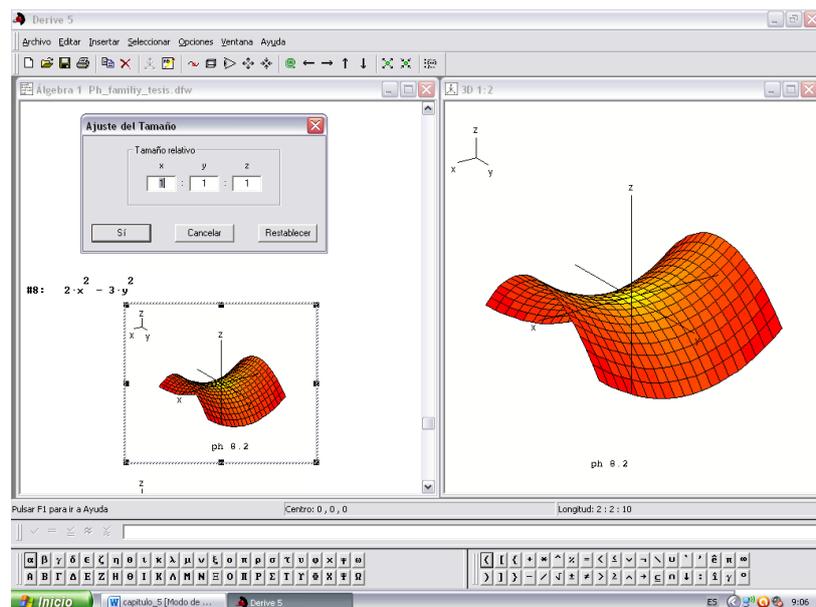


Figura 368. Pantalla que genera el software *Derive*[®] dividida verticalmente para modificar parámetros de *Relación de aspecto/Ajuste del tamaño* y observar simultáneamente la ecuación representada.

Fuente: elaboración propia extraída para fines didácticos como imagen de pantalla del software *Derive*[®]

Comando que permite girar la gráfica libremente

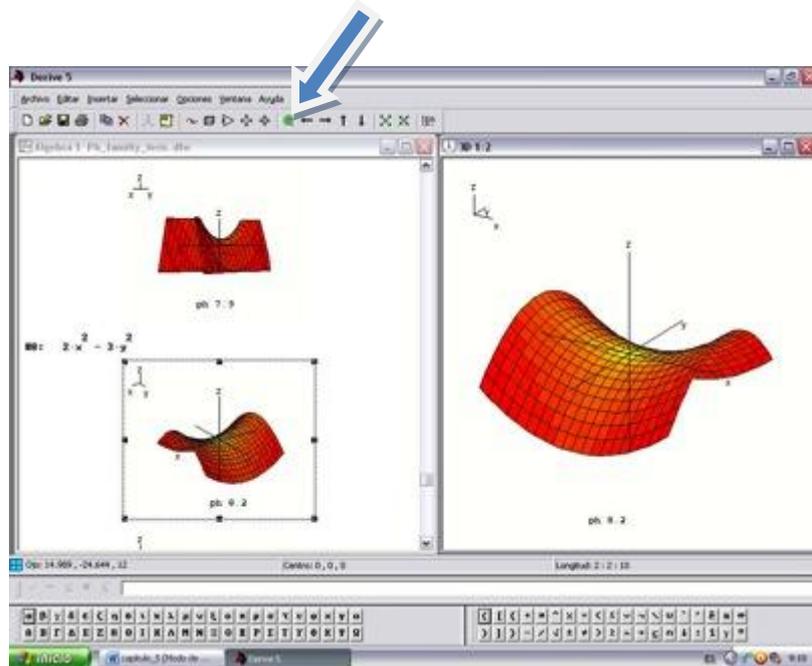


Figura 369. Pantalla que genera el software *Derive*[®] dividida verticalmente para aplicar el comando “Girar la gráfica”.

Fuente: elaboración propia extraída para fines didácticos como imagen de pantalla del software *Derive*[®]

e. Propuesta de aplicación de las superficies alabeadas de doble curvatura como sistema de cubiertas en edificaciones

¿Cómo se concibe a una superficie geométrica de las que aquí están siendo analizadas como objetos tridimensionales para que se empleen como solución arquitectónica y estructural en proyectos para espacios construidos?

Las gráficas de las formas empleadas en soluciones arquitectónicas responden a un convenimiento universal (figura 370).

“Para representar la mayor parte de los objetos empleados en la ingeniería no basta con una proyección sobre un único plano, sino que habitualmente son necesarias proyecciones sobre otros planos que completen la información sobre la forma del objeto tridimensional.” (Pérez & Palacios, 1998:67).

La figura 370 muestra la isometría de una superficie alabeada de doble curvatura, en este caso un paraboloides hiperbólico, indicando las diferentes posiciones que debe

ocupar un observador para lograr obtener las vistas o proyecciones ortogonales que permitirían su apreciación como un objeto arquitectónico.

La dificultad estriba en que es muy difícil su graficación con exactitud por métodos tradicionales de dibujo, aun haciendo uso de dibujo a mano suelta. Graficar una superficie alabeada de doble curvatura mediante las líneas de contorno es una labor que puede arrojar resultados equivocados al menos que se recurra a un software matemático graficador o que se posea un dominio de los sistemas de proyección diédrica¹.

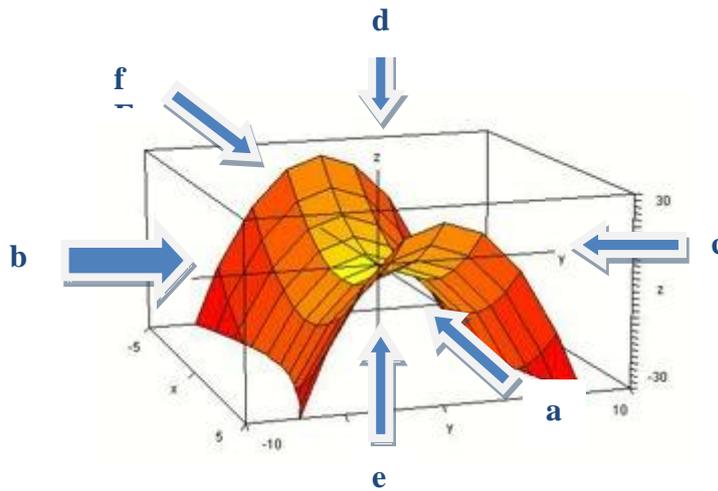


Figura 370. Posicionamiento del observador para la obtención de las proyecciones o vistas de una superficie geométrica para convertirla en un objeto arquitectónico.

Fuente: elaboración propia

Las reglas para seleccionar las diferentes vistas de una superficie geométrica de doble curvatura como un objeto tridimensional se pueden resumir en la siguiente condición:

. Se selecciona como vista principal a aquella que otorgue mayor cantidad de información respecto a las características físicas de la superficie.

.- Para obtener una representación eficiente de la superficie geométrica como un objeto tridimensional no es imprescindible que se grafiquen todas las proyecciones ya que esto arrojaría un resultado redundante en cuanto a la información que se desea comunicar.

Seguidamente se presenta un cuadro de obtención de las proyecciones de acuerdo al posicionamiento del observador que se cumple para los casos de superficies de parábolas invertidas (paraboloides hiperbólicos y sillas de monos) que serán estudiadas en esta investigación.

¹ El concepto de proyección diédrica y otros agrupados en los conocimientos de Geometría Descriptiva que están relacionados con esta investigación son analizados en el Anexo 1.

Cuadro 5.2 Obtención de las vistas o proyecciones de un objeto arquitectónico		
Vista	Posición del observador	Proyección obtenida
A	El frente	Fachada principal
B	La izquierda	Fachada lateral izquierda
C	La derecha	Fachada lateral derecha
D	Desde arriba	Fachada de azotea
E	Desde abajo	Vista inferior (Muy poco empleada en arquitectura)
F	Desde atrás	Fachada posterior

Cuadro de elaboración propia con base en Jensen 2002:101.

5.2. Descripción de la metodología a seguir para el diseño de las familias de superficies propuestas

5.2.1. Propuesta de parámetros geométricos para la modelación de paraboloides hiperbólicos y sillas de mono. Valores predeterminados para cada una de las posiciones

a. Valores predeterminados en la posición n.1

Las figuras 371 y 372 permiten obtener la configuración del sistema tipo caja y la del sistema de coordenadas cartesianas para la posición tipo *n.1*

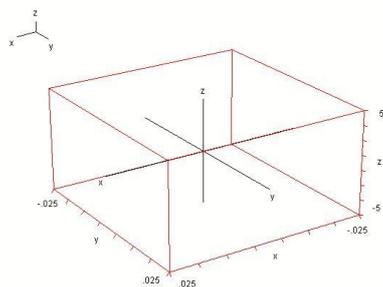


Figura 371. Representación del sistema envolvente tipo caja para la posición *n.1* de la configuración común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

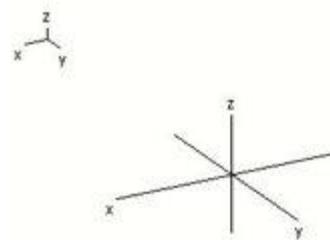


Figura 372. Representación del sistema de coordenadas cartesianas para la posición *n.1* de las superficies analizadas en esta investigación.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

Paraboloides hiperbólicos y Sillas de monos

Rango de la gráfica 3D para la posición *n.1*

Valores predeterminados para el comando

“Seleccionar/Rango de la gráfica 3D”

	Mínimo	Máximo	Escala
<i>x</i>	-0.025	0.025	0.0071
<i>y</i>	-0.025	0.025	0.0071
<i>z</i>	-5	5	1.4285

“Seleccionar/Relación de aspecto/Ajuste del tamaño”

<i>x</i>		<i>y</i>		<i>z</i>
1	:	1	:	1

b. Valores predeterminados en la posición n.2

En las figuras 373 y 374 se observa la disposición del sistema tipo caja para la posición **n.2** así como el sistema de coordenadas de la representación común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono que han sido diseñadas para esta configuración espacial en la presente investigación.

A modo de ejemplificar una de las modelaciones propuestas se ha modelado la gráfica de la silla de mono ordinaria para monos de una sola cola que según la nomenclatura propuesta es tipo *Sm 4* que responde a la ecuación $z=2x^3-3xy^2$ para los valores predeterminados en esta configuración espacial de las superficies estudiadas (figura 375).

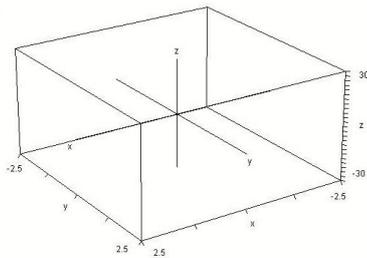


Figura 373. Representación del sistema envolvente tipo caja para la posición *n.2* de la configuración común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono.

Fuente: elaboración propia mediante el software *Derive*®.

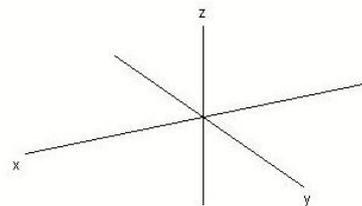


Figura 374. Representación del sistema de coordenadas cartesianas para las posiciones *n.1* hasta *n.5*.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®.

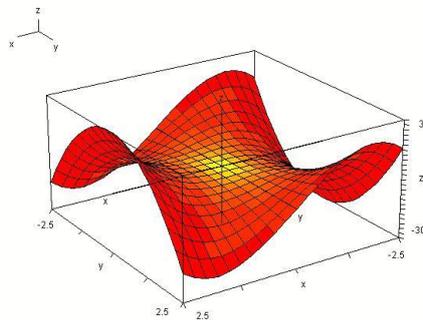


Figura 375. Gráfica de la silla de mono para monos de una cola tipo *Sm 4.2*, que responde a la ecuación $z=2x^3-3xy^2$.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®.

En la posición *n.3* se da una modificación a los parámetros de representación del software *Derive*[®] mediante el comando

Seleccionar/Rango de la gráfica 3D

y simultáneamente se da un cambio en el ajuste del tamaño para que adopte los siguientes valores:

Paraboloides hiperbólicos y Sillas de monos

Rango de la gráfica 3D para la posición *n.2*

Valores predeterminados para el comando

“Seleccionar/Rango de la gráfica 3D”

	Mínimo	Máximo	Escala
<i>x</i>	-2.5	2.5	1.25
<i>y</i>	-2.5	2.5	1.25
<i>z</i>	-30	30	2.5

Valores predeterminados para el comando

“Seleccionar/Relación de aspecto/Ajuste del tamaño”

<i>x</i>		<i>y</i>		<i>Z</i>
2	:	2	:	1

c. Valores predeterminados en la posición *n.3*

En la figura 376 se observa el sistema de envolvente tipo caja para la posición *n.3* así como el posicionamiento del sistema coordenadas cartesianas de la graficación común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono que han sido diseñadas para esta configuración espacial en la presente investigación.

A modo de ejemplificar una de las modelaciones propuestas se señala el paraboloides hiperbólico tipo *Ph 7.3* que responde a la ecuación $z=x^2-3y^2$ para los valores predeterminados para esta configuración espacial de las superficies analizadas (figura 377).

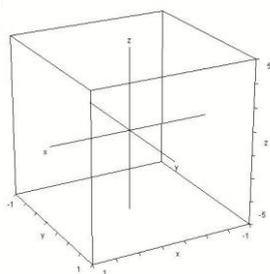


Figura 376. Sistema de coordenadas cartesianas tipo caja y sistema de coordenadas cartesianas para la posición *n.3*.

Fuente: elaboración propia mediante el software *Derive*®

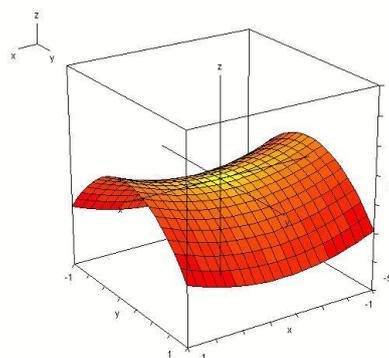


Figura 377. Representación del paraboloides hiperbólico tipo *Ph 7.3* que responde a la ecuación $z=x^2-3y^2$ para los valores predeterminados para esta configuración espacial.

Fuente: elaboración propia mediante el software *Derive*®

En la posición *n.3* se da una modificación a los parámetros de modelación del software *Derive*® mediante el comando

Seleccionar/Rango de la gráfica 3D

y simultáneamente se da un cambio en el ajuste de los valores de representación de acuerdo con los siguientes parámetros:

Paraboloides hiperbólicos y Sillas de monos

Rango de la gráfica 3D para la posición *n.3*.

Valores predeterminados para el comando

“Seleccionar/Rango de la gráfica 3D”

	Mínimo	Máximo	Escala
X	-1	1	0.2857
Y	-1	1	0.2857
Z	-5	5	1.4285

Valores predeterminados para el comando

“Seleccionar/Relación de aspecto/Ajuste del tamaño”

x		y		z
1	:	1	:	1

Seguidamente serán analizados los parámetros geométricos que corresponden a la propuesta de esta investigación para la posición *n.4*

d. Valores predeterminados en la posición n.4

Nuevamente se presenta una modificación en los valores de modelación geométrica observándose así el posicionamiento de éstas en la modalidad tipo caja (figura 378) para la posición *n.4*, así como el sistema de coordenadas cartesianas (figura 379) de la representación común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono que han sido diseñadas para esta configuración espacial en la presente investigación.

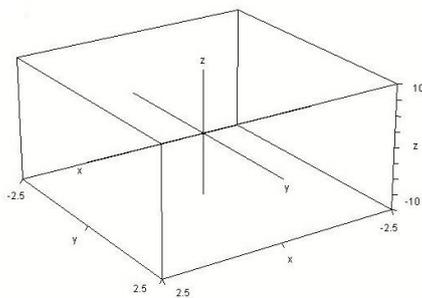


Figura 378. Representación del sistema de envolvente volumétrica tipo caja para la posición *n.4* de la representación común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono.
Fuente: elaboración propia mediante el software *Derive*®.

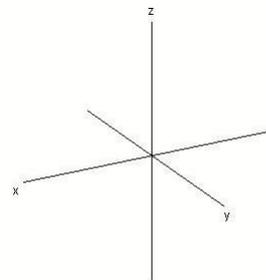


Figura 379. Representación del sistema de coordenadas cartesianas para la posición *n.4* de las familias de superficies propuestas en esta investigación.
Fuente: elaboración propia mediante el software *Derive*®.

A modo de ejemplificar una de las modelaciones propuestas se propone la gráfica de la silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo *Ph 4.4* que responde a la ecuación $z=2x^3-3xy^2$ para los valores predeterminados para esta configuración espacial de las superficies (figura 380).

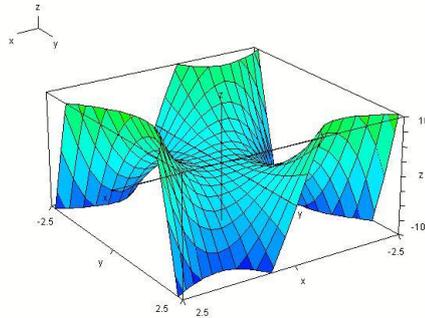


Figura 380. Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo *Sm 4.4* que responde a la ecuación $z=2x^3-3xy^2$ para los valores predeterminados para esta configuración espacial.

Fuente: elaboración propia mediante el software *Derive*®

Se presenta nuevamente un cambio de aspecto de las superficies diseñadas mediante una modificación de los parámetros del comando esta vez los indicadores se dan por la relación aquí descrita:

Paraboloides hiperbólicos y Sillas de monos para la posición *n.4*

“Seleccionar/Rango de la gráfica 3D”

	Mínimo	Máximo	Escala
<i>x</i>	-2.5	2.5	2.5
<i>y</i>	-2.5	2.5	2.5
<i>z</i>	-10	10	2.5

“Seleccionar/Relación de aspecto/Ajuste del tamaño”

<i>x</i>		<i>y</i>		<i>z</i>
2	:	2	:	1

Seguidamente serán analizados los parámetros geométricos para la posición *n.5* de las familias de superficies conformadas para la propuesta de esta investigación

e. Valores predeterminados en la posición n.5

En la figura 381 se observa el sistema de envolvente volumétrica tipo caja para la posición *n.5* así como el sistema de coordenadas cartesianas (figura 382) de la representación común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono que han sido diseñadas para esta configuración espacial en la presente investigación.

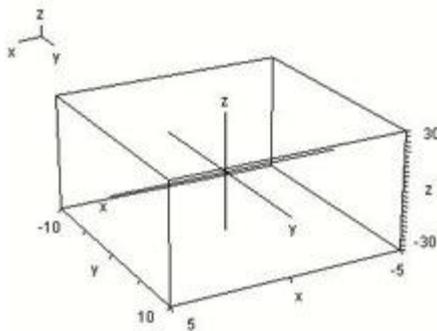


Figura 381. Sistema de envolvente volumétrica tipo caja para la posición *n.5* de la representación común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

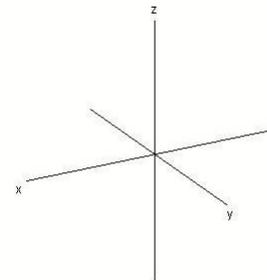


Figura 382. Sistema de coordenadas cartesianas para los valores predeterminados para esta configuración espacial.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

A modo de ejemplificar una de las modelaciones propuestas se presenta el paraboloide hiperbólico tipo *Ph 10.5* que responde a la ecuación $z=xy$ para los valores predeterminados para esta configuración espacial de las superficies (figura 383).

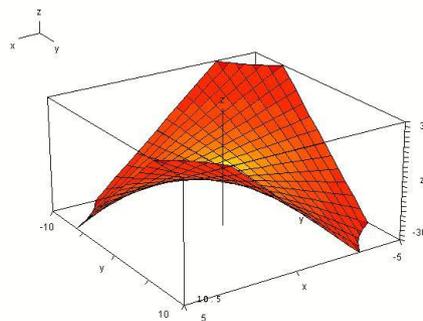


Figura 383. Representación paraboloide hiperbólico tipo *Ph 10.5* que responde a la ecuación $z=xy$ para los valores predeterminados para esta configuración espacial.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

Los valores de representación visual registran nuevamente un cambio de aspecto de las superficies diseñadas mediante una modificación de los parámetros de los comandos que a continuación se describen:

Paraboloides hiperbólicos y Sillas de monos para la posición *n.5*

“*Seleccionar/Rango de la gráfica 3D*”

	Mínimo	Máximo	Escala
<i>x</i>	-5	5	5
<i>y</i>	-10	10	5
<i>z</i>	-30	30	2.5

“*Seleccionar/Relación de aspecto/Ajuste del tamaño*”

<i>x</i>		<i>y</i>		<i>z</i>
2	:	2	:	1

Hasta esta posición *n.5* se conserva la ubicación de los ejes coordenados por defecto tal y como los presenta el software *Derive*[®]. Siendo a partir de aquí que se desarrollan las modalidades de superficies modificando el sistema de coordenadas rectangulares. (ver cuadro 5.1 en la Pg 305)

f. Valores predeterminados en la posición *n.6*

A partir de la posición *n.6* de las familias de superficies que se conforman en esta propuesta de la investigación se presentan cambios tanto en los valores del sistema de envolvente volumétrica tipo caja (figura 384) como en el posicionamiento del sistema de coordenadas cartesianas (figura 385) lo cual permite que se obtengan diferentes vistas o proyecciones de las gráficas de paraboloides hiperbólicos y las sillas de mono.

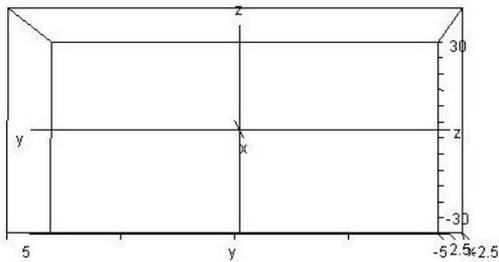


Figura 384. Representación del sistema de envolvente volumétrica tipo caja para la posición *n.6* de la representación común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

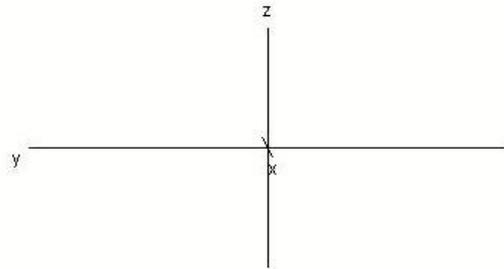


Figura 385. Representación del sistema de coordenadas cartesianas para la posición *n.6* de esta configuración espacial.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

Desde la posición *n.1* hasta la posición *n.5* se había logrado la representación de las superficies estudiadas ubicando el sistema de coordenadas cartesianas tal como lo proporciona por defecto (default) la herramienta computacional *Derive*®. Ahora, a partir de la posición *n.6* la posición de las coordenadas cartesianas (figuras 384 y 385) se modificarán en este caso la coordenada de las abscisas se ubicará de manera visualmente aproximada a una recta de punta.²

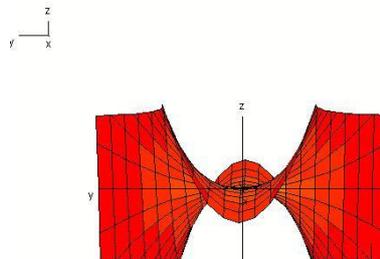


Figura 386. Representación de la silla de mono para monos de una cola $z=x^3-3xy^2$ tipo Sm 1.6.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

La modificación del sistema de coordenadas cartesianas en el software *Derive*® se realiza de forma manual mediante el comando “*Girar las gráficas*” o bien con el comando “*Rotar la gráfica*”.

² La recta de punta es aquella que es perpendicular al plano vertical de proyección y, en consecuencia, paralela al plano horizontal de proyección. (ver Anexo 1. Conceptos de Geometría Descriptiva que se relacionan con esta investigación).

Los parámetros de representación visual para la posición *n.6* de las superficies diseñadas se describen a continuación:

Parámetros de representación para los paraboloides hiperbólicos y sillas de mono.

Posición *n.6*

“Seleccionar/Rango de la gráfica 3D”

	Mínimo	Máximo	Escala
<i>x</i>	-2.5	2.5	2.5
<i>y</i>	-5	5	2.5
<i>z</i>	-30	30	5

“Seleccionar/Relación de aspecto/Ajuste del tamaño”

<i>x</i>		<i>y</i>		<i>z</i>
2	:	2	:	1

g. Valores predeterminados en la posición *n.7*

Para la posición *n.7* de la representación común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono que han sido diseñadas para esta configuración espacial en la presente investigación se observa la representación del sistema de envolvente volumétrica tipo caja (figura 387) así como el sistema de coordenadas cartesianas (figura 388) que logran la representación de las superficies.

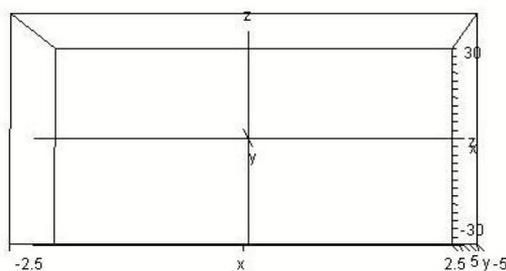


Figura 387. Representación del sistema de envolvente volumétrica tipo caja para la posición *n.7* de la configuración común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono.

Fuente: elaboración propia mediante el software *Derive*®

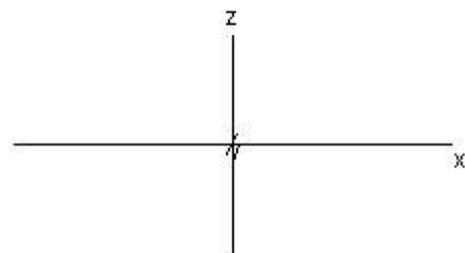


Figura 388. Representación del sistema de coordenadas cartesianas seleccionado para la posición *n.7*.

Fuente: elaboración propia mediante el software *Derive*®

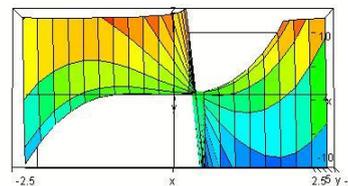
Para las superficies representadas mediante los parámetros geométricos de la posición *n.7* el sistema de coordenadas cartesianas adquiere una condicionante similar a la descrita para la posición *n.6* sólo que esta vez las coordenadas cartesianas se modificarán colocando al eje de las ordenadas de manera visualmente aproximada a una recta de punta.

La figura 389 indica la representación a modo de ejemplo aleatorio de una superficie estudiada en posición *n.7*; la silla de mono *perturbada* tipo 1.7 que responde a la ecuación $z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$



Figura 389. Representación de la silla de mono *perturbada* $z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$ con la envolvente volumétrica tipo caja para la posición *n.7* de la configuración común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®



Parámetros de representación para los paraboloides hiperbólicos y las sillas de mono.

Posición *n.7*

“Seleccionar/Rango de la gráfica 3D” para la posición *n.7*

	Mínimo	Máximo	Escala
<i>x</i>	-2.5	2.5	2.5
<i>y</i>	-5	5	2.5
<i>z</i>	-10	10	5

“Seleccionar/Relación de aspecto/Ajuste del tamaño”

<i>x</i>		<i>y</i>		<i>z</i>
2	:	2	:	1

h Valores predeterminados en la posición n.8

Una modalidad “a vuelo de pájaro” donde se percibe la vista superior de la superficie.

La vista en la posición *n.8* se obtiene mediante los parámetros gráficos del software *Derive*[®] tal como se indica en las figuras 390 y 391 para el posicionamiento y dimensionamiento del sistema de coordenadas cartesianas.

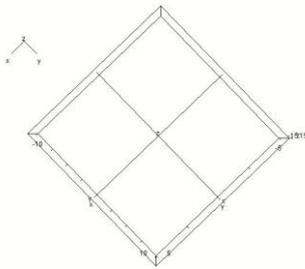


Figura 390. Representación del sistema de envolvente volumétrica tipo caja para la posición *n.8* de la configuración común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*[®]

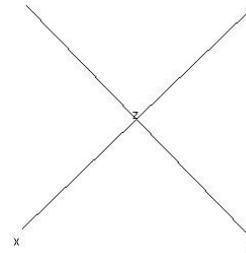


Figura 391. Representación del sistema de coordenadas cartesianas para los valores predeterminados para esta configuración espacial.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*[®]

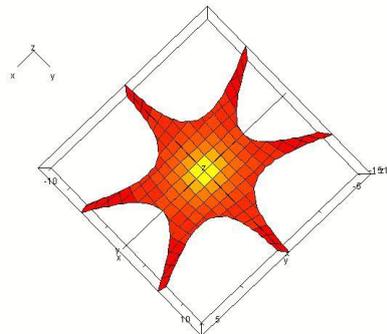


Figura 392. Representación de la silla de mono *perturbada* para monos de una cola Sm_{pert} tipo 3.8 que responde a la ecuación $z=x^3-xy^2+(x^2+y^2)$ para los valores predeterminados para esta configuración espacial.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*[®]

Parámetros de representación para los paraboloides hiperbólicos y las sillas de mono.

Posición *n.8*

“Seleccionar/Rango de la gráfica 3D”

	Mínimo	Máximo	Escala
<i>x</i>	-5	5	2.5
<i>y</i>	-10	10	2.5
<i>z</i>	-15	15	2.5

“Seleccionar/Relación de aspecto/Ajuste del tamaño”

<i>x</i>	:	<i>y</i>	:	<i>z</i>
2	:	2	:	1

Finalmente serán propuestos los valores de los parámetros que determinan la representación de las superficies en la posición *n.9*

i Valores predeterminados en la posición *n.9*

En esta posición del conjunto de familias de superficies propuestas el eje *z* se conserva en posición vertical, mientras que los ejes de abscisas y ordenadas quedan alineados en una línea horizontal que coincide con la línea de tierra.

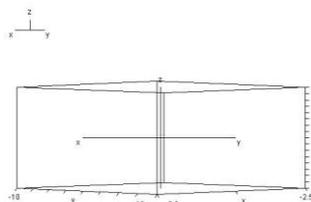


Figura 393. Representación de la envolvente volumétrica tipo caja para la posición *n.9* de la configuración común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*[®]

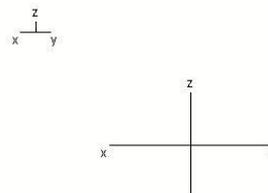


Figura 394. Representación del sistema de coordenadas cartesianas propuesto para la posición *n.9* de la configuración común para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*[®]

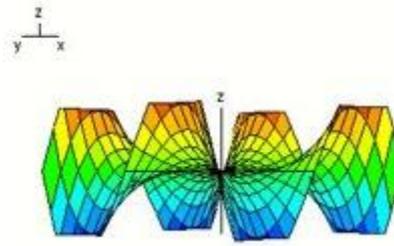


Figura 395. Representación de la silla de mono para monos de dos colas Sm_2 tipo 3.9 que responde a la ecuación $z=3xy(x^2-y^2)$ para los valores predeterminados para esta configuración espacial.
 Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

Parámetros de representación para paraboloides hiperbólicos y sillas de mono.

Posición n.9

“Seleccionar/Rango de la gráfica 3D” para la posición n.9

	Mínimo	Máximo	Escala
<i>x</i>	-2.5	2.5	2.5
<i>y</i>	-10	10	2.5
<i>z</i>	-20	20	2.5

“Seleccionar/Relación de aspecto/Ajuste del tamaño”

<i>x</i>		<i>y</i>		<i>Z</i>
2	:	2	:	1

Hasta aquí han sido descritos los valores de los parámetros geométricos que permiten la representación gráfica de las superficies estudiadas: paraboloides hiperbólicos, sillas de mono ordinarias para monos de una cola, sillas de mono *perturbadas* para monos de una cola y sillas de mono para monos de dos colas.

Las interrogantes que se presentan a continuación es cómo organizar las diferentes tipologías de superficies para lograr su representación organizada. Para tal fin se clasificarán en familias para cada uno de los conjuntos de superficies y se realizará el procedimiento de obtención gráfica partiendo de la ecuación e insertando una gráfica

que proporciona el software computacional *Derive*[®] y a partir de allí obtener 9 representaciones visuales adaptando para cada una de ellas a los valores que aquí han sido descritos.

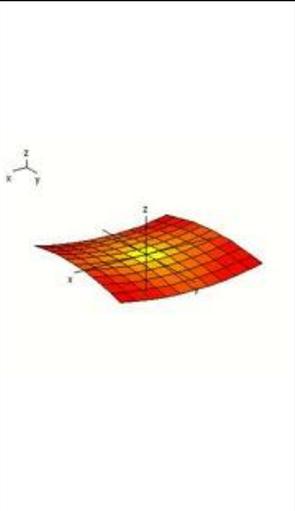
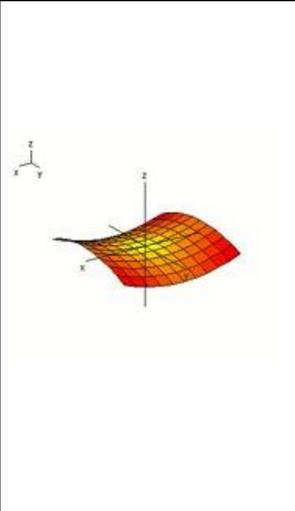
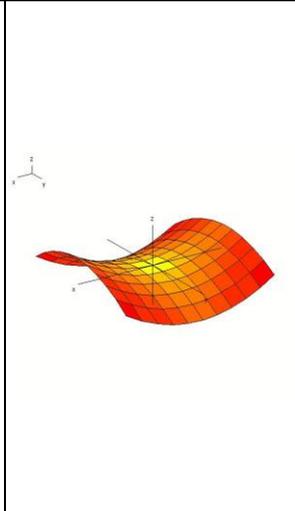
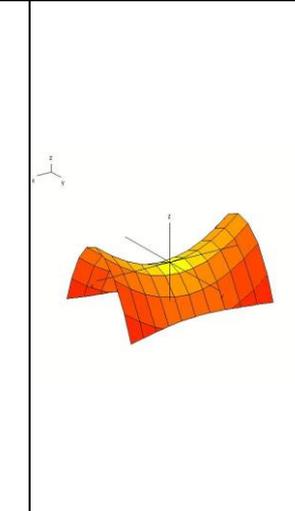
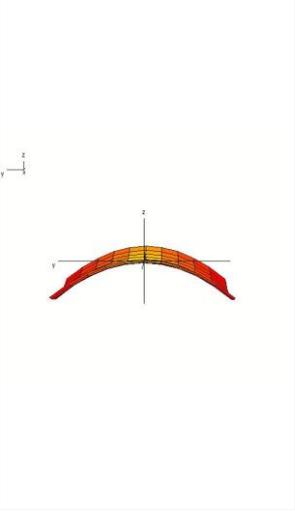
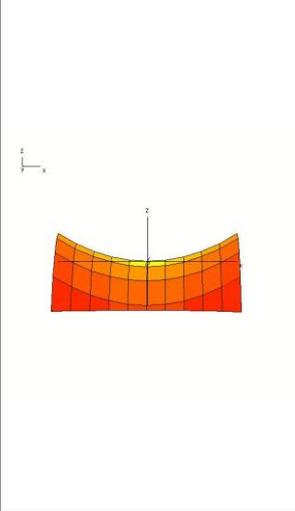
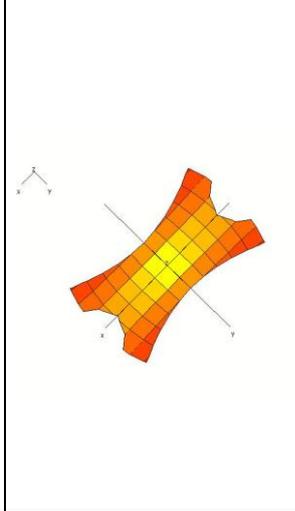
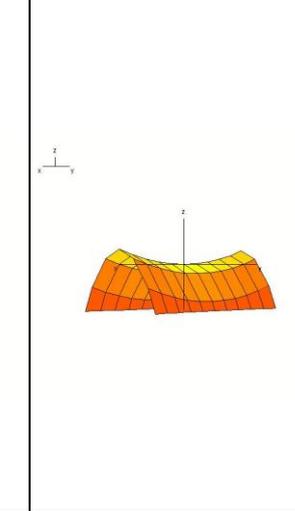
Seguidamente el cuadro 5.3 indica la clasificación y organización de las familias de ecuaciones de las superficies que serán representadas; agrupadas éstas de acuerdo a su tipología.

