UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Gestión Sostenible de Recursos Forestales desde el punto de vista del Control Óptimo.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Oscar Humberto Contreras** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutores:
Prof. Luis Antonio Azócar Bates
Dr. José Luis Sánchez Hernández

Caracas, Venezuela
Febrero de 2011

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Gestión Sostenible de Recursos Forestales desde el punto de vista del control óptimo**", presentado por el **Br. Oscar Humberto Contreras**, titular de la Cédula de Identidad **V-6.256.054**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Prof. Luis Antonio Azócar Bates
Tutor

Dr. José Luis Sánchez Hernández
Tutor Académico

Dr. Nelson Merentes
Jurado

Dra. Mariela Castillo
Jurado

Dedicatoria

A Dios...y a la memoria de mi madre..

A toda mi familia...

A amigos y Profesores...

Agradecimientos

Al profesor Antonio Azócar Bates quien gentilmente acepto conducirme en este trabajo...
A los Profesores Nelson Merentes, José Luis Sánchez y Mariela Castillo por su diligente labor en los Seminarios.

Resumen

Cada vez, el hombre se torna más consciente del carácter destructivo que implica el uso no controlado de sus recursos naturales. Y esto, aún en el caso de los renovables que engañosamente se pensaban como ilimitados, dado su carácter regenerativo. De hecho el interés individual a veces lleva a la explotación excesiva de estos recursos, es decir, a un ritmo de utilización superior al de su regeneración natural, a vivir del ***capital*** más que de los ***intereses***. Es lo que sucede cuando hablamos de degradación de los bosques por explotación demasiado intensiva o sobrepastoreo. Pero también es posible usar estos de ***manera sostenible***, esto significa usarlos solo al ritmo que permita su regeneración y no más. La posibilidad de una explotación que reduzca el ***stock*** de un recursos no es meramente teórica. De aquí que en el caso Forestal desde hace casi dos siglos, se suceden en evolución modelos matemáticos ligados al concepto de la optimización de beneficios económicos, como respuestas a los ajustes que por presiones demográficas y de la expansion agraria le imponemos al medio natural. Y más recientemente la tendencia es también incluir en estos modelos los beneficios medioambientales y sociales. El objetivo de este trabajo es estudiar, analizar y explicar mediante el empleo de la teoría de control óptimo la gestión de estos recursos forestales. Además se analizan aspectos éticos sobre el uso de los recursos naturales, por parte de las generaciones actuales, en el marco de la garantía para el uso de las generaciones futuras.

Palabras claves: Bosques, Cálculo de Variaciones, Equidad Intergeneracional, Gestión Sostenible, Formula de Faustmann, Modelo de Gestión Sostenible, Principio del Máximo de Lev Pontryagin, Regla de Hotelling, Sistemas Dinámicos, Teoría de Control Óptimo, Turno de Rotación.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE CUADROS

INTRODUCCIÓN

El medio natural es por una parte proveedor de insumos para el sistema económico y por otra parte asimilador de los residuos generados en estos procesos de producción y consumo. Hasta bien entrado el Siglo XX se consideró implícitamente que el medio natural tenía una capacidad prácticamente ilimitada de cumplir con ambas funciones. En vista de esto, las posibles interrelaciones entre ecología, economía y consumo entre generaciones resultaban muy tenues y tal vez inocuas mutuamente. Esto explica que tradicionalmente los estudios en el ámbito forestal, se hayan realizado desde perspectivas disciplinares independientes. Recientemente este tipo de separación ha entrado en crisis con la aparición de conceptos como el *manejo sustentable*, *usos multiples de las plantaciones* y el *reparto intergeneracional*.

El objetivo general de este trabajo es interrelacionar tales aspectos a partir de la modelación matemática y la teoría de control óptimo. Dado que en las últimas décadas el medio natural ha comenzado a dar claros síntomas de agotamiento, a la vez que muestra una cada vez más reducida capacidad de proveer de recursos al sistema económico. En tal sentido las disciplinas ecológicas y económicas se aproximan considerablemente. En efecto, se reconoce la ≪escasez ≫ del medio natural como respuesta a las demandas que la sociedad ejerce sobre dicho entorno. Por tanto, la gestión óptima de la escasez del medio natural requiere recurrir tanto a la ciencia económica, como a la modelación matemática, para de una manera entrelazada conseguir su gestión racional.

La no aceptación de este tipo de planteamientos puede conducir a contradicciones, así como a manejos poco sólidos científicamente, peligrosas para el equilibrio que necesariamente debe de existir entre el medio natural y las actividades humanas.

Se parte, de la definición institucional de desarrollo sostenible proporcionada en el año 1988 por ≪La Comisión del Medio Ambiente y del Desarrollo≫ de la Organización de las Naciones Unidas (O.N.U.). Este organismo define el desarrollo sostenible como: ≪***un tipo de desarrollo económico que permite satisfacer las necesidades de la generación presente, sin comprometer la capacidad de las generaciones futuras para satisfacer sus propias necesidades***≫. En este orden de ideas, se trata de dar forma a este concepto de carácter puramente económico usando las matemáticas. Situando el interés de los temas en describir, ¿Como? a través de la incorporación de modelos matemáticos naturales de los sistemas biológicos de producción de maderera, se consigue también modelar un comportamiento racional para el aprovechamiento de éstos.

Actuando en el contexto económico, se introduce el estudio de un problema determinado de optimización dinámica, descrito por la ecuación diferencial ordinaria del flujos de crecimiento de cierta cantidad de madera (en píe) denominada biomasa, que evoluciona en el tiempo y que puede ser gobernada ésta por un proceso de control que representan las pautas de **tala** o extracción de la madera. Este control se modela por una función real continua a trozos en cierto intervalo temporal. Finalmente se persigue, la búsqueda de la extremal de un funcional que proporcione el máximo valor de beneficios sobre esta trayectoria denominada óptima, ósea sobre la que se genera a partir de las intervenciones de control. Este trabajo de Grado esta estructurado en 5 capítulos:

- Capítulo 1: Se comienza haciendo un poco de historia describiendo los inicios y principales contribuciones a la optimización (Faustmann, Pressler, Hotelling Fisher y otros..), cuyos preceptos permitieron la evolución hacia mejores practicas de aprovechamiento. El marco legal y la situación de Venezuela en materia de explotación y conservación de estos recursos. Ahí mismo se describen los elementos esenciales biológicos, matemáticos y económicos involucrados en un problema de control adaptado al caso forestal. Así como el métodos del Valor Actual Neto adoptado para este.

- Capítulo 2: Se describen los modelos econométricos signados por pautas de talas que ocurren en puntos temporales ***discretos***, de entre los más importantes y punto de partida figura el *Modelo de Faustmann (1849)*, *Fisher-Hotelling (1925-1930)*, el método de *Boulding* en la década del 60 y *Hartman (1976)* con su innovación de incluir beneficios no madereros compartiendo con otros usos para los bosques. El control en estos modelos puede ser concebido como talar en un solo punto del intervalo temporal, lo cual nos recuerda la función delta de Dirac con peso igual a la cantidad de madera extraída, ubicada en el puntos que llamaremos ***turno óptimo*** el cual no es el mismo para todos los modelos. La intensidad de la cantidad extraída del stock en estos puntos puede ser total, originando el concepto de ***turno de rotación***, o parcial (***podas, entresacas,etc..***). A tales puntos se les suele llamar equilibrios o soluciones de los respectivos modelos, ya que han de cumplir ciertas condiciones de optimalidad.

- Capítulo 3: Se caracteriza el control óptimo en tiempo continuo a través del principio del máximo de ***Lev Pontryagin***, donde el objetivo principal de las estrategias a estudiar se centra en la obtención de una cierta función continua a trozos dentro del horizonte temporal de vida de la plantación, que optimize la función de beneficios y que describa en tiempo continuo la intensidad de las pautas de tala como una aplicación continua del tiempo t, y cuyo fin es dirigir y mantener el stock en niveles máximos y seguros de explotación. Se desarrollan en éste capítulo algunos ejemplos de aplicaciones y una ajustada interpretación económica de la herramienta

Hamiltoniano como procedimiento auxiliar usado en este principio.

- Capítulo 4: Se trastoca la temática de como gestionar la explotación de manera sustentable en tiempo presente, planteándose una fórmula que relaciona el equilibrio intergeneracional (consumo de los recursos entre las generaciones presentes GP y futuras GF), a través de otras perspectivas de aplicación del Valor Actual Neto en inversiones que son rechazables en el presente, pero que a largo plazo se apegan con más eficacia a los criterios de sustentabilidad.

- Capítulo 5: El Resumen y las conclusiones.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO.

De entre las decisiones más importantes dentro de la gestión forestal, la elección del momento de la corta de la masa boscosa para su regeneración o sustitución por otro uso, constituye probablemente la cuestión que encierra mayor repercusión. En efecto, decidir cuando se va aprovechar parte o la totalidad de ésta, trae consigo una serie de efectos que van a condicionar el futuro del sistema forestal considerado. Por ejemplo, desde un punto de vista silvícola se esta programando la regeneración de la masa, mientras que desde el punto de vista económico, supone convertir un valor potencial a un valor tangible. Si se considera al sistema forestal como suministrador de una única producción con valor comercial (la madera acumulada desde la última corta), el turno proporciona el momento en el que se transforma en dinero esa riqueza y además influye en la cuantía de este rendimiento monetario. De aquí, que el cálculo de este tiempo debe ser el óptimo, ya que resulta neurálgico tanto para preservar la rentabilidad de los costes invertidos, como para acoplar estos procesos productivos a la dinámica óptima natural.

En este capítulo se describen los fundamentos multidisciplinales subyacentes para la toma de estas decisiones, desde la perspectiva de la optimización del funcional de beneficios sobre variables de estados modificadas por control, aplicado a modelos dinámicos de crecimiento de la biomasa boscosa. A la vez que presentando los aspectos históricos en la evolución de tales practicas, así como aspectos legales que en nuestro país enlazan las actividades de explotación forestal y el manejo económico.