Posteriormente los cuadros 5.4 hasta el cuadro 5.31 permiten representar la obtención y ordenamiento de las familias de superficies con las diferentes vistas de acuerdo con las 9 posiciones propuestas para esta investigación.

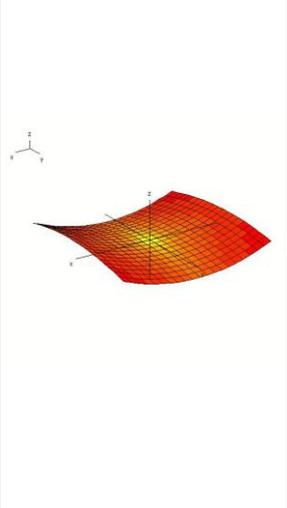
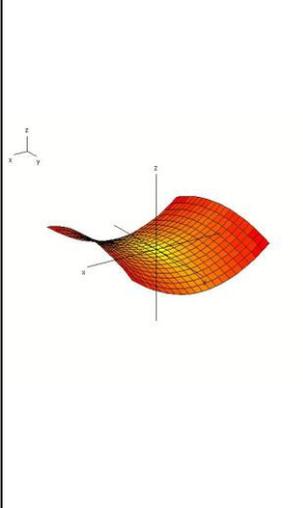
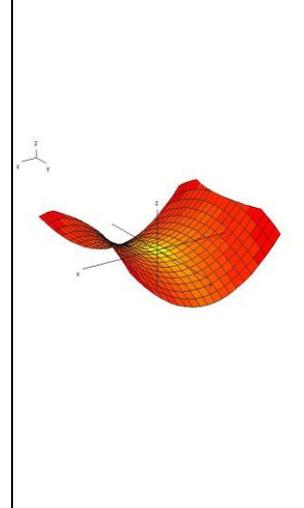
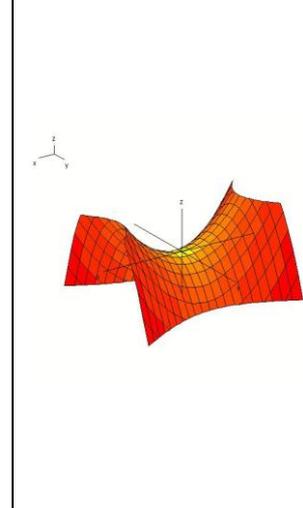
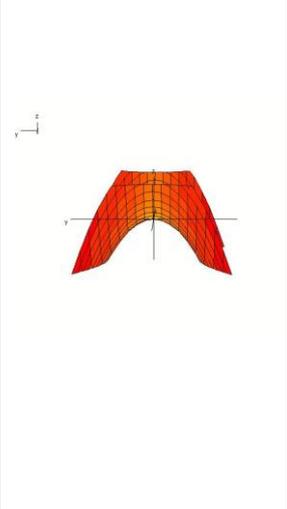
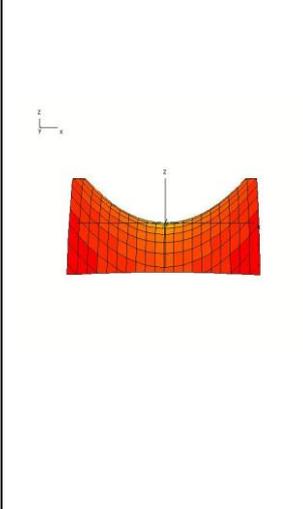
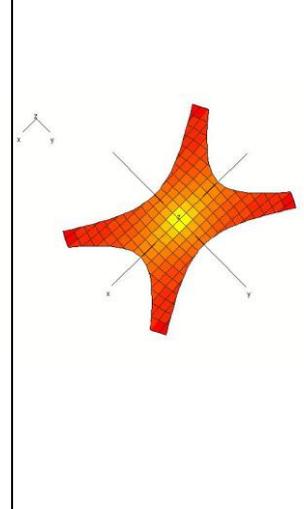
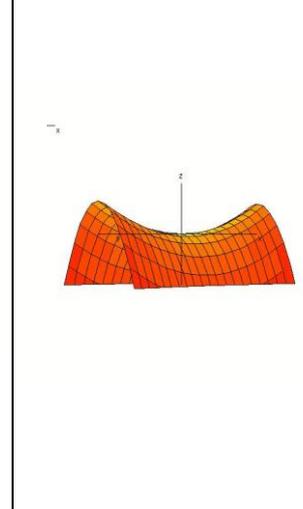
Cuadro 5.3 Resumen de las ecuaciones de las familias de superficies que serán representadas (nueve posiciones por cada tipo de familia de superficie)					
Paraboloides hiperbólicos		Sillas de monos			
		Tipos	Sillas de monos de una cola	Tipos	Sillas de monos dos colas
			Modalidad ordinarias		
Ph 1	$z = x^2 - y^2$	Sm 1	$z = x^3 - 3xy^2$	Sm ₂ 1	$z = 4xy(x^2 - y^2)$
Ph 2	$z = 2x^2 - y^2$	Sm 2	$z = x^3 - 2xy^2$		
Ph 3	$z = y^2 - x^2$	Sm 3	$z = x^3 - xy^2$	Sm ₂ 2	$z = 3xy(x^2 - y^2)$
Ph 4	$z = 2y^2 - x^2$	Sm 4	$z = 2x^3 - 3xy^2$		
Ph 5	$z = x^2 - 2y^2$	Sm 5	$z = 2x^3 - 2xy^2$	Sm ₂ 3	$z = 2xy(x^2 - y^2)$
Ph 6	$z = 2x^2 - 2y^2$	Sm 6	$z = 2x^3 - xy^2$		
Ph 7	$z = x^2 - 3y^2$	Tipos	Sillas de mono perturbadas	Sm ₂ 4	$z = xy(x^2 - y^2)$
Ph 8	$z = 2x^2 - 3y^2$	Sm _{pert} 1	$z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$		
Ph 9	$z = 3x^2 - 2y^2$	Sm _{pert} 2	$z = x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$	Sm ₂ 5	$z = 1/2xy - (x^2 - y^2)$
Ph 10	$z = xy$	Sm _{pert} 3	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$		
		Sm _{pert} 4	$z = 2x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$	Sm ₂ 6	$z = 3/4xy - (x^2 - y^2)$
		Sm _{pert} 5	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$		
		Sm _{pert} 6	$z = 2x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$		

Cuadro de elaboración propia

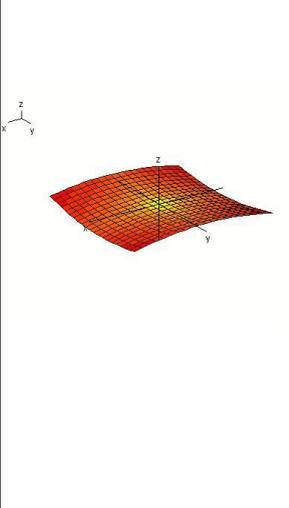
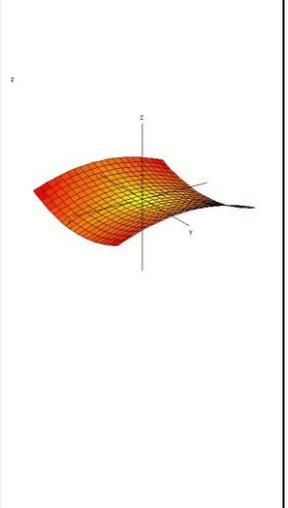
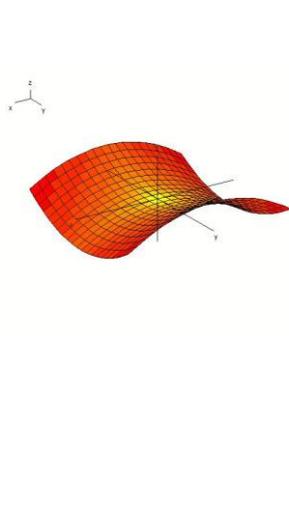
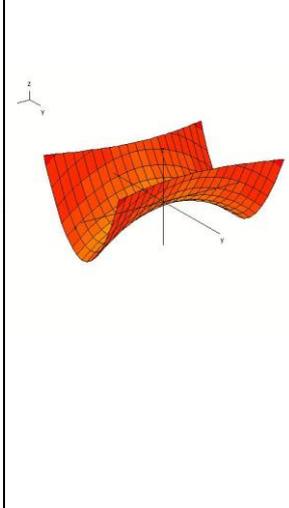
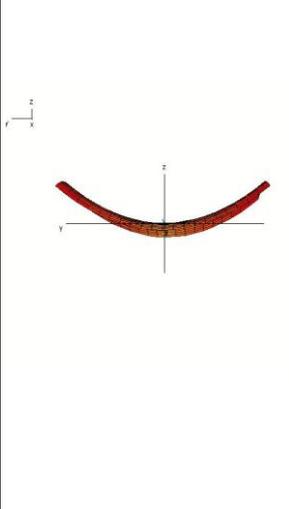
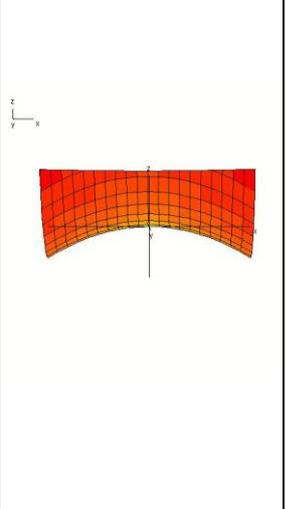
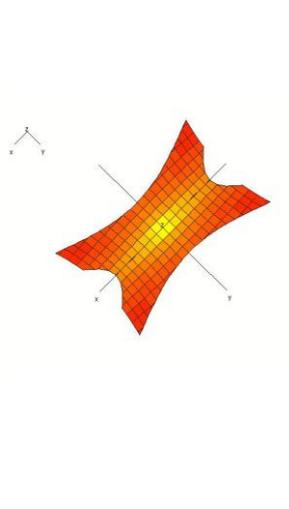
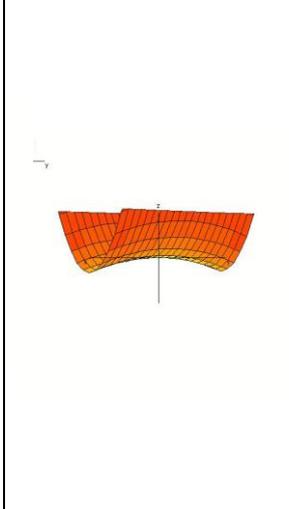
5.3. Familias de paraboloides hiperbólicos (Ph)

Cuadro 5.4			
Paraboloide hiperbólico tipo Ph 1 $z = x^2 - y^2$			
Ph 1 Posición 1.2	Ph 1 Posición 1.3	Ph 1 Posición 1.4	Ph 1 Posición 1.5
			
Ph 1 Posición 1.6	Ph 1 Posición 1.7	Ph 1 Posición 1.8	Ph 1 Posición 1.9
			

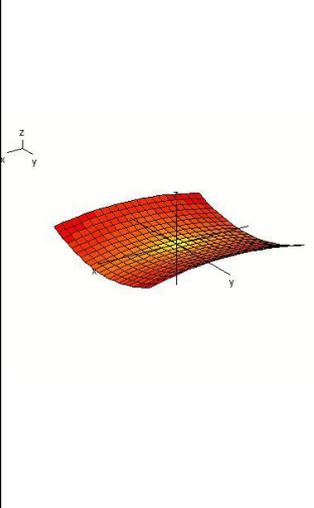
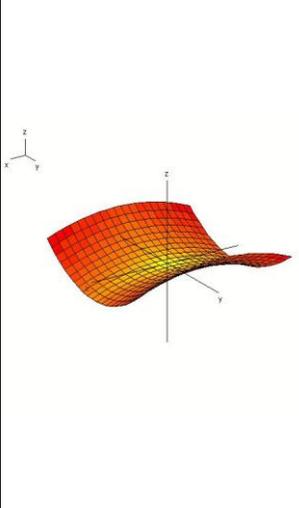
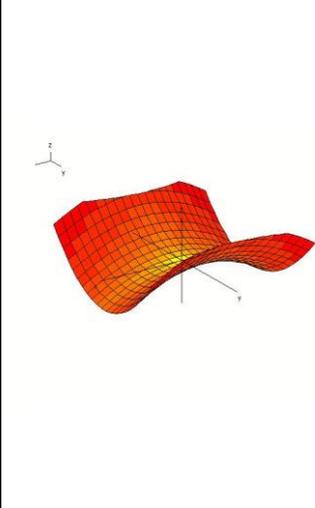
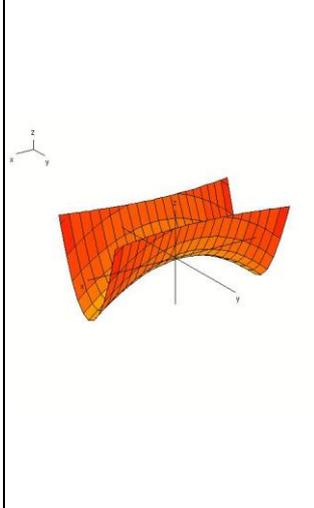
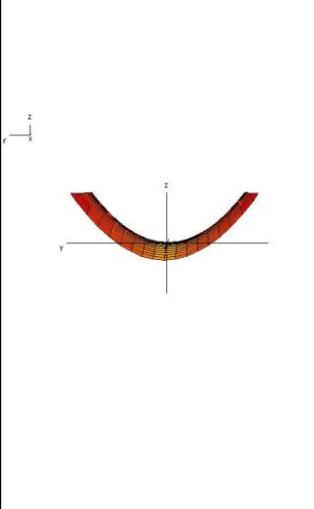
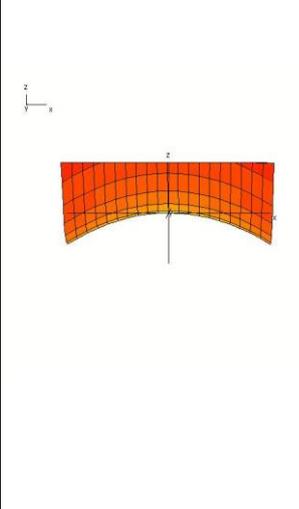
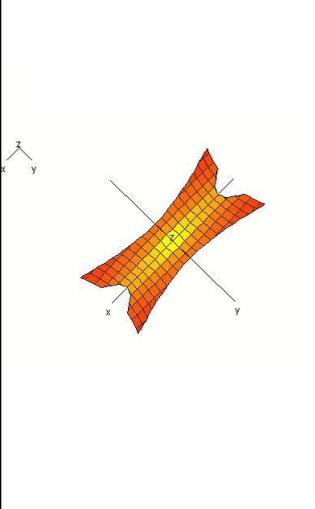
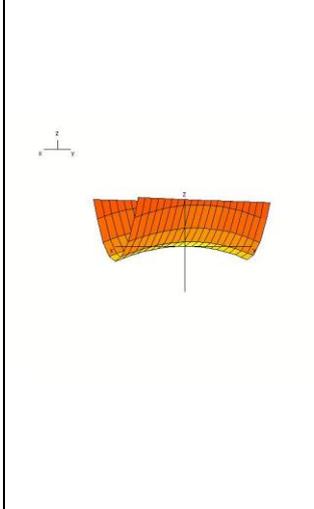
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.5			
Paraboloide hiperbólico tipo Ph 2 $z = 2x^2 - y^2$			
Ph 2 Posición 2.2	Ph 2 Posición 2.3	Ph 2 Posición 2.4	Ph 2 Posición 2.5
			
Ph 2 Posición 2.6	Ph 2 Posición 2.7	Ph 2 Posición 2.8	Ph 2 Posición 2.9
			

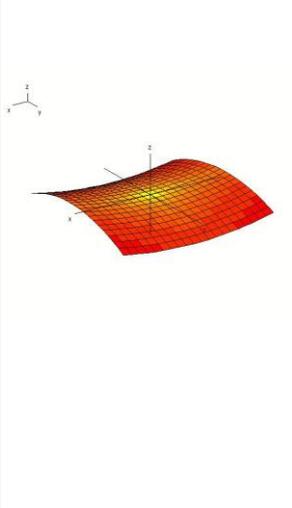
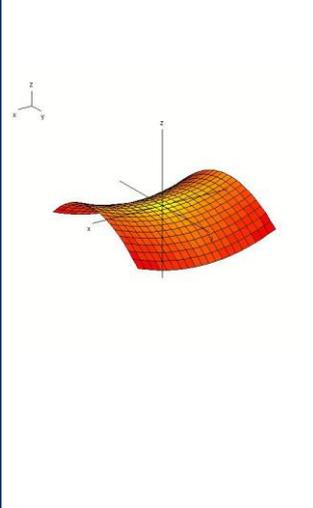
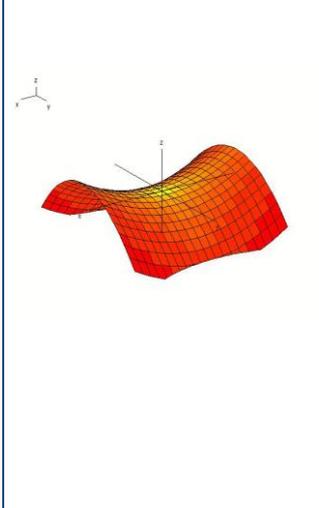
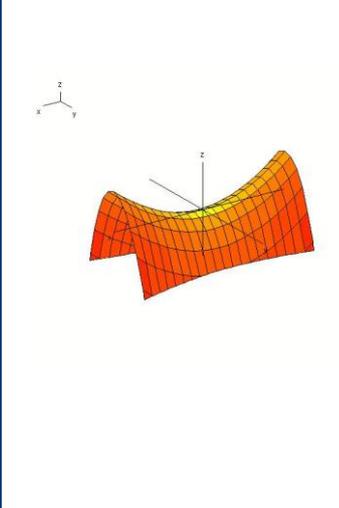
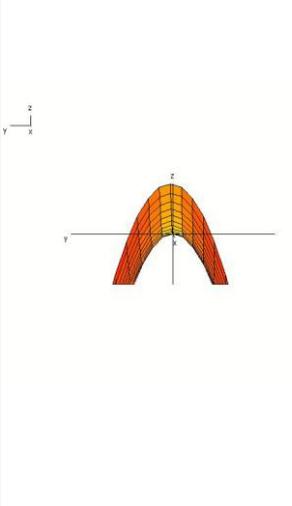
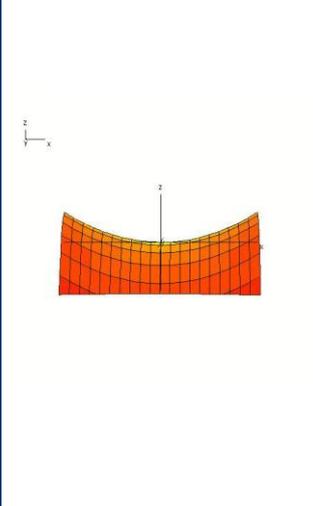
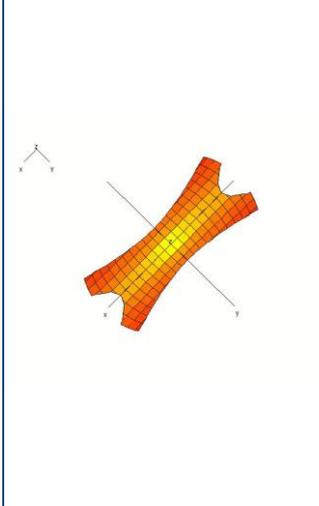
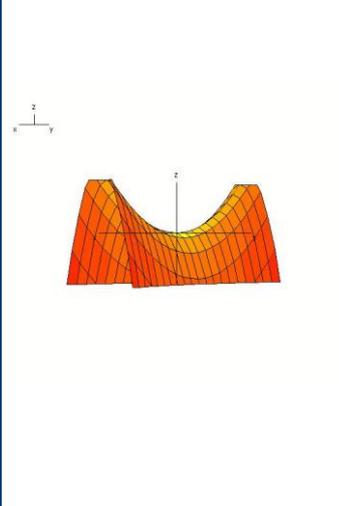
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.6 Paraboloide hiperbólico tipo Ph 3 $z = y^2 - x^2$			
Ph 3 Posición 3.2	Ph 3 Posición 3.3	Ph 3 Posición 3.4	Ph 3 Posición 3.5
			
Ph 3 Posición 3.6	Ph 3 Posición 3.7	Ph 3 Posición 3.8	Ph 3 Posición 3.9
			

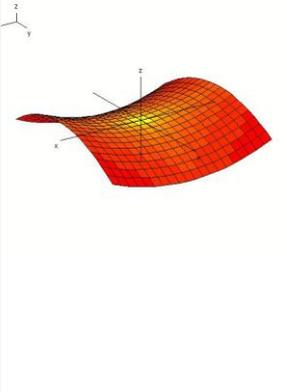
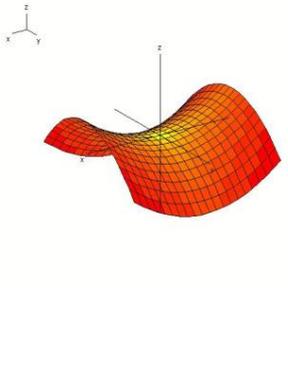
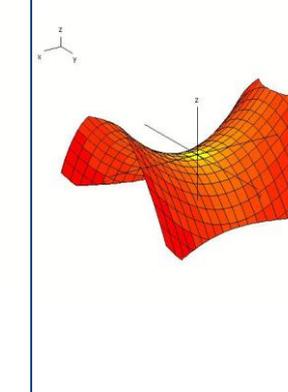
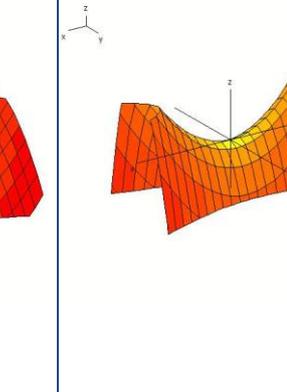
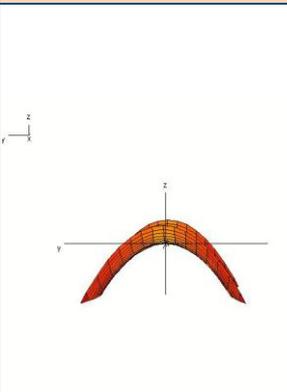
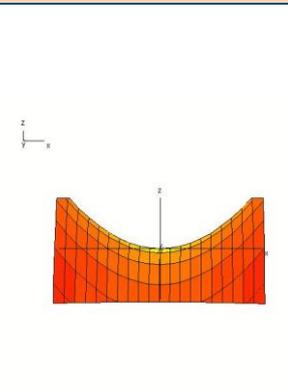
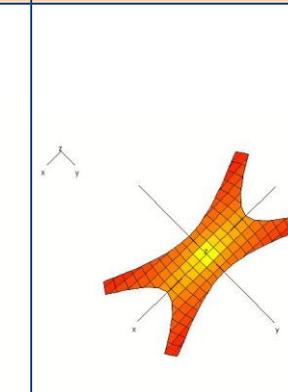
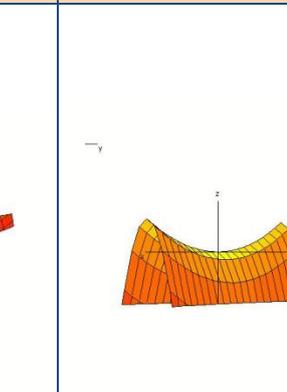
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.7 Paraboloide hiperbólico tipo Ph 4 $z = 2y^2 - x^2$			
Ph 4 Posición 4.2	Ph 4 Posición 4.3	Ph 4 Posición 4.4	Ph 4 Posición 4.5
			
Ph 4 Posición 4.6	Ph 4 Posición 4.7	Ph 4 Posición 4.8	Ph 4 Posición 4.9
			

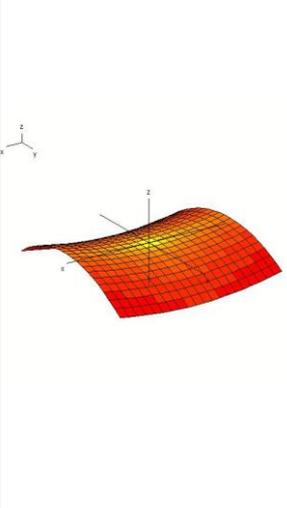
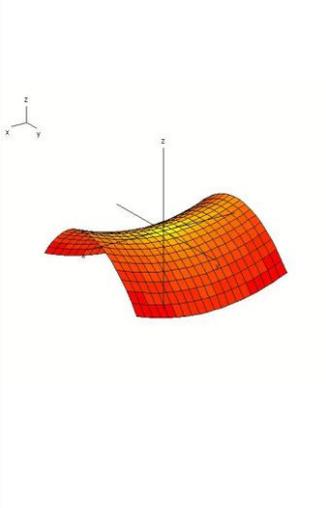
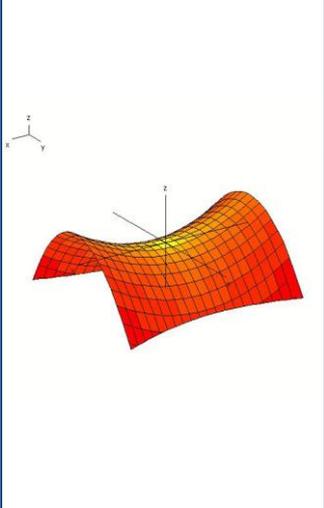
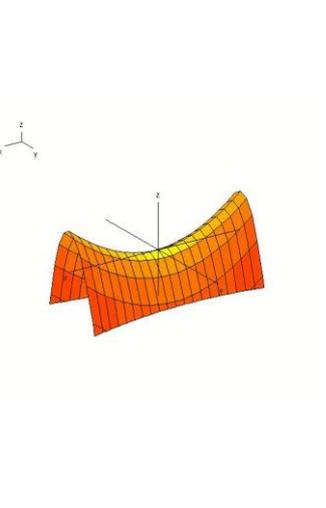
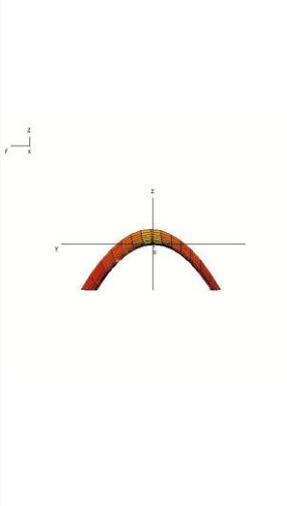
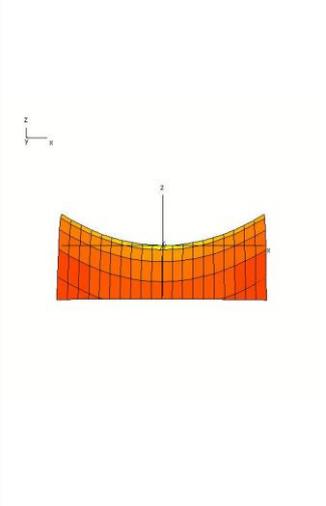
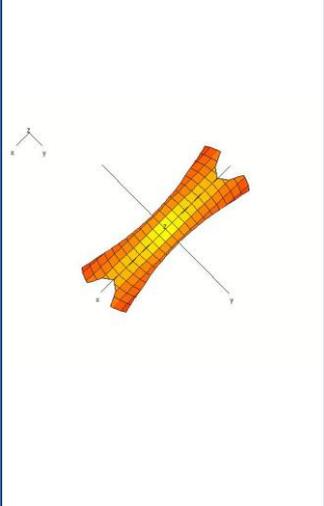
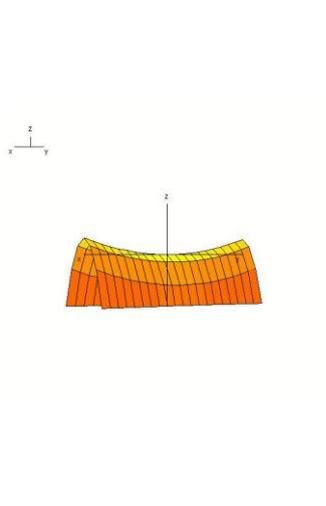
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.8			
Paraboloide hiperbólico tipo Ph 5			
$z = x^2 - 2y^2$			
Ph 5 Posición 5.2	Ph 5 Posición 5.3	Ph 5 Posición 5.4	Ph 5 Posición 5.5
			
Ph 5 Posición 5.6	Ph 5 Posición 5.7	Ph 5 Posición 5.8	Ph 5 Posición 5.9
			

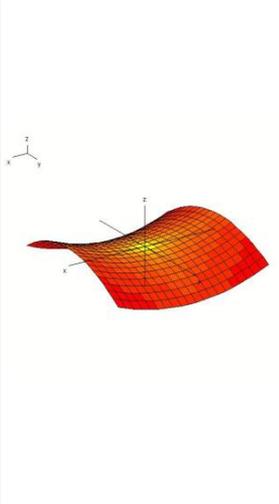
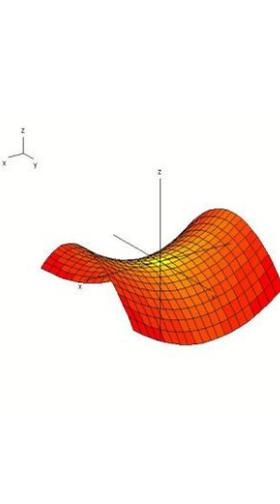
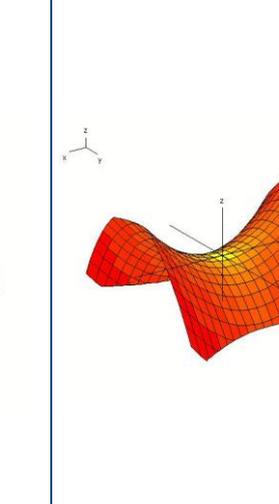
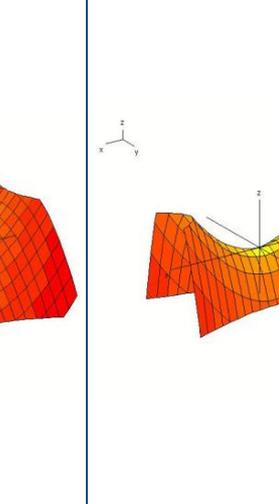
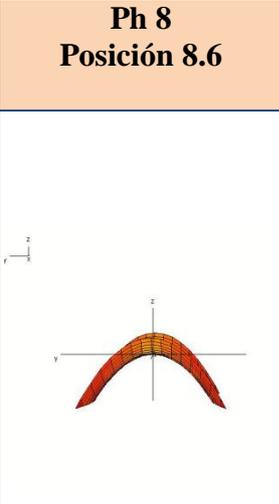
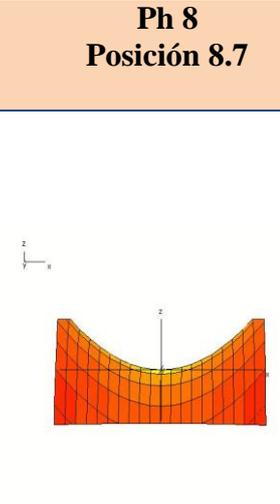
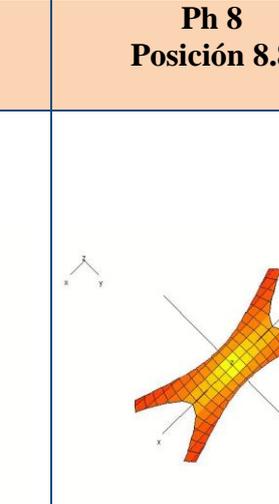
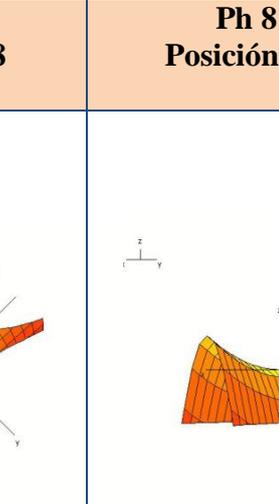
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.9			
Paraboloide hiperbólico tipo Ph 6			
$z = 2x^2 - 2y^2$			
Ph 6 Posición 6.2	Ph 6 Posición 6.3	Ph 6 Posición 6.4	Ph 6 Posición 6.5
			
Ph 6 Posición 6.6	Ph 6 Posición 6.7	Ph 6 Posición 6.8	Ph 6 Posición 6.9
			

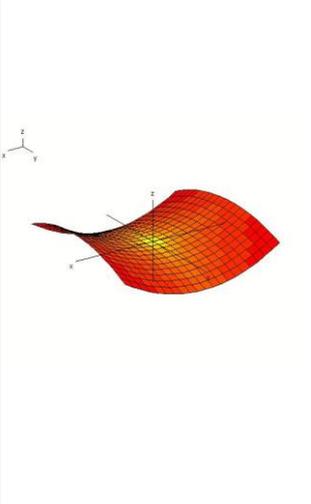
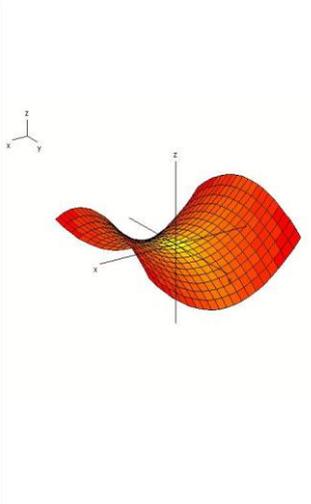
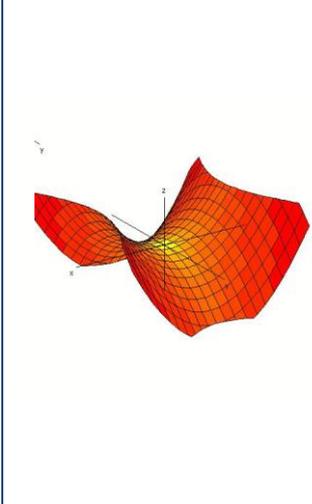
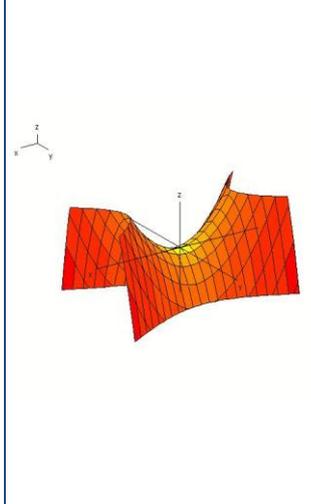
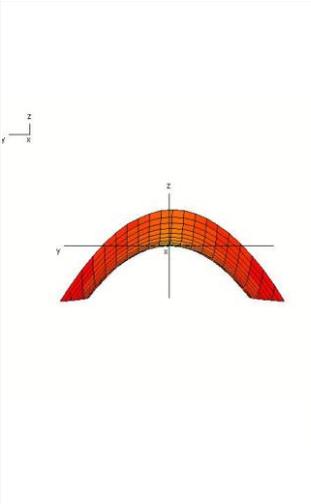
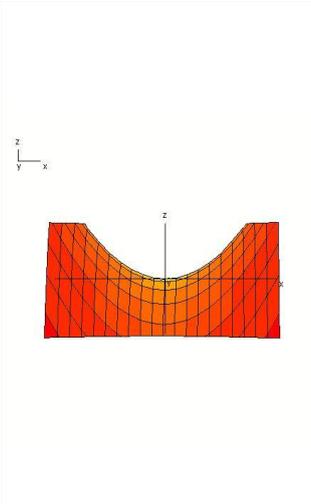
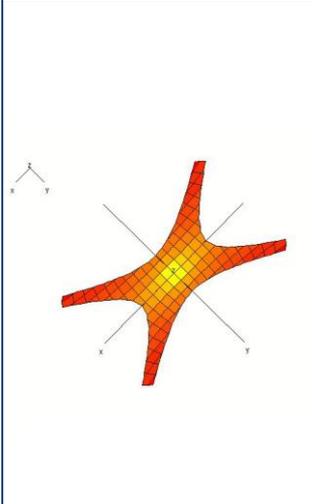
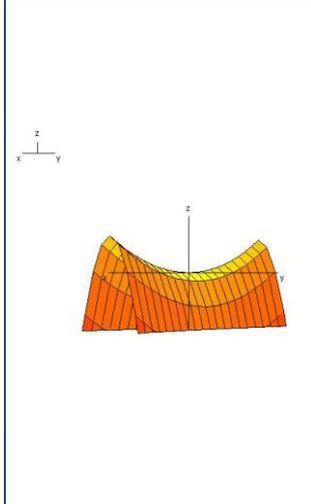
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.10			
Paraboloide hiperbólico tipo Ph 7			
$z = x^2 - 3y^2$			
Ph 7 Posición 7.2	Ph 7 Posición 7.3	Ph 7 Posición 7.4	Ph 7 Posición 7.5
			