1.1 Antecedentes.

El análisis económico del problema del ***turno óptimo*** tiene unos antecedentes históricos interesantes ya que este problema, aun teniendo un claro carácter económico, no fue inicialmente atacado por economistas sino por investigadores forestales. En este sentido, la primera formulación suele atribuirse al forestal alemán *Martin Faustmann* [18], que publica una primera aproximación al problema en 1849; posteriormente otros forestal también Alemán (*Pressler* en 1860 [34]) desarrollará los planteamientos iniciales de Faustmann. Por otra parte, y de manera independiente a principios y mediados del siglo XX, el problema del turno óptimo atrae la atención de grandes figuras de la economía, tales como *Ohlin* (1921) [32], *Hotelling* (1925) [38], *Fisher* (1930) [19] y *Boulding* (1935) [6], entre otros. Sin embargo, y curiosamente los puntos de vista de estos economistas fueron en algunos aspectos menos acertados que los de sus colegas forestales, como lo demuestra otro gran economista (*Samuelson* 1976). [41]

En Venezuela, los antecedentes del manejo forestal en el marco jurídico, se encuentran en la década del cincuenta con la implantación de la política nacional de bosques y parques nacionales. Comenzando con la jerarquización de la silvicultura como estrategia de conservación forestal y el reconocimiento del carácter social de los bosques.

Se logra la delimitación de las tierras forestales en terrenos de propiedad de la nación: Parques Nacionales, Reservas Forestales y Zonas Protectoras, creándose de igual forma el ente de educación e investigación forestal, a la par de la modernización de la legislación vigente.

Posteriormente, se incorporan estos conceptos a la Ley Forestal de Suelos y Aguas de 1966. Así como se evidencia el inicio de su ejecución en las Reservas Forestales *Ticoporo* y *Guarapiche*. Esta ley perseguía como objetivos el asegurar el abastecimiento continuo de las materias primas para la industria Nacional, cumplir los principios de rendimiento sostenido, mantener la capacidad productiva sin vulnerar la función protectora del bosque, aplicar las técnicas silviculturales en el bosque bajo manejo, así como, frenar la explotación desmedida, degradación y destrucción de estos.

El Ministerio del Ambiente (antes MARN) entre los años 1977 y 1990, desarrollo el Programa Básico N^{ro} 3: *Manejo del Recurso Bosque, Control de Tala y Deforestación*, cuyos objetivos fundamentales se encontraban enmarcados en la administración de los bosques productores no solo como fuente abastecedora de madera, sino en sus multiples usos en atención a la zonificación de area de producción forestal, areas protectoras de agua, suelo y fauna, adelantar proyectos de investigación forestal; así como fortalecer la educación ambiental.

En el transcurso de estos años se evidencia también la incorporación de las Reservas Forestales Cáparo, San Camilo, Imátaca, el lote boscoso San Pedro y un area boscosa en el Delta del Orínoco. Del mismo modo, se ejecutan y se da seguimiento a 17 planes en 1 millon 225 mil hectáreas de bosque y dos convenios con la Universidad de Los Andes para realizar investigaciones experimentales en Ticoporo y Cáparo.

Es así como nuestro país cuenta con una superficie total de 91,64 millones de hectáreas de bosques naturales y de sistemas naturales de Areas Bajo Regimen de Administración Especial (ABRAE), que agrupa unas 62,99 millones de hectáreas. De ellas unas 15,92 millones están destinadas a la producción forestal permanente bajo la figura de Reservas Forestales, Lotes Boscosos, Areas Boscosas Bajo Protección y una superficie potencial para establecer proyectos de plantaciones forestales cercanas a los 9,3 millones de hectáreas. Además, se han establecidos unas 737.000 hectáreas de plantaciones ubicadas principalmente en los estados Anzoateguí y Mónagas, que forman parte del Patrimonio forestal del país.

Los Planes de Ordenación y Manejo Forestal (POMF), son los instrumentos que orientan el desarrollo de las actividades vinculadas al manejo forestal sustentable y contiene los lineamientos básicos para la administración, ordenación, extracción y reposición de la masa boscosa, considerando la capacidad comercial de acuerdo con las exigencias actuales del mercado y las características del ecosistema boscoso a intervenir.

En el país, se han identificado seis causas principales de conversión de los bosques a otros usos: la ampliación de la frontera agropecuaria, como respuesta a la presión que ejerce la población para cultivar las tierras y satisfacer sus necesidades económicas; la explotación ilegal de madera, por las debilidades en los mecanismos de supervisión y control; las invasiones de tierras destinadas a la producción forestal permanente, principalmente con fines agropecuarios; la actividad minera, por los cuantiosos recursos de los que dispone el país; los incendios forestales, como fenómeno cíclico que se manifiesta todos los años durante la época de sequía y el establecimiento de infraestructuras urbanísticas no planificada.

Las concesiones forestales datan de la década de los años 70, amparadas dentro de un contrato administrativo entre la nación y el empresario manejador del bosque, donde este se compromete a cumplir por un lapso de 30 a 40 años el contenido del Plan de Ordenamiento y Manejo Forestal. Bajo esta modalidad se protege la integridad física de las areas en concesión, además el carácter pasivo o extensivo determinado por la intensidad de aprovechamiento (hasta $6m^3/ha$).

En relación con la producción nacional de madera en rola, durante los años 98 a 99 se evidencio una disminución en el orden de un 20 %, al pasar de 1.192.535,2 m^3 rollizos a 958.016,0 m_3 rollizos, esta reducción se debió principalmente a la caída en la producción de Pino Caribe. Para el año 1999, del volumen de producción total, el 26 % provino de areas con Planes de Ordenación y Manejo Forestal, 62 % de plantaciones de Pino Caribe y 11 % de permisos anuales no sujetos a planes de manejo, permitiéndose así concluir que gran parte del volumen de madera fue obtenido en areas bajo manejo sustentable.

Por otro lado, el volumen de la cubierta forestal en las tierras degradadas, mediante la rehabilitación, restauración, reforestación y otras técnicas de forestación, se ha continuado con el Programa Nacional de Plantaciones Forestales.

El sector publico representado por el M.A., la Corporación Venezolana de Guayana (CVG) y la Compañía Nacional de Reforestation (CONARE) y el sector privado conformado por las empresas Concesionarias Manejadoras del Bosque Natural (ASOINBOSQUES), la Asociación de Plantadores de Venezuela (ASOPLANT)y otros, continúan fomentando y desarrollando proyectos de plantaciones forestales con fines: protectores, de investigación, industriales y de usos multiple, principalmente de las especies: Pinus caribaca, Eucaliptos sp, Gmelina arbórea, Leucocephala, Fraxinus americana, Cupresus lusitanica, Tabebuia rosea, Cerdela odorata, Swietenia macrophylla, Teutona grandis, entre otras. Hasta el 2001, la superficie plantada fue de 736.884 hectáreas, de las cuales un 75 % han sido establecidas por el sector publico.

Hallazgos Claves:

1. Venezuela todavía posee una extensa superficie de bosques vírgenes que ofrecen una fabulosa oportunidad para la conservación y el desarrollo sustentable. Aproximadamente la mitad del país presenta una cobertura vegetal boscosa, con la mayor parte ubicada al sur del río Orínoco, en la región Guayana. - Entre un quinto y un tercio de las tierras boscosas del país han sido protegidas con fines conservacionistas. Los ecosistemas boscosos de la región Guayana albergan una proporción elevada de la fauna silvestre del país y otros recursos no maderables que ayudan a la subsistencia de los pueblos indígenas.

2. Los bosques de la región Guayana están en riesgo debido a la extracción de maderas, la minería, la agricultura y las presiones demográficas. La colonización de los bosques por parte de pequeños agricultores y mineros representa la mayor presión generada sobre los ecosistemas boscosos en la región Guayana. Las presiones poblacionales y los conflictos por uso de la tierra crean el potencial para la pérdida de bosques. El aprovechamiento de maderas, la minería, las comunidades agrícolas y los asentamientos indígenas se solapan a lo largo del territorio del estado Bolívar y, especialmente en la Reserva Forestal Imátaca. Las prácticas vigentes para el aprovechamiento de maderas y la minería promueven la degradación de los bosques y, donde la presión demográfica es alta, facilitan la deforestación de la región Guayana. La situación legal no está clara para la mitad de las áreas protegidas con fines conservacionistas de la región Guayana. Esta falta de claridad es producida por el solapamiento entre áreas protegidas con objetivos de manejo contradictorios (por ejemplo, parque nacional versus reserva forestal) y la indefinición existente acerca de los límites decretados para algunas áreas en los documentos oficiales.

1.2 Bases filosóficas.

Los fundamentos filosóficos que motivan el presente trabajo derivan principalmente de la economía ambiental, la cual permite establecer las bases teóricas para optimizar (en un enfoque multicriterio) el uso del ambiente y los recursos naturales. Por un lado, se presenta como un avance de la economía convencional, ya que, aunque los sistemas naturales son considerados todavía como un telón de fondo o contexto en donde se desarrollan los sistemas económicos, fuentes de recursos y sumideros de residuos, internalizan distintos factores y costes ambientales mediante multiples herramientas promoviendo incentivos que potencian las medidas de reciclado, depuración y reducción del consumo. Por otro lado comprende que la conservación de la funcionabilidad de los sistemas naturales es deseable, pero no puede ser un freno para el desarrollo económico. Por lo que establecen procedimientos normativos y metodológicos de evaluación, además de la minimización de impactos ambientales.

La gestión de Recursos debe servir entonces para ordenar las alternativas existentes y seleccionar entre ellas con un criterio de bienestar, en el que se reconozcan los efectos positivos de la extracción de materiales y los negativos del vertido de contaminantes se pongan en la balanza los usos presentes y futuros, así como los beneficios de ejercer las opciones actuales y los beneficios de la preservación.

En base a lo anterior, la economía ambiental promociona el desarrollo sustentable, enmarca sus políticas en la búsqueda de la armonía del proceso económico con la conservación de la naturaleza favoreciendo un balance entre la satisfacción de necesidades actuales y de las generaciones futuras.