Ph 7 Posición 7.6	Ph 7 Posición 7.7	Ph 7 Posición 7.8	Ph 7 Posición 7.9
			

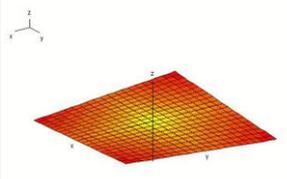
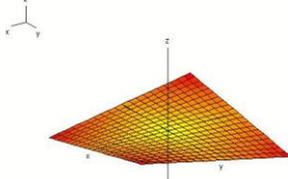
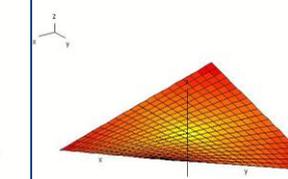
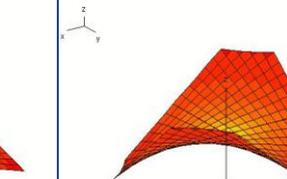
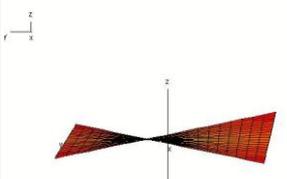
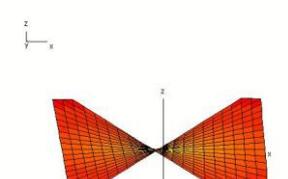
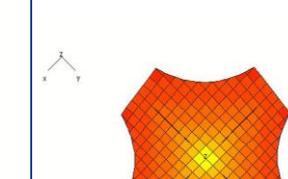
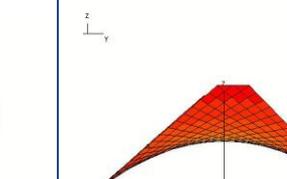
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.11 Paraboloide hiperbólico tipo Ph 8 $z = 2x^2 - 3y^2$			
Ph 8 Posición 8.2	Ph 8 Posición 8.3	Ph 8 Posición 8.4	Ph 8 Posición 8.5
			
Ph 8 Posición 8.6	Ph 8 Posición 8.7	Ph 8 Posición 8.8	Ph 8 Posición 8.9
			

Cuadro de elaboración propia

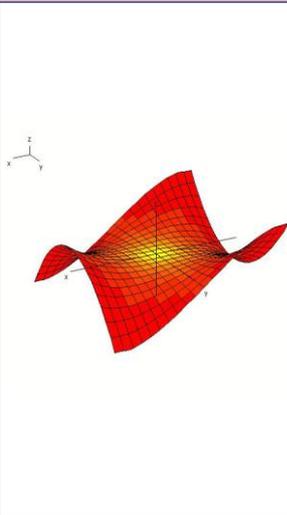
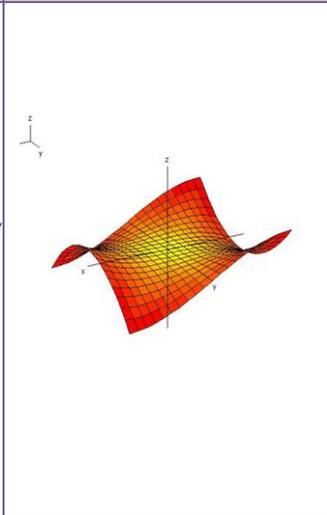
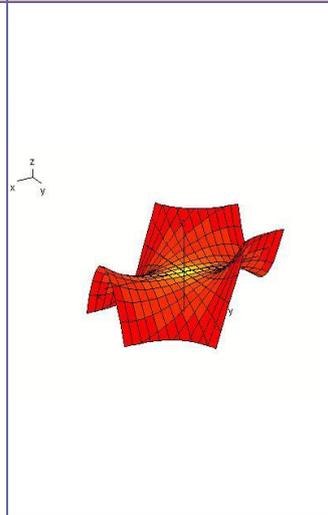
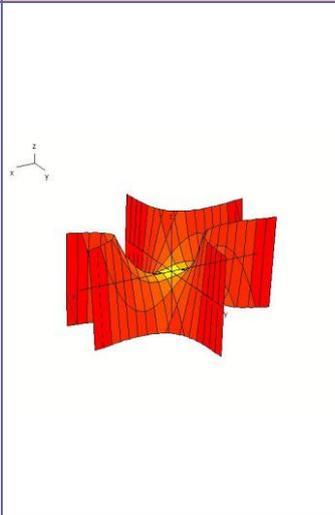
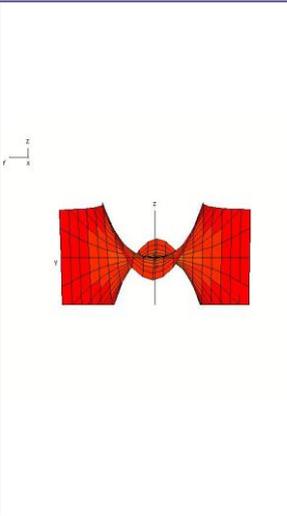
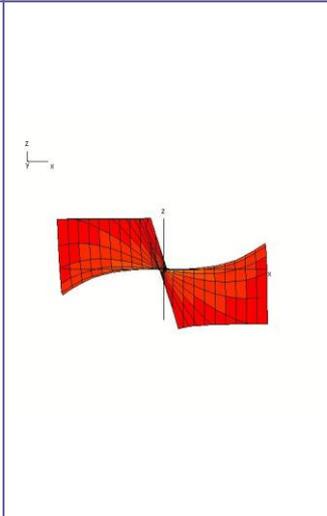
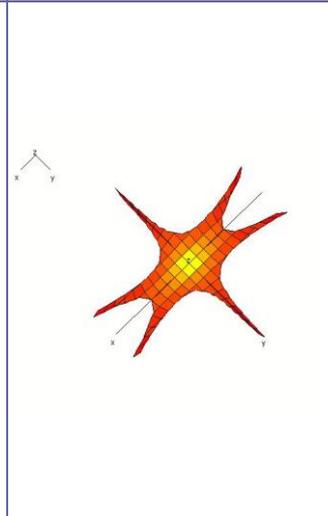
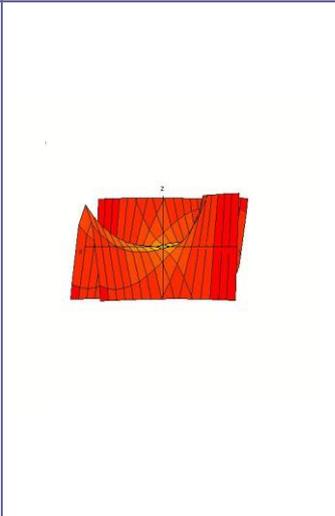
Cuadro 5.12 Paraboloide hiperbólico tipo Ph 9 $z = 3x^2 - 2y^2$			
Ph 9 Posición 9.2	Ph 9 Posición 9.3	Ph 9 Posición 9.4	Ph 9 Posición 9.5
			
Ph 9 Posición 9.6	Ph 9 Posición 9.7	Ph 9 Posición 9.8	Ph 9 Posición 9.9
			

Cuadro de elaboración propia

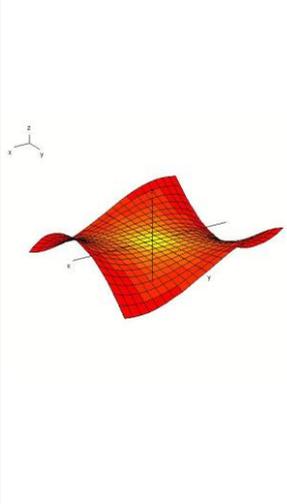
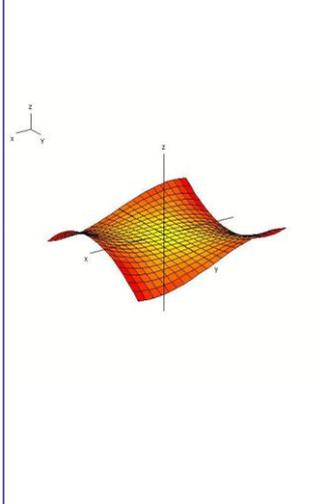
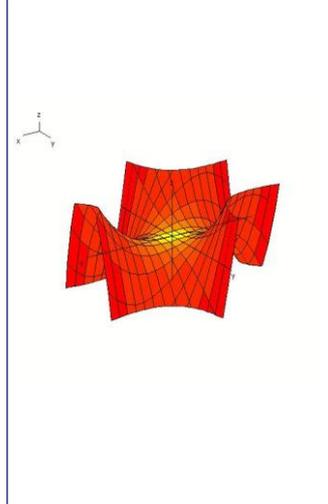
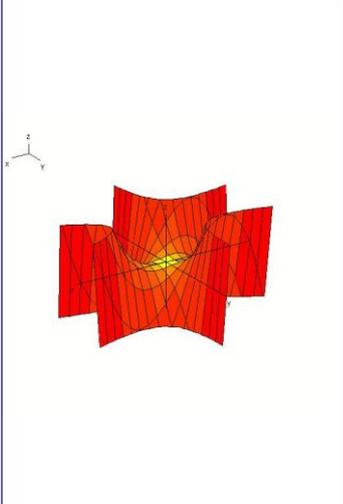
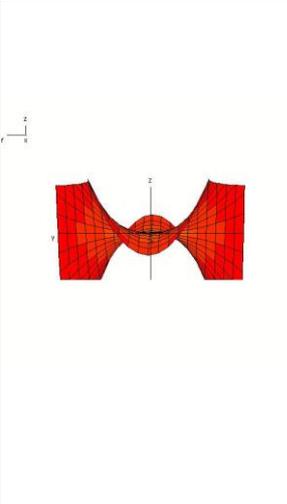
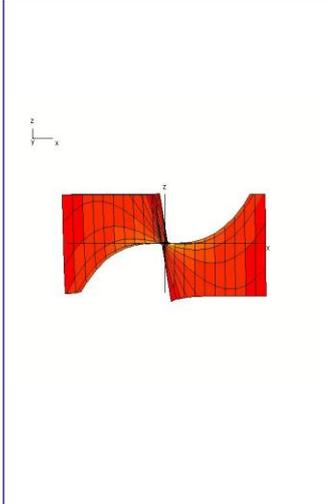
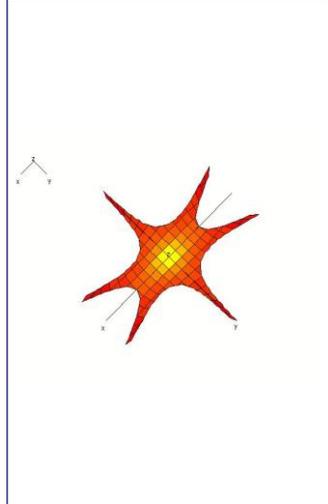
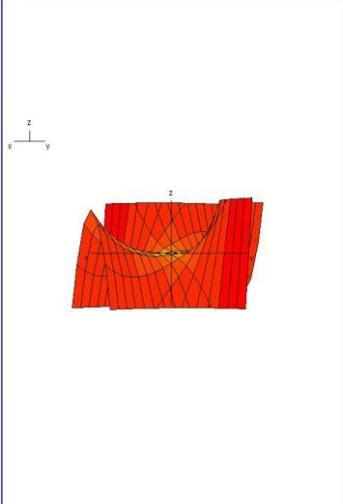
Cuadro 5.13 Paraboloide hiperbólico tipo Ph 10 $z = x y$			
Ph 10 Posición 10.2	Ph 10 Posición 10.3	Ph 10 Posición 10.4	Ph 10 Posición 10.5
			
Ph 10 Posición 10.6	Ph 10 Posición 10.7	Ph 10 Posición 10.8	Ph 10 Posición 10.9
			

Cuadro de elaboración propia

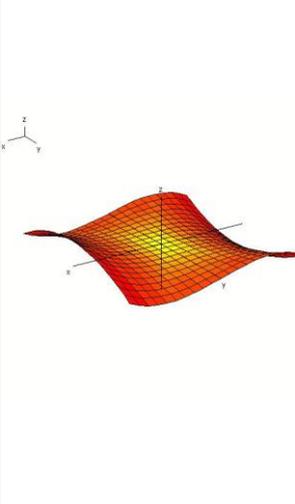
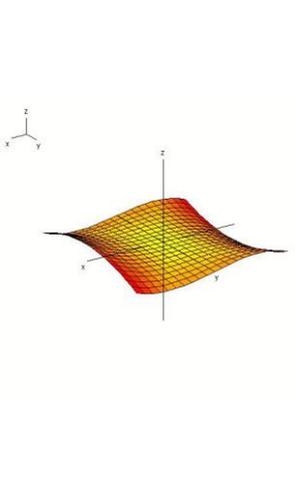
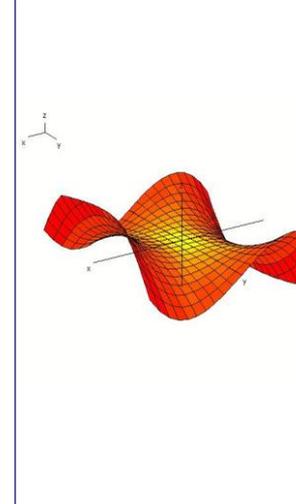
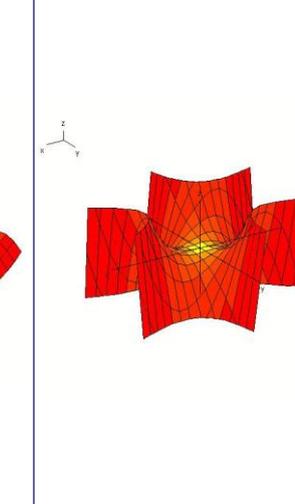
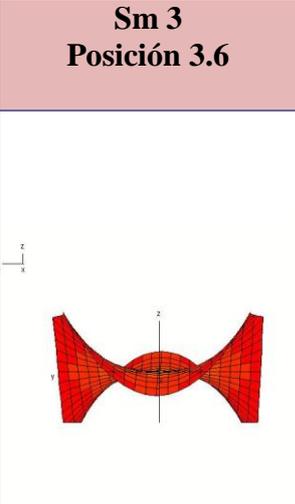
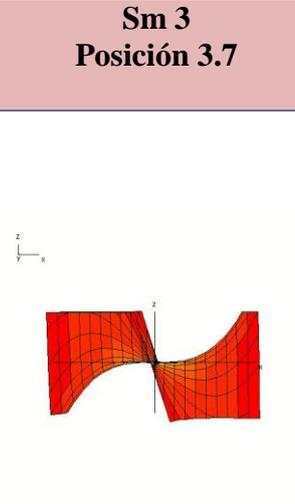
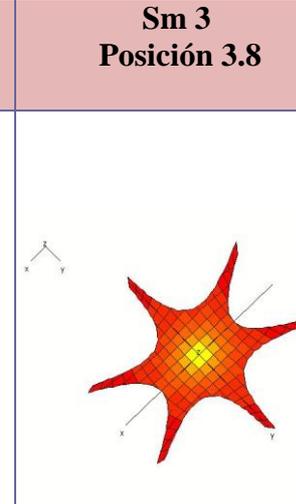
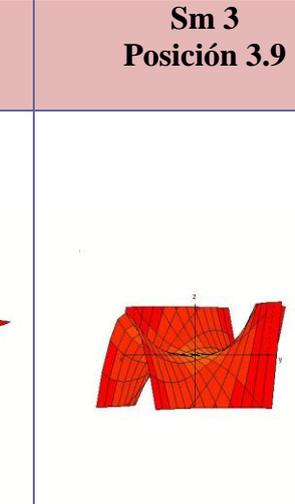
5.4. Familias de sillas de mono ordinarias para monos de una cola

Cuadro 5.14 Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 1 $z = x^3 - 3xy^2$			
Sm 1 Posición 1.2	Sm 1 Posición 1.3	Sm 1 Posición 1.4	Sm 1 Posición 1.5
			
Sm 1 Posición 1.6	Sm 1 Posición 1.7	Sm 1 Posición 1.8	Sm 1 Posición 1.9
			

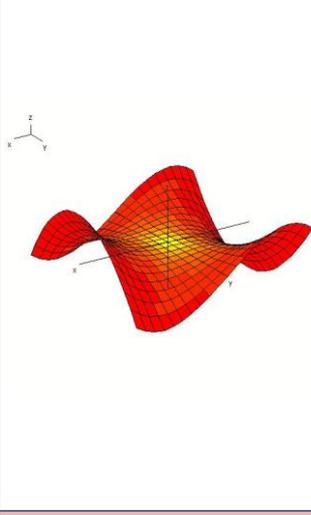
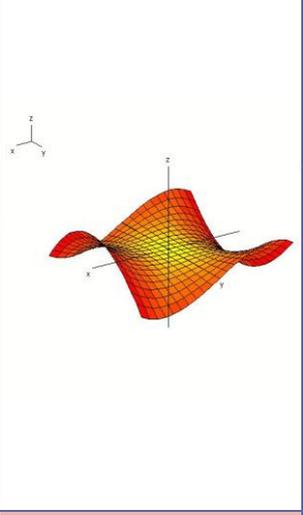
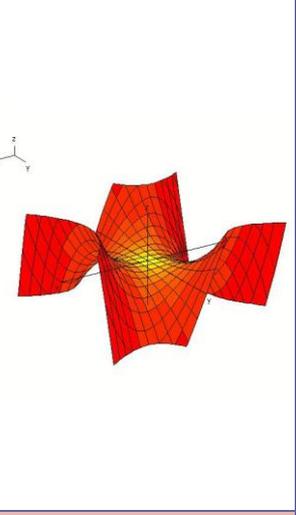
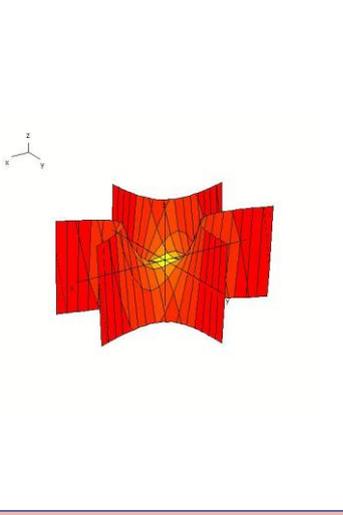
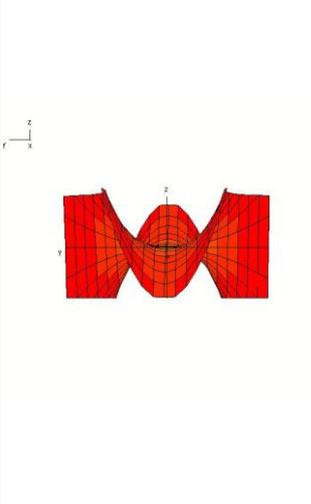
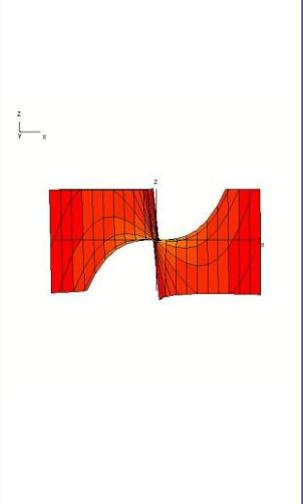
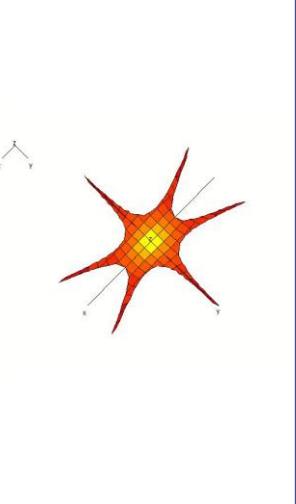
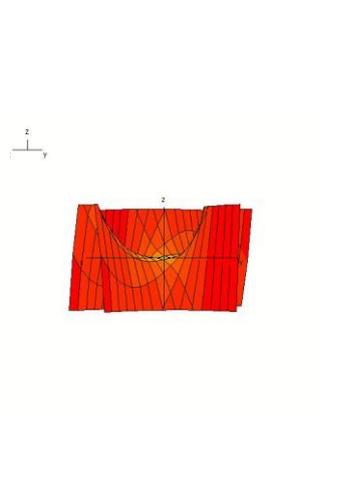
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.15 Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 2 $z = x^3 - 2xy^2$			
Sm 2 Posición 2.2	Sm 2 Posición 2.3	Sm 2 Posición 2.4	Sm 2 Posición 2.5
			
Sm 2 Posición 2.6	Sm 2 Posición 2.7	Sm 2 Posición 2.8	Sm 2 Posición 2.9
			

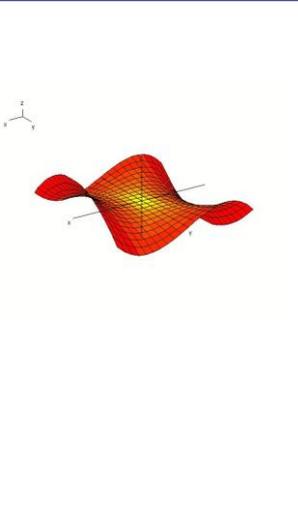
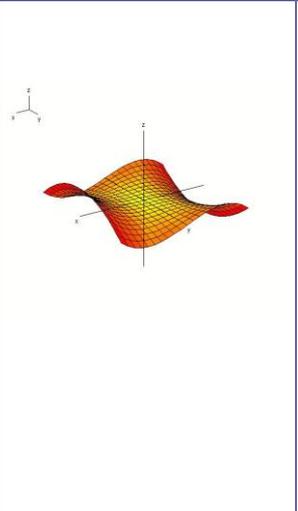
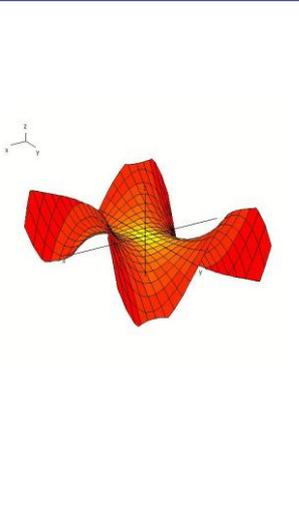
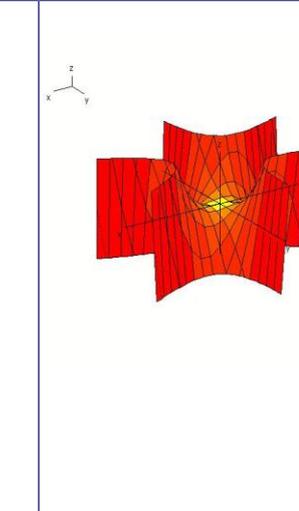
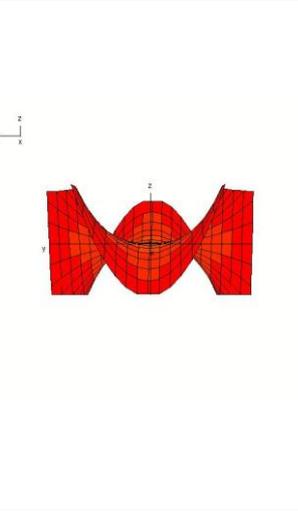
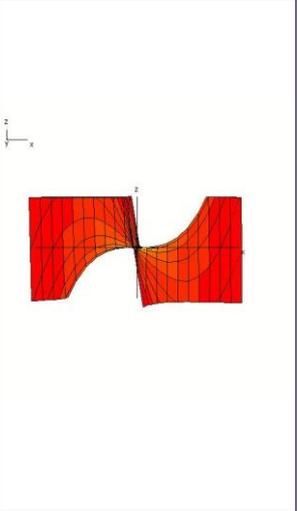
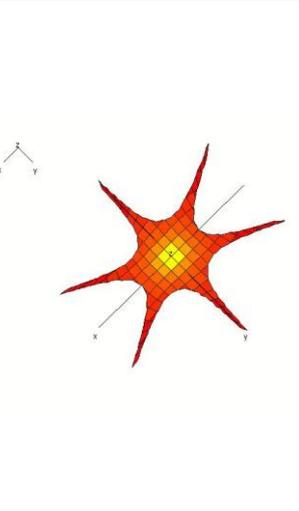
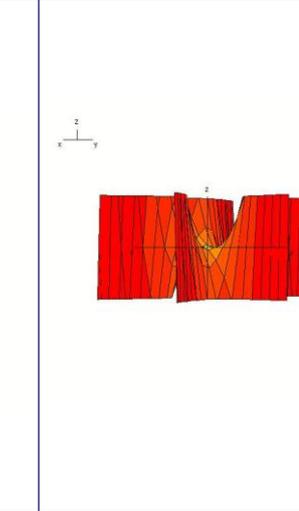
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.16 Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 3 $z = x^3 - xy^2$			
Sm 3 Posición 3.2	Sm 3 Posición 3.3	Sm 3 Posición 3.4	Sm3 Posición 3.5
			
Sm 3 Posición 3.6	Sm 3 Posición 3.7	Sm 3 Posición 3.8	Sm 3 Posición 3.9
			

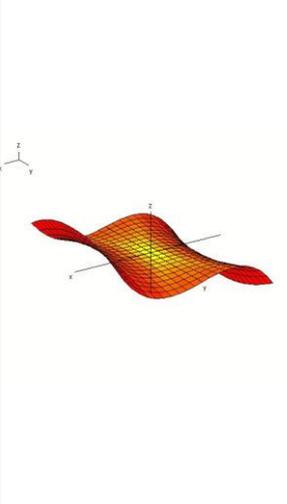
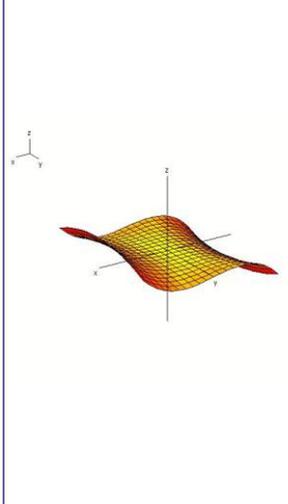
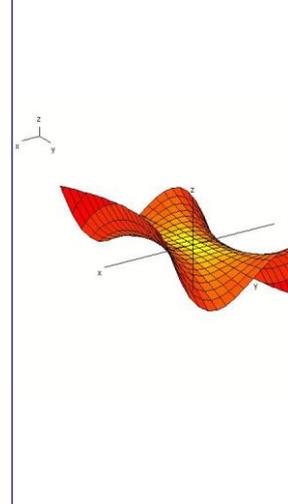
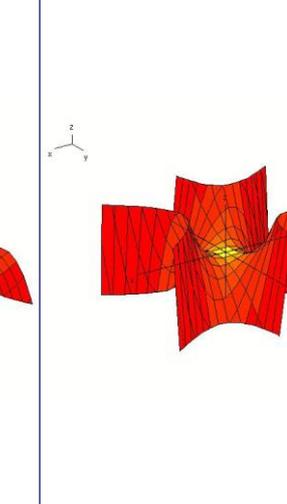
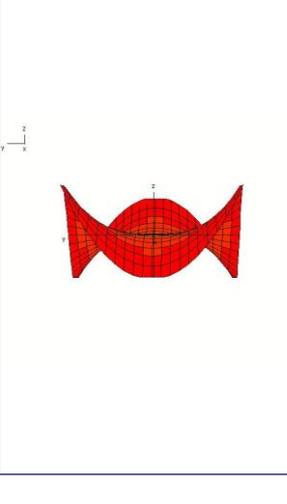
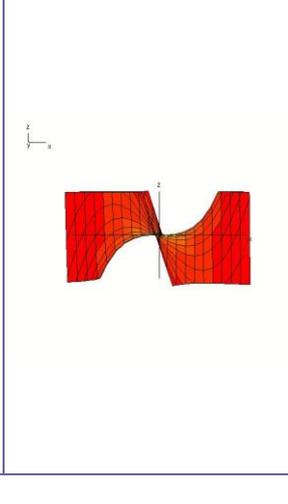
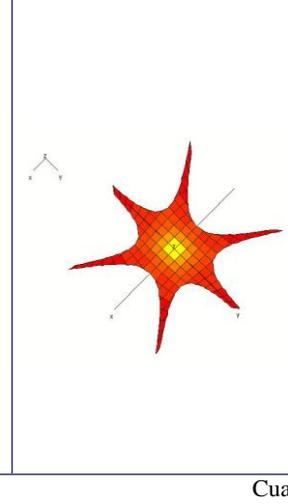
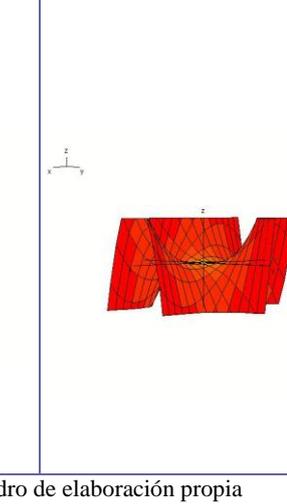
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.17 Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 4 $z = 2x^3 - 3xy$			
Sm 4 Posición 4.2	Sm 4 Posición 4.3	Sm 4 Posición 4.4	Sm 4 Posición 4.5
			
Sm 4 Posición 4.6	Sm 4 Posición 4.7	Sm 4 Posición 4.8	Sm 4 Posición 4.9
			

Cuadro de elaboración propia

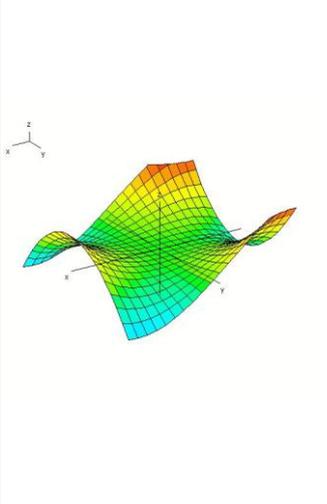
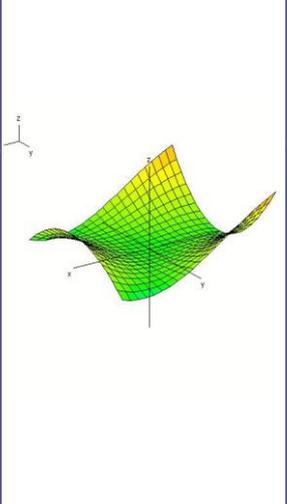
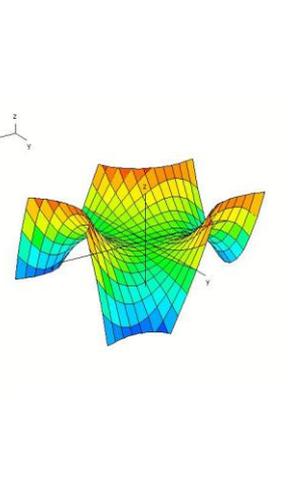
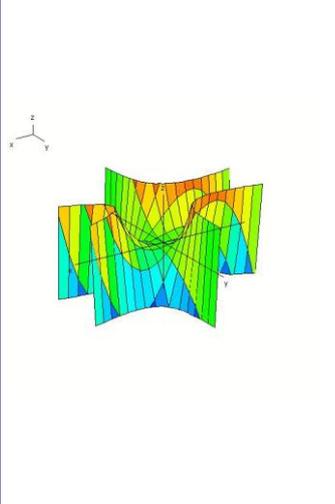
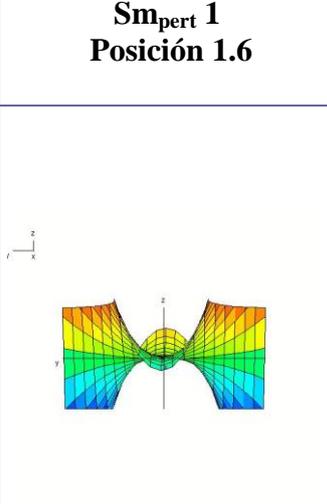
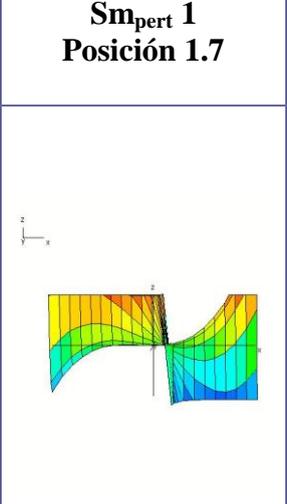
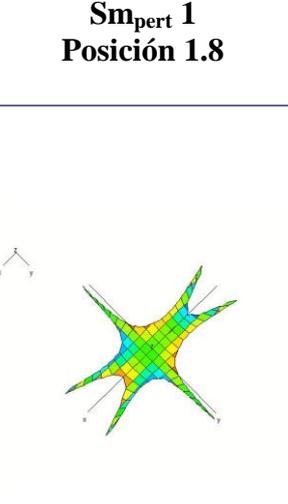
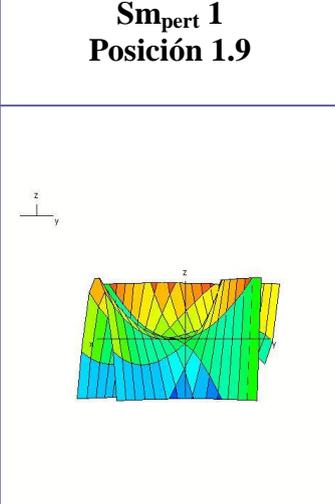
Cuadro 5.18			
Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 5			
$z = 2x^3 - 2xy^2$			
Sm 5 Posición 5.2	Sm 5 Posición 5.3	Sm 5 Posición 5.4	Sm 5 Posición 5.5
			