Los principios del desarrollo sostenible parten de la percepción del mundo como "una sola tierra" con un "futuro común" para la humanidad; orientando una nueva geopolítica fundada en el "pensar globalmente" y "actuar localmente"; establece el principio precautorio para conservar la vida ante la falta de certeza del conocimiento científico y el exceso de imperativos tecnológicos y económicos; promueven la responsabilidad colectiva, la equidad social, la justicia ambiental y la calidad de vida de las generaciones presentes y futuras.

Sin embargo, estos preceptos del "desarrollo sostenible"no se han traducido en una ética como un cuerpo de normas de conducta que reoriente los procesos económicos y politicos hacia una nueva racionalidad social y formas sustentables de producción y vida. La ética de la sustentabilidad debe entrañar un nuevo saber, capaz de comprender las complejas interacciones entre la sociedad y la naturaleza.

1.3 Bases legales.

El marco legal en el cual esta basada la investigación de acuerdo con la pirámide jurídica de *Kelsen*[1], las leyes, normas y decretos que respaldan el manejo sustentable de los recursos forestales son las siguientes:

La **Constitución de la República Bolivariana de Venezuela** publicada en gaceta oficial extraordinaria N° 5453, año 1999 artículos **127, 128 y 129** relativos a los derechos ambientales, en su preámbulo señala, entre los fines que debe promover nuestra sociedad, la protección del equilibrio ecológico y de los bienes jurídicos ambientales como patrimonio común e irrenunciable de la humanidad. Se establece la obligación del estado de garantizar un desarrollo ecológico, social y económicamente sustentable.

Plantea la protección del ambiente como prioridad nacional. Establece el deber de proteger y mantener el ambiente en beneficio de si misma y del mundo futuro, el derecho de disfrutar de una vida y un ambiente sano, seguro y ecológicamente equilibrado, por lo tanto, el estado, tiene la labor de proteger el ambiente, la diversidad biológica, genética, los procesos ecológicos y las areas protegidas.

Por otra parte, como una garantía insoslayable para la protección del ambiente, se dispone que en todos los contratos que la Republica celebre o en los permisos otorgados que afecten los recursos naturales se consideren incluida, aun cuando no estuviere expresa, la obligación de conservar el equilibrio ecológico, de permitir el acceso a la tecnología, la transferencia de la misma en condiciones mutuamente beneficiosa, y de restablecer el ambiente a su estado natural si este resultaré alterado, todo ello en los términos que determine la ley.

La **ley Orgánica del Ambiente**, gaceta oficial N° 31.004, año 1976 en su **artículo 3**, señala: *La conservación, defensa y mejoramiento del ambiente comprenderá, entre*

[1]**Kelsen, Hans** fundó el positivismo jurídico en Teoría pura del Derecho (1935).

otros aspectos el control, la reducción o eliminación de factores, procesos o componentes del ambiente que sean o puedan ocasionar perjuicios a la vida del hombre y de los seres humanos, la orientación de los procesos educativos y culturales a fin de fomentar conciencia ambiental, la promoción y divulgación de estudios e investigaciones concernientes al ambiente.

Señala que las actividades susceptibles de degradar el ambiente **(artículo 19)**, quedan sometidas al control del ejecutivo nacional, por una parte y por la otra en su **artículo 20**, dispone que se consideran actividades susceptibles de degradar el ambiente, las siguientes: *Las que directa o indirectamente contaminen o deterioren el aire, el agua, los fondos marinos, el suelo o el subsuelo o incida desfavorablemente sobre la fauna o la flora; las alteraciones nocivas de la topografía; las alteraciones nocivas del flujo natural de las aguas; la sedimentación en los cursos y depósitos de agua; los cambios nocivos del lecho de las aguas; las que producen ruidos molestos o nocivos; las que deterioran el paisaje; las que modifiquen el clima, etc.*

En cuanto a las sanciones, el **artículo 24** establece: *"los infractores a su disposiciones relativas a la conservación, defensa y mejoramiento ambiental serán sancionados con multas, medidas de seguridad o con penas privativas de la libertad".*

La **ley Penal del Ambiente**, asume el concepto de ambiente como una totalidad interdependiente que permite el desarrollo de la vida formando parte de los recursos naturales, ubicando entre los objetivos primordiales del estado y la sociedad.

Tipifica como delitos aquellos hechos que violen las disposiciones relativas a la conservación, defensa y mejoramiento del ambiente y establece las sanciones penales correspondientes. Dispone en su **artículo 5**, Sanciones a las personas naturales, las cuales serán principales y accesorias: entre las sanciones principales están la prisión, el arresto, la multa y los trabajos comunitarios, mientras que las sanciones accesorias, se aplican a juicio del tribunal, entre otras: la inhabilitación para el ejercicio de funciones o empleos públicos; inhabilitación para el ejercicio de la profesión, arte o industria; la obligación de destruir, neutralizar o tratar las sustancias, materiales, instrumentos u objetos fabricados, importados u ofrecidos en ventas,etc.

Además, en su **artículo 4**, expresa que: *"la falta de certeza científica no podrá servir de fundamento para postergar la adopción de medidas preventivas y correctivas que fueren necesarias para impedir el daño a la salud y al ambiente".*

Así mismo, la **Ley Forestal de Aguas y Suelos** publicadas en gaceta oficial de la República Bolivariana de Venezuela en Caracas, el 26 de Enero de 1966 Nº 1004 extraordinario, establece en su **artículo 7** lo siguiente:
La deforestación, la tala de vegetación alta o mediana, las rozas y quemas, desmontes y cualquier otra actividad que implique destrucción de la vegetación, así como también la explotación de productos forestales en terrenos ejidos o de propiedad privada, no podrán efectuarse sin previa autorización de los funcionarios del ramo, quienes la impartirán de conformidad con los requisitos que al efecto establezca el Reglamento. Esta autorización podrá ser negada o revocada cuando exista o surjan impedimentos técnicos o reglamentos que lo determinen.

Además, el **artículo 44** indica:
El aprovechamiento o la explotación de productos forestales, en terrenos de propiedad privada y en los del dominio publico o privado de la Nación, de los Estados y de las Municipalidades no podrán efectuarse sin el cumplimiento previo de las disposiciones de esta Ley. Sin embargo, el Ejecutivo Nacional podrá permitir el libre aprovechamiento en zonas baldías determinadas, de aquellos frutos de especie forestales cuya recolección no perjudique, los árboles que los produzcan. El Reglamento señalara, así mismo, la forma como sera autorizado el aprovechamiento de tales frutos en determinadas zonas ubicadas en ejidos o en terrenos de propiedad privada.

En el último estadio de la pirámide encontramos el decreto 2214, gaceta oficial N° 4418 del 27-04-1992 ***"Normas para la administración de actividades forestales en reservas forestales, lotes boscosos, areas boscosas bajo protección y areas boscosas en terrenos de propiedad privada destinadas a la producción forestal permanente."*** del cual se muestran las definiciones de uso forestal, actividad forestal, reservas forestales, lotes boscosos, areas boscosas bajo protección y areas boscosas en terrenos de propiedad privada.

Artículo 2: Definición de uso forestal... "la utilización de los espacios con o sin cubierta boscosa, mediante la practica del manejo para la producción permanente, la protección, investigación, recreación, conservación y fomento del recurso bosque, orientado a su desarrollo de una manera sustentable".

Artículo 3: Definición de actividad forestal: "Se entenderá por actividad forestal, a los efectos de estas normas aquellas labores que se ejecuten para el logro de la producción forestal permanente, la protección, investigación, recreación, conservación y fomento del recurso bosque, orientado a su desarrollo de una manera sustentable".

Artículo 4: Definición de reservas forestales, lotes boscosos, areas boscosas bajo protección y areas boscosas en terrenos de propiedad privada destinadas a la producción forestal permanente a los efectos de estas normas se entenderá por:

1. Las reservas forestales: Son aquellas areas creadas por el ejecutivo nacional en terrenos baldíos y otros que fueren de propiedad de la nación, constituidas por macizos boscosos que por su situación geográfica, composición cualitativa y cuantitativa o florística, o por ser los únicos disponibles en la zona, constituyan elementos indispensables para el mantenimiento de la industria forestal.

2. Lotes Boscosos: Son areas del patrimonio forestal nacional que se pueden encontrar tanto en tierras del dominio publico como privado de la nación, y que debido a

sus características y potencialidades, deben destinarse a la producción permanente de productos forestales a través de planes de ordenación y manejo forestal, sin menoscabo de sus funciones protectoras, recreacionales y científicas, bajo el criterio del rendimiento continuo o sostenido.

3. Las areas boscosas bajo protección: Compuestas por las zonas de bosques altos, primarios o secundarios que existen en el territorio nacional.

4. Areas boscosas en terrenos de propiedad privada: Destinadas a la producción forestal permanente (conocidas como lotes boscosos): son aquellas areas declaradas por medio de resolución del Ministerio de Ambiente y de los Recursos Naturales Renovables [Ministerio del Poder Popular para el Ambiente], ubicadas en terrenos de propiedad privada y destinadas a la producción forestal permanente bajo planes de manejo...

1.4 Bases teóricas.

1.4.1 Valor actual neto (VAN) de una inversión.

El hombre haciendo uso de su intelecto cultural en su evolución en sociedad, aprendió a conferir diferentes tipos de valoraciones a los diversos objetos u otros, que le resultaban útiles en su supervivencia. De aquí que pronto confronto la necesidad de preservar el valor de estos en el tiempo, ya que cualquier cambio en la interacción necesidad-objeto, repercutía en su capacidad de supremacía, status social y en general para su supervivencia. Comprendió, pues la importancia del intercambio entre estos, y fijo patrones standards para tales fines. Una de la prerrogativas fundamentales de esta dinámica, consistió en decidir cuando trasladar el valor especifico de tales bienes hacia otros, justo antes del momento cuando se sospechase que su desvalorización empezaría a ocurrir a consecuencia de elementos nuevos en la dinámica. Se puede decir con esto, que lo operante del principio establece: conservar el equivalente del valor poseído de los bienes en el tiempo, sin mayores apegos al tipo de bien que se posee.