Sm 5 Posición 5.6	Sm 5 Posición 5.7	Sm 5 Posición 5.8	Sm 5 Posición 5.9
			

Cuadro de elaboración propia

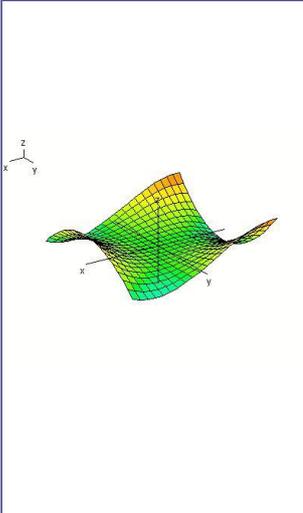
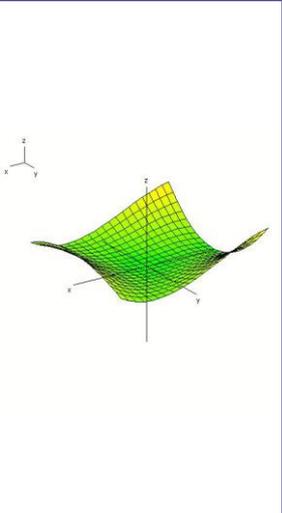
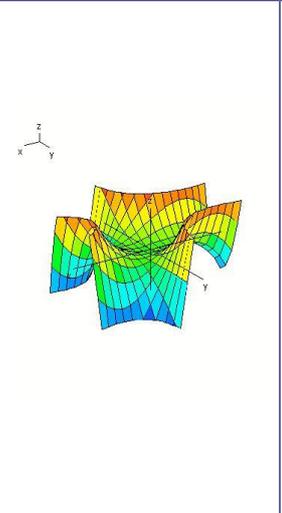
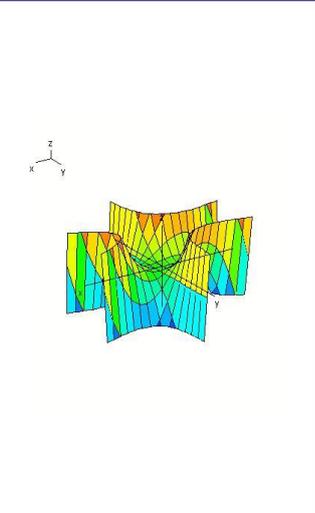
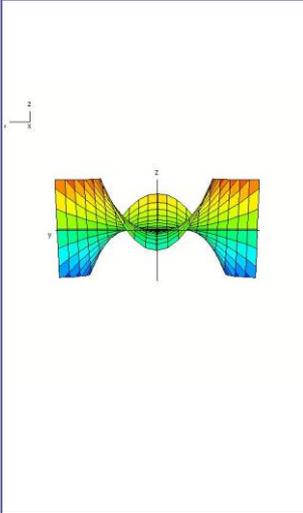
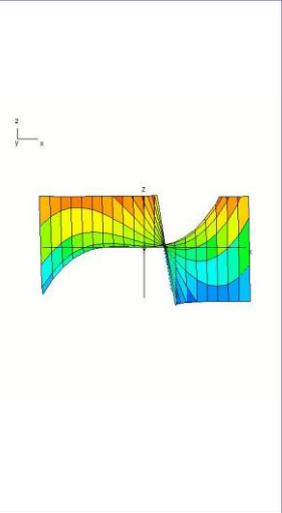
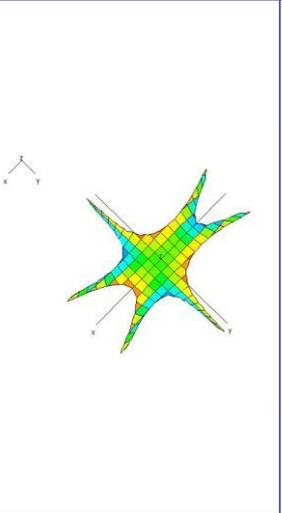
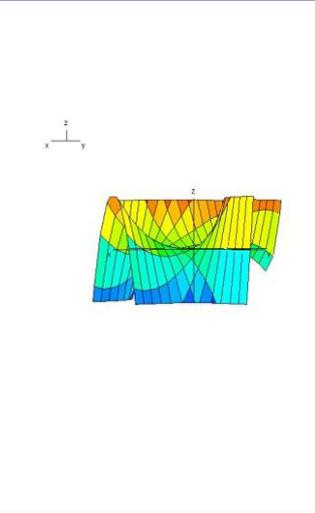
Cuadro 5.19			
Silla de mono ordinaria para monos de una cola tipo Sm 6			
$z = 2x^3 - xy^2$			
Sm 6 Posición 6.2	Sm 6 Posición 6.3	Sm 6 Posición 6.4	Sm 6 Posición 6.5
			
Sm 6 Posición 6.6	Sm 6 Posición 6.7	Sm 6 Posición 6.8	Sm 6 Posición 6.9
			

Cuadro de elaboración propia

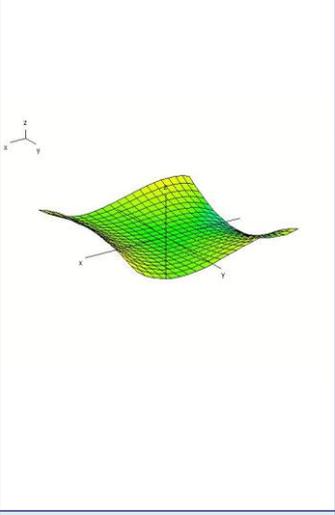
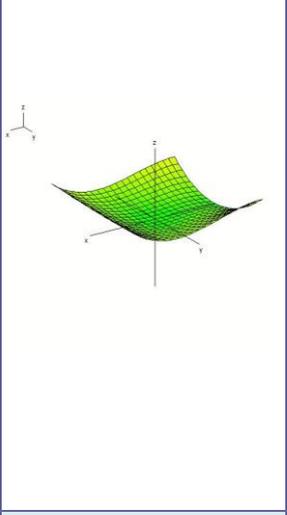
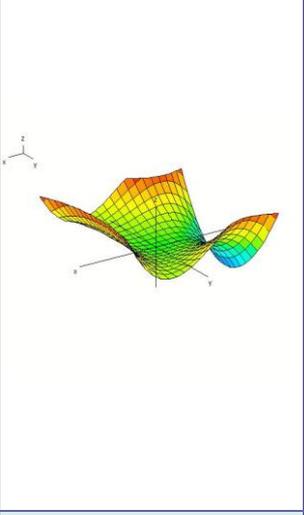
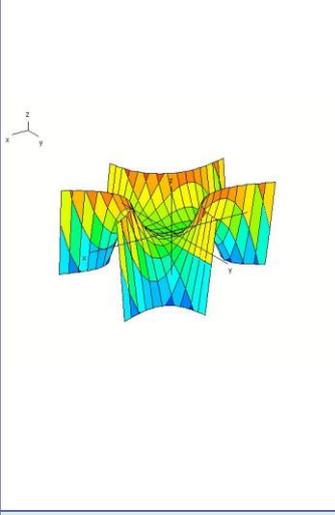
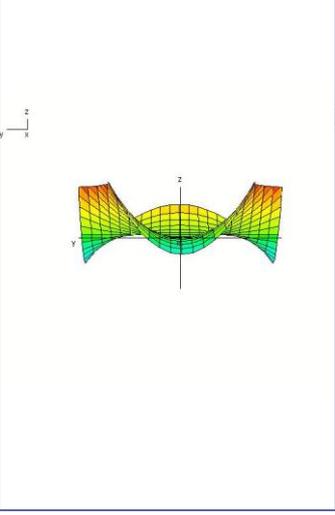
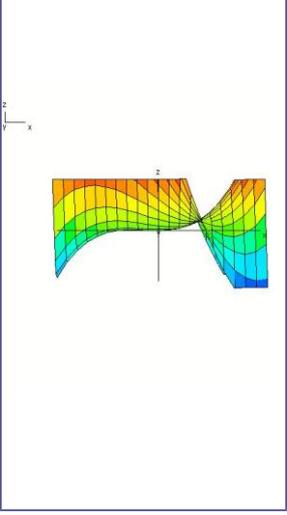
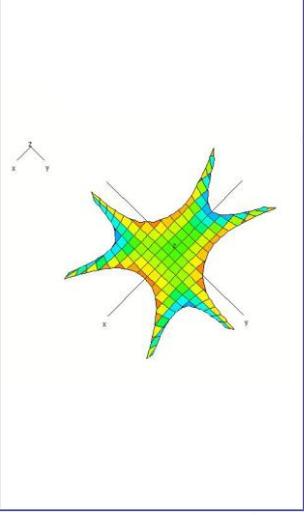
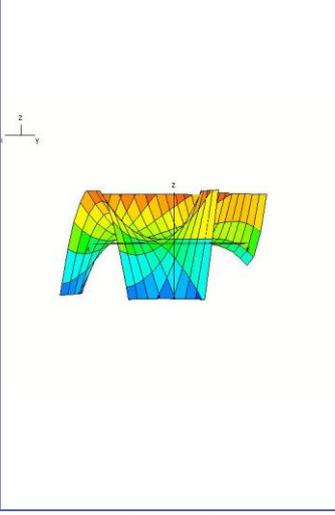
5.5. Familias de sillas de mono perturbadas para monos de una cola

Cuadro 5.20			
Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo $S_{m_{pert} 1}$ $z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$			
$S_{m_{pert} 1}$ Posición 1.2	$S_{m_{pert} 1}$ Posición 1.3	$S_{m_{pert} 1}$ Posición 1.4	$S_{m_{pert} 1}$ Posición 1.5
			
$S_{m_{pert} 1}$ Posición 1.6	$S_{m_{pert} 1}$ Posición 1.7	$S_{m_{pert} 1}$ Posición 1.8	$S_{m_{pert} 1}$ Posición 1.9
			

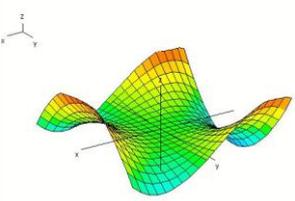
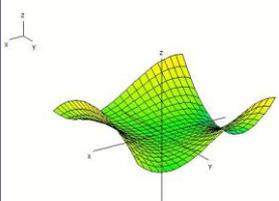
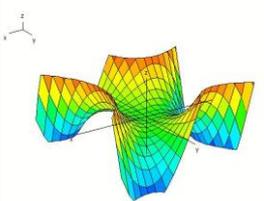
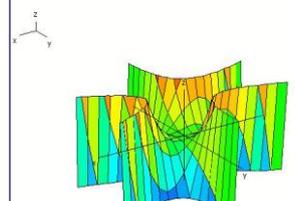
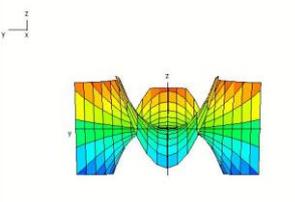
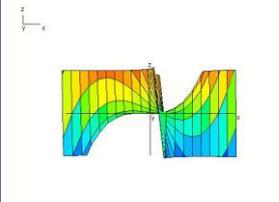
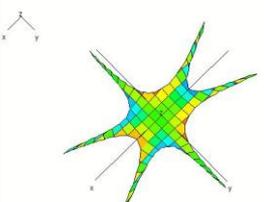
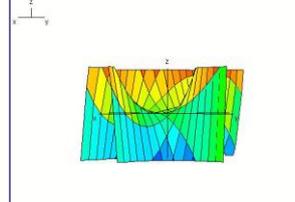
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.21			
Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo $S_{m_{pert} 2}$ $z = x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$			
$S_{m_{pert} 2}$ Posición 2.2	$S_{m_{pert} 2}$ Posición 2.3	$S_{m_{pert} 2}$ Posición 2.4	$S_{m_{pert} 2}$ Posición 2.5
			
$S_{m_{pert} 2}$ Posición 2.6	$S_{m_{pert} 2}$ Posición 2.7	$S_{m_{pert} 2}$ Posición 2.8	$S_{m_{pert} 2}$ Posición 2.9
			

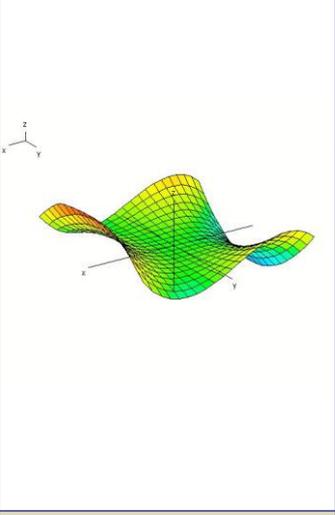
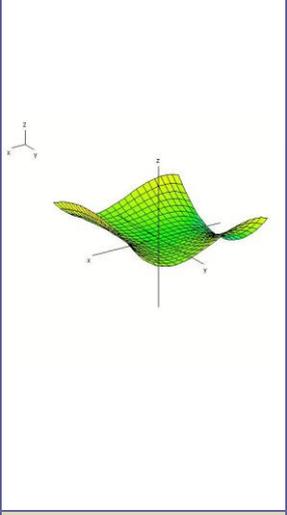
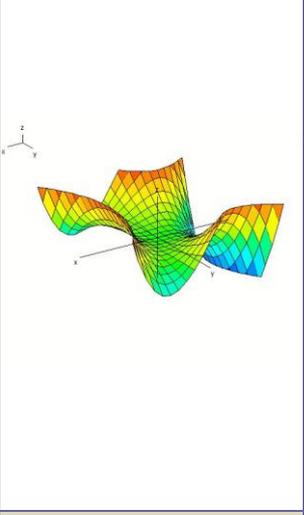
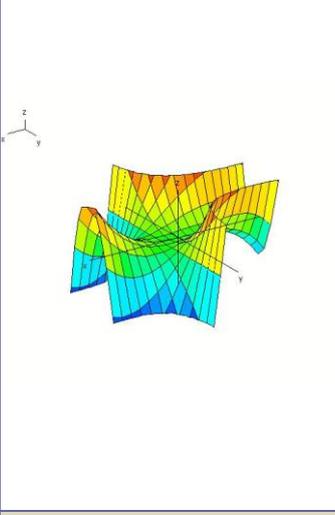
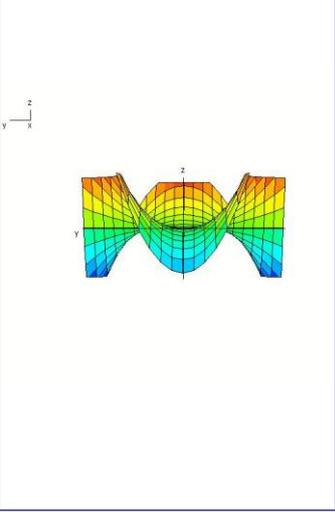
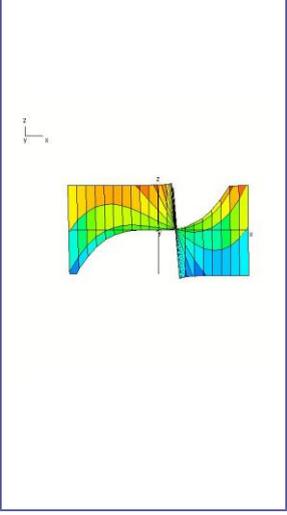
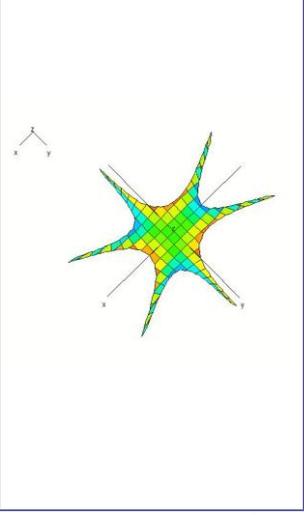
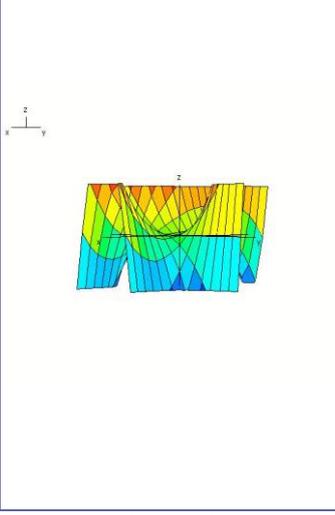
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.22			
Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo $Sm_{pert} 3$ $z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$			
$Sm_{pert} 3$ Posición 3.2	$Sm_{pert} 3$ Posición 3.3	$Sm_{pert} 3$ Posición 3.4	$Sm_{pert} 3$ Posición 3.5
			
$Sm_{pert} 3$ Posición 3.6	$Sm_{pert} 3$ Posición 3.7	$Sm_{pert} 3$ Posición 3.8	$Sm_{pert} 3$ Posición 3.9
			

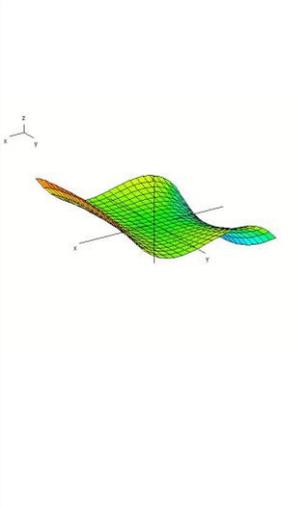
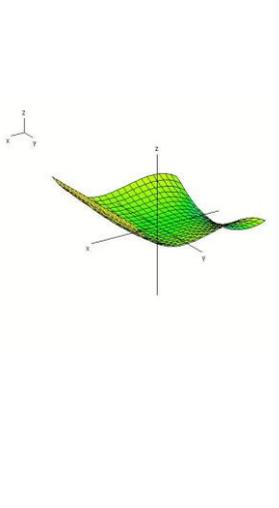
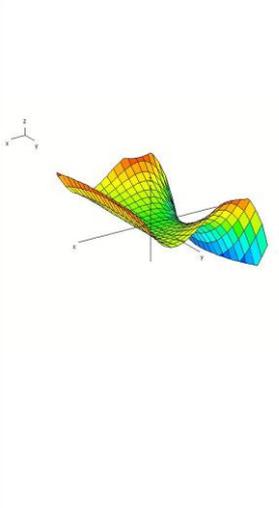
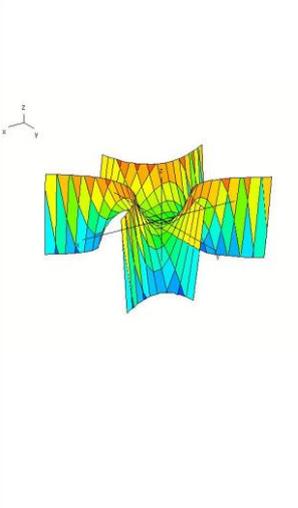
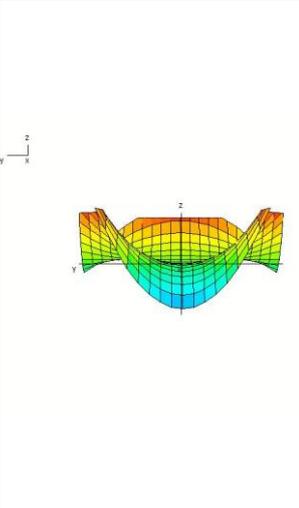
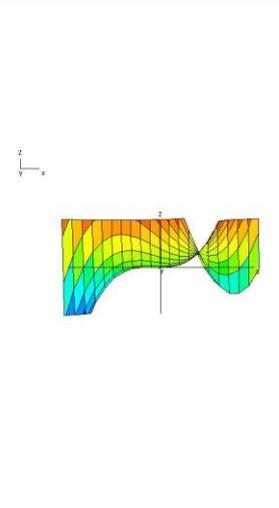
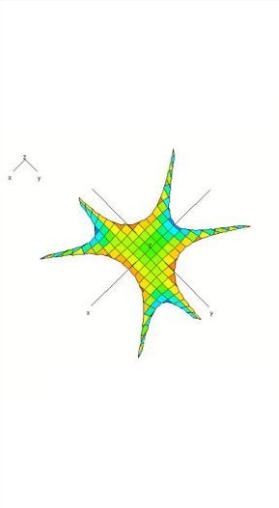
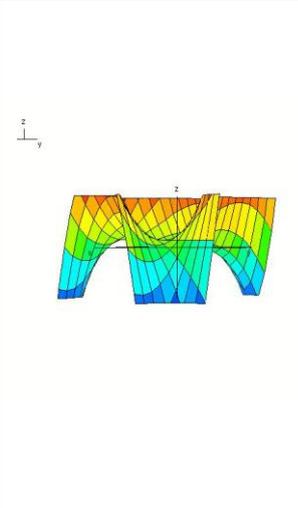
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.23 Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo $Sm_{pert} 4$ $z = 2x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$			
$Sm_{pert} 4$ Posición 4.2	$Sm_{pert} 4$ Posición 4.3	$Sm_{pert} 4$ Posición 4.4	$Sm_{pert} 4$ Posición 4.5
			
$Sm_{pert} 4$ Posición 4.6	$Sm_{pert} 4$ Posición 4.7	$Sm_{pert} 4$ Posición 4.8	$Sm_{pert} 4$ Posición 4.9
			

Cuadro de elaboración propia

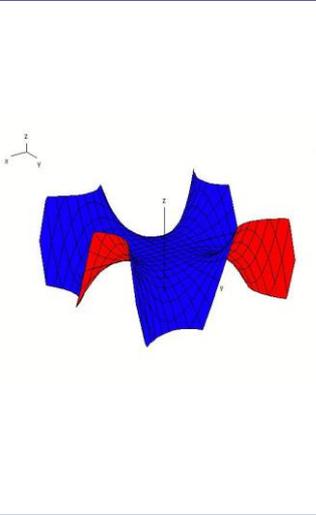
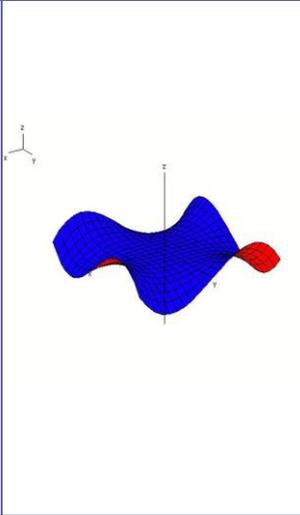
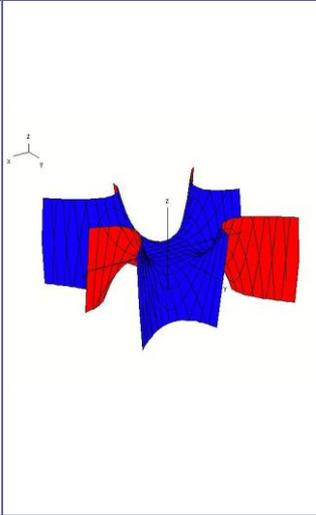
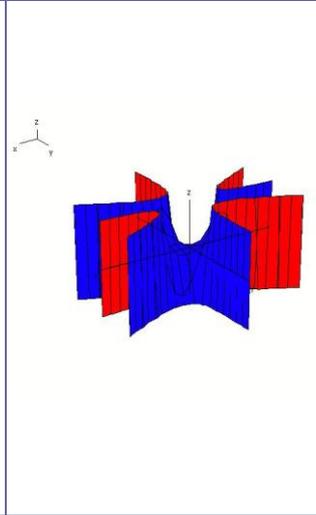
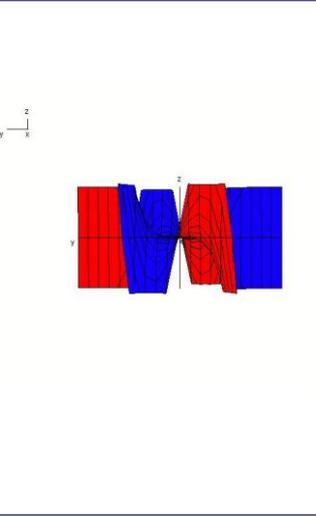
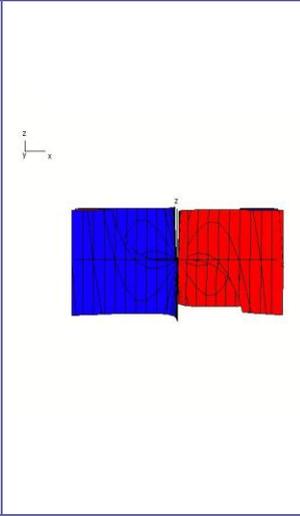
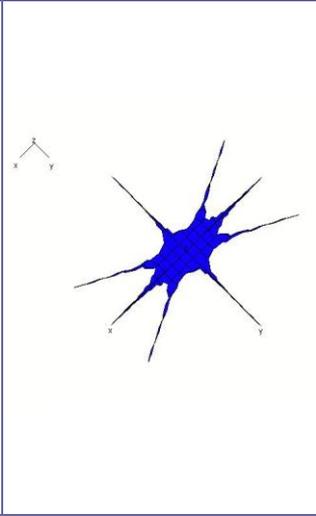
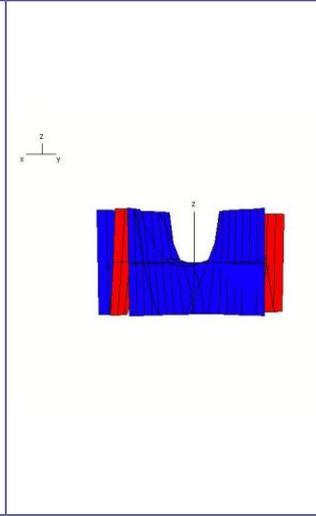
Cuadro 5.24			
Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo $Sm_{pert} 5$			
$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$			
$Sm_{pert} 5$ Posición 5.2	$Sm_{pert} 5$ Posición 5.3	$Sm_{pert} 5$ Posición 5.4	$Sm_{pert} 5$ Posición 5.5
			
$Sm_{pert} 5$ Posición 5.6	$Sm_{pert} 5$ Posición 5.7	$Sm_{pert} 5$ Posición 5.8	$Sm_{pert} 5$ Posición 5.9
			

Cuadro de elaboración propia

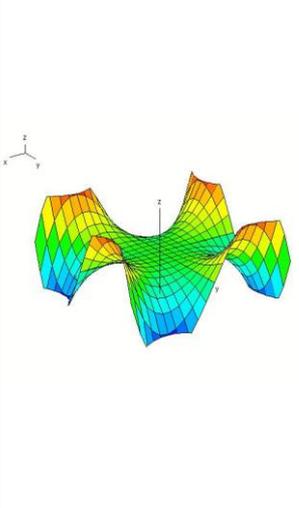
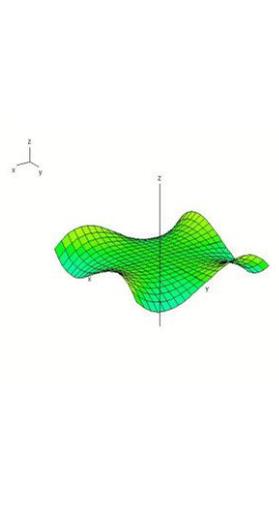
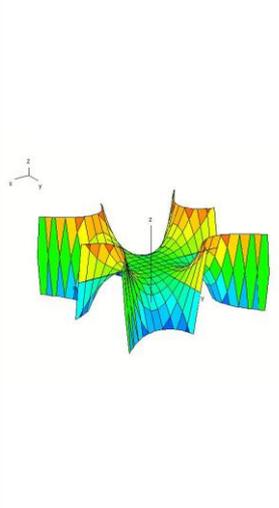
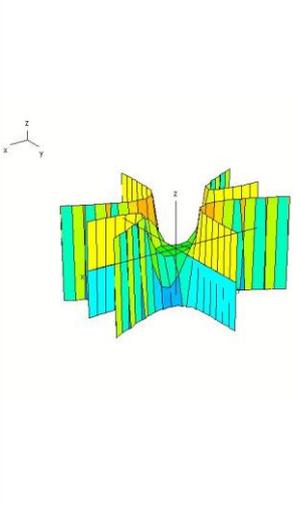
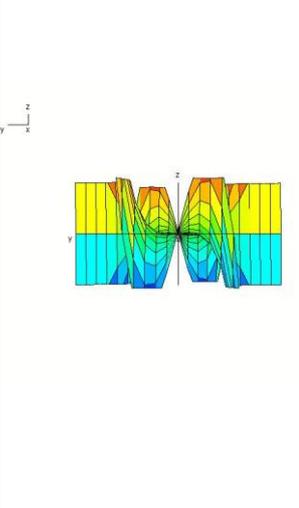
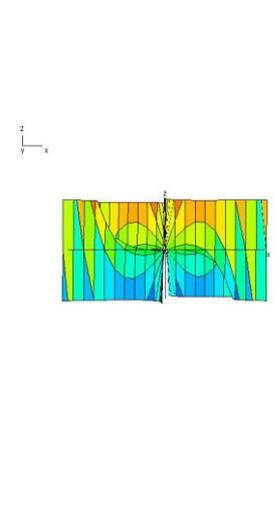
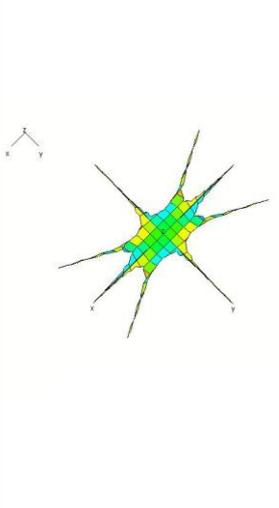
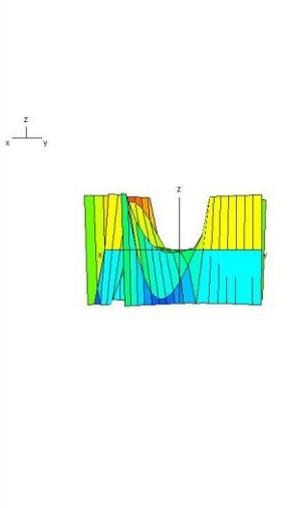
Cuadro 5.25 Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola tipo $Sm_{pert} 6$ $z = 2x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$			
$Sm_{pert} 6$ Posición 6.2	$Sm_{pert} 6$ Posición 6.3	$Sm_{pert} 6$ Posición 6.4	$Sm_{pert} 6$ Posición 6.5
			
$Sm_{pert} 6$ Posición 6.6	$Sm_{pert} 6$ Posición 6.7	$Sm_{pert} 6$ Posición 6.8	$Sm_{pert} 6$ Posición 6.9
			

Cuadro de elaboración propia

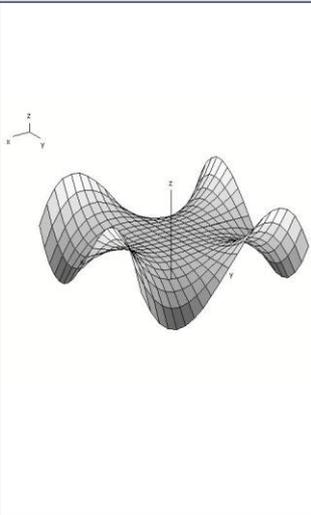
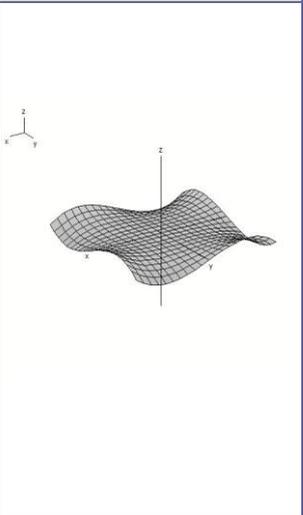
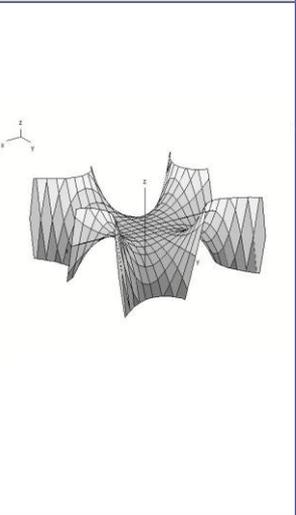
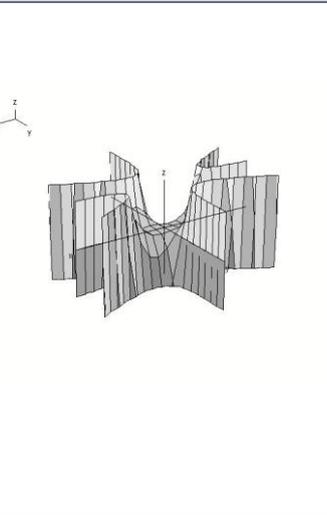
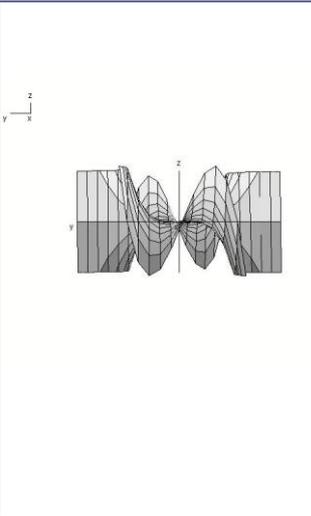
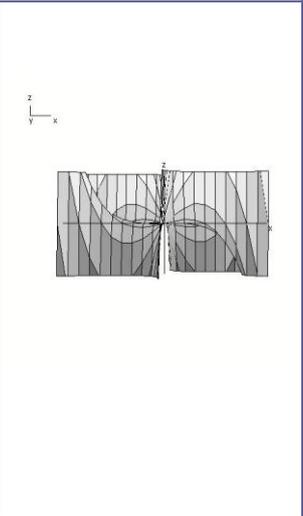
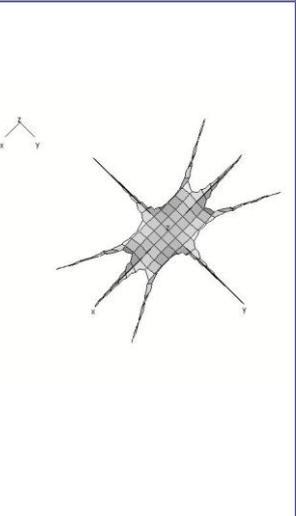
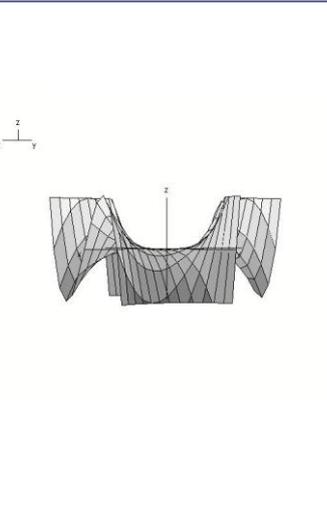
5.6. Familias de sillas de mono para monos de dos colas
(Sm₂)

Cuadro 5.26			
Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm₂ 1 $z = 4xy(x^2 - y^2)$			
Sm₂ Posición 1.2	Sm₂ Posición 1.3	Sm₂ Posición 1.4	Sm₂ Posición 1.5
			
Sm₂ Posición 1.6	Sm₂ Posición 1.7	Sm₂ Posición 1.8	Sm₂ Posición 1.9
			

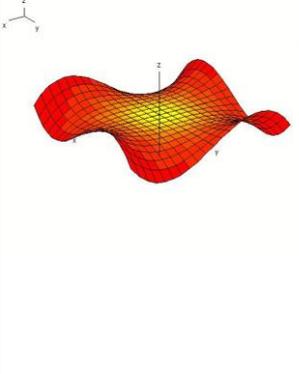
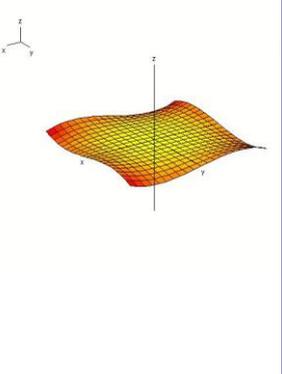
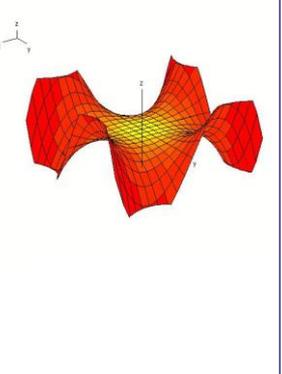
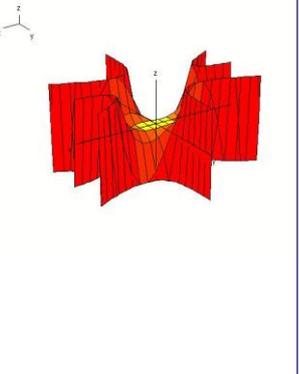
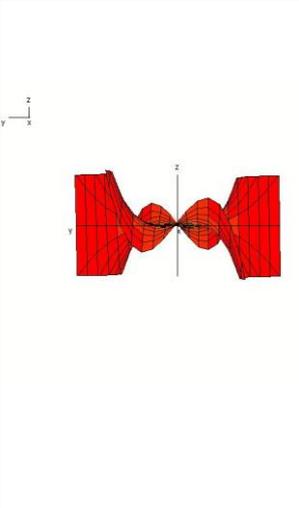
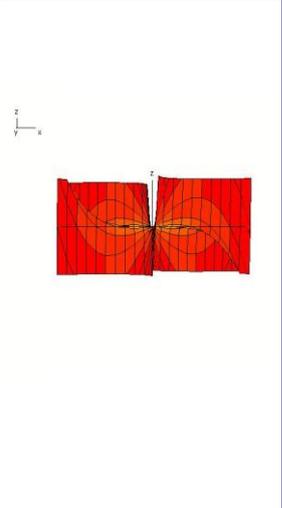
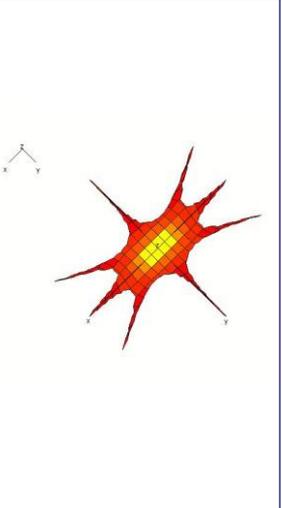
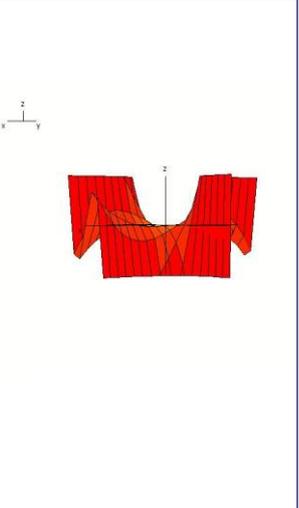
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.27			
Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm₂ 2			
$z = 3xy(x^2 - y^2)$			
Sm₂ Posición 2.2	Sm₂ Posición 2.3	Sm₂ Posición 2.4	Sm₂ Posición 2.5
			
Sm₂ Posición 2.6	Sm₂ Posición 2.7	Sm₂ Posición 2.8	Sm₂ Posición 2.9
			

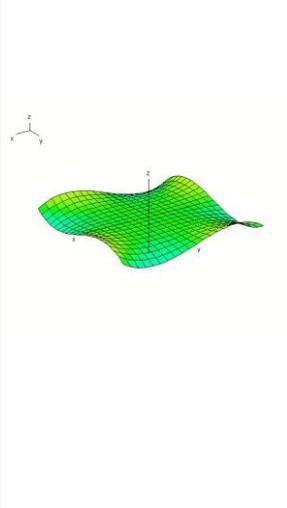
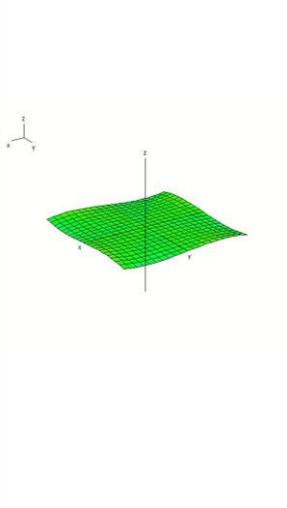
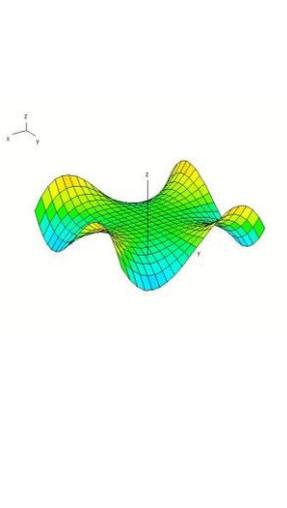
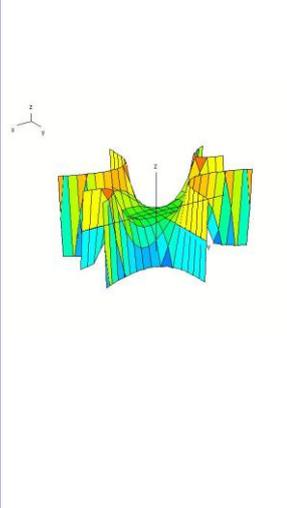
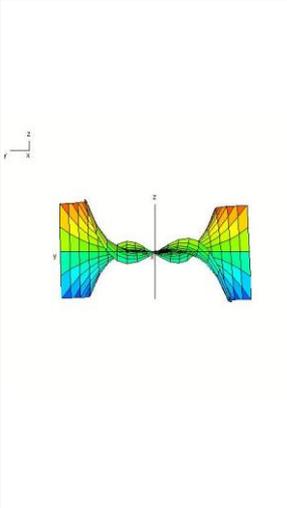
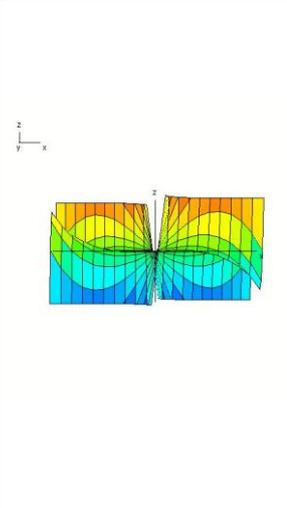
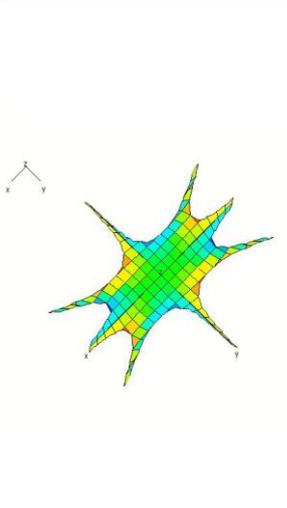
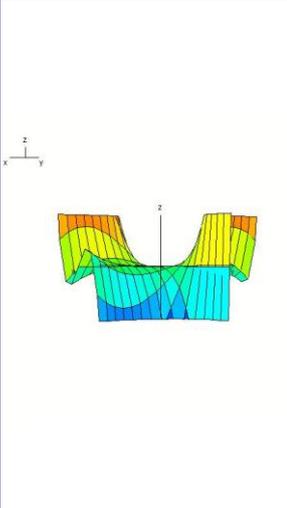
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.28			
Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm_2 3			
$z = 2xy(x^2 - y^2)$			
Sm_2 Posición 3.2	Sm_2 Posición 3.3	Sm_2 Posición 3.4	Sm_2 Posición 3.5
			
Sm_2 Posición 3.6	Sm_2 Posición 3.7	Sm_2 Posición 3.8	Sm_2 Posición 3.9
			

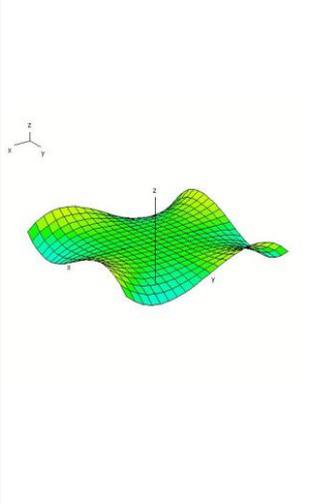
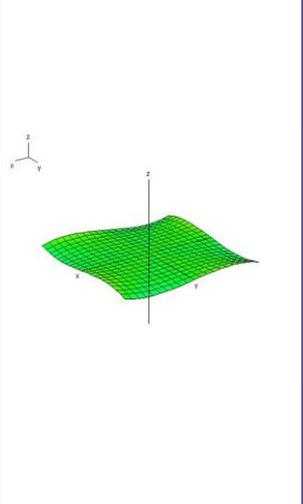
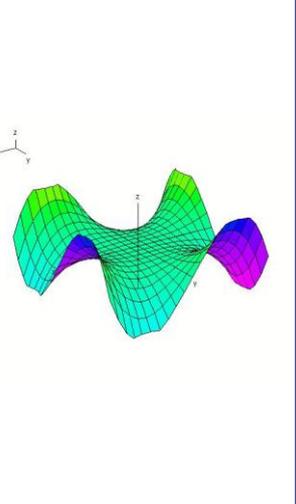
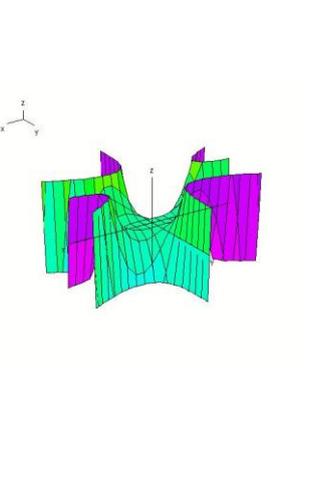
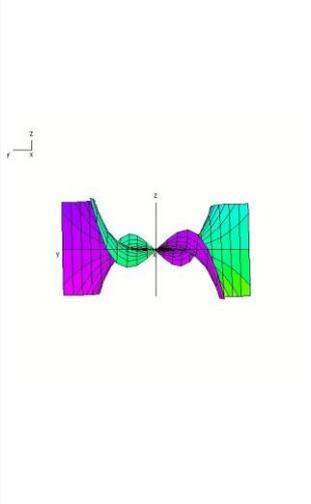
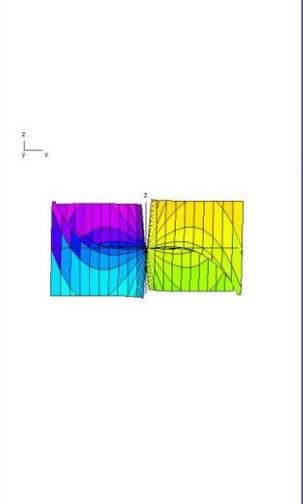
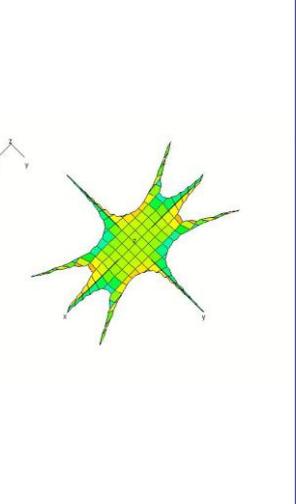
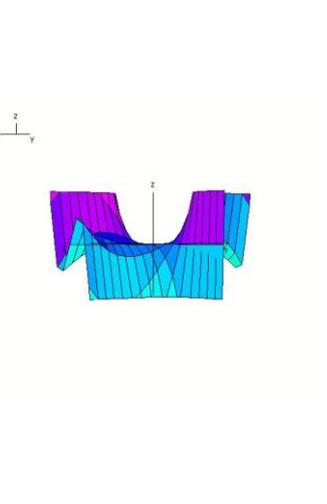
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.29			
Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm₂ 4			
$z = xy(x^2 - y^2)$			
Sm₂ Posición 4.2	Sm₂ Posición 4.3	Sm₂ Posición 4.4	Sm₂ Posición 4.5
			
Sm₂ Posición 4.6	Sm₂ Posición 4.7	Sm₂ Posición 4.8	Sm₂ Posición 4.9
			

Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.30			
Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm_2 5			
$z = 1/2xy (x^2 - y^2)$			
Sm_2 Posición 5.2	Sm_2 Posición 5.3	Sm_2 Posición 5.4	Sm_2 Posición 5.5
			
Sm_2 Posición 5.6	Sm_2 Posición 5.7	Sm_2 Posición 5.8	Sm_2 Posición 5.9
			

Cuadro de elaboración propia

Cuadro 5.31			
Silla de mono para monos de dos colas tipo Sm ₂ 6			
$z = 3/4xy(x^2 - y^2)$			
Sm ₂ Posición 6.2	Sm ₂ Posición 6.3	Sm ₂ Posición 6.4	Sm ₂ Posición 6.5
			
Sm ₂ Posición 6.6	Sm ₂ Posición 6.7	Sm ₂ Posición 6.8	Sm ₂ Posición 6.9
			

Cuadro de elaboración propia

5.7. Conclusiones del capítulo 5

¿Cómo se convierte una superficie alabeada de doble curvatura en un objeto arquitectónico que se perciba potencialmente como un elemento estructural para techar espacios construidos?

En este capítulo se ha presentado el aporte de la investigación.

Hasta ahora había constituido una tarea muy azarosa que pocos sabían resolver: la de obtener con precisión las distintas vistas de una superficie alabeada de doble curvatura, como las que aquí han sido clasificadas y representadas, al concebirlas como objetos arquitectónicos. De hecho no se conoce que haya existido alguna propuesta que reúna los valores predeterminados que conllevaran a la representación de estas entidades geométricas

Esta es una de las razones que ha conllevado a que las soluciones con las superficies, aquí representadas, no hayan sido aplicadas frecuentemente como soluciones formales, estructurales y estéticas para desarrollar sistemas de cubiertas en concreto armado para edificaciones.

¿Es fiable el método de representación de las superficies aquí propuesto?

Se han obtenido 252 vistas de las siguientes superficies: 10 tipologías de paraboloides hiperbólicos, 6 tipologías de sillas de mono ordinarias para monos de una cola e igual número de las sillas de mono *perturbadas* para monos de una cola y de sillas de mono para monos de dos colas. En ninguna de ellas ha fallado el método de modelación geométrica propuesto.

Se han obtenidos valores comunes de los parámetros para la representación geométrica de las diferentes vistas de las superficies estudiadas. En todas las modelaciones logradas éstas corresponden con las vistas en isometrías, proyecciones ortogonales y axonometría bimétrica de la ecuación dada convertida en un objeto físico, tridimensional y de aplicación factible en procedimientos constructivos.

A partir de aquí en el siguiente capítulo serán presentados los resultados y conclusiones de esta investigación.

CAPÍTULO 6
RESULTADOS, CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES

CAPÍTULO 6

Resultados, conclusiones y recomendaciones de la investigación

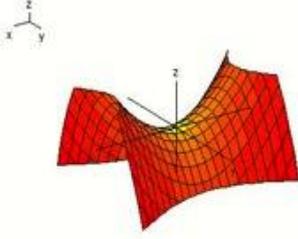
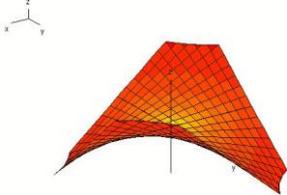
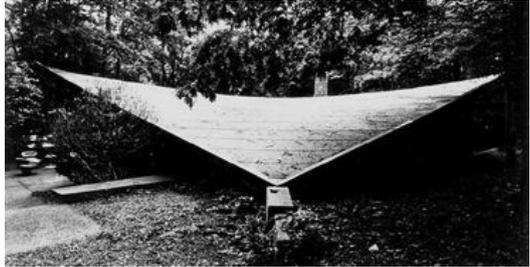
6.1. Resultados de la investigación

a. Superficies estudiadas en la investigación

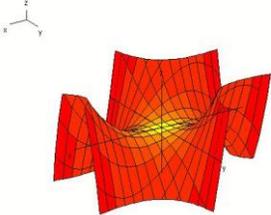
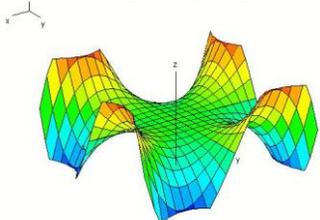
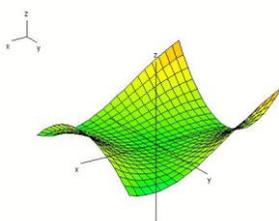
La agrupación de familias de superficies de paraboloides hiperbólicos, sillas de monos ordinarias para monos de una cola y de dos colas, además de las representaciones de superficies de sillas de mono *perturbadas* para monos de una cola, son el reflejo de un modo particular de entender y aplicar los conocimientos de la geometría. No con la finalidad de obtener un conjunto representativo de ecuaciones y gráficas diferentes; sino, más bien, de lograr un aporte renovado de tales superficies alabeadas de doble curvatura a los procedimientos de concepción, diseño, proyecto y ejecución de cubiertas en las edificaciones.

En los siguientes cuadros la determinación de las posiciones corresponde a la ubicación de las superficies indicadas dentro de las familias que han sido organizadas en la investigación.

Ejemplo: Ph posición 2.5 corresponde a la segunda familia de paraboloides hiperbólicos, quinta posición que han sido graficados.

Cuadro 6.1 Superficies estudiadas en la investigación		
Superficie estudiada	Ecuación	Representación gráfica y ejemplo emblemático construido
Paraboloide hiperbólico como superficie sinclástica (generación parabólica)	$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$	<p>Ph posición 2.5. Obra: Pabellón Rayos Cósicos (Proyecto de Candela, 1954).</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div>
Paraboloide hiperbólico como superficie anticlástica (doblemente reglada)	$z = xy$	<p>Ph posición 10.5. Obra: Casa Raleigh (Proyecto de Catalano, 1963).</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div>

Cuadro de elaboración propia

Cuadro 6.1 (continuación) Superficies estudiadas en la investigación		
Superficie estudiada	Ecuación	Representación gráfica y ejemplo emblemático construido
Silla de mono ordinaria para un mono de una cola	$z = x^3 - 3xy^2$	<p>Sm posición 2.4. No existe algún ejemplo emblemático construido</p> 
Silla de mono ordinaria para un mono de dos colas	$z = 3xy(x^2 - y^2)$	<p>Sm₂ posición 2.2. No existe algún ejemplo emblemático construido</p> 
Silla de mono <i>perturbada</i> para monos de una cola	$z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$	<p>Silla de mono perturbada. Posición 1.3. No existe algún ejemplo emblemático construido</p> 

Cuadro de elaboración propia

El método aplicado sirve para la obtención de infinitas posibilidades de representación de tales superficies, donde sólo prime el criterio o –por qué no decirlo- la intuición artística y las necesidades espaciales y estéticas presentadas al diseñador que las requiera para el proyecto de un sistema de cubiertas.

Hay un efecto que es sumamente difícil de describir cuando se contrastan las representaciones de superficies de sillas de mono ordinarias para monos de una cola a sillas perturbadas de mono para monos de una cola, las superficies en estos últimos casos adquieren una especie de pliegues o “*arrugas*”. Ahora bien, hasta ahora las superficies *perturbadas* se realizan mediante la adición de un paraboloides circular, según los casos planteados por los autores Cordero, Fernández & Gray (1995).

b. Superficies de parábolas invertidas. Una nueva denominación para las superficies alabeadas de doble curvatura estudiadas

En correspondencia con las denominaciones de superficies alabeadas de doble curvatura, específicamente, en los casos de las *sillas de montar a caballo*, las *sillas de mono de una cola* y *silla de mono de dos colas* se hace necesario establecer lo siguiente:

Generalmente, puede parecer como resultado de un capricho los nombres con los cuales se designan a las superficies. Un claro ejemplo de ello (sólo por mencionar uno entre diferentes casos) es la superficie *sombrero de sherlock*; en alusión a una ecuación matemática que, al graficarla, semeja al sombrero del personaje de las novelas policiales. Aun cuando el inicio de los estudios de las superficies se remonta al período helénico, en la antigua Grecia y alcanza un auge en el siglo XIX, hubiese sido imposible, para ese entonces, colocar tal denominación por razones obvias.

Y esto ocurre con las superficies alabeadas de doble curvatura que aquí son estudiadas.

Dice Cordero (1995), que: “Debido a su forma, el paraboloides hiperbólico es también conocido como la silla de montar. Una persona podría sentarse confortablemente en un paraboloides hiperbólico, dado que posee entrantes para colocar sus piernas. Sin embargo, un mono tendría dificultades para hacerlo, ya que no posee ningún espacio para su cola. La silla del mono sería lo más adecuado para un mono;...” (Cordero, 1995:245). Ciertamente,

las aplicaciones más generalizadas de la superficie doblemente reglada conocida en medios matemáticos como paraboloides hiperbólicos son en la fabricación de monturas para caballos. Incluso, más que como sistema de cubiertas en edificaciones.

Las superficies alabeadas de doble curvatura que son objeto del presente estudio tienen la particularidad de que la primera de ellas recibe el nombre de paraboloides hiperbólicos mientras que las sillas para mono de una cola y de dos colas no han registrado otra identificación similar. Se propone designarlas como *superficies de parábolas invertidas*.

Ciertamente la designación de tales superficies objeto de esta investigación como *superficies de parábolas invertidas* únicamente refleja un aspecto de ellas que es el de generación de parábolas cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo posicionadas en forma simétrica, pero no deja entrever que existe también un efecto geométrico similar con respecto a las hipérbolas lo cual quiere decir que no es que dichas hipérbolas sean desestimadas.

De igual modo a lo largo de la investigación se ha visualizado que las sillas de mono *perturbadas* (perturbadas con un paraboloides circular $z=x^2+y^2$) producen un cambio en la configuración de la superficie que señalan importantes cualidades estéticas y formales para sus aplicaciones en sistemas estructurales de las edificaciones.

c. Importancia de los resultados de esta investigación

La importancia de los resultados de esta investigación doctoral radica en dos aspectos significativos. En primera instancia los paraboloides hiperbólicos han sido difundidos en medios constructivos en casi todo el mundo. No solamente como aportes tecnológicos para solucionar sistemas de cubiertas en estructuras portantes de doble curvatura laminares con muy bajo espesor en el caso de construirse en concreto armado; sino que, además de ello, han sido implantadas en otros materiales como fibra de vidrio, acero inoxidable extendido, madera maciza, madera laminada, plywood, telas de origen vegetal o puramente textil y telas artificiales (figuras 396 y 397). Mientras que las otras dos soluciones gráficas que son la silla de mono de una cola y la silla para un mono de dos colas no han sido siquiera mencionadas en la bibliografía consultada especializada para arquitectos y constructores.



Figura 396. Aplicaciones de paraboloides hiperbólicos en estructura tensil.

Fuente: www.foro3D.com



Figura 397. Aplicaciones de paraboloides hiperbólicos en estructura tensil.

Fuente: www.foro3D.com

Las aplicaciones de paraboloides hiperbólicos han roto las barreras de uso exclusivo de ingenieros, arquitectos y constructores y han pasado a convertirse en unpreciado elemento a explotar por artesanos y escultores. De allí que su utilización más generalizada sea la de una *silla de montar a caballo*; o la de una rebanada de papa frita, aún a pesar de que al consultar con algún fabricante de monturas, o algún adicto del consumo de papas en bolsas no posean idea de que su trabajo o de lo que comen corresponden con la ecuación de una superficie.

Por otra parte los textos que sí, verdaderamente, son especializados en los estudios geométricos analíticos de las superficies no profundizan en el discernimiento de las ecuaciones y sus aplicaciones bajo diferentes parámetros de representación gráfica como los que aquí han sido realizados en las agrupaciones de familias de estas grafías.

No es difícil percibir el alto potencial innovador que estas superficies poseen para su utilización como elementos estructurales para salvar grandes luces con un mínimo de apoyos verticales. Además de ello se percibe su bajo espesor y rigidización aportada por la doble curvatura.

d. Aplicabilidad del software matemático Derive[®] en las actividades de diseño y construcción de cubiertas para edificaciones

El otro aspecto en el cual se centra la importancia de los resultados de la investigación es en la posibilidad de adoptar un método geométrico de representación mediante un software matemático adaptando tales representaciones de una misma ecuación geométrica a posiciones que son empleadas en el diario quehacer de los arquitectos e ingenieros civiles.

Los arquitectos e ingenieros están familiarizados con las representaciones en planta y alzados como vistas planas de una edificación. Además cuentan con conocimientos para las representaciones en perspectiva isométrica y de otros conceptos más relacionados con la geometría descriptiva como los de explanación, y dimensionamiento con base en alturas, alejamientos y anchos.

Finalmente, las diferentes posiciones de las superficies de paraboloides hiperbólicos, sillas de mono ordinarias y *perturbadas* para monos de una cola y sillas de mono para monos de dos colas, que aquí han sido diseñadas, se adaptan de un modo abstracto a las siguientes representaciones de modelado que son de fácil aplicación al concepto de las edificaciones. Nótese que se emplearán para la descripción representaciones extraídas aleatoriamente de las diferentes agrupaciones de familias de superficies

d.1. Resultados para la posición n.1

Corresponde a una malla reticular cuadrada de 20*20 unidades modulares con la cual se conforma la unidad adimensional o módulo que permitirá que las restantes posiciones puedan aplicarse a cualquier sistema de medida y proporción existente sin alterar la configuración.

Esta posición *n.1* (figura 398) es común para todas las representaciones de las restantes modalidades de las superficies de paraboloides hiperbólicos, las sillas de mono ordinarias y *perturbadas* para monos de una cola y la silla de mono para monos de dos colas visualizadas como un plano.

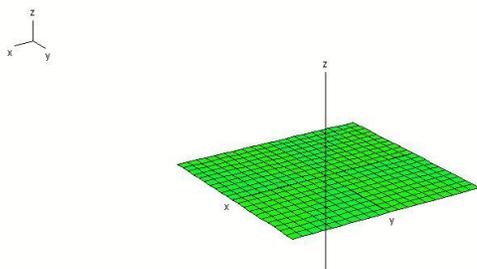


Figura 398. Malla reticular de 20x20 unidades adimensionales
Fuente: elaboración propia

d.2. Resultados para las posiciones n.2 a la n.5

En ellas el sistema de ejes coordenados se halla posicionado de acuerdo al modo en el cual lo arroja el software *Derive*[®] por “default” (por defecto o convenimiento) por lo que las superficies agrupadas en tales posiciones sólo poseen modificaciones visuales de proporción, escala y tamaño bajo una aproximación de una axonometría isométrica.

La figura 399 muestra la gráfica del paraboloides hiperbólico con ecuación $z=x^2-y^2$ que corresponde al Ph 1 en la posición 1.5 el sistema de ejes coordenados se encuentra en la posición original que arroja el software *Derive*. La vista en sí corresponde a una perspectiva isométrica de la superficie.

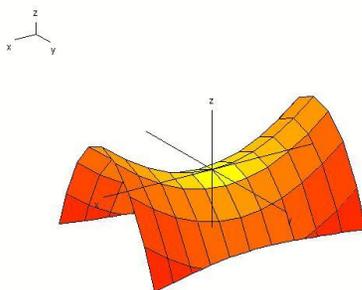
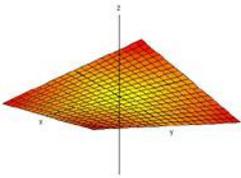
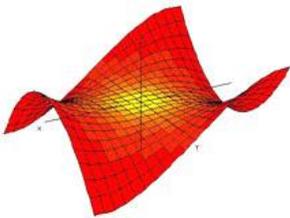
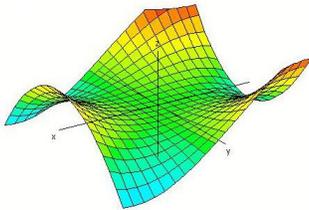
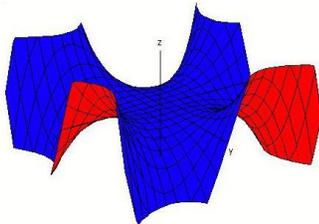
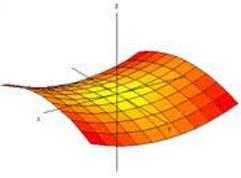


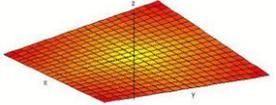
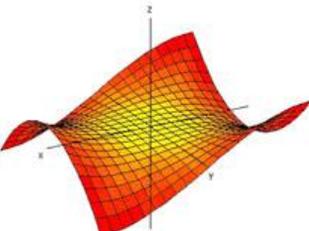
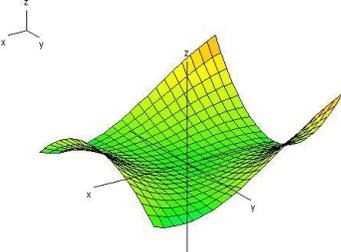
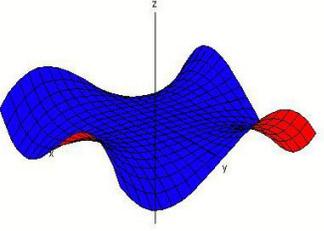
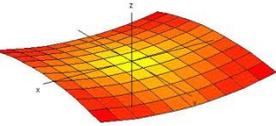
Figura 399. Paraboloides hiperbólico con ecuación $z=x^2-y^2$ que corresponde al Ph 1 en la posición 1.5.
Fuente: elaboración propia con software *Derive*[®]

Los cuadros 6.2 al 6.5, que se hallan a continuación, presentan los resultados de las configuraciones obtenidas con base en las ecuaciones generales de los paraboloides hiperbólicos ($z=xy$ y $z=x^2-y^2$) así como de las sillas de mono ordinarias para monos de una

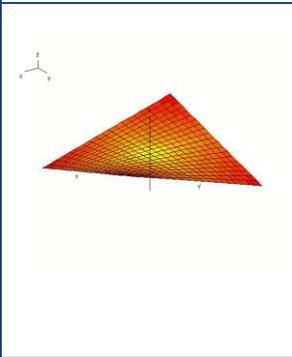
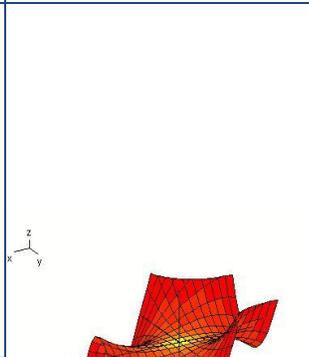
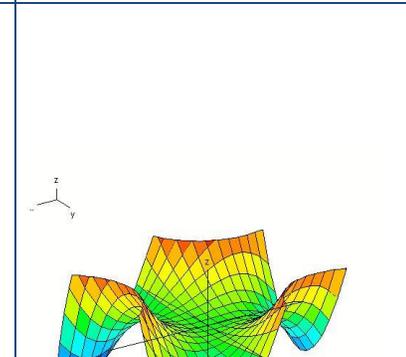
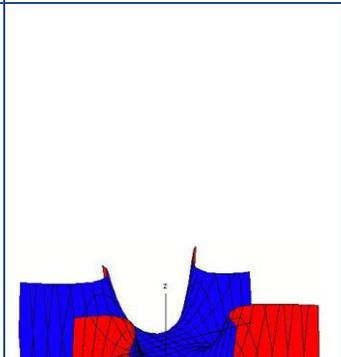
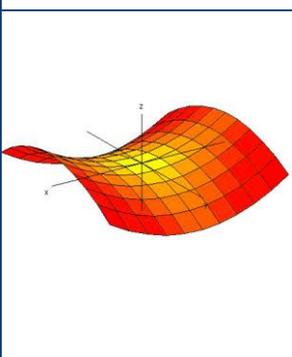
cola que responde a la ecuación $z=x^3-3xy^2$; las sillas de mono *perturbadas* para monos de una cola de ecuación $z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$ y, finalmente, de las sillas de mono para monos de dos colas de ecuación $z=4xy(x^2-y^2)$. Con estas representaciones se observan el resultado de la configuración comparativa de las superficies analizadas mediante la obtención de las diferentes posiciones diseñadas y sus variaciones respecto a las ecuaciones paramétricas que las determinan.

Cuadro 6.2			
Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.2</i>			
Paraboloides hiperbólicos	Sillas de monos		
	Una cola		Dos colas
	Ordinarias	<i>Perturbadas</i>	
$z=xy$	$z=x^3-3xy^2$	$z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$	$z=4xy(x^2-y^2)$
			
$z=x^2-y^2$			
			

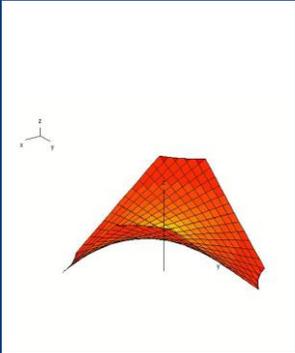
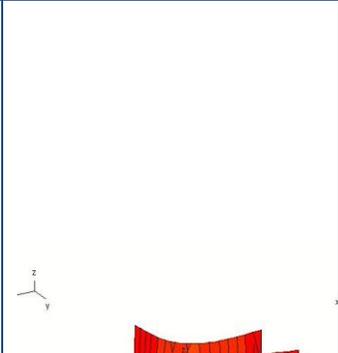
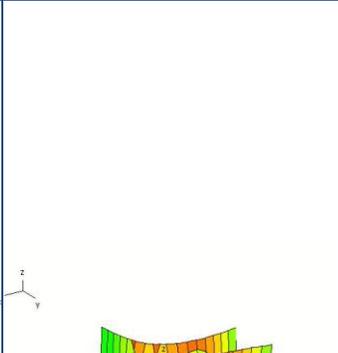
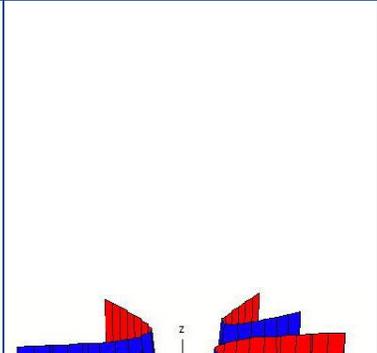
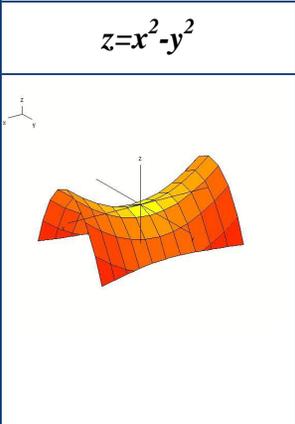
Cuadro de elaboración propia

Cuadro 6.3			
Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición <i>n.3</i>			
Paraboloides hiperbólicos	Sillas de monos		
	Una cola		Dos colas
	Ordinarias	<i>Perturbadas</i>	
$z=xy$	$z=x^3-3xy^2$	$z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$	$z = 4xy(x^2-y^2)$
			
$z=x^2-y^2$			
			

Cuadro de elaboración propia

Cuadro 6.4			
Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición n.4			
Paraboloides hiperbólicos	Sillas de monos		
	Una cola		Dos colas
	Ordinarias	<i>Perturbadas</i>	
$z=xy$	$z=x^3-3xy^2$	$z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$	$z=4xy(x^2-y^2)$
			
$z=x^2-y^2$			
			

Cuadro de elaboración propia

Cuadro 6.5			
Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición $n.5$			
Paraboloides hiperbólicos	Sillas de monos		
	Una cola		Dos colas
	Ordinarias	<i>Perturbadas</i>	
$z=xy$	$z=x^3-3xy^2$	$z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$	$z=4xy(x^2-y)^2$
			
$z=x^2-y^2$			
			

Cuadro de elaboración propia

d.3. Resultados para la posición n.6

Corresponde a la primera variación o modificación del sistema de ejes coordenados del software matemático *Derive*® donde se representa a la superficie en alzado frontal (vista en fachada).