Otro aspecto importante, obsviando diatribas y hechos históricos que confluyeron al estado de desarrollo actual del manejo financiero, descansa en el principio descrito como la *"capacidad de los bienes en generar más bienes"*, conocida con el nombre de *interés* o valor del dinero.

Desde la parábola de los talentos relatada en la Biblia (Mt, 25, 14.), por citar un ejemplo referencial, el *interés* fue considerado como fuente de creación de más dinero, a través de la modalidad del préstamo a cierta tasa o cantidad de retorno al inversor, ligado a la noción de la abstención del sujeto económico de consumir en el presente a fin de obtener una recompensa a futuro. En ambas operaciones clásicas (ahorro y préstamo) las tasas de interés serán las que determinen el atractivo para dejar de consumir ahora y ahorrar, o solicitar un préstamo para un fin económico determinado, entrando en funcionamiento la aparición de dos variables importantes: el *Capital* y el *tiempo* transcurrido.

De esta manera, para una cantidad conocida V_0 de Capital, que representa el valor monetario inicial de un bien, se pode estipular un comportamiento de crecimiento V_f a futuro, medido en alguna unidad de alejamiento en el tiempo t, tal que nominé tanto la cantidad inicial, como el aporte de crecimiento relativo $i = \frac{V_f - V_0}{V_0}$, ganado en dicho periodo de tiempo considerado como vida de la inversion. De esto, para cierto periodo de tiempo fijo t, siendo t un numero entero de ciclos, la regla estipula que:

$$V_f(t) = (1+i)^t V_0.$$

De igual manera, una cantidad V_f que se proyectase se haría efectiva a un tiempo futuro t_f. Se puede conocer su equivalente financiero a tiempo presente $V_p(t)$, midiendo el alejamiento temporal al presente $t_f - t_p = t$, a través de la relación inversa:

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^t} = V_f(1+i)^{-t}. \tag{1.1}$$

Ya contando con esta concepciones y con el refinamiento, de multiples herramientas de cálculo matemático se perfeccionaría aun más este principio, fundamentando uno de los métodos más usados para el análisis de inversiones.

Definición 1.1. [5] ***Valor actual neto VAN***. *Es un procedimiento de cálculo sencillo basado en la ecuación 1.1, que permite calcular el valor presente V_p, de un determinado número de flujos de caja a futuro V_f, originados por una inversión en tiempo presente.*

La metodología consiste en traer a tiempo presente mediante una tasa o interés (i), todos los flujos de caja futuros del proyecto. A este valor se le resta la inversión inicial, de tal modo que el valor obtenido es el valor actual neto del proyecto. La fórmula que nos permite calcular el Valor Actual Neto emulando (1.1), para el caso discreto es:

$$VAN = \sum_{t=1}^{n} \frac{V_t}{(1+i)^t} - K. \tag{1.2}$$

Donde V_t representa los flujos de caja en cada periodo t,
K es el valor del desembolso inicial de la inversión,
n es el número de períodos considerado y el tipo de interés es i.

Ejemplo 1.2. *Supongamos que se invierte la cantidad de 10 millones de unidades monetarias (m.u.m.) en un lote boscoso, para el cual se ha determinado que se podrán extraer en cosechas consecutivas cada 5 años, de producciones madereras valoradas en 5 millones de unidades monetarias, durante un periodo de vida de 30 años.-¿Determine el VAN de la inversion, a una tasa de interés de endeudamiento del capital invertido del 15 % anual?. Aplicando la ecuación (1.2), Se tiene que:* $K = 10$ *(m.u.m.)*
para $t = 0, .., n = 30$

$$V_t = \left\{ \begin{array}{lll} 5(m.u.m.), & Si \quad t \in & \{5, 10, 15, 20, 25, 30\} \\ 0, & & en \quad caso \quad contrario \end{array} \right\}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
VAN &= 5\sum_{t=1}^{30}\frac{1}{(1{,}15)^t}-10\\
&= 5(\frac{1}{(1{,}15)^5}+\frac{1}{(1{,}15)^{10}}+\frac{1}{(1{,}15)^{15}}+\frac{1}{(1{,}15)^{20}}+\frac{1}{(1{,}15)^{25}}+\frac{1}{(1{,}15)^{30}})-10\\
&= 5(0{,}973)-10\\
&= -5{,}130 \quad m.u.m
\end{aligned}$$

En la toma de decisiones financieras su valor permite discriminar intuitivamente el grado de riesgo o conveniencia de una inversion, con sentido práctico dado que si el flujo total de caja a futuro, traídos a tiempo presente no supera el gasto derivado de la inversion(resultado negativo en el ejemplo), el valor de endeudamiento del capital invertido que se generaría a partir de ese momento, consumiría los beneficios de la misma y por tanto se debería rechazar el proyecto.

VAN	Significado —	Decisión a tomar
$VAN > 0$	Producirá Ganancias —	Aceptar la inversion
$VAN = 0$	Mantiene igual la inversion —	Usar otro criterio
$VAN < 0$	Producirá Perdidas —	Rechazar la inversion

Cuadro 1.1: Aceptación o rechazo de una inversion basado en el (V.A.N.)

Otra manera igualmente útil de vislumbrar el rendimiento de una inversion cuando no se tiene certeza de la conveniencia en adoptar determinada tasa de interés i, es igualar los flujos de retorno descritos por el VAN a la inversion, y proceder a calcular este parámetro. En este caso el parámetro i pasa a llamarse ***TIR*** (tasa interna de retorno) y es la tasa minima de rentabilidad que nos asegura que podemos aceptar el proyecto. Es decir para valores menores al TIR el cálculo del VAN resultara negativo y por consiguiente debemos rechazar la propuesta de inversion.

1.4.2 Adaptación al caso forestal.

En el contexto de una *Inversion Forestal*, adoptaremos en lo sucesivo el procedimiento descrito por 1.2 (en sus dos versiones discreta y continua), al momento de asignar la función de valoración a las diferentes propuestas para la medición de los beneficios en los diferentes modelos de producción maderera. Representados por los flujos de la cantidad de madera multiplicada por su precio en el mercado y descontando los costos de explotación.

Definición 1.3. [7] **Acumulación continua de un capital** (**Interés compuesto**). *Supongamos que se acumulan intereses anualmente sobre un capital V, operando a un tipo de interés fijo i, el capital inicial se habrá convertido en $V(1+i)^t$ al final de este año. Ahora bien, Si esta acumulación se realiza semestralmente (dos veces en el mismo año) durante el mismo periodo, equivalentemente al tipo de interés a aplicar resulta $i/2$ y el periodo se modifica a $2t$, como ya se mencionó. Con esto el capital V se convertiría en $V(1+i/2)^{2t}$. En general si acumulamos intereses m veces al año, el capital V después de t años pasara a ser $V(1+i/m)^{mt}$. Se dice que un capital V se acumula a un tipo de interés continuo i si asumimos que m tiende a infinito, en otras palabras la capitalización resulta instantáneamente.*

Calculando el limite:

$$\lim_{m\to\infty} V(t)(1+i/m)^{mt} = V(t)e^{it}.$$

Por tanto la tasa de acumulación continua de intereses en función del tiempo viene dada por e^{it}, implicando al mismo tiempo que una determinada cantidad V_0 colocada a este ritmo de reconversion, evolucionara de acuerdo a la ecuación $V(t) = V_0e^{it}$, a futuro o inversamente puede ser traída al presente $V_p = V_0e^{-it}$, siguiendo estos resultados correlativamente.

Ahora bien, desde un punto de vista puramente económico lo que determina que un bien se mantenga en determinada condición o estado[2] es que la capacidad de producir más valor financiero de este, sea mayor o igual a la tasa promedio operante en el contexto de su mercado de capitales. Lo que es lo mismo a afirmar por ejemplo, que un árbol permanecerá en pie, mientras acumule capital a un ritmo mayor o igual a que lo haría a futuro su valor presente, colocado en ese momento en el mercado en forma de una nueva inversion. Esto explica por ejemplo, en esta lógica que se taparían grandes cantidades de árboles si el propietario de estos bienes avizorara una fuerte bajada de los precio de la madera en un horizonte temporal cercano.

Usando (1.1), para un único periodo (T) y usando la forma de reconversion continua sobre el total de los flujos de cajas V_t, para $t \in [0, T]$ tenemos que:

$$VAN = \sum_{t=t_o}^{t_1} \lim_{m\to\infty} \frac{V_t}{(1+\frac{i}{m})^{mt}} - K = \sum_{t=t_o}^{t_1} \frac{V_t}{e^{it}} - K = \sum_{t=t_o}^{t_1} V_t e^{-it} - K. \tag{1.3}$$

Donde V_t representan los flujos de caja que ocurren en este caso en puntos temporales discretos. Si se consideran los flujos provenientes de la función de crecimiento continua de la biomasa (producción de madera), del sector boscoso o plantación, multiplicado por el valor de la madera en el mercado a lo largo de este periodo. La expresión para este tiene la forma:

$$VAN = \int_{t_o}^{t_1} \lim_{m\to\infty} \frac{V_t}{(1+\frac{i}{m})^{mt}} dt - K = \int_{t_o}^{t_1} \frac{V_t}{e^{it}} dt - K = \int_{t_o}^{t_1} V_t e^{-it} dt - K. \tag{1.4}$$

1.5 El control y la optimización dinámica.

La gestión de los recursos naturales trata sobre la planeación de sus pautas temporales de explotación. Por ejemplo en este estudio figuran las interrogantes: ¿Cuando? y ¿Que cantidad de árboles deben talarse o dejarse en la plantación? Las respuestas a este tipo de interrogante por la naturaleza propia del problema, se encuentran enmarcadas en la

[2]Es decir que no exista la necesidad inmediata de convertirlo en un valor tangible o darle otro uso redituable

resolución de problemas de control óptimo sobre sistemas dinámicos. Donde modificando ciertos parámetros de este, se generan ciertas salidas o respuestas del sistema que pueden ser medidas for una función de beneficios hasta procurar las más óptimas. A este proceso se le conoce como optimización dinámica.

1.5.1 Elementos del problema de control.

Definición 1.4. ***Planteamiento del Problema de control.***
Un Problema de Control *consiste en seleccionar, de un conjunto especifico o arbitrario de elementos (parámetros , configuraciones, funciones de tiempo, etc.), aquellos que aplicado a un sistema fijo, hagan que este se comporte de una cierta manera deseada.*

Ejemplo 1.5. *Seleccionar el punto de apoyo de la palanca de un regulador del nivel (del agua), para que la altura del liquido en el recipiente se mantenga constante sin importar la variación del gasto de consumo constituye una acción de control sobre un sistema.*

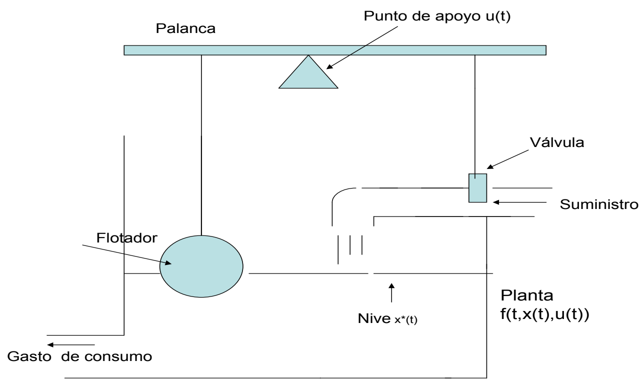

Figura 1.1: Planta reguladora de nivel

Ilustramos este ejemplo fig. (1.1), describiendo su funcionamiento y poniendo de relieve los elementos primordiales identificados en un problema típico de *Control*. Así pues; al escapar el liquido por el conducto de salida (gasto), el nivel del liquido tiende a bajar y desequilibrar la posición del flotante el cual pende rígidamente de uno de los extremo de la palanca, equilibrio que se consigue con el contrapeso de la valvula sujeta al otro extremo, y que dejara pasar más o menos caudal de entrada según la abertura de esta. Por tanto la ubicación del punto de apoyo de esta palanca, determinara que tanto se pronunciara la abertura de la válvula acusando una respuesta especifica de ingreso y un tiempo para la estabilización del nivel del liquido, cuando se produzca gasto.

De lo anterior extraemos tres elementos en común en todo Problema de Control los cuales son:

- Uno llamado ***Entrada (**$u(t)$**)***, se puede modificar (Localización del punto de apoyo de la palanca en el ejemplo).
- Otro llamado ***Salida*** $x^*(t)$, con las característica deseadas de comportamiento para el sistema (Variación del nivel del liquido que se desean fijas).
- Otro tercero llamado ***Planta (**$F(t, x(t), u(t))$**)***, que relaciona la entrada con la salida que no puede ser modificado (Relaciones mecánicas del sistema, Ley de Gravedad, Principio de la palanca, etc..).

En atención al Problema de explotación forestal, identificaremos la entrada o ***control*** con las practicas de la ***tala***, la cual modelamos por una función continua a trozos a excepción de puntos temporales discretos, a lo largo del intervalo de vida de la plantación. En cuanto a la ***salida***, se quiere mantener un ritmo óptimo de extracciones de madera dejando siempre una cantidad adecuada de biomasa, para que se active su regeneración.

La planta en este caso, la conforma el sistema biológico natural donde crece la masa boscosa, y puede entenderse abstractamente éste como una función biológica que permite transformar los elementos: luz, agua, oxígeno, nutrientes en el subsuelo, etc; en la producción de madera. Esta, se constituye de amplios sectores plantados con árboles de una misma especie y longevidad más o menos diferenciados denominados *rodales* , donde se alternan *corta y replantación* con cierta periodicidad entre estos.

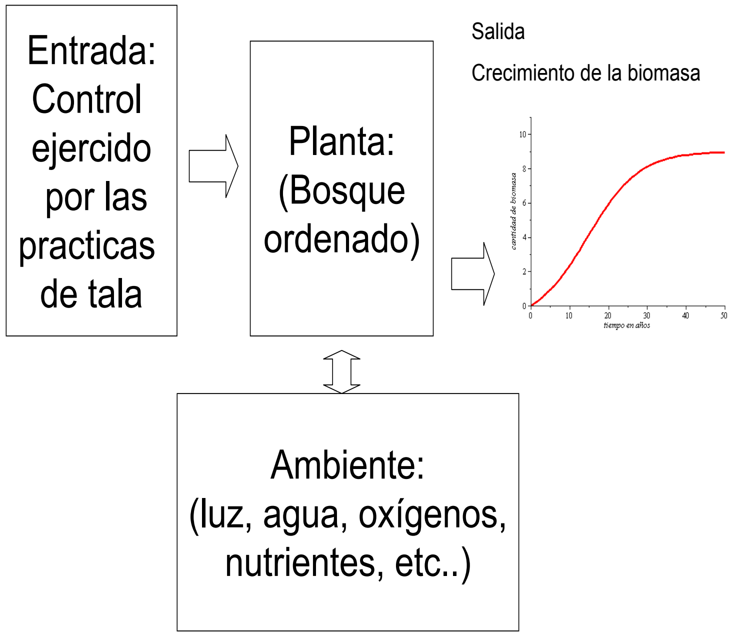

Figura 1.2: Esquema de un sistema controlado de producción maderera.

La explotación de recursos naturales renovables plantean un problema sencillo, solo en apariencia, y esto es así, ya que sus procesos regenerativos están gobernados por fenómenos biológicos descritos por sistemas dinámicos, siendo uno de los casos más representativos el referido a los recursos forestales.

Sin la intervención humana, la cantidad de biomasa del recurso forestal $x(t)$ se comporta en forma logística, es decir, su variación (crecimiento), se apega a la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t)(r - \frac{r}{k}x(t)) = F(x(t)). \tag{1.5}$$

Donde r es la tasa de crecimiento de la especie plantada y k es la capacidad maxima de árboles plantados que puede soportar el rodal o terreno plantado. La ecuación (1.2) tiene por solución:

$$x(t) = \frac{x_0 k}{x_0 + (k - x_0)e^{-rt}}. \tag{1.6}$$

Donde x_0 es la cantidad inicial a partir de la cual empezara a crecer la biomasa.

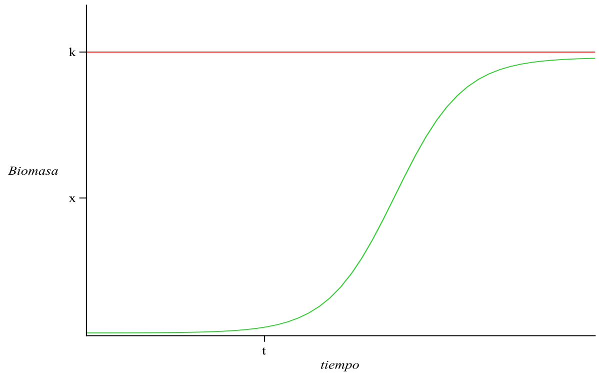

Figura 1.3: Evolución natural de la biomasa en el tiempo, $x(t)$.

Como puede verse en la gráfica sigmoidal mostrada en la figura (1.3). Al comienzo este crecimiento es lento, debido a que la cantidad de biomasa también es pequeña. Después, crece aceleradamente, para terminar con incrementos cada vez menores, estabilizándose en un valor de biomasa k, el llamado nivel de equilibrio natural, que representa la cantidad de biomasa hacia la que tenderá de una manera natural la población si no existen intervenciones ajenas, y que constituye el nivel máximo de biomasa que el medio ambiente puede soportar. La función que describe esta gráfica la denominaremos Stock o existencias, constituyendo el flujo de capitales representados por V_t, en la ecuación de valoración 1.4.

La función de la rapidez con que se incrementa la biomasa $x(t)$, en el punto temporal t, $F(x(t))$ descrita por (1.2), se denomina ***crecimiento marginal***, esta representa la mejor aproximación al valor futuro inmediato del stock en una unidad de tiempo posterior. La sustracción (tala) siguiendo esta, traerá como consecuencia el mantenimiento constante del stock de manera indefinida en el tiempo.

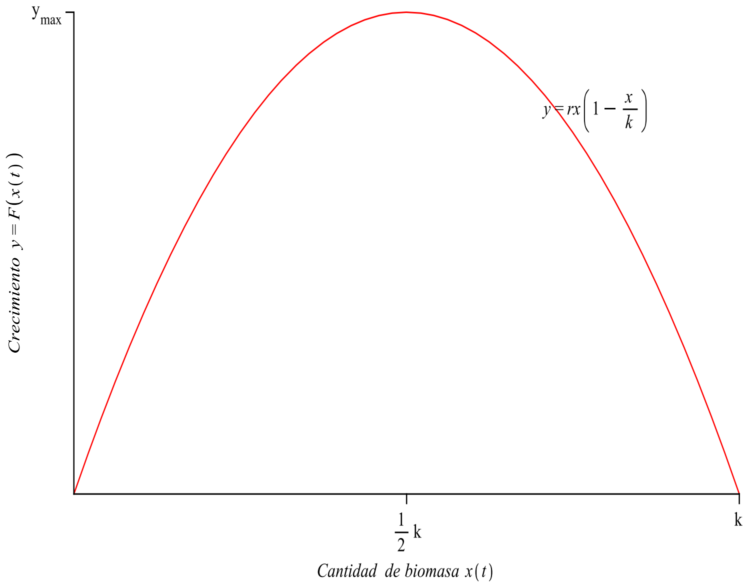

Figura 1.4: Crecimiento marginal de la biomasa forestal $x(t)$.

1.5.2 Planteamiento del Control Óptimo.

Se basará en la manera óptima de gobernar el flujo dinámico, descrito por la ecuación (1.5), $x(t)$ (cantidad de Biomasa en el tiempo) llamada ***variable de estado***. Esta evolucionara en el periodo de tiempo $[t_0, t_1]$ a partir de cierta condición inicial de estado x_0, y también de cierta función ***u(t)***, sobre la cual se tiene cierto control (de aquí que se llame a esta ultima, ***variable de control***), la cual influye en el comportamiento de crecimiento de $x(t)$, para que haga máximo el funcional que mide los beneficios (***Función objetivo***).