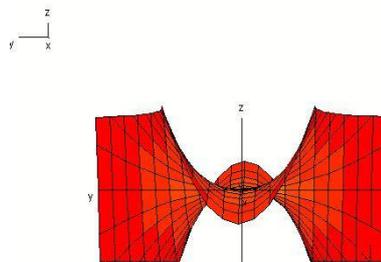
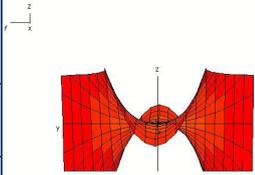
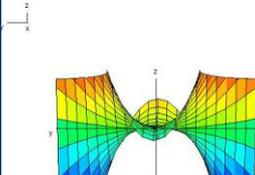
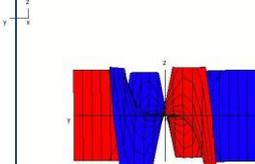
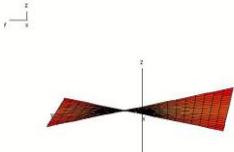
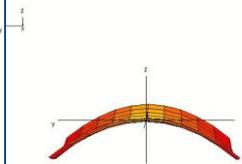


Figura 400. Silla de mono ordinaria para un mono de una cola del tipo Sm-1 con ecuación cartesiana $z = x^3 - 3xy^2$ La vista corresponde a un alzado frontal o fachada principal de la superficie.
Fuente: elaboración propia con *Derive*®.

Cuadro 6.6			
Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición n.6			
Paraboloides hiperbólicos	Sillas de monos		
	Una cola		Dos colas
	Ordinarias	Perturbadas	
$z=xy$	$z=x^3-3xy^2$	$z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$	$z=4xy-(x^2-y^2)$
$z=x^2-y^2$			
			
			

Cuadro de elaboración propia

d.4. Resultados para la posición n.7

Nuevamente varía el posicionamiento del sistema de ejes coordenadas para permitir una visualización de la superficie pero esta vez en alzado lateral.

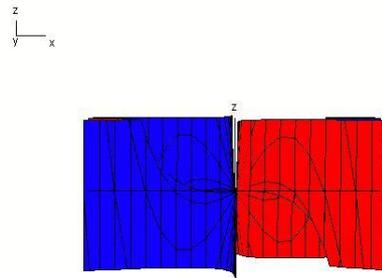
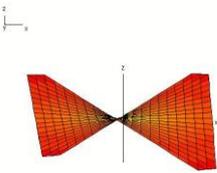
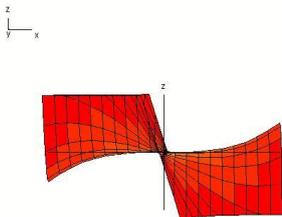
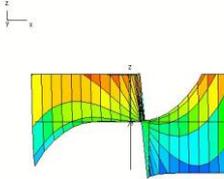
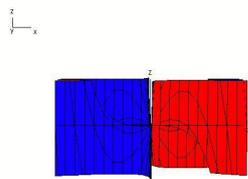
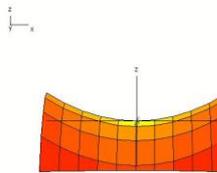


Figura 401. Silla de mono para un mono de dos colas del tipo Sm_2 1 con ecuación cartesiana $z=4xy(x^2-y^2)$ esta visualización corresponde a un alzado lateral.
Fuente: elaboración propia con *Derive*®.

Cuadro 6.7			
Resultados de la modelación de ecuaciones de superficies de parábolas invertidas para la posición n.7			
Paraboloides hiperbólicos	Sillas de monos		
	Una cola		Dos colas
	ordinarias	<i>Perturbadas</i>	
$z=xy$	$z=x^3-3xy^2$	$z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$	$z=4xy(x^2-y^2)$
			
$z=x^2-y^2$			
			

d.5. Resultados para la posición n.8

Vista «a vuelo de pájaro» que logra representar la superficie en planta (planta de conjunto o azotea)

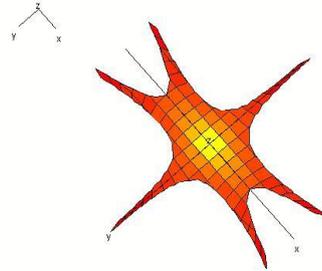
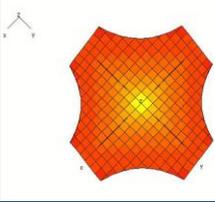
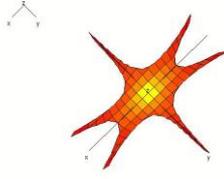
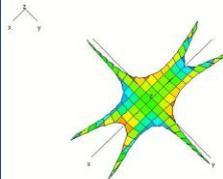
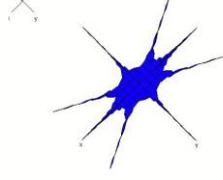
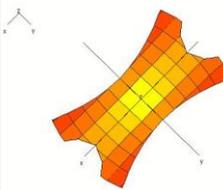


Figura 402. Silla de mono para un mono de una cola con ecuación cartesiana $z=x^3-3xy^2$ en la posición descrita como *Silla de mono* posición 1.8.

Fuente: elaboración propia con software *Derive*®

Cuadro 6.8			
Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición n.8			
Paraboloides hiperbólicos	Sillas de monos		
	Una cola		Dos colas
	ordinarias	<i>Perturbadas</i>	
$z=xy$	$z=x^3-3xy^2$	$z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$	$z = 4xy(x^2-y^2)$
			
$z=x^2-y^2$			
			

Cuadro de elaboración propia

d.6. Resultados para la posición n.9

La representación de las gráficas en posición n.9 permite visualizar a la superficie colocada sobre línea de tierra. Obsérvese que los ejes coordenados están así: el eje z en posición completamente vertical y los ejes x y y están paralelos a la línea de tierra.

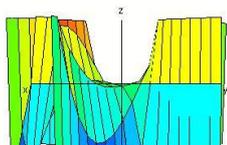
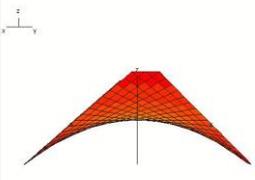
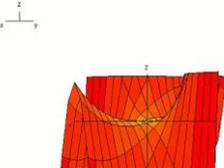
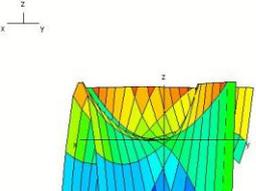
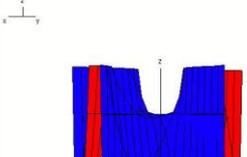
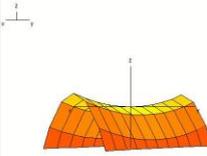


Figura 403. Silla de mono para un mono de dos colas. Posición 2.9. Correspondiente a la gráfica de la ecuación cartesiana $z = 3xy(x^2 - y^2)$

Fuente elaboración propia con software *Derive*®

La posibilidad de colocar el eje z verticalmente y que los ejes x y y alineados horizontalmente permiten la obtención de un sistema de perspectiva bimétrica.

A continuación se presentan los resultados de la visualización de las familias de superficies diseñadas por cada posición.

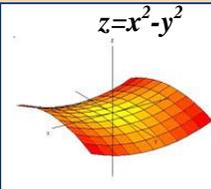
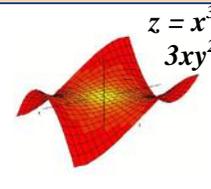
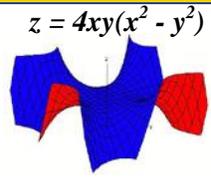
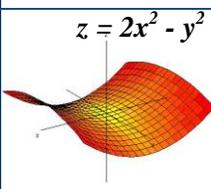
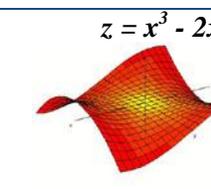
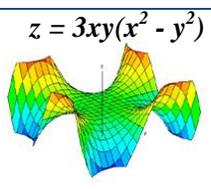
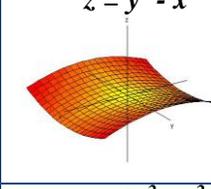
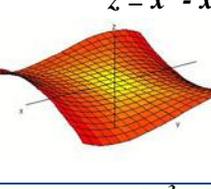
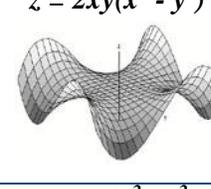
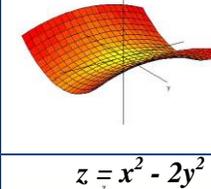
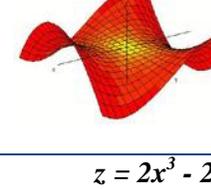
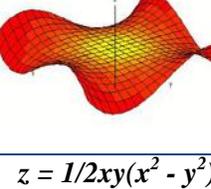
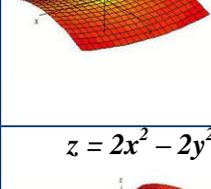
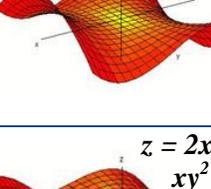
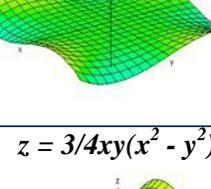
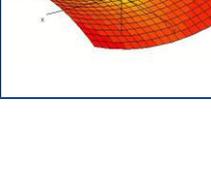
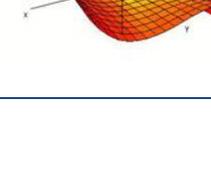
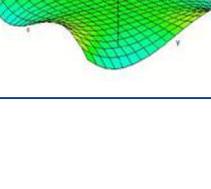
Cuadro 6.9			
Resultados de la modelación de superficies de parábolas invertidas para la posición n.9			
Paraboloides hiperbólicos	Sillas de monos		
	Una cola		Dos colas
	ordinarias	<i>Perturbadas</i>	
$z=xy$	$z=x^3-3xy^2$	$z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$	$z = 4xy(x^2-y^2)$
			
$z=x^2-y^2$			

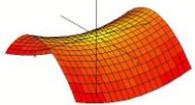
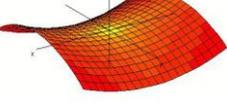
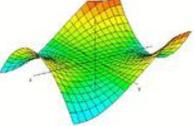
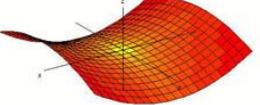
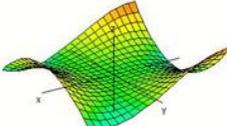
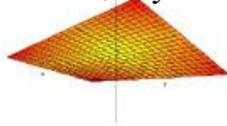
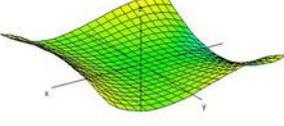
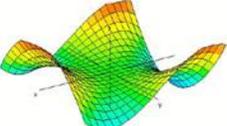
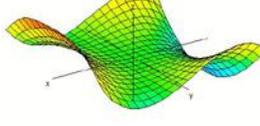
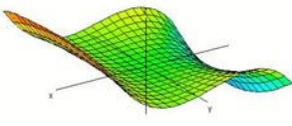
Cuadro de elaboración propia

A continuación se presentan los resultados de la configuración de las ecuaciones mediante la agrupación de todas las superficies analizadas y diseñadas de acuerdo con el software matemático *Derive*[®].

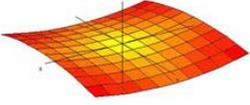
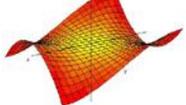
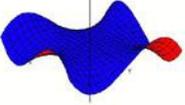
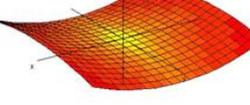
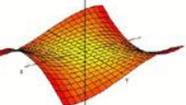
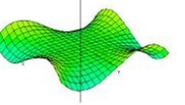
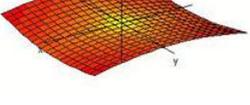
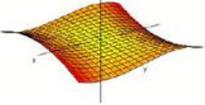
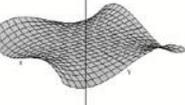
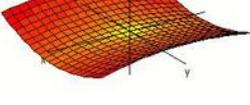
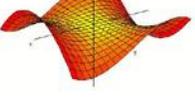
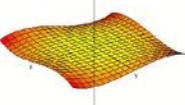
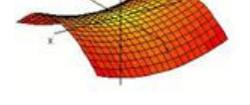
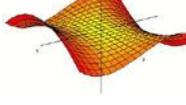
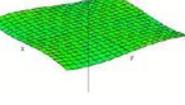
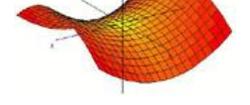
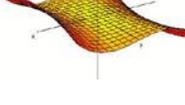
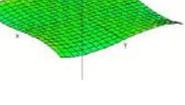
Los cuadros 6.10 al 6.17 reúnen la representación de 252 vistas de 28 familias de superficies de parábolas invertidas repartidas en las siguientes agrupaciones: 10 tipologías de paraboloides hiperbólicos, y 18 que corresponden a las sillas de mono.

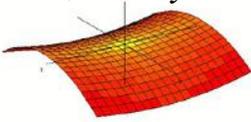
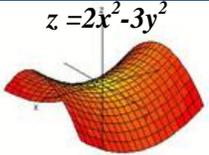
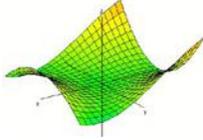
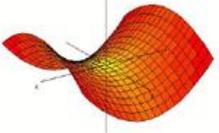
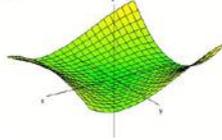
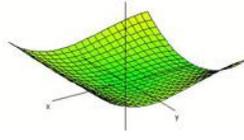
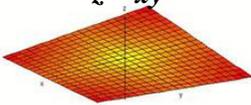
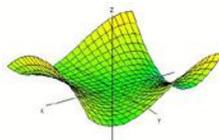
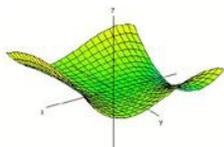
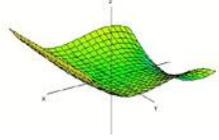
*e. Resultados de la configuración de ecuaciones
de las familias de superficies representadas*

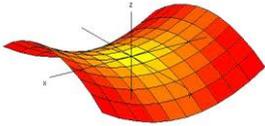
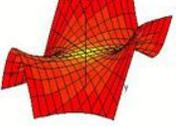
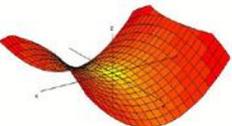
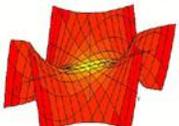
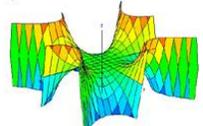
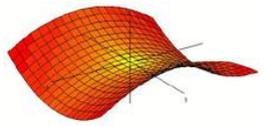
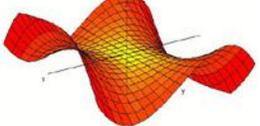
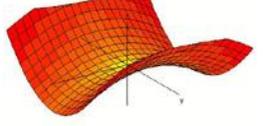
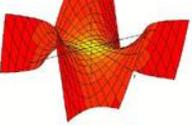
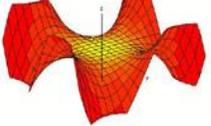
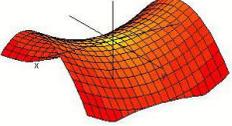
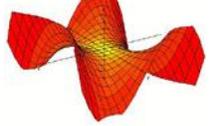
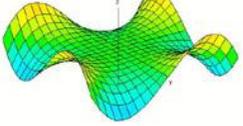
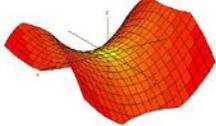
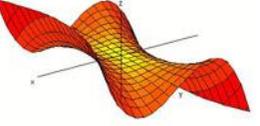
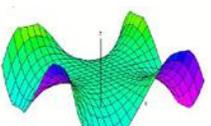
Cuadro 6.10					
Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas					
Posición $n.2$					
Paraboloides hiperbólicos		Sillas de monos			
		Tipos	Sillas de monos de una cola	Tipos	Sillas de monos dos colas
Modalidad anticlástica	Modalidad ordinarias				
Ph 1.2	$z = x^2 - y^2$ 	Sm 1.2	$z = x^3 - 3xy^2$ 	Sm ₂ 1.2	$z = 4xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 2.2	$z = 2x^2 - y^2$ 	Sm 2.2	$z = x^3 - 2xy^2$ 	Sm ₂ 2.2	$z = 3xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 3.2	$z = y^2 - x^2$ 	Sm 3.2	$z = x^3 - xy^2$ 	Sm ₂ 3.2	$z = 2xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 4.2	$z = 2y^2 - x^2$ 	Sm 4.2	$z = 2x^3 - 3xy^2$ 	Sm ₂ 4.2	$z = xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 5.2	$z = x^2 - 2y^2$ 	Sm 5.2	$z = 2x^3 - 2xy^2$ 	Sm ₂ 5.2	$z = 1/2xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 6.2	$z = 2x^2 - 2y^2$ 	Sm 6.2	$z = 2x^3 - xy^2$ 	Sm ₂ 6.2	$z = 3/4xy(x^2 - y^2)$ 

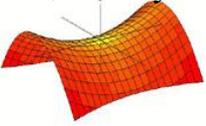
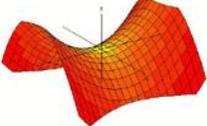
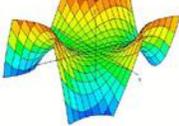
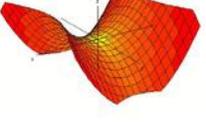
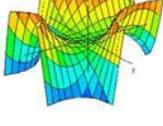
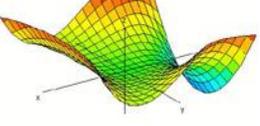
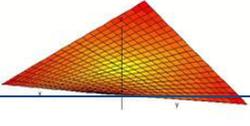
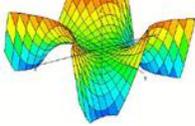
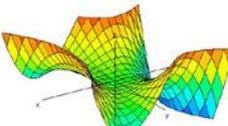
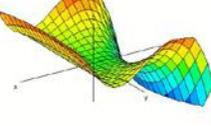
Cuadro 6.10			
Posición n.2 (continuación)			
Paraboloides hiperbólicos			
Modalidad anticlástica (continuación)	Sillas de monos de una cola		
Ph 7.2	$z = x^2 - 3y^2$ 	Tipos	Sillas de mono perturbadas
Ph 8.2	$z = 2x^2 - 3y^2$ 	Sm_{pert} 1.2	$z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
Ph 9.2	$z = 3x^2 - 2y^2$ 	Sm_{pert} 2.2	$z = x^3 - 2xy^2 + 2(x^2 + y^2)$ 
Modalidad anticlástica		Sm_{pert}	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$
Ph 10.2	$z = xy$ 	3.2	
		Sm_{pert} 4.2	$z = 2x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		Sm_{pert} 5.2	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		Sm_{pert} 6.2	$z = 2x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 

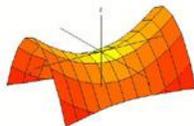
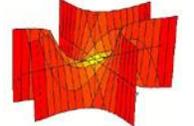
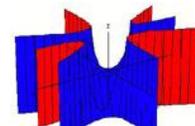
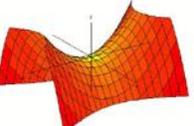
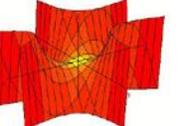
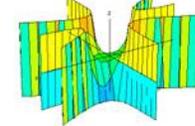
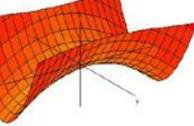
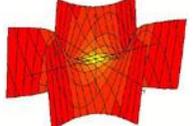
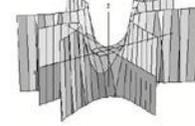
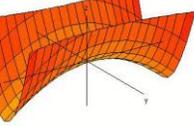
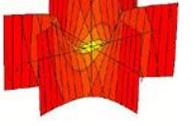
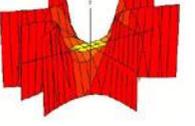
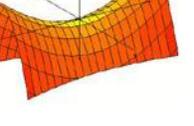
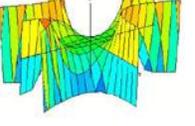
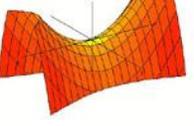
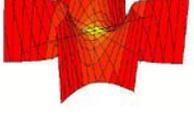
Cuadro de elaboración propia

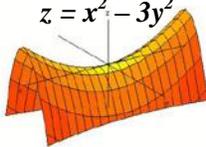
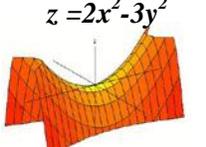
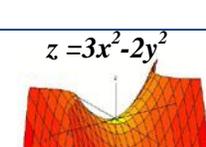
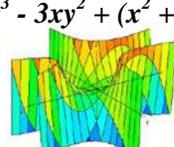
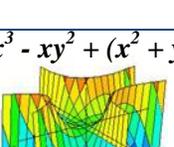
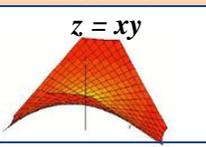
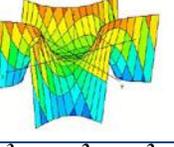
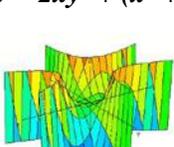
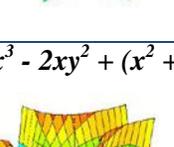
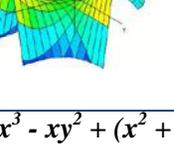
Cuadro 6.11					
Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas					
Posición $n.3$					
Paraboloides hiperbólicos		Sillas de monos			
		Tipos	Sillas de monos de una cola	Tipos	Sillas de monos dos colas
Modalidad anticlástica			Modalidad ordinarias		
Ph 1.3	$z = x^2 - y^2$ 	Sm 1.3	$z = x^3 - 3xy^2$ 	Sm ₂ 1.3	$z = 4xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 2.3	$z = 2x^2 - y^2$ 	Sm 2.3	$z = x^3 - 2xy^2$ 	Sm ₂ 2.3	$z = 3xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 3.3	$z = y^2 - x^2$ 	Sm 3.3	$z = x^3 - xy^2$ 	Sm ₂ 3.3	$z = 2xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 4.3	$z = 2y^2 - x^2$ 	Sm 4.3	$z = 2x^3 - 3xy^2$ 	Sm ₂ 4.3	$z = xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 5.3	$z = x^2 - 2y^2$ 	Sm 5.3	$z = 2x^3 - 2xy^2$ 	Sm ₂ 5.3	$z = 1/2xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 6.3	$z = 2x^2 - 2y^2$ 	Sm 6.3	$z = 2x^3 - xy^2$ 	Sm ₂ 6.3	$z = 3/4xy(x^2 - y^2)$ 

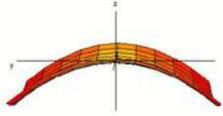
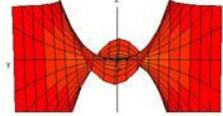
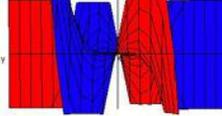
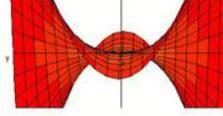
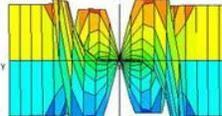
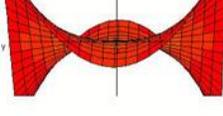
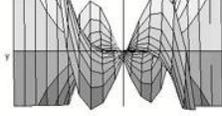
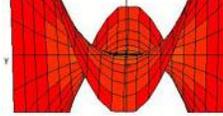
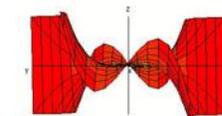
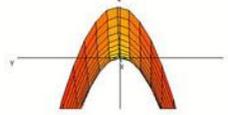
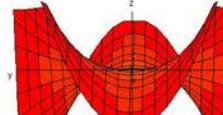
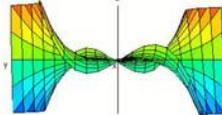
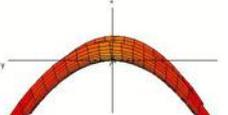
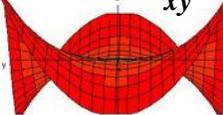
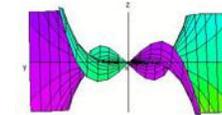
Cuadro 6.11			
Posición n.3 (continuación)			
Paraboloides hiperbólicos		Tipos	Sillas de monos de una cola
Modalidad anticlástica (continuación)			Sillas de mono perturbadas
Ph 7.3	$z = x^2 - 3y^2$ 		
Ph 8.3	$z = 2x^2 - 3y^2$ 	Sm_{pert} 1.3	$z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
Ph 9.3	$z = 3x^2 - 2y^2$ 	Sm_{pert} 2.3	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
	Modalidad anticlástica	Sm_{pert} 3.3	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
Ph 10.3	$z = xy$ 		
		Sm_{pert} 4.3	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		Sm_{pert} 5.3	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		Sm_{pert} 6.3	$z = 2x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 

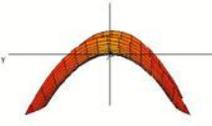
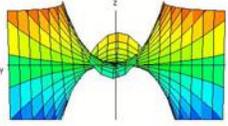
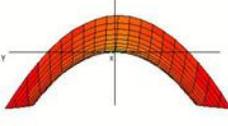
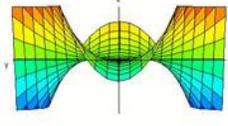
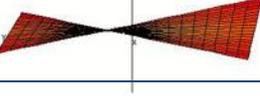
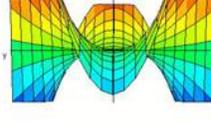
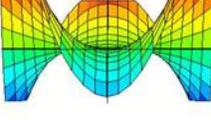
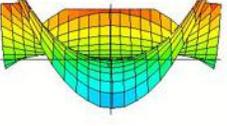
Cuadro 6.12					
Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas					
Posición <i>n.4</i>					
Paraboloides hiperbólicos		Sillas de monos			
		Tipos	Sillas de monos de una cola	Tipos	Sillas de monos dos colas
Modalidad anticlástica			Modalidad ordinarias		
Ph 1.4	$z = x^2 - y^2$	Sm 1.4	$z = x^3 - 3xy^2$	Sm ₂ 1.4	$z = 4xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 2.4	$z = 2x^2 - y^2$	Sm 2.4	$z = x^3 - 2xy^2$	Sm ₂ 2.4	$z = 3xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 3.4	$z = y^2 - x^2$	Sm 3.4	$z = x^3 - xy^2$	Sm ₂ 3.4	$z = 2xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 4.4	$z = 2y^2 - x^2$	Sm 4.4	$z = 2x^3 - 3xy^2$	Sm ₂ 4.4	$z = xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 5.4	$z = x^2 - 2y^2$	Sm 5.4	$z = 2x^3 - 2xy^2$	Sm ₂ 5.4	$z = 1/2xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 6.4	$z = 2x^2 - 2y^2$	Sm 6.4	$z = 2x^3 - xy^2$	Sm ₂ 6.4	$z = 3/4xy(x^2 - y^2)$
					

Cuadro 6.12			
Posición n.4 (continuación)			
Paraboloides hiperbólicos		Tipos	Sillas de monos de una cola
Modalidad anticlástica (continuación)			Sillas de mono perturbadas
Ph 7.4	$z = x^2 - 3y^2$ 		
Ph 8.4	$z = 2x^2 - 3y^2$ 	Sm_{pert} 1.4	$z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
Ph 9.4	$z = 3x^2 - 2y^2$ 	Sm_{pert} 2.4	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
	Modalidad anticlástica	Sm_{pert} 3.4	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
Ph 10.4	$z = xy$ 		
		Sm_{pert} 4.4	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		Sm_{pert} 5.4	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		Sm_{pert} 6.4	$z = 2x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 

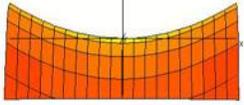
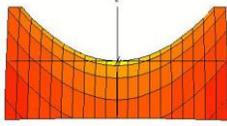
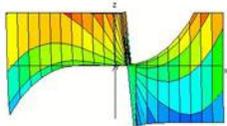
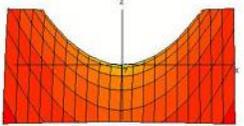
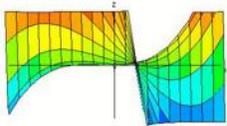
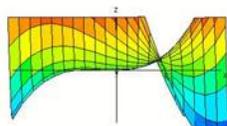
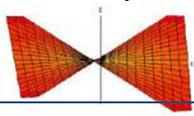
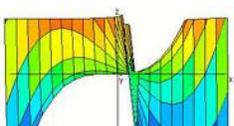
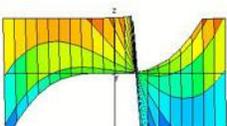
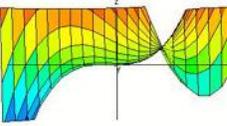
Cuadro 6.13					
Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas					
Posición $n.5$					
Paraboloides hiperbólicos		Sillas de monos			
		Tipos	Sillas de monos de una cola	Tipos	Sillas de monos dos colas
Modalidad anticlástica	Modalidad ordinarias				
Ph 1.5	$z = x^2 - y^2$	Sm 1.5	$z = x^3 - 3xy^2$	Sm ₂ 1.5	$z = 4xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 2.5	$z = 2x^2 - y^2$	Sm 2.5	$z = x^3 - 2xy^2$	Sm ₂ 2.5	$z = 3xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 3.5	$z = y^2 - x^2$	Sm 3.5	$z = x^3 - xy^2$	Sm ₂ 3.5	$z = 2xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 4.5	$z = 2y^2 - x^2$	Sm 4.5	$z = 2x^3 - 3xy^2$	Sm ₂ 4.5	$z = xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 5.5	$z = x^2 - 2y^2$	Sm 5.5	$z = 2x^3 - 2xy^2$	Sm ₂ 5.5	$z = 1/2xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 6.5	$z = 2x^2 - 2y^2$	Sm 6.5	$z = 2x^3 - xy^2$	Sm ₂ 6.5	$z = 3/4xy(x^2 - y^2)$
					

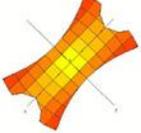
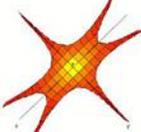
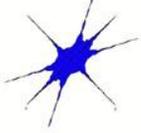
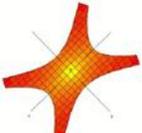
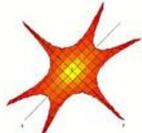
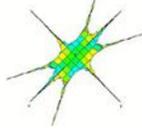
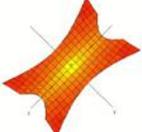
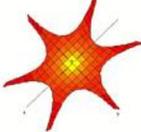
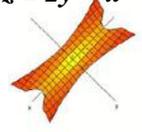
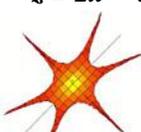
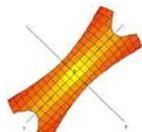
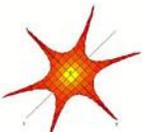
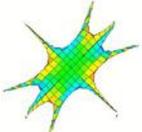
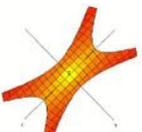
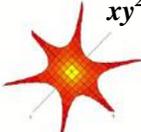
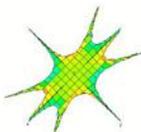
Cuadro 6.13			
Posición n.5 (continuación)			
Paraboloides hiperbólicos		Tipos	Sillas de monos de una cola
Modalidad anticlástica (continuación)			Sillas de mono perturbadas
Ph 7.5	$z = x^2 - 3y^2$ 	Tipos	Sillas de mono perturbadas
Ph 8.5	$z = 2x^2 - 3y^2$ 		
Ph 9.5	$z = 3x^2 - 2y^2$ 	$S_{m_{pert}}$ 1.5	$z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
	Modalidad anticlástica	$S_{m_{pert}}$ 2.5	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
Ph 10.5	$z = xy$ 	$S_{m_{pert}}$ 3.5	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		$S_{m_{pert}}$ 4.5	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		$S_{m_{pert}}$ 5.5	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		$S_{m_{pert}}$ 6.5	$z = 2x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 

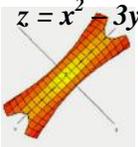
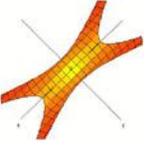
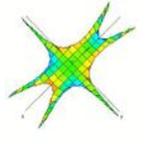
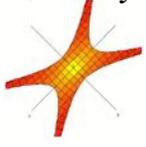
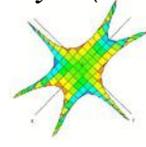
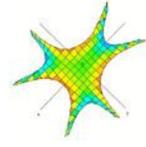
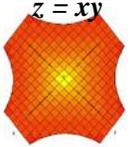
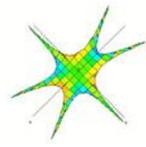
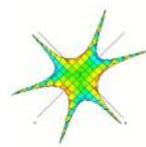
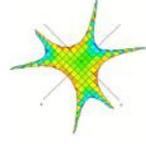
Cuadro 6.14					
Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas					
Posición $n.6$					
Paraboloides hiperbólicos		Sillas de monos			
		Tipos	Sillas de monos de una cola	Tipos	Sillas de monos dos colas
Modalidad anticlástica			Modalidad ordinarias		
Ph 1.6	$z = x^2 - y^2$	Sm 1.6	$z = x^3 - 3xy^2$	Sm ₂ 1.6	$z = 4xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 2.6	$z = 2x^2 - y^2$	Sm 2.6	$z = x^3 - 2xy^2$	Sm ₂ 2.6	$z = 3xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 3.6	$z = y^2 - x^2$	Sm 3.6	$z = x^3 - xy^2$	Sm ₂ 3.6	$z = 2xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 4.6	$z = 2y^2 - x^2$	Sm 4.6	$z = 2x^3 - 3xy^2$	Sm ₂ 4.6	$z = xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 5.6	$z = x^2 - 2y^2$	Sm 5.6	$z = 2x^3 - 2xy^2$	Sm ₂ 5.6	$z = 1/2xy(x^2 - y^2)$
					
Ph 6.6	$z = 2x^2 - 2y^2$	Sm 6.6	$z = 2x^3 - xy^2$	Sm ₂ 6.6	$z = 3/4xy(x^2 - y^2)$
					

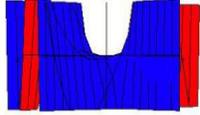
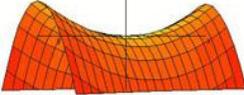
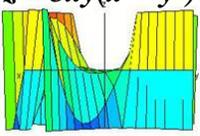
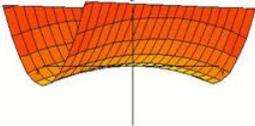
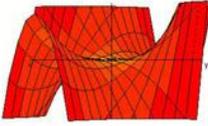
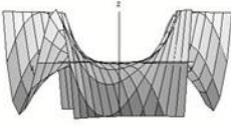
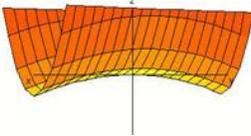
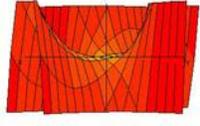
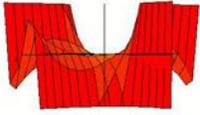
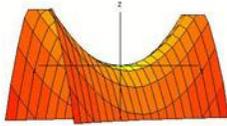
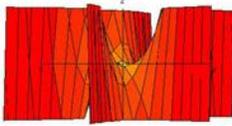
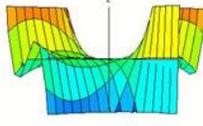
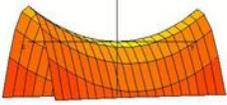
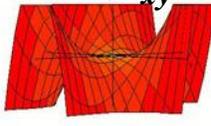
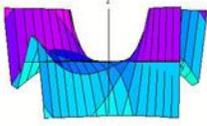
Cuadro 6.14			
Posición n.6 (continuación)			
Paraboloides hiperbólicos		Tipos	Sillas de monos de una cola
Modalidad anticlástica (continuación)			Sillas de mono perturbadas
Ph 7.6	$z = x^2 - 3y^2$		
			
Ph 8.6	$z = 2x^2 - 3y^2$	Sm_{pert} 1.6	$z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$
			
Ph 9.6	$z = 3x^2 - 2y^2$	Sm_{pert} 2.6	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$
			