Ejemplo 1.6. Control discreto. *Si a un flujo de la biomasa x(t), que evoluciona según* *la Figura 1.3, le aplicamos una entrada de control puntual como la función delta de Dirac con cierto peso, que consiste en talar en el tiempo* t_0*, una cantidad de biomasa cercana a la existente, y no cortar en ningún otro punto del intervalo* **Corta total** *(Clear-Cutting), se tendrá como respuesta del sistema que a partir de este punto se induce el comienzo de un nuevo ciclo de crecimiento. A este proceso se le conoce con el termino de* **Turno óptimo de rotación**. *Otro tipo de modalidad de control discreto son las* **entresacas** *o podas, como función de eliminación de aquellos individuos débiles o con malformaciones, y a la vez para que la distribución de nutrientes del suelo y luz solar favorezca a los individuos con más potencial para desarrollarse. Esta se realiza retirando una cantidad menor o igual a la tasa de crecimiento para ciertos instantes. Según se muestra en la siguiente figura (1.5). :*

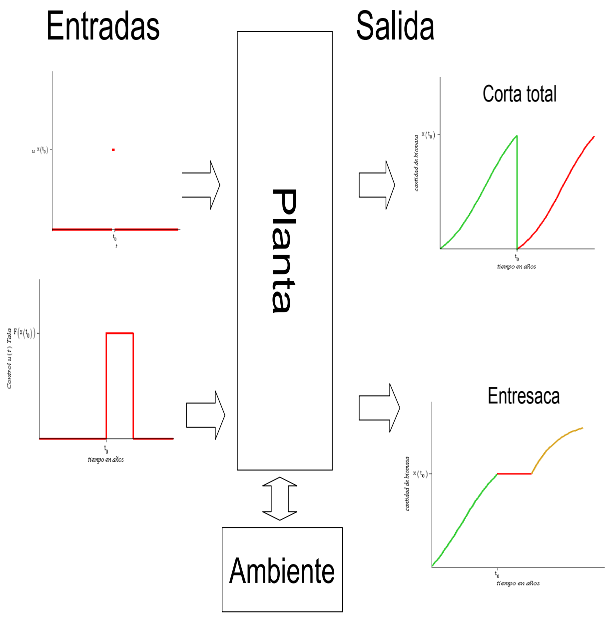

Figura 1.5: Respuesta del sistema a una entrada de control discreto.

Ejemplo 1.7. Control continuo. *Un caso muy ilustrativo es cuando se desea que la curva stock de la biomasa, evolucione hasta alcanzar cierto curva previamente considerada como óptima, se mantenga en esta durante cierto periodo y luego evolucione o siga creciendo en forma natural. Para luego proceder a la corta como se muestra en el siguiente esquema figura (1.6).*

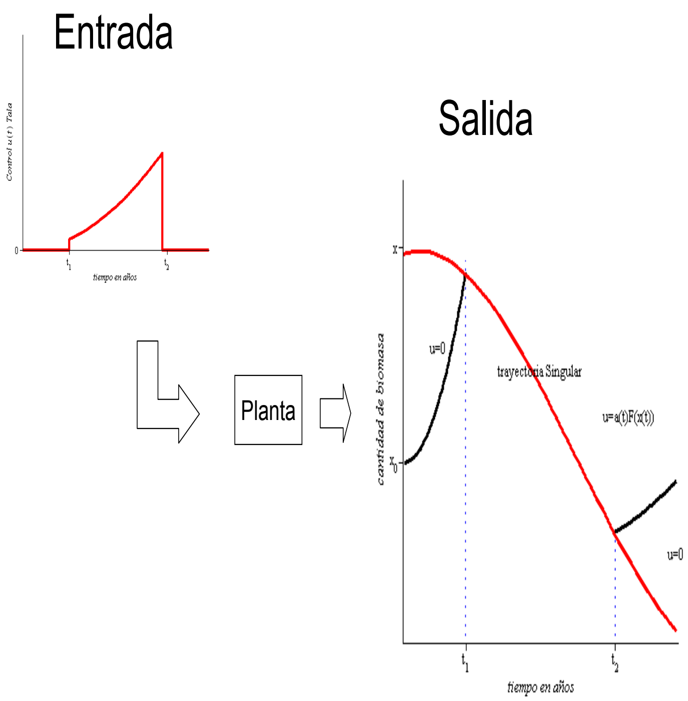

Figura 1.6: Respuesta a una entrada de control continuo.

1.5.3 Basamento del control sustentable

Basaremos aquí la sustentabilidad como aquella política de extracción del recurso, que se puede mantener indefinidamente a lo largo del tiempo, sin que disminuya la biomasa existente. Esto es, si consideramos el intervalo temporal $[t, t + \Delta t]$, podemos retirar la cantidad de biomasa $x(t+\Delta t) - x(t) = \Delta x$, la cual representa la capacidad de producción media en el intervalo, dejando la misma cantidad de biomasa $x(t)$ para la regeneración de la cantidad substraída, que podrá ser retirada al final del proximo periodo igual de tiempo. Por tanto, haciendo tender a cero Δt, la tasa de extracción sustentable intrínseca tiende a $x'(t) = F(x)$, llamada producción marginal, la extracción a este ritmo hace que los valores de la biomasa permanezcan constantes en el tiempo, a partir del tiempo t en que se practique la tala. Figura (1.7).

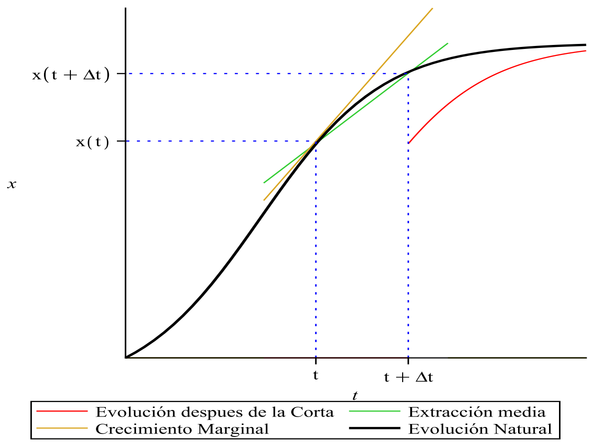

Figura 1.7: Dinámica de extracciones basadas en la sustentabilidad.

De esta manera, los recursos forestales gestionados bajo alguna forma de propiedad privada o común, que impidiendo el libre acceso a estos permitan una planificación sobre su ritmo de plantación como deposito renovable de madera y teniendo en cuenta el futuro, se pueden representar,en el problema de maximización condicionada planteado en un contexto intertemporal, en donde la variable objetivo a maximizar, es el valor actual neto (VAN) del flujo de rendimientos que la explotación del recurso generara a lo largo de toda su vida útil. El problema queda propuesto de la siguiente manera:

$$\max_x \left(VAN = \int_0^T [P(t)u(t) - C(x)]e^{-it}dt \right). \tag{1.7}$$

Sujeto a

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - u(t).$$

Donde P es el precio esperado de la madera, C su costo de explotación o mantenimiento incluyendo la replantación e i la tasa de rentabilidad operante en el mercado de inversión.

La variable u representa la cantidad substraída del stock en el medio natural, la cual esta representa las pautas de control, conformadas por las talas que pueden ser cortas totales, parciales o entresacas, en tiempos discretos, y/o como funciones continuas a trozos dentro del horizonte temporal.

Despejando u de la restricción dinámica del dominio, esto es $u(t) = F(x(t)) - x'(t)$ y sustituyendo en la función objetivo, se tendrá el siguiente problema enmarcado en la teoría de la optimización dinámica:

$$\max_x \left(VAN = \int_0^T [P(t)F(x(t)) - x'(t) - C(x)]e^{-it}dt \right). \tag{1.8}$$

En la cual el planteamiento es de la forma:

$$\max_x \int_0^T F(t, x(t), x'(t))dt. \tag{1.9}$$

1.5.4 Uso de la optimización dinámica

Definición 1.8. [38] ***La Optimización Dinámica.***
La Optimización Dinámica es una rama del cálculo en las matemáticas que estudia la optimización de sistemas dinámicos, es decir, de sistemas que evolucionan en el tiempo. Se trata de guiar o controlar el sistema de manera óptima a lo largo de un intervalo temporal dado, de acuerdo con un objetivo previamente fijado.

Desde la perspectiva del problema económico forestal, supongamos una economía con un único bien de consumo cuya cantidad es denotada por $y \geq 0$, obtenida a partir de un recurso forestal, utilizando como entrada su cantidad de biomasa $x \geq 0$, de acuerdo con la función de producción $y = F(x)$, que se supone es de clase C^2. Aquí nos referiremos a la optimización dinámica, en su forma discreta o continua, como la maximización de un *Funcional*[3], cuya variable de elección óptima $x(t)$, depende tanto de su estado temporal, como de la tasa de cambio representada por su derivada a lo largo de todo el horizonte de planeación temporal, esto es:

$$\max_{x} \int_{0}^{T} F(t, x(t), x'(t))dt. \tag{1.10}$$

Sujeto a

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad x_{t0} = x_0.$$

Si bien el problema anterior (1.10), puede resolverse por métodos clásicos del cálculo de variaciones (Condiciones de optimalidad de *Euler*, desarrollada en el capítulo 3), el mismo puede ser generalizado para considerar situaciones más especificas en donde por ejemplo se consideren ciertas restricciones sobre la derivada de la función de estados $x(t)$, como es el caso: $x'(t) = f(t, x(t), u(t))$.

Considerando lo anterior, se enuncia el planteamiento básico de control óptimo en tiempo continuo como:

$$\max_{x} \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u(t))dt.$$

Sujeto a:

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)).$$

$x(t_0) = x_0$, $x(T)$ esta fijado o puede ser libre y $u(t) \in U$ para todo $t \in [0, T]$.

[3]función sobre las variables del modelo, que toma valores reales (beneficios) y que mide el comportamiento del sistema dinámico, llamada también función objetivo.

En donde F y f son funciones continuamente diferenciables en todos sus argumentos, $u(t)$ es una función continua a trozos y $x(t)$ continuamente diferenciable.

Ejemplo 1.9. *Tomando como trayectoria de estado la evolución natural de la biomasa $x(t)$ en el plano (t,x) (curva en color Rojo). Es decir, sin control de tala ($u = 0$) y para costos de inversion cero ($K = 0$). La Función Objetivo toma la forma: $F(t, x, u) = Px(t)e^{it}$ (superficie tridimensional), y el Funcional que mide el comportamiento del sistema lo conforma el VAN, representado por la integral sobre la imagen de $x(t)$ sobre esta gráfica (curva tridimensional de color Verde sobre la superficie), esto es:*

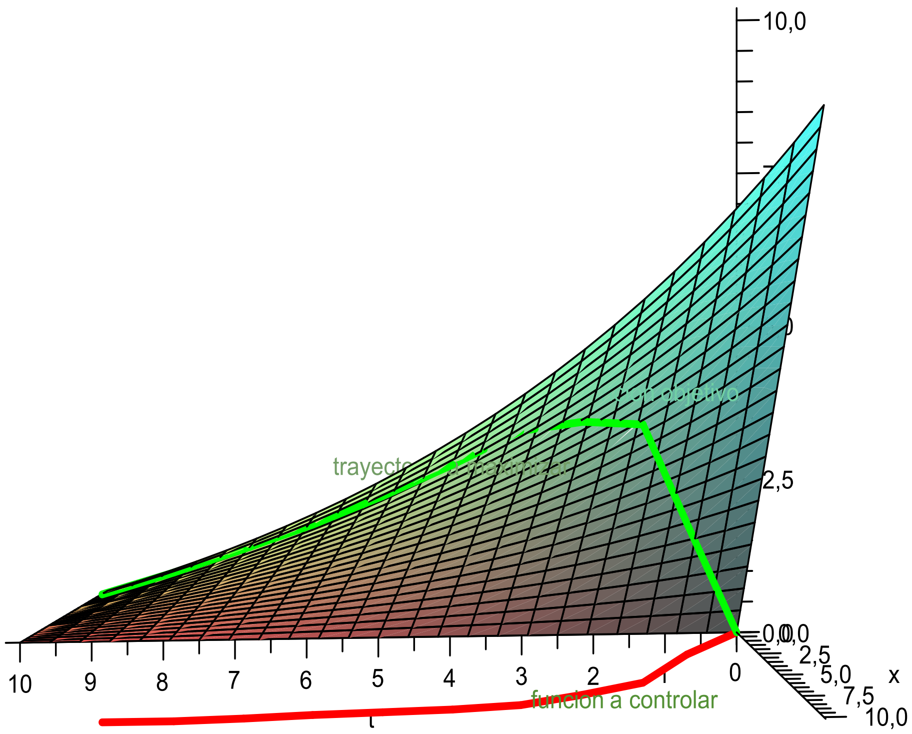

Figura 1.8: Gráfica de un problema de Optimización Forestal.

CAPÍTULO 2

MODELOS ECONOMÉTRICOS DISCRETO: EL TURNO DE ROTACIÓN.

La econometría, igual que la economía, tiene como objetivo expresar una variable en función de otras. Partiendo del modelo económico, cuando se han añadido las especificaciones necesarias para su aplicación empírica. Es decir, cuando se han definido las variables (endógenas, exógenas) que explican y determinan el modelo, los parámetros estructurales que acompañan a las variables, las ecuaciones y su formulación en forma matemática.

A partir del modelo, en una segunda etapa se procede a la estimación, fase estadística que asigna valores numéricos a los parámetros de las ecuaciones del modelo. Para ello se utilizan métodos estadísticos como pueden ser: Mínimos cuadrados, Máxima verosimilitud, etc. Al recibir estos parámetros el valor numérico definen el concepto estructural que ha de tener valor estable en el tiempo.

La tercera etapa en la elaboración del modelo es la verificación, donde se someten los parámetros y la variable aleatoria a contrastes, para cuantificar en términos probabilísticos la validez del modelo.

Con esto, los modelos econométricos adoptados en explotación forestal para los fines de la optimización de ganancias, es el que describe cuantitativamente los beneficios de retorno de una inversion a su valor presente (VAN), como función de las variables de producción, Precios y costes, así como las interacciones del mercado representado por la tasa de interés usada en los descuentos temporal. Estos modelos parten de vieja data y se sitúan en los primeros intentos de la economía por describir de manera formal la dinámica de sustracción de los recursos forestales.

2.1 Turno técnicamente óptimo forestal.

Los recursos forestales poseen el carácter destructible-renovables. Para evitar la extracción total del material forestal se divide la zona en donde se realiza la actividad de *silvicultura*[1] en rodales[2] de manera de establecer alternancia y sincronismo en los ciclos de corta y replantación, y así garantizar un flujo constante de la producción maderera.

De manera que en lo que concierne a un rodal en especifico representativo del colectivo sembrado es determinar el tiempo de vida o momento óptimo de *corta*[3]. Para empezar a entender los fundamentos económicos que modelan el comportamiento de este mercado, tomemos la *curva*[4] dinámica del stock de la biomasa en estudio, tal como:

$$q = x(t). \tag{2.1}$$

Donde q representa la producción de madera a nivel *dendrométrico* (m^3/árbol) o a nivel *dasométrico* o de masa forestal (m^3/ha.) y $x(t)$ es la curva de producción ya estudiada.

Empíricamente, se corrobora que este tipo de funciones en forma Sigmoidal, que reaparecen justamente como dinámicas de soluciones de ecuaciones diferenciales en modelos

[1]Tipo de agricultura donde el periodo de la cosecha se caracteriza por largos periodos de tiempo medidos en años y cuyo objeto de plantación son árboles de gran potencial maderero

[2]Sectores o parcelas debidamente diferenciadas con un mismo tipo de plantación

[3]optimal rotation periodo en la literatura inglesa

[4]en la mayoría de los casos la obtención de esta curva es a través de métodos de ajuste estadísticos

demográfico, poseen las propiedades usuales de la teoría de producción:

1. $x'(t) \geq 0$; Productividad marginal positiva. Lo cual significa que el stock maderero se incrementa con el paso del tiempo, hasta alcanzar el máximo valor de sustentabilidad del sistema en el tiempo -t_{max}- a partir del cual al menos teóricamente la producción de madera desciende.

2. $x''(t) \leq 0$; función cóncava hacia el origen y convexa a la derecha del punto de inflexion (t_0, q_0) y hacia el punto -t_{max}- (ver figura 2.1).

Desde el punto de vista técnico es más realista maximizar la función de producción promedio $\bar{q}$, así el turno técnicamente óptimo (t_0), lo obtenemos derivando respecto al tiempo e igualando a cero dicha función:

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \frac{d[\frac{x(t)}{t}]}{dt} = \frac{x'(t)t - x(t)}{t^2} = 0$$

de donde obtenemos que t_0 satisface la siguiente ecuación, conocida como condición de equilibrio o turno óptimo, punto de partida o referencia para los diferentes modelos aportado por los autores más destacados en la literatura:

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t}. \tag{2.2}$$

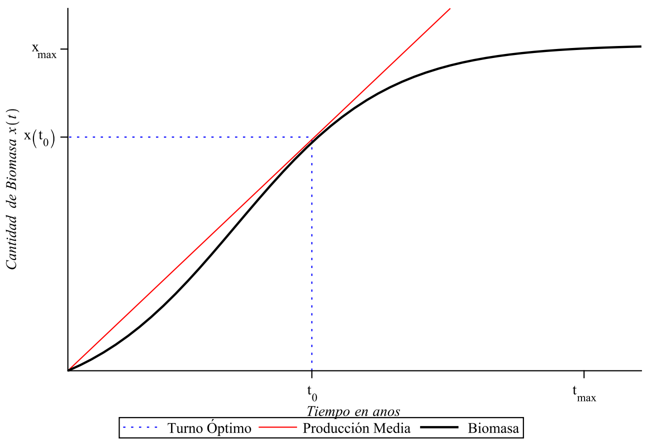

Figura 2.1: Ubicación del Turno Óptimo.

Ejemplo 2.1. *El ajuste estadístico para la especie Pinus radiata en Cerdeña mostró:*

$$q = x(t) = -7,9725t + 2{,}7664t^2 - 0{,}0999t^3 + 0,0012t^4$$

$$x'(t) = -7,9725 + 5,5328t - 0,2997t^2 + 0,0048t^3$$

$$x(t)/t = -7,9725 + 2,7664t - 0,0999t^2 + 0,0012t^3$$

Aplicando (2.2) y calculando nos queda: óptimo técnico 27 años, q= 473 m3/ha y q/t= 17,50 m3/ha.

Es decir, para esas masas de Pinus radiata la máxima cantidad de madera que puede extraerse de una manera sostenible es 17,50 m3/año. Este turno que estamos estudiando tiene un claro atractivo desde un punto de vista biológico, pero no es necesario que tenga que poseer propiedades óptimas desde un punto de vista económico. Para analizar el turno óptimo desde un punto de vista económico, tendremos que ampliar el análisis introduciendo parámetros económicos como el precio de la madera, los costes de plantación o de regeneración natural de la masa, la influencia del tiempo en el valor del dinero (esto es, la tasa de descuento, etc..).