	Modalidad anticlástica	Sm_{pert} 3.6	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$
Ph 10.6	$z = xy$		
		Sm_{pert} 4.6	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$
			
		Sm_{pert} 5.6	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$
			
		Sm_{pert} 6.6	$z = 2x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$
			

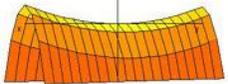
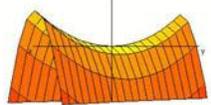
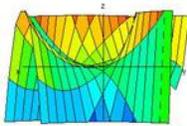
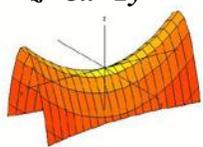
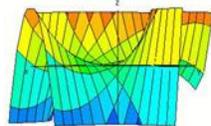
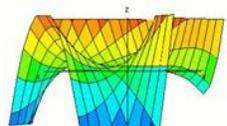
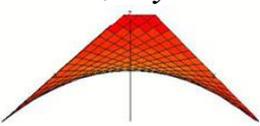
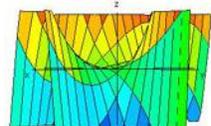
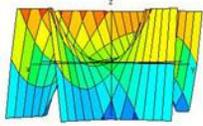
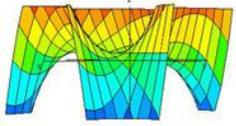
Cuadro 6.15					
Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas					
Posición $n.7$					
Paraboloides hiperbólicos		Sillas de monos			
		Tipos	Sillas de monos de una cola	Tipos	Sillas de monos dos colas
Modalidad anticlástica			Modalidad ordinarias		
Ph 1.7	$z = x^2 - y^2$	Sm 1.7	$z = x^3 - 3xy^2$	Sm ₂ 1.7	$z = 4xy(x^2 - y^2)$
Ph 2.7	$z = 2x^2 - y^2$	Sm 2.7	$z = x^3 - 2xy^2$	Sm ₂ 2.7	$z = 3xy(x^2 - y^2)$
Ph 3.7	$z = y^2 - x^2$	Sm 3.7	$z = x^3 - xy^2$	Sm ₂ 3.7	$z = 2xy(x^2 - y^2)$
Ph 4.7	$z = 2y^2 - x^2$	Sm 4.7	$z = 2x^3 - 3xy^2$	Sm ₂ 4.7	$z = xy(x^2 - y^2)$
Ph 5.7	$z = x^2 - 2y^2$	Sm 5.7	$z = 2x^3 - 2xy^2$	Sm ₂ 5.7	$z = 1/2xy(x^2 - y^2)$
Ph 6.7	$z = 2x^2 - 2y^2$	Sm 6.7	$z = 2x^3 - xy^2$	Sm ₂ 6.7	$z = 3/4xy(x^2 - y^2)$

Cuadro 6.15			
Posición n.7 (continuación)			
Paraboloides hiperbólicos		Tipos	Sillas de monos de una cola
Modalidad anticlástica (continuación)			Sillas de mono perturbadas
Ph 7.7	$z = x^2 - 3y^2$ 	Tipos	Sillas de mono perturbadas
Ph 8.7	$z = 2x^2 - 3y^2$ 		$z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
Ph 9.7	$z = 3x^2 - 2y^2$ 		$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
Modalidad anticlástica		Sm_{pert} 3.7	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
Ph 10.7	$z = xy$ 	Sm_{pert} 4.7	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		Sm_{pert} 5.7	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		Sm_{pert} 6.7	$z = 2x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 

Cuadro 6.16					
Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas					
Posición $n.8$					
Paraboloides hiperbólicos		Sillas de monos			
		Tipos	Sillas de monos de una cola	Tipos	Sillas de monos dos colas
Modalidad anticlástica	Modalidad ordinarias				
Ph 1.8	$z = x^2 - y^2$ 	Sm 1.8	$z = x^3 - 3xy^2$ 	Sm ₂ 1.8	$z = 4xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 2.8	$z = 2x^2 - y^2$ 	Sm 2.8	$z = x^3 - 2xy^2$ 	Sm ₂ 2.8	$z = 3xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 3.8	$z = y^2 - x^2$ 	Sm 3.8	$z = x^3 - xy^2$ 	Sm ₂ 3.8	$z = 2xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 4.8	$z = 2y^2 - x^2$ 	Sm 4.8	$z = 2x^3 - 3xy^2$ 	Sm ₂ 4.8	$z = xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 5.8	$z = x^2 - 2y^2$ 	Sm 5.8	$z = 2x^3 - 2xy^2$ 	Sm ₂ 5.8	$z = 1/2xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 6.8	$z = 2x^2 - 2y^2$ 	Sm 6.8	$z = 2x^3 - xy^2$ 	Sm ₂ 6.8	$z = 3/4xy(x^2 - y^2)$ 

Cuadro 6.16			
Posición n.8 (continuación)			
Paraboloides hiperbólicos			Sillas de monos de una cola
Modalidad anticlástica (continuación)			Sillas de mono perturbadas
Ph 7.8	$z = x^2 - 3y^2$ 	Tipos	
Ph 8.8	$z = 2x^2 - 3y^2$ 	Sm_{pert} 1.8	$z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
Ph 9.8	$z = 3x^2 - 2y^2$ 	Sm_{pert} 2.8	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
	Modalidad anticlástica	Sm_{pert} 3.8	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
Ph 10.8	$z = xy$ 		
		Sm_{pert} 4.8	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		Sm_{pert} 5.8	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$ 
		Sm_{pert} 6.8	$z = 2x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$ 

Cuadro 6.17 Resultados de la configuración de las ecuaciones de las familias de superficies representadas Posición <i>n.9</i>					
Paraboloides hiperbólicos		Sillas de monos			
		Tipos	Sillas de monos de una cola	Tipos	Sillas de monos dos colas
Modalidad anticlástica			Modalidad ordinarias		
Ph 1.9	$z = x^2 - y^2$ 	Sm 1.9	$z = x^3 - 3xy^2$ 	Sm ₂ 1.9	$z = 4xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 2.9	$z = 2x^2 - y^2$ 	Sm 2.9	$z = x^3 - 2xy^2$ 	Sm ₂ 2.9	$z = 3xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 3.9	$z = y^2 - x^2$ 	Sm 3.9	$z = x^3 - xy^2$ 	Sm ₂ 3.9	$z = 2xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 4.9	$z = 2y^2 - x^2$ 	Sm 4.9	$z = 2x^3 - 3xy^2$ 	Sm ₂ 4.9	$z = xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 5.9	$z = x^2 - 2y^2$ 	Sm 5.9	$z = 2x^3 - 2xy^2$ 	Sm ₂ 5.9	$z = 1/2xy(x^2 - y^2)$ 
Ph 6.9	$z = 2x^2 - 2y^2$ 	Sm 6.9	$z = 2x^3 - xy^2$ 	Sm ₂ 6.9	$z = 3/4xy(x^2 - y^2)$ 

Cuadro 6.17			
Posición n.9 (continuación)			
Paraboloides hiperbólicos			Sillas de monos de una cola
Modalidad anticlástica (continuación)			Sillas de mono perturbadas
Ph 7.9	$z = x^2 - 3y^2$	Tipos	
			
Ph 8.9	$z = 2x^2 - 3y^2$	Sm_{pert} 1.9	$z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$
			
Ph 9.9	$z = 3x^2 - 2y^2$	Sm_{pert} 2.9	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$
			
	Modalidad anticlástica	Sm_{pert}	$z = x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$
Ph 10.9	$z = xy$	3.9	
			
		Sm_{pert} 4.9	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$
			
		Sm_{pert} 5.9	$z = 2x^3 - 2xy^2 + (x^2 + y^2)$
			
		Sm_{pert} 6.9	$z = 2x^3 - xy^2 + (x^2 + y^2)$
			

6.2. Conclusiones y recomendaciones

El haber hecho a un lado toda la tecnología necesaria para erigir edificaciones techadas con paraboloides de concreto armado ha sido un craso error en el que han incurrido los constructores contemporáneos, tanto en el ámbito nacional como mundial.

En relación a los órdenes de magnitud referidas a la inversión de materiales aplicados sumados al coste de mano de obra y tiempo de edificación no existe otra tipología constructiva que, aplicando el concreto armado como material de cerramiento, sea más eficiente en su relación coste Vs período de vida útil de la edificación.

La necesidad de cubrir grandes áreas con superficies como las aquí estudiadas generan edificaciones con techos de larga vida útil con poco mantenimiento, aunado a la mínima cantidad de apoyos verticales y escasos volúmenes de excavación y de fabricación de fundaciones. Por ejemplo: los paraboloides hiperbólicos de los almacenes militares del IPSFA en el Paseo de Los Precursores, Caracas, llegan a cubrir un área máxima en planta horizontal de 14 x 8 y en otros 12 x 10 metros, para lo cual no requieren sino apenas de una sola columna por cada módulo. Las zapatas de las fundaciones no sobrepasan medidas de 2,5 x 2,5 metros.

Otro ejemplo importante de mencionar es el de las naves industriales de la otrora planta de ensamblaje de la automotriz Volkswagen en Palma Sola, Morón estado Carabobo. El hecho de hallarse en estado de abandono por más de diez años no ha conllevado a la degradación de los paraguas de paraboloides hiperbólicos al punto de que en la actualidad la edificación podría recuperarse para ponerla en funcionamiento con algún uso distinto aprovechando lo valioso de unos techos que en pasado albergaron una importante actividad industrial.

A pesar de estas ventajas los paraboloides hiperbólicos de concreto armado han sido desestimados en la actualidad.

En esta investigación han sido analizadas y representadas diferentes tipologías de superficies de parábolas invertidas. Ahora bien: ¿a qué se debe que las sillas de mono

para monos de una cola y las de dos colas no hayan sido aplicadas por constructores y diseñadores?

La respuesta a esto será otorgada a continuación bajo dos premisas distintas pero interrelacionadas entre si:

La utilización de un software computacional matemático para el investigador-diseñador o calculista de estructuras constituye una herramienta con dos vertientes utilitarias distintas. Por un lado el hecho de conocer la existencia del software como herramienta computacional, que hasta el presente sólo ha sido para el uso de quienes requieran plantear, resolver y representar problemas de tipo matemático, no determina que se comprenda cómo puede ser explotado para obtener las diferentes vistas de una superficie geométrica que pueda aplicarse como cubierta de una edificación.

Conocer a cabalidad la geometría diferencial de las superficies de parábolas invertidas no conlleva a comprender cuál es su aplicación en sistemas estructurales para procedimientos constructivos. De allí que más de 3500 años de estudio paulatino e incremental de los conocimientos geométricos no pueden jamás equipararse con un siglo de aplicaciones constructivas. Allí priva la justificación cuando se habla de que existe un desconocimiento.

Hay una amplia gama de posibilidades de plantear configuraciones espaciales, de un alto valor estético, con edificaciones que empleen como solución estructural a las superficies de parábolas invertidas; hacerlas a un lado conllevaría a continuar con el estancamiento en el cual yacen las técnicas y procedimientos constructivos en el ámbito mundial contemporáneo. En la actualidad la mayoría de las edificaciones de construcciones laminares continúan empleando cerramientos industrializados de clasificación estandarizada por requerimientos planos o rectilíneos. A excepción de las tecnologías basadas en tenso-estructuras textiles los cerramientos responden a necesidades de costo (sin que necesariamente sea la necesidad de un bajo costo); confort, apilabilidad, considerada ésta como la solicitud de que el componente de cerramiento pueda almacenarse y transportarse una encima de la otra sin generar algún vacío que pudiese conllevar a su deformación; y, finalmente, la reducción en los tiempos de colocación empleando un mínimo de elementos de fijación que puedan ser trabajados preferiblemente por personal no calificado.

Sin embargo, propuestas de cerramientos que respondan a la configuración geométrica de superficies de parábolas invertidas en producción industrializada no existen en el mercado de insumos para la construcción.

6.3. Trabajos de investigación a futuro

¿Deben ser desestimadas otras representaciones que pudieran obtenerse de estas superficies?

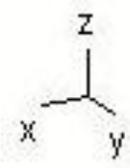
Otras representaciones de estas superficies de una gran riqueza estética podrían ser propuestas para la misma finalidad como solución formal para sistemas de cubiertas en procedimientos constructivos.

Véanse los siguientes ejemplos:

6.3.1. Descripción de las variantes en los parámetros comparativos para las posiciones *n.3*, *n.3-a*, *n.3-b* y *n.3-c* de las superficies de parábolas invertidas

Se han introducido, a manera de ejemplo, unas variantes para realizar la representación que corresponde a representaciones de las superficies de parábolas invertidas que han sido diseñadas en la posición *n.3* generalizada, bajo los parámetros que ya fueron explicados en la página 315-316 del capítulo anterior. Específicamente, han sido aumentadas otras tres posiciones adicionales, pero que esta vez se colocan conservando las características del posicionamiento del sistema de coordenadas cartesianas así como también del comando *Rango de la Gráfica 3D* que ya fueron propuestas en tanto que se proponen ciertas variaciones de la *Relación de Aspecto*.

A continuación se presentan las representaciones de las tres variantes que corresponden a las posiciones *n.3-a*, *n.3-b* y *n.3-c* en la que se logran observar, de un modo simultáneo, los cambios de proporción que adquiere una superficie, que obedece a una misma ecuación geométrica, ejemplificándolas con la superficie de una Sillas de mono *perturbada* para monos de una cola tipo $z = x^3 - 3xy^2 + (x^2 + y^2)$.

Cuadro 6.18																									
Parámetros geométricos comparativos para la representación gráfica de las familias de superficies de parábolas invertidas para las posiciones $n.3$, $n.3-a$, $n.3-b$, y $n.3-c$																									
Posición	Visualización del sistema de coordenadas cartesianas	Rango de la gráfica 3D para las posiciones	Relación de Aspecto																						
$n.3$		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Mínimo</th> <th>Máximo</th> <th>Escala</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>0.2857</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>0.2857</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>-5</td> <td>5</td> <td>1.4285</td> </tr> </tbody> </table>		Mínimo	Máximo	Escala	x	-1	1	0.2857	y	-1	1	0.2857	z	-5	5	1.4285	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> <th>z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	x	y	z	1	1	1
			Mínimo	Máximo	Escala																				
x			-1	1	0.2857																				
y			-1	1	0.2857																				
z	-5	5	1.4285																						
x	y	z																							
1	1	1																							
$n.3-a$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> <th>z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	x	y	z	1	2	1																		
x	y	z																							
1	2	1																							
$n.3-b$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> <th>z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	x	y	z	2	1	1																		
x	y	z																							
2	1	1																							
$n.3-c$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> <th>z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	x	y	z	1	1	2																		
x	y	z																							
1	1	2																							

Cuadro de elaboración propia.

Posición $n.3-a$

La configuración tridimensional de los parámetros geométricos que permiten la representación de las sillas de mono para monos de una cola *perturbadas* Variantes $n.3-a$ (figuras 404 y 405); $n.3-b$ (figuras 406 y 407) y variantes $n.3-c$ (figuras 408 y 409), para la modificación de los valores de la escala y proporción entre los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas son los siguientes:

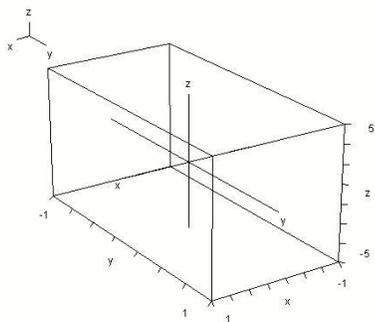


Figura 404. Sistema de coordenadas cartesianas tipo caja para las sillas de mono *perturbadas* para monos de una cola. Variante $n.3-a$.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

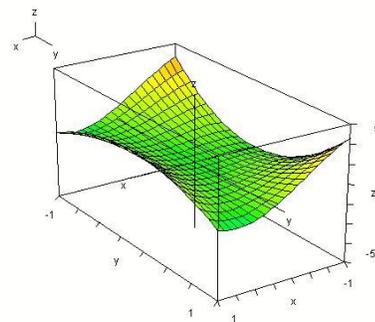


Figura 405. Gráfica de una silla de mono *perturbada* para monos de una cola. Variante $1.3-a$.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

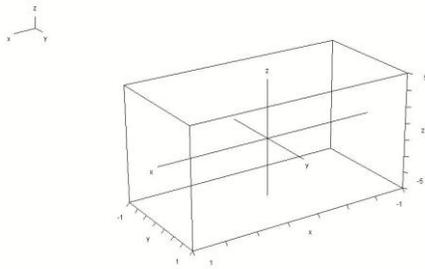
Posición *n.3-b*

Figura 406. Sistema de coordenadas tipo caja para la representación de las sillas de mono *perturbadas* para monos de una cola. Variante *n.3-b*.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

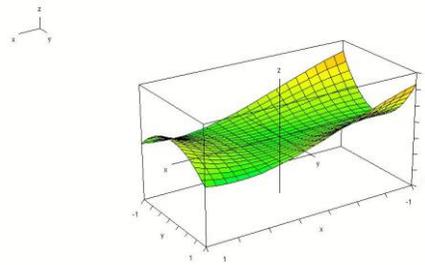


Figura 407. Parámetros geométricos que permiten la configuración de las sillas de mono *perturbadas* para monos de una cola. Variante *1.3-b*.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

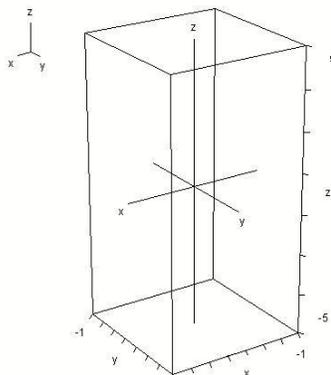
Posición *n.3-c*

Figura 408. Sistema de coordenadas tipo caja para la representación de las sillas de mono *perturbadas* para monos de una cola. Variante *n.3-c*.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

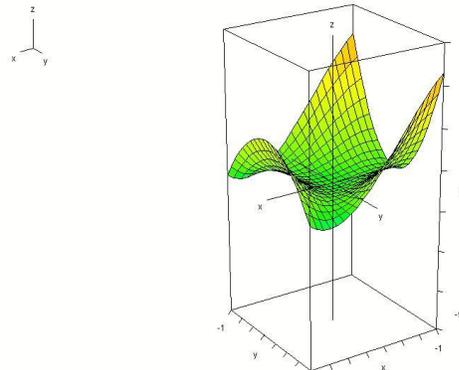
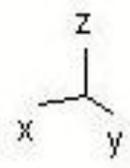


Figura 409. Parámetros geométricos que permiten la configuración de las sillas de mono *perturbadas* para monos de una cola. Variante *1.3-c*.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

6.3.2. Descripción de las variantes en los parámetros comparativos para las posiciones *n.10*, *n.10-a*, *n.10-b* y *n.10-c* de las superficies de parábolas invertidas

Las condiciones geométricas que han sido propuestas para las 09 (nueve) posiciones que han sido diseñadas en esta investigación n son las únicas que podrían ser consideradas por un proyectista. Se pueden generar otras posibilidades interesantes como en este caso la propuesta de generar una configuración *n.10* (sólo por mencionar un ejemplo, entre muchas otras variantes) que responda a los siguientes parámetros de representación:

Cuadro 6.19																				
Parámetros geométricos comparativos para la representación gráfica de las familias de superficies de parábolas invertidas para las posiciones <i>n.10</i>, <i>n.10-a</i>, <i>n.10-b</i>, y <i>n.10-c</i>																				
Posición	Visualización del sistema de coordenadas cartesianas	Rango de la gráfica 3D para las posiciones	Relación de Aspecto																	
n.10			<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">:</td> <td style="text-align: center;">y</td> <td style="text-align: center;">:</td> <td style="text-align: center;">z</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td></td> <td style="text-align: center;">2</td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table>	x	:	y	:	z	2		2		1							
x		:	y	:	z															
2			2		1															
n.10-a		<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">Mínimo</td> <td style="text-align: center;">Máximo</td> <td style="text-align: center;">Escala</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">-2.5</td> <td style="text-align: center;">2.5</td> <td style="text-align: center;">0.7142</td> </tr> </table>		Mínimo	Máximo	Escala	x	-2.5	2.5	0.7142	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">:</td> <td style="text-align: center;">y</td> <td style="text-align: center;">:</td> <td style="text-align: center;">z</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> <td style="text-align: center;">0.5</td> </tr> </table>	x	:	y	:	z	1		1	
	Mínimo	Máximo	Escala																	
x	-2.5	2.5	0.7142																	
x	:	y	:	z																
1		1		0.5																
n.10-b	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">y</td> <td style="text-align: center;">-2.5</td> <td style="text-align: center;">2.5</td> <td style="text-align: center;">0.7142</td> </tr> </table>	y	-2.5	2.5	0.7142	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">:</td> <td style="text-align: center;">y</td> <td style="text-align: center;">:</td> <td style="text-align: center;">z</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> <td style="text-align: center;">0.5</td> </tr> </table>	x	:	y	:	z	2		1		0.5				
y	-2.5	2.5	0.7142																	
x	:	y	:	z																
2		1		0.5																
n.10-c		<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">z</td> <td style="text-align: center;">-10</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">15</td> </tr> </table>	z	-10	5	15	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">:</td> <td style="text-align: center;">y</td> <td style="text-align: center;">:</td> <td style="text-align: center;">z</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> <td style="text-align: center;">2</td> <td></td> <td style="text-align: center;">0.5</td> </tr> </table>	x	:	y	:	z	1		2		0.5			
z	-10	5	15																	
x	:	y	:	z																
1		2		0.5																

Cuadro de elaboración propia.

Si bien las familias de superficies de paraboloides hiperbólicos, sillas de mono para monos de una cola y para monos de dos colas, que hasta ahora han sido diseñadas, se

representan mediante 9 posiciones todas con parámetros geométricos diferentes, en las agrupaciones de familias de superficies de parábolas invertidas, en este caso se ha incrementado una nueva posición que corresponden a la posición *n.10*, en la cual se han colocado, a su vez, otras tres posiciones comprendidas entre *n.10-a* hasta *n.10-c* con los siguientes parámetros que las diferencian totalmente de las representaciones de las anteriores familias de grafos de esta investigación.

En esta familia de superficie de la posición *n.10* son los únicos tipos donde se ha experimentado –dentro de esta etapa de la investigación– con relaciones de aspectos en decimales (0.5), si bien se observa que en las restantes familias sólo se ha recurrido a la ocupación de tales parámetros geométricos mediante números enteros.

Posición *n.10*

Para una silla de mono para monos de una cola *perturbada* por un paraboloides circular. La ecuación que la determina en estos ejemplos en particular es $z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$. La posición *n.10* (figuras 410 y 411) con sus tres variantes *n.10-a* (figuras 412 y 413), *n.10-b* (figuras 414 y 415) y *n.10-c* (figuras 416 y 417), se configuran así:

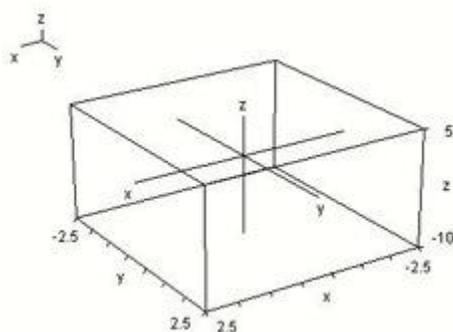


Figura 410. Sistema de coordenadas tipo caja para la representación de las sillas de mono *perturbadas* para monos de una cola. Variante *n.10*.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

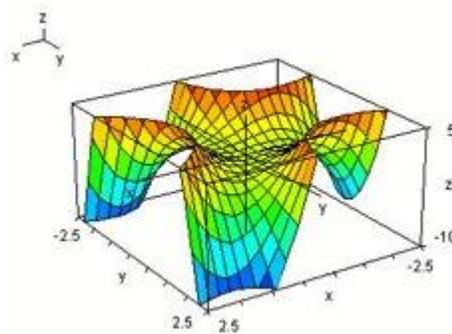


Figura 411. Silla de mono *perturbada* para monos de una cola $z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$. Variante *1.10*.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

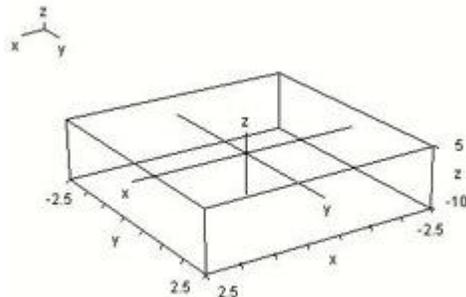
Posición n.10-a

Figura 412. Sistema de coordenadas tipo caja para la representación de la variante *n.10-a*.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

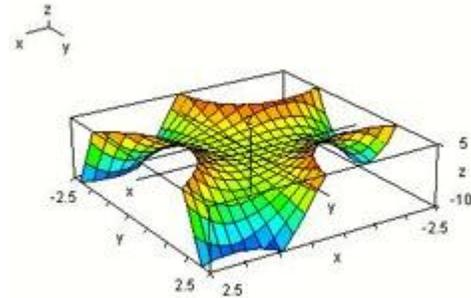


Figura 413. Silla de mono *perturbada* para monos de una cola $z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$. Variante *1.10-a*.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

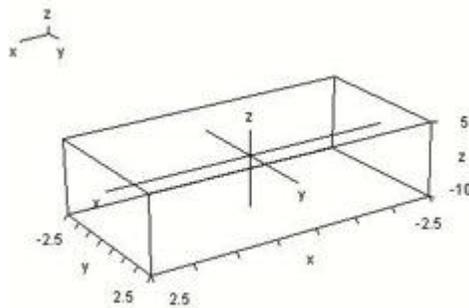
Posición n.10-b

Figura 414. Sistema de coordenadas tipo caja para la representación de la variante *n.10-b*.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

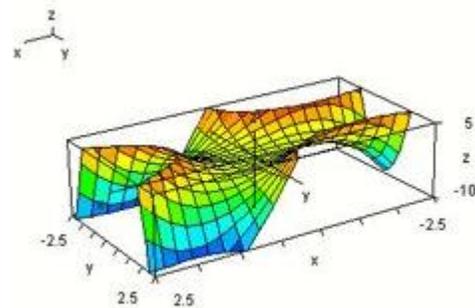


Figura 415. Silla de mono *perturbada* para monos de una cola $z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$. Variante *1.10-b*.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

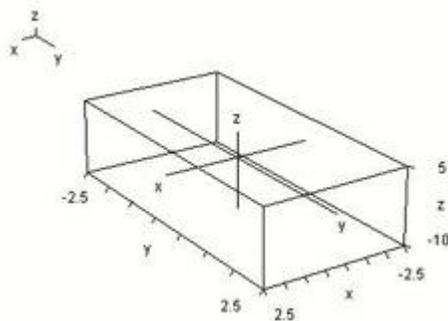
Posición n.10-c

Figura 416. Sistema de coordenadas tipo caja para la representación de la variante *n.10-c*.

Fuente: elaboración propia con *Derive*®.

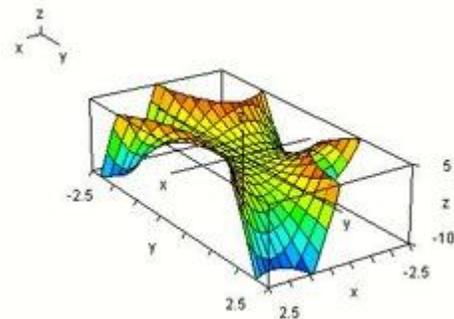


Figura 417. Silla de mono *perturbada* para monos de una cola $z=x^3-3xy^2+(x^2+y^2)$. Variante *1.10-c*.

Fuente: elaboración propia *Derive*®.

Las superficies objeto del presente estudio, generan una forma geométrica. La intención es que tales superficies puedan ser explotadas en soluciones edificatorias como sistemas de cubiertas. No pueden constituirse en el fin sino que constituyen un medio para obtener una solución estructural en procesos constructivos.

Si se acepta su condicionamiento formal, es obligatorio pensar que tales formas cumplen con determinadas propiedades visuales. Estas propiedades visuales son descritas por diversos autores, tal es el caso de Ching (1993), quien estableció que las propiedades visuales de la forma son: [entre otras]

“LA POSICIÓN:	es la localización de una forma respecto a su entorno a su campo de visión.
LA ORIENTACIÓN:	es la posición de una forma respecto a su plano de sustentación, a los puntos cardinales del observador.
LA INERCIA VISUAL:	es el grado de concentración y estabilidad visual de la forma; la inercia visual de una forma depende de su geometría, así como de su orientación relativa al plano de sustentación y al rayo visual propio del observador.

Es evidente que todo este conjunto de propiedades visuales de la forma, en realidad están afectadas por las condiciones en que las analicemos:

1. nuestro ángulo de visión o perspectiva;
2. la distancia que nos separa de la forma;
3. las condiciones de iluminación
4. el campo de visión que haya en torno a la forma”

(Ching, 1993:51).

Lo mencionado por Ching (1993) no es otra cosa que la reafirmación de los razonamientos de los tratadistas Wren, Alberti o Vitruvio. Esta investigación reafirma

estos postulados mediante la manipulación de distintas familias de superficies de doble curvatura que reúnen todas ellas tales condiciones (tanto las que han sido empleadas en diseños y construcciones como las que han sido desestimadas, tal como es el caso de las sillas de mono) las cuales han sido configuradas en esta investigación como entidades geométricas con un alto potencial de reconvertirse en estructuras edificadas y esto no es otra cosa más que repetir lo que la humanidad ha hecho por siempre: tomar la ciencia en sus manos para convertirla en espacios habitables.

Anexo 1

1. Conceptos de Geometría Descriptiva que se relacionan con esta investigación

1.1. Las Proyecciones

Una Proyección cualquiera es el modo de representar un elemento geométrico, que está ubicado en el espacio, sobre algún plano.

Según Osers “En cualquier proyección intervienen tres factores:

- 1) El punto de observación (ojo, foco de luz, etc.).
- 2) El objeto observado
- 3) La superficie de proyección (pantalla, plano de cuadro, etc.).” (OSERS, 2006:16).

1.1.1. Proyecciones cónicas

En la PROYECCIÓN CÓNICA (figura 418) los haces de proyección parten de un sólo punto de observación. Cuando el PUNTO DE OBSERVACIÓN a un objeto geométrico se halla a una distancia determinada los haces de proyección parten de ese punto dirigiéndose hacia EL PLANO DE PROYECCIÓN, cada uno de los puntos relevantes del objeto se proyectan conformándose un cono proyectante.

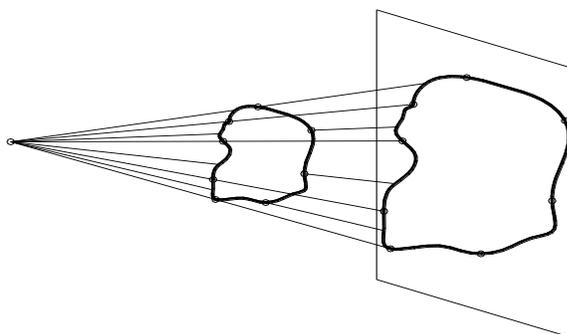


Figura 418. Proyección cónica.
Fuente: elaboración propia.

1.1.2. Proyecciones cilíndricas

Los sistemas de proyección cilíndrica poseen dos modalidades diferentes: la PROYECCIÓN CILÍNDRICA OBLICUA (figura 1.22) y la PROYECCIÓN CILÍNDRICA ORTOGONAL (figura 1.23). Siendo este último el más usual al requerir de un sistema que permita representar y describir a los objetos geométricos que se hallan en el espacio.

La PROYECCIÓN CILÍNDRICA, a diferencia de la Proyección Cónica, los haces de proyección parten de un punto en el infinito y se dirigen hacia el PLANO DE PROYECCIÓN y cada uno de los puntos relevantes del objeto determinan haces paralelos.

Las proyecciones cilíndricas son de dos tipos; la Proyección cilíndrica OBLICUA (figura 419) en la cual los haces de proyección poseen un ángulo distinto a un ángulo recto a diferencia de lo que ocurre en la proyección cilíndrica ORTOGONAL (figura 420) en la que los haces de proyección forman un ángulo recto con respecto al plano de proyección. La diferencia entre ambas proyecciones, la cónica y la cilíndrica, no sólo estriba en el modo en que se proyectan los rayos de proyección, sino en el resultado de las mismas: en la proyección cónica, los objetos geométricos aumentan de tamaño, mientras que en la proyección cilíndrica las dimensiones del objeto geométrico se conservan inalterables siempre y cuando el plano del objeto sea paralelo al plano de proyección.

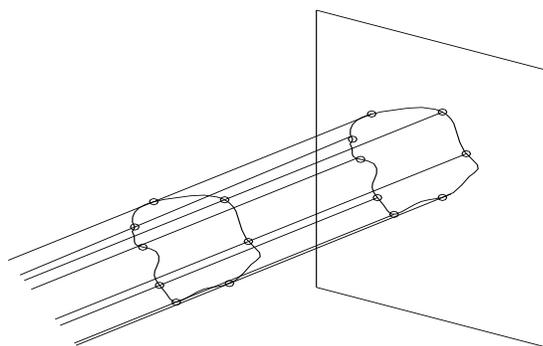


Figura 419. Proyección cilíndrica OBLICUA.
Fuente: elaboración propia.

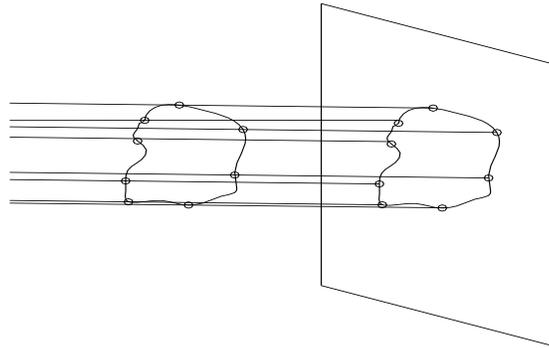


Figura 420. Proyección cilíndrica ORTOGONAL.
Fuente: elaboración propia.

1.1.3. Sistemas de representación

Se debe suponer al espacio geométrico definido en tres dimensiones: largo, alto y ancho; lo cual se logra mediante el posicionamiento de tres ejes de coordenadas perpendiculares entre si, unidos por un punto común que es el origen “O”. Estos tres ejes: *OX*, *OY*, y *OZ* son los que determinan a los tres planos que constituyen al SISTEMA DE REPRESENTACIÓN que se emplea para las distintas proyecciones planas de un objeto.

Cuadro N° A-1 Principios geométricos de los planos de proyección			
Nombre del Plano	Coordenadas	Medidas que determina	Distancias que determina
horizontal (PH)	<i>XOY</i>	Alejamientos	Distancias al Plano Vertical
Vertical (PV)	<i>XOZ</i>	Alturas	Distancias al Plano Horizontal
Lateral (PL)	<i>ZOY</i>	Anchos	Distancias al Plano Vertical y al Plano Horizontal

Tabla de elaboración propia.

Una representación gráfica de lo que se ha expresado en la tabla anterior se realiza mediante la conformación de los planos VERTICAL, HORIZONTAL Y LATERAL, respectivamente.

La figura 421 indica una de las maneras como se generan los tres PLANOS DE PROYECCIÓN: el plano vertical (PV), el plano horizontal (PH) y el plano lateral (PL); mediante la conformación de un *triedro trirrectangular* (figura 422) que se adapta al sistema de proyecciones en los ejes de coordenadas *XYZ*.

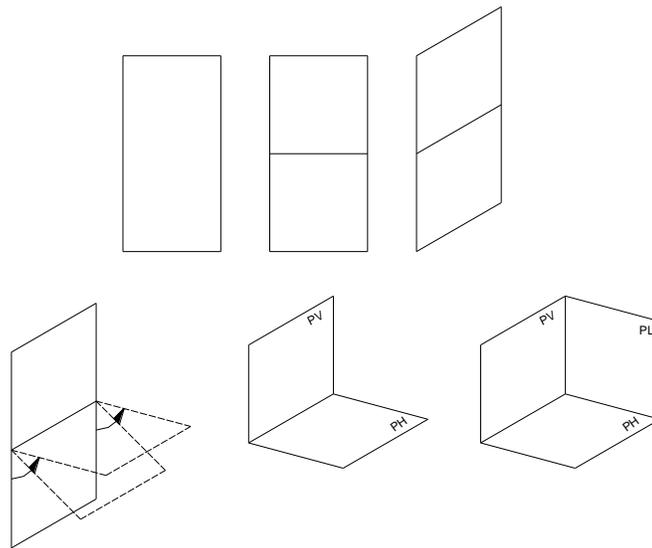


Figura 421. Sistemas de representación.
Fuente: elaboración propia.

a. Diédrico de doble proyección

El TRIEDRO (figura 422) puede ser transformado geoméricamente por EXPLANACIÓN. Éste es el verdadero principio generador de los conocimientos de la GEOMETRÍA DESCRIPTIVA, ya que -en esta rama de las matemáticas- los problemas no se solucionan en el espacio sino mediante la representación en los distintos PLANOS DE PROYECCIÓN.

El triedro no es más que la abstracción geométrica de generación espacial de los planos de proyección vertical, lateral y horizontal, mediante el posicionamiento de los ejes de coordenadas X, Y y Z .

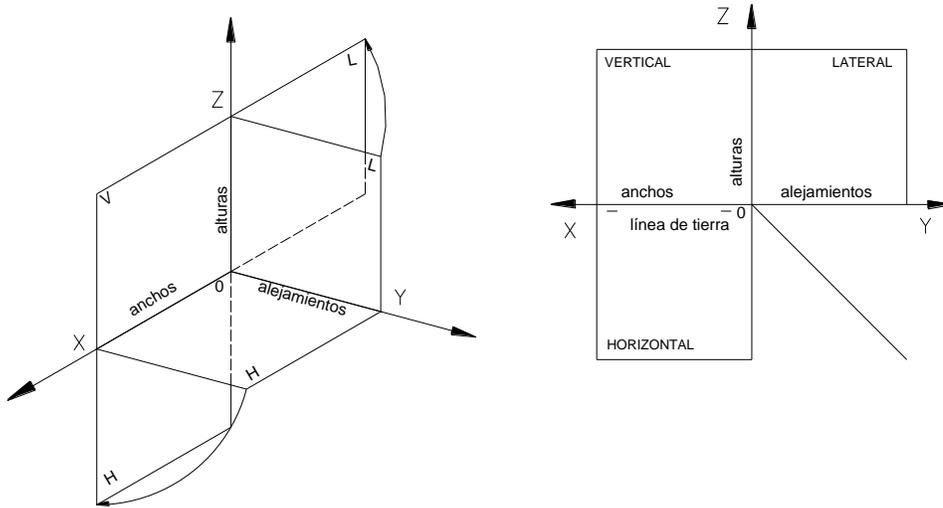


Figura 422. La explanación del triedro y su transformación en un sistema de proyección abatido.
Fuente: elaboración propia con base en Torre, 1978:21.

Una vez que se ha completado la explanación, se conservan los ejes coordenados X, Y, Z , debidamente rotados y son estos los que crean las nuevas posiciones para los tres planos (horizontal, vertical y lateral). A tal representación se le llama SISTEMA DE PROYECCIÓN TRIPLANAR. Nótese que la línea que distingue al plano vertical con el horizontal tiene, en su nomenclatura, dos segmentos ubicados a cada uno de los extremos. Esa es la LÍNEA DE TIERRA (LT).

Otra regla de transformación a la cual puede ser sometido el *triedro* es la referente a la sustracción de alguno de sus planos. (generalmente se suprime al plano lateral). De tal forma que pasa a convertirse en un *diedro* por ende se produce un ABATIMIENTO (figura 423).

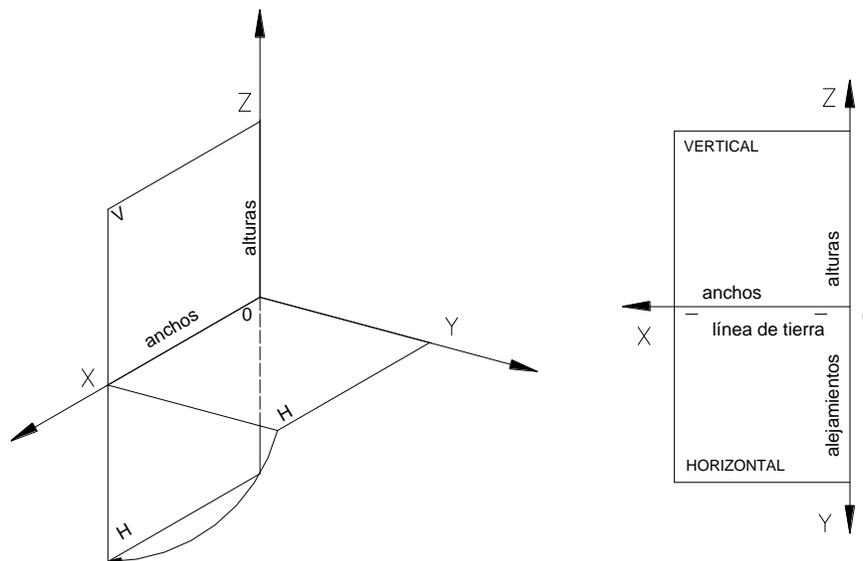


Figura 423. La explicación del Diedro.

Fuente: extraído con fines didácticos de De La Torre Carbó, 1978:21

Sin embargo, la explanación también se puede obtener mediante el giro o rotación del plano vertical (figura 424), quedando alineado con el plano horizontal así:

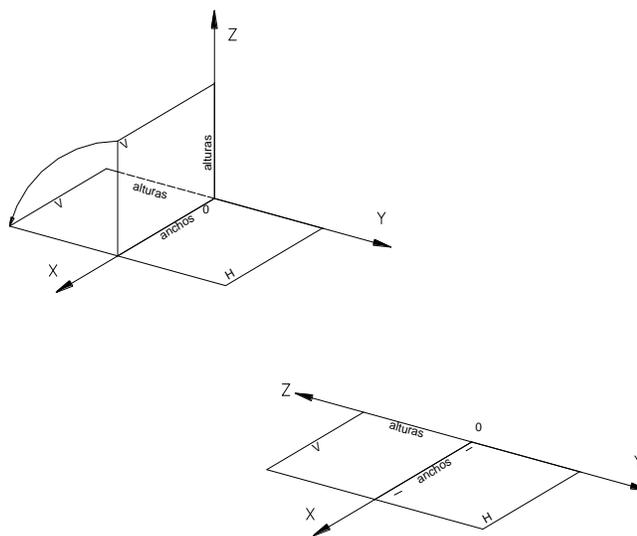


Figura 424. Una variante de explicación diédrica en la cual quedan alineados los planos vertical y horizontal sobre un sistema de proyección biplanar que coincide con el plano horizontal.

Fuente: extraído con fines didácticos de Torre,

b. Cuadrantes

Al eliminar el plano lateral de proyección de un triedro conservándose los planos vertical y lateral separados por la LÍNEA DE TIERRA, se percibe al espacio tridimensional dividido en cuatro cuadrantes (figura 425) que serán identificados, en sentido antihorario, con números romanos (I,II,III,IV). Y los planos que, a su vez, reciben la nomenclatura “a partir de la línea de tierra el plano horizontal, tendrá parte delante de ella HORIZONTAL ANTERIOR y parte detrás HORIZONTAL POSTERIOR; en tanto el vertical, tendrá parte arriba VERTICAL SUPERIOR y parte abajo VERTICAL INFERIOR,(...)” (Torre, 1978:22).

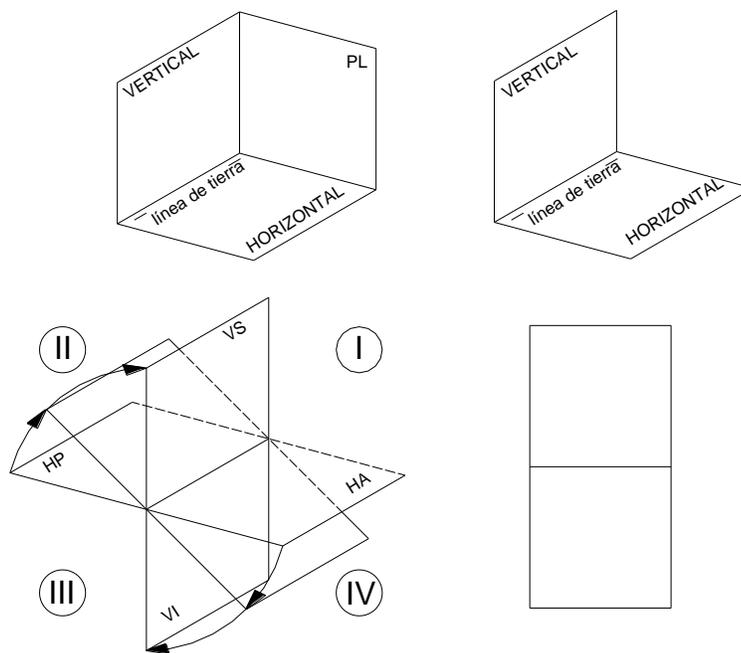


Figura 425. Los PLANOS DE PROYECCIÓN y los CUADRANTES.
Fuente: Torre, 1978:22.

Para entender las denominaciones, características, posiciones y proyecciones que determinan la representación geométrica de los cuerpos en el espacio se indica el siguiente cuadro:

CUADRO N° A-2.			
Propiedades geométricas de los cuadrantes			
Nombre del Cuadrante	Ubicación Espacial	Ubicación respecto a la LÍNEA DE TIERRA	
		Proyección vertical	Proyección Horizontal
I	Entre horizontal anterior y vertical superior	Vertical superior arriba de L.T	Horizontal anterior debajo de L.T
II	Entre vertical superior y horizontal posterior	Vertical superior arriba de L.T	Horizontal posterior arriba de L.T
III	Entre horizontal posterior y vertical inferior	Vertical inferior debajo de L.T	Horizontal posterior arriba de L.T
IV	Entre vertical inferior y horizontal anterior	Vertical inferior debajo de L.T	Horizontal anterior debajo de L.T

Cuadro de elaboración propia. Fuente: Torre, 1978:23.

Las proyecciones pueden ser cónicas y cilíndricas. Estas últimas se clasifican en oblicuas y ortogonales, siendo a partir de las proyecciones cilíndricas ortogonales que se desarrolla el conocimiento de la Geometría Descriptiva.

Los planos de proyección son tres: el plano horizontal y el vertical –que se hallan unidos por una línea de tierra- y el plano lateral; estos se adaptan al sistema de proyecciones en los ejes de coordenadas X, Y y Z .

Ese sistema de proyecciones es conocido como triedro, el cual al ser explanado reproduce a un sistema de proyecciones espaciales. Cuando al triedro le es eliminado el plano lateral, se obtiene una transformación geométrica que es el diedro, que es la representación de los tres ejes coordenados X, Y y Z , mediante los planos de proyección vertical y horizontal. A la explanación del diedro se le conoce como sistema de proyección biplanar.

Para ubicar a un objeto tridimensional, que se halle en el espacio, se requiere de conocer las distancias o coordenadas con respecto a esos tres planos; estas distancias son: la altura que es la distancia con respecto al plano horizontal y que se mide en el plano vertical, el ancho, distancia con respecto al plano lateral, que se mide en el plano horizontal y por último el alejamiento distancia que se mide en el plano lateral con respecto al plano vertical.

1.2. Representación geométrica descriptiva de una recta de punta¹

La recta de punta (figura 426) es aquella que es perpendicular al plano vertical de proyección y, en consecuencia, es paralela al plano horizontal de proyección.

Al representar una recta de punta en los planos de proyección horizontal y vertical abatidos (figura 427) se presentan las siguientes condiciones:

“se caracteriza por tener su proyección vertical ab' íntegra en un punto, es decir que toda la recta por larga que sea se proyecta en ese punto, en tanto que la horizontal ab es una recta perpendicular a línea de tierra (LT) sobre la misma proyectante del punto de proyección vertical.” (Torre, 1978:28).

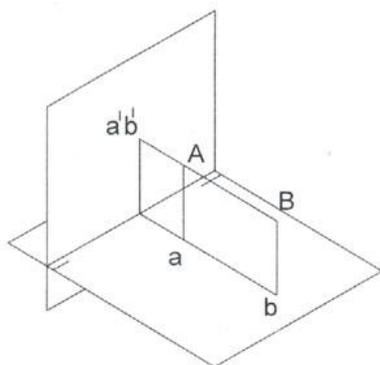


Figura 430. Representación espacial de una recta de punta.

Fuente: Extraída con fines didácticos de Torres, 1978:28.

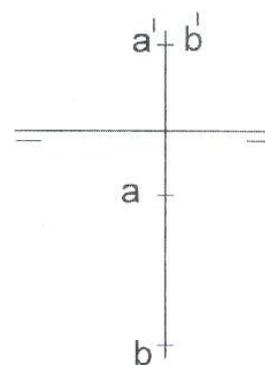


Figura 431. Obtención de la representación geométrica descriptiva de una recta de punta.

Fuente: Extraída con fines didácticos de Torres, 1978:28.

¹ En la Pg 320 del capítulo 5 se hace referencia al concepto de recta de punta, empleado para la representación de las superficies analizadas en esta investigación.

1.3. Representación geométrico – descriptiva de algunas superficies

1.3.1. Hiperboloide de una hoja

Se define un primer caso de hiperboloide de una hoja como la superficie producida por una recta generatriz que se desliza, apoyada constantemente en tres directrices rectas cualesquiera, no coplanares. (figura 428).

Representación: Las tres rectas directrices son: $A'A$, $B'B$, $C'C$, como primer paso seleccionar una de ellas para hacerla recta de punta o recta vertical, llevando en la transformación a las otras dos rectas restantes.

a. Caso 1: Recta vertical como directriz

La superficie es producida a partir del trazado de líneas rectas que se intersecan en la proyección horizontal de la recta vertical. Y estas a su vez determinan los puntos que generan la superficie alabeada en el plano vertical de proyección.

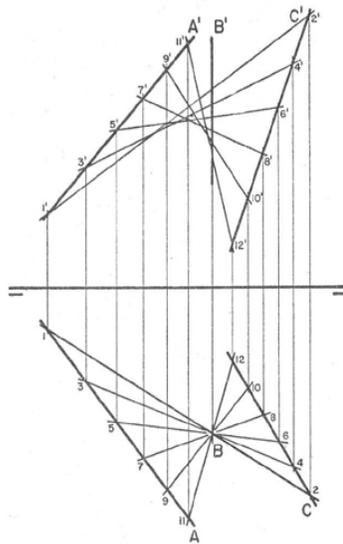


Figura 428. Representación de un hiperboloide de una hoja empleando una línea recta como directriz.

Fuente: De La Torre Carbó, 1978:155.

b. Caso II: Hiperboloide de una hoja como superficie reglada o alabeada

Este es el caso que se representa mediante la rotación de una recta generatriz sobre tres circunferencias directrices (figura 429) cuyos centros están situados en un mismo eje que es perpendicular a los planos en los que se hallan cada una de ellas.

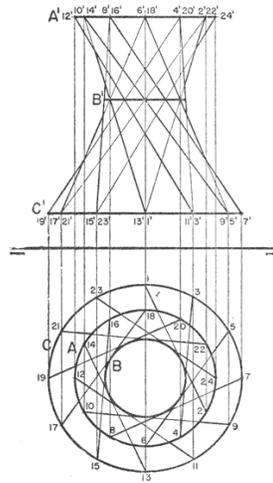


Figura 429. Hiperboloide de una sola hoja mediante la rotación de una recta generatriz sobre tres circunferencias directrices.

Fuente: Torre, 1978:155.

APÉNDICE 1

El modo de obtener las cónicas curvas descrito por Thomas es el siguiente:

“Las cuatro curvas circunferencia, elipse, hipérbola y parábola se conocen con la denominación conjunta de secciones *cónicas*, porque pueden obtenerse cortando una superficie cónica por un plano. Si el plano secante es perpendicular al eje del cono (supuesto éste de revolución, la sección es una circunferencia).

Con mayor generalidad, supongamos que el plano secante forma un ángulo α con el eje del cono, y designemos con β el semiángulo en el vértice de este. La sección es:

- I) una circunferencia, si $\alpha = 90^\circ$
- II) una elipse, si $\beta < \alpha < 90^\circ$
- III) una parábola, si $\alpha = \beta$
- IV) una hipérbola, si $0 \leq \alpha < \beta$

La conexión entre estas curvas tal como las hemos definido y las secciones de una superficie cónica se aprecia fácilmente [en la siguiente figura] que se refiere a la elipse, aunque el razonamiento es válido para los demás casos.

La esfera inscrita es tangente a la superficie cónica a lo largo de una circunferencia C y al plano secante en el punto F . el punto P designa un punto cualquiera de la sección, y vamos a ver que F es un foco, y la recta L , intersección del plano de la circunferencia C con el plano secante, una directriz de la curva. Para ello designemos con Q el punto de la paralela por P al eje del cono corta al plano de C , y sea A el punto en donde la generatriz del cono que pasa por P encuentra a la circunferencia C . Representemos por D el pie de la perpendicular trazada por P a la recta L ; PA y PF son dos tangentes a la misma esfera desde el punto P y tendrán la misma longitud,

$$PA = PF$$

En el triángulo rectángulo PQA , se tiene:

$$PQ = PA \cos \beta,$$

$$PQ = PD \cos \alpha.$$

Por tanto,

$$PA \cos \beta = PD \cos \alpha,$$

O bien,

$$\frac{PA}{PD} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

Pero $PA = PF$, y

$$\frac{PF}{PD} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} [1]$$

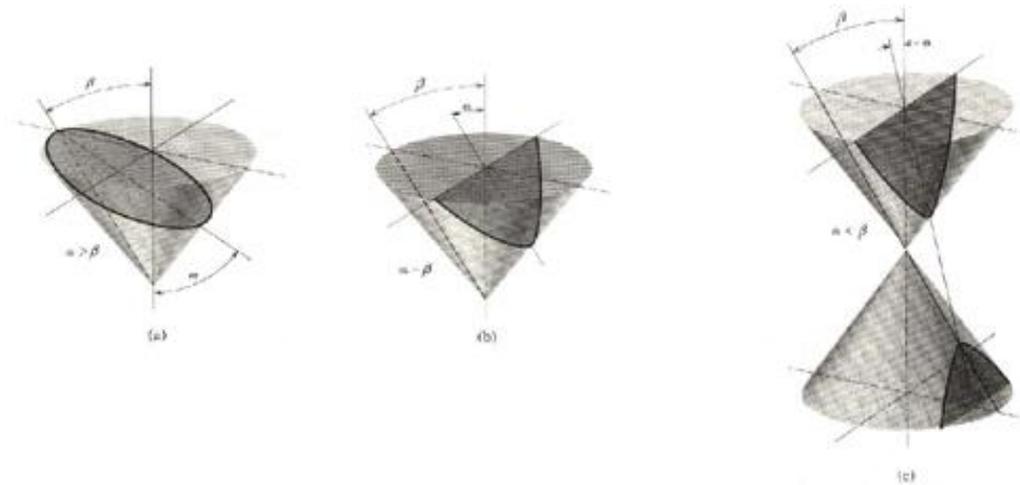


Figura 430. Obtención de las cónicas curvas.

Fuente: Extraída con fines didácticos de Thomas, 1980:526.

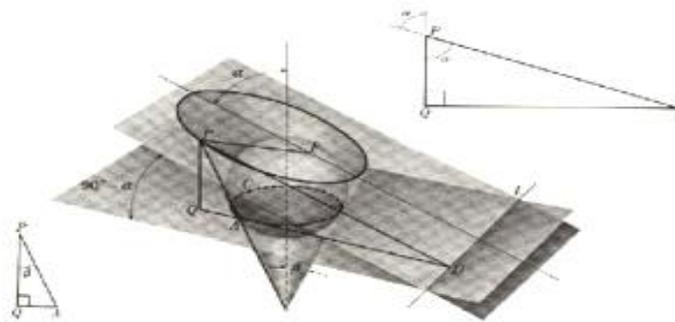


Figura431. Determinación geométrica de la excentricidad ante la intersección de un plano secante a una superficie cónica.

Fuente: Extraída con fines didácticos de Thomas, 1980:527.

Como α y β son constantes para una superficie cónica y un plano secante dados, la ecuación [1] adopta la forma

$$PF = e.PD,$$

que caracteriza a p como perteneciente a una parábola, una elipse o una hipérbola de foco F y directriz L, según que $e = 1$, $e < 1$ ó $e > 1$, respectivamente, donde

$$e = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

se identifica con la excentricidad.” (Thomas, 1980:525 y ss.)

Bibliografía

- ALBA, R. & MORENO, I. (2004). *Elementos de ingeniería romana*. Congreso Europeo de Ingeniería Romana. 3-6 noviembre 2004. Tarragona. Colegio de Ingenieros Técnicos de Obras Públicas.
- AMERIO, C. & CANAVERO, G. (1996). *Tecniche ed elementi costruttivi*. Torino. Editado por Società editrici internazionale.
- ANGERER, F. (1982). *Construcción laminar. Elementos y estructuración*. (3^{ra} edición). Barcelona. Editorial G. Gili.
- ANTON, H. (1980). *Calculus with analytic geometry*. New York. Editorial J. W. and sons, Inc.
- BLUME, H. (1981). *Cobijo*. Madrid. Shelters Publications.
- _____ (1986). *La Construcción de la Arquitectura. Técnica, Diseño y Estilo*. Madrid. Editor Michael Foster.
- BOI, L, FLAMENT, D; & SALANSKI, J-M. (1992). *1830-1930: A Century of Geometry: Epistemology, History and Mathematics*. Conference Proceedings. Berlin. Springer-Verlag.
- BOYER, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid. editorial Alianza Universidad Textos.
- CANDELA, F. (1962). *Hacia una nueva filosofía de las estructuras*. Buenos Aires. Ediciones 3.
- _____ et al. (1993). *Arquitectura Transformable*. Sevilla. Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Sevilla.
- CARMO, M. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Englewood Cliffs. Prentice-Hall.
- _____ (1994). *Differential forms and applications*. New York. Springer-Verlag.
- CARMONA Y PARDO, M-J. (1983). *Matemáticas para arquitectura*. México. Editorial Trillas.
- CATALANO, E. (1962). *Estructuras de superficies alabeadas; Combinaciones de paraboloides hiperbólicos*. Colección Buenos Aires. Editorial Universitaria.
- CONSALVI, S. et al. (2001). *Ciudad universitaria de Caracas. Patrimonio Mundial*. Caracas. Editorial Diagrama.
- CORDERO, L., FERNÁNDEZ, M., & GRAY, A. (1995). *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica®*. Wilmington. Addison-Wesley iberoamericana.
- CHING, F. (1993). *Arquitectura: forma, espacio y orden*. México. Ediciones G. Gili.
- DE LA TORRE CARBO, M. (1978). *Geometría descriptiva*. (2^{da}. Edición). México. Dirección General de Publicaciones. Universidad Nacional Autónoma de México.
- DÍAS COMAS, C. & ADRIÀ, M. *La casa latinoamericana moderna, 20 paradigmas de mediados del siglo XX*. Barcelona, Editorial G.G.

Bibliografía

- EDWARD, C. & PENNEY, D. *Cálculo con geometría analítica*. 4^{ta}. Edición. México. Editorial Prentice Hall.
- ENGEL, H. (1997). *Sistemas de estructuras*. Barcelona. Editorial G G.
- FABER, C. (1970). *Estructuras de Candela*. Editorial Continental. México.
- FULLER, B. (1983). *Inventions: The patented works*. Martin's Press. New York.
- GARCÍA BACCA, J. (1987). *Elogio de la técnica*. Editorial Anthopos. Barcelona. 1987.
- GOLDBERG, M. (1980). *Guía de las edificaciones contemporáneas en Venezuela. Caracas, Parte I*. Trabajo de Ascenso en el escalafón universitario. Facultad de Arquitectura y Urbanismo. UCV.
- GRAY, A. (1998). *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica®*. Boca Ratón. CRC Press.
- _____ (1993). *Modern differential geometry of curves and surfaces*. Boca Ratón. CRC Press.
- GRAY, A., MEZZINO, M., PINSKY, M. (1997). *Introduction to ordinary differential equations with Mathematica®. An integrates multimedia approach*. Santa Clara. Springer-Telos.
- GROSSMAN, S. (1988). *Álgebra Lineal*. México. Grupo Editorial América.
- HODGKINSON, A. et al. (1976). *Estructuras*. Madrid. Editorial Blume.
- HOLGATE, A. (1997). *The art of structural engineering. The work of Jörg Schlaigh and his team*. Stuttgart. Edition Axel Menges.
- JENSEN, C. HELSEL, J & SHORT, D. (2002). *Dibujo y diseño en ingeniería*. México. Mc Graw Hill.
- KLETENIK, D. (s/f). *Problemas de geometría analítica*. Moscú. Editorial Paz.
- LARSON R. et al. (1996) *Cálculo con geometría analítica*. Vol. 2. (5^{ta} edición). Madrid. Mc Graw Hill.
- LEITHOLD. L. (1973) *Cálculo con geometría analítica*. México. Editorial Harla.
- MATAIX, C. (1957). *Tratado de geometría analítica*. 5^{ta} edición. Madrid. Editorial Dossat.
- MATHEWS, J.; & FINK, K. (2000). *Métodos numéricos con Matlab®*. (3^{ra} edición). Madrid. Prentice-Hall.
- MOHOLY-NAGY, S. (1964). *Carlos Raúl Villanueva y la arquitectura de Venezuela*. Caracas. Editorial Lectura.
- OSERS, H. (2006). *Estudio de geometría descriptiva. Tomo I. Proyección cilíndrica*. Caracas. Editorial Torino.
- PACEY, A. (1980) *El laberinto del ingenio*. Barcelona. Editorial G. G.
- PÉREZ. J. & PALACIOS, S. (1998). *Expresión gráfica en la ingeniería. Introducción al dibujo industrial*. Madrid. Prentice Hall.

Bibliografía

- PILARSKI, I. (1935). *Calcule des voiles minces en béton armé*. Paris. Editorial Dunod,
- _____ (1962). *Cálculo de bóvedas cascarones en concreto armado*. México. Editorial Continental.
- PURCELL, E. & Dale Varberg. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México. Prentice-Hall.
- ROMERO, A. (2005). *Enciclopedia de la Matemática*. Tomo III: Geometría. Caracas, Editorial Venelibros.
- _____ (2005). *Estudio sobre las Cónicas*. Caracas, Editorial Innovación Tecnológica.
- SAAD, A. (1985). *Tratado de construcción*. Tomo II. México. Editorial Continental.
- SALVADORI, M. (1968). *Mathematics in architecture*. Englewoods. Prentice Hall.
- SELBY, P. (1988). *Geometría analítica*. Bogotá. Servigraphic.
- STEWART, J. (1999). *Cálculo*. (3^{ra} edición). México. Thompson editores.
- THOMAS, G. (1980). *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*. Madrid. Editorial Aguilar.
- TONDA, J. (2000). *Félix Candela*. México. Consejo Nacional para la Cultura.
- TORROJA, E. (1976). *Razón y ser de los tipos estructurales*. Madrid. Editado por Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y el Cemento.
- VILLANUEVA, M. (2002). *El plano de la cubierta y su geometría. Evolución, clasificación y descripción sistemática de la geometría básica de la cubierta de doble curvatura usadas en la arquitectura. Análisis de tres proyectos de última década*. Trabajo de ascenso en el escalafón universitario. Facultad de Arquitectura. UCV. Caracas.
- WOLFRAM, S. (2004) *The Mathematica® book*. Cambridge. University Press.
- ZEVI; B. (1978). *El lenguaje moderno de la arquitectura*. Buenos Aires. Editorial Poseidón.

Artículo de Revistas

- CANDELA, F. (1959). Les paraboloides hyperboliques les coques, en beton armè. En: *L'architecture d'aujourd'hui*. Nº 23. Septiembre. París.
- CARRILLO, F. (2002). El Príncipe de las Matemáticas. En: *Apuntes de Historia de las Matemáticas*. Vol. 1, mayo 2002. Sonora.
- CHAO, E. Félix Candela, una luz en el corazón. En: *Construcción y Tecnología*. Revista del Instituto Mexicano del Cemento y el Concreto. Diciembre de 2003. México.
- ESCRIG, F. (1993). Arquitectura Transformable. En: *Revista de la Escuela Técnica Superior de arquitectura de Sevilla*. Nº. 1.
- SANZ BALDUZ, L. (1999). El borde libre y Félix Candela. En: *Revista de Obras Públicas*. Nº 3383. Madrid.

Diccionarios

BERMÚDEZ, G. (1993). *Diccionario del Arquitecto*. Caracas. Editorial M.A García.

Diccionario de la Real Academia Española

Documentos electrónicos

- Casiñello, F. (1992). *Estructuras desplegables de Emilio Pérez Piñero*. Murcia. Comunidad Autónoma de la Región de Murcia.
- Duque, C. (2010). *FÉLIX CANDELA. La conquista de la esbeltez*. Recuperado de: <http://www.madrid.es/UnidadWeb/Contenidos/EspecialInformativo/TemaCulturaYOcio/Cultura/Contenidos/CondeDuque/Actividades/CANDELA.Guia.pdf>
- Espion, B., Halleux, P., Schiffmann, J. (2003). *Contributions of André Paduart to the art of thin concrete shell vaulting*. Proceedings of the first International Congress on constructor history. Madrid 20-24 enero - 2003. vol. II. Instituto Juan de Herrera. Escuela Técnica Superior de Arquitectura. Madrid. Disponible en: www.ulb.ac.be/polytech/sgc/album/publicat/Espion_Paper_V4.pdf [Consulta: 14/oct/2006]
- Ibañez, R. & Macho, M. (2004). El Vientre de un arquitecto. (La búsqueda de la forma). En: *Un Paseo por la Geometría 2003/04*. Universidad del País Vasco.
- Segre, B.(1942). , The non-singular cubic surfaces, Oxford. Consultado el día 19 de octubre de 2012 de la world Wide Web: Segre B the non-singular cubic surfaces- Oxford1942.
- Vera, F. (2003). *Descartes y Fermat. Celos mal reprimidos*. Colección Matemáticos célebres. Documento electrónico.

Páginas web consultadas

A. henderson, the 27 lines upon the cubic surface, Hafner, N. Y., 1911

<http://almale.blogia.com/2005/081507-siglo-xix-2-parte-.php>

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Geometria/Conicas_con_regla_y_compas/Lugar_geom.

<http://www.mat.usach.cl/histmat/html/apol.html>

<http://www.mathcurve.com/surfaces/cubic/cubic.shtml>

<http://www.miliarium.com/monografias/Puentes/PuentesMasGrandes.asp>

<http://xtsunxet.usc.es/curvasplanas/curvasplanas.htm>

http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Cuadricas/marco_cuadricas.htm

Hunt : <http://www.math.rutgers.edu/courses/535/535-f02/cubics.pdf>

www.math.lsa.umich.edu/~idolga/topics2.pdf

www.ices.utexas.edu/CCV/papers/cubictog.pdf elaborada por M. Teresa Pérez y Miguel A. Martín.

www.matematicas.unam.mx/gfgf/ga20062/material/Cuadricas.pdf consultada: 31/dic/06

www.sdsc.edu/ScienceWomen/noether.html

www.biografiasyvidas.com/biografia/b/audot_anatole.htm

www.jorge-fernandez.es/charlas/cavalieri.

Glosario

Arriostrados. La riostra es un elemento estructural horizontal de concreto armado u otro material que sirve como amarre entre los apoyos verticales a nivel de las fundaciones.

Cónicas. “Cónica es por definición, el lugar geométrico de los puntos de un plano, cuya relación de distancias a un punto fijo llamado foco y a una recta fija llamada directriz, es constante.

Esta relación de distancias se llama excentricidad, y si es menor que la unidad, la curva será una elipse; si es igual a uno, la curva será una parábola; y si es mayor que uno, la curva será una hipérbola.” (Romero, 2005:9).

Contraflecha. “Ligera curvatura, convexa, que se realiza en una viga o cercha para compensar cualquier flecha prevista cuando soporte un peso. También llamada combadura.” (www.parro.com.ar)

Deposiciones calcáreas. Efecto físico-químico que se produce en el concreto manifestadas por el escurrimiento de sustancias compuestas por carbono que adquieren una coloración blanquecina.

Ferrocemento. “Concreto armado con refuerzos especiales, inventado por Nervi y usado exclusivamente por él en sus obras.” (Bermúdez, 1193:267).

Nota: El ferrocemento no fue empleado exclusivamente por el Arq. Nervi. Se tiene conocimiento de que esta innovación tecnológica de la industria del concreto ha sido aplicado en distintos proyectos, incluyendo propuestas de viviendas de rápido montaje.

Flecha. Distancia vertical desde el punto de arranque de un elemento estructural hasta el punto donde alcanza su máxima curvatura en cota horizontal.

Superficie sinclástica, superficie anticlástica

“Las superficies de doble curvatura, que dan lugar a las estructuras de cascarón propiamente dichas, se clasifican, de acuerdo con su forma en dos grandes grupos:

1. Superficies sinclásticas, también llamadas elípticas por la forma de la ecuación que las representa, en las que las dos curvaturas principales en cada punto están dirigidas en el mismo sentido (Figura 432). El ejemplo más explícito de este tipo es la cúpula esférica.
2. Superficies anticlásticas o hiperbólicas en las que ambas curvaturas principales van dirigidas en sentidos opuestos como en una silla de montar. (figura 433) Quizás el ejemplo más claro y conocido sea el hiperboloide de una hoja que se obtiene retorciendo un cilindro formado por hilos sujetos en dos circuitos de base, dando lugar a una figura parecida a un diávolo.” (Candela, mencionado por Faber, 1970:23).

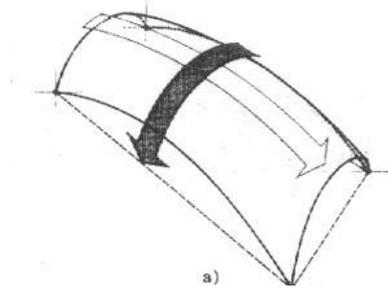


Figura 432. Superficie sinclástica o de generación elíptica.

Fuente: extraída con fines didácticos de Faber, 1970:22.

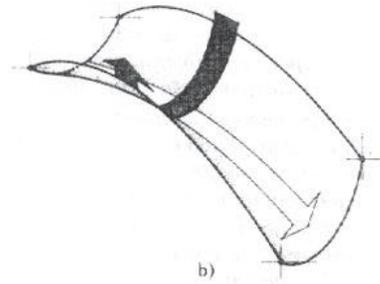


Figura 433. Detalle de una superficie anticlástica o hiperbólica.

Fuente: extraída con fines didácticos de Faber, 1970:22.

Teorema Fundamental del Álgebra

Según Carrillo (2002), Gauss presentó su tesis doctoral publicada en 1799, titulada; “Nueva Demostración del Teorema que Afirma que toda Función Algebraica Racional y Entera de una Variable puede Resolverse en Factores Reales de Primero o Segundo Grado.” (Carrillo, 2002).

El Teorema Fundamental del Álgebra fue un problema que fue abordado por Euler, Lagrange, Descartes, pero fue Gauss quien logró su demostración mediante el uso de números complejos, concepto que también fue aportado por él. Gauss en el TFA definió que “...todo polinomio de grado n , posee, contando las multiplicidades, n raíces.” (Grossman,1988:34).