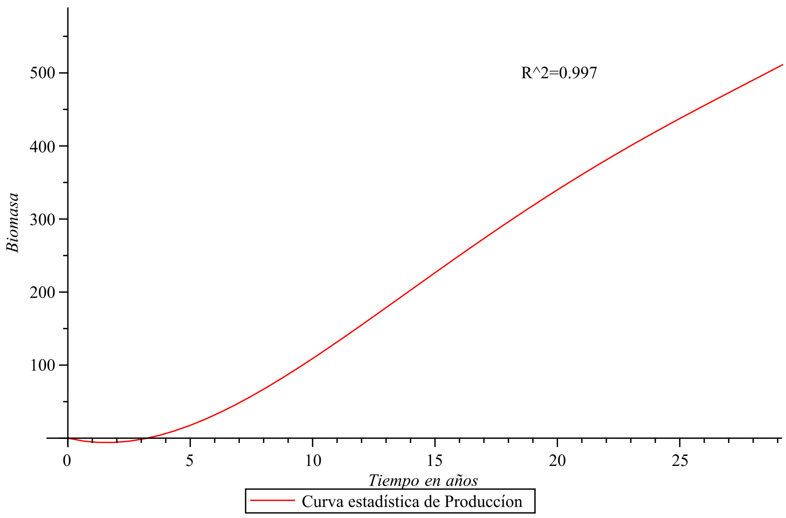

Figura 2.2: Gráfica obtenida por ajuste para la especie Pinus radiata.

2.2 Solución (turno) de Fisher-Hotelling.

En este estudio llamamos solución de determinado modelo, al tiempo t_o que satisface su condición de equilibrio. En el apartado anterior se describe formalmente la valoración de una inversion a tiempo presente para un solo periodo de corta. Así pues ahora, introducimos elementos externos a la pura tecnología de producción, como lo es el precio de la madera, el tipo de interés, coste, etc.., de importancia en la teoría económica de decisión para determinar el tiempo óptimo de corta.

Comenzamos por traer el planteamiento de *Fisher (1930)* [19] y *Hotelling (1925)* [38], los cuales concordaron en definir el turno óptimo como aquel que maximiza el VAN de la forma:

$$\max_t \quad (Px(t)e^{-it} - K). \tag{2.3}$$

Donde P es el precio de la madera, i el tipo de interés y K el coste de la plantación.

Analizaremos primero, por simplicidad el caso para el cual el precio es constante a lo largo del periodo. De acuerdo con esto, derivamos respecto a t e igualamos a cero:

$$\frac{d}{dt}VAN = Px'(t)e^{-it} - iPx(t)e^{-it} = 0 = x'(t) - ix(t).$$

De donde se extrae la condición de equilibrio dada por:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = i. \tag{2.4}$$

Si queremos garantizar que t_0 se trata de un máximo, ha de cumplirse que $\frac{d^2VAN}{dt^2} < 0$, Para lo cual tendríamos:

$$\frac{d^2VAN}{dt^2} = \frac{d\frac{d(VAN)}{dt}}{dt} = \frac{d}{dt}(Px'(t) - iPx(t)) = Px''(t) - iPx'(t) < 0.$$

Bastara que se satisfagan los supuestos ya contemplados en el primer apartado, a saber:

1. $x' > 0$ (Regiones I y II de la función de producción).

2. $x'' < 0$ (Carácter decreciente de las productividades marginales).

Retomando el análisis del significado de la condición de equilibrio. Se desprende que, si el crecimiento relativo maderero $\frac{x'}{x}$ es igual al tipo de interés el empresario es indiferente a cortar o no, si $\frac{x'}{x}$ supera al interés le conviene esperar, y caso contrario le conviene cortar.

Otro aspecto que resulta interesante comentar, es el hecho de que si igualamos el valor del stock retrasando un año más la corta, esto es $Px(t) + Px'(t)$, al valor del stock si decido cortar y colocar la venta de la madera a un interés i en el mercado, es decir $Px(t) + iPx(t)$, se tiene que:

$$Px(t) + Px'(t) = Px(t) + iPx(t).$$

Cancelando a ambos lados $Px(t)$ se llega a la misma condición de equilibrio jevoniano[5], Así se plantea que si una cantidad x, de un recurso puede dedicarse a dos usos, la asignación óptima (la cantidad a emplear en cada uso) se alcanzará cuando la utilidad marginal del primer uso sea igual a la utilidad marginal del segundo, lo que supone maximizar la utilidad

$$\frac{x'}{x} = i.$$

Lo que nos dice que el *valor marginal* de no cortar $Px'(t)$, es igual al coste marginal de cortar o *valor financiero* de la madera $iPx(t)$.

Comparando el turno técnico descrito por (2.2) y el de *Fisher-Hotelling* (2.4), se tiene que:

$$i = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{x'(t)t}{x(t)t} = \frac{x'(t)}{q}\frac{1}{t} = \frac{1}{t}.$$

[5]De acuerdo con W. Jevons (1835-1882) [26], el principio de equimarginalidad constituirá un elemento básico de la economía de los recursos.

Este resultado sirve para dilucidar aspectos tales como, que tipos de especies modelan un comportamiento estándar de mercado dependiendo del tipo de interés.

Ahora, pasemos al caso donde la función del precio depende del tiempo $P(t)$, por lo tanto:

$$\max_{t} \quad (P(t)x(t)e^{-it} - K). \tag{2.5}$$

Derivando e igualando a cero la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
\frac{d(VAN)}{dt} &= \frac{d[P(t)x(t)e^{-it} - K]}{dt} \\
&= P'(t)x(t)e^{-it} + P(t)x'(t)e^{-it} - iP(t)x(t)e^{-it} \\
&= (P'(t)x(t) + P(t)x'(t) - iP(t)x(t))e^{-it} \\
&= (\frac{P'(t)}{P(t)} + \frac{x'(t)}{x(t)} - i)e^{-it} = 0.
\end{aligned}$$

Esta claro, que podemos dividir por $P(t)x(t)e^{-it}$ por su carácter positivo para todo t, de aquí que la condición de equilibrio resultante es:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} + \frac{x'(t)}{x(t)} = i. \tag{2.6}$$

Análogamente como había de esperarse esta constituye una generalización del caso anterior (2.4), y cuya interpretación es que para que convenga cortar hace falta que los crecimientos relativos del precio de la madera y la producción no supere el tipo de interés, con lo que con esto estamos diciendo que crecimientos sostenidos de la producción conllevan a turnos más largos.

El modelo se completa con la introducción de términos que aplican en desembolsos por concepto de pagos fijos (G), que ocurren desde el instante inicial hasta t y se consideran relevantes. De manera que (2.5) se transforma en:

$$\max_{t} \quad P(t)x(t)e^{-it} - K - G\int_0^t e^{-is}ds.$$

Equivalentemente resolviendo la integral:

$$\max_t \quad P(t)x(t)e^{-it} - K + \frac{G}{i}[e^{-it} - 1]. \tag{2.7}$$

Nuevamente derivando e igualando a cero:

$$\begin{aligned}
\frac{d(VAN)}{dt} &= \frac{d[P(t)x(t)e^{-it} - K + \frac{G}{i}(e^{-it} - 1)]}{dt} \\
&= P'(t)x(t)e^{-it} + P(t)x'(t)e^{-it} - iP(t)x(t)e^{-it} - Ge^{-it} \\
&= P'(t)x(t) + P(t)x'(t) - iP(t)x(t) - G = 0.
\end{aligned}$$

De donde se tiene que la condición de equilibrio resultante es:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} + \frac{x'(t)}{x(t)} - \frac{G}{P(t)x(t)} = i.$$

En la cual, se observa que la introducción de los pagos induce tiempos de cortas más reducidos.

2.3 Solución de Faustmann-Pressler-Ohlin. (Infinitos ciclos.)

El modelo anterior, omite por ejemplo tener en cuenta el valor del suelo como el caso en que el propietario decida cortar antes del tiempo óptimo y arrendar el terreno a otro agricultor obteniendo proporcionales dividendos, es decir el modelo se comporta asumiendo que los costes de oportunidad o rentas se aproximen a cero (oferta de suelo ilimitada por tratarse de un solo ciclo). Tales aspectos resultan superados en dos planteamientos en apariencia diferentes pero que como se vera arrojan iguales resultados:

El primero de estos dos, atribuidos a *Samuelson* introduce en el cálculo del VAN la inversion en el valor de la tierra R, con el VAN correspondiente:

$$\max_t \quad Px(t)e^{-it} - K - R\int_0^t e^{-is}ds. \tag{2.8}$$

De modo que al calcular la condición de equilibrio:

$$\begin{aligned}\frac{d(VAN)}{dt} &= \frac{d[Px(t)e^{-it} - K + \frac{R}{i}(e^{-it}-1)]}{dt} \\ &= Px'(t)e^{-it} - iPx(t)e^{-it} - Re^{-it} \\ &= (Px'(t) - iPx(t) - R)e^{-it} = 0.\end{aligned}$$

Ahora, entendiendo que el valor R se ha obtenido como capitalización del valor total del suelo $R = iV$, sustituyendo en la última ecuación se tiene que por condición de equilibrio:

$$\begin{aligned}Px'(t) - iPx(t) - R &= Px'(t) - iPx(t) - iV \\ 0 &= Px'(t) - i(Px(t) + V) \\ Px'(t) &= i(Px(t) + V). \qquad (2.9)\end{aligned}$$

El segundo de los planteamientos sugerido por *Faustmann* [18], consiste en considerar una cadena infinita de ciclos de cortas de igual duración y al usar iterativamente la formula original del VAN (1.2), donde cada vez que se abre el n-ésimo nuevo ciclo, hay que trasladar los flujos de estos para cada t a valor presente y esto conlleva en multiplicar estos por el factor de descuento $e^{-(n-1)i)t}$. De aquí que es conducente al siguiente VAN:

$$\max_t \quad [Px(t)e^{-it} - K][1 + e^{-it} + e^{-2it} + e^{-3it} + ...]. \tag{2.10}$$

El factor que contiene las sumas en (2.10) converge a $\frac{1}{(1-e^{-it})}$, por tratarse de una serie geométrica de razón e^{-it}, así que el VAN correspondiente, es la conocida *Formula de Fustmann*[6]

$$\max_t \quad [\frac{Px(t)e^{-it} - K}{1 - e^{-it}}]. \tag{2.11}$$

[6]Aunque este, no propuso método alguno para su optimización.

Procediendo de acuerdo a los casos anteriores para encontrar el turno, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d(VAN)}{dt} &= \frac{[Px'e^{-it} - iPxe^{-it}](1-e^{-it}) - [Pxe^{-it} - K](ie^{-it})}{(1-e^{-it})^2} \\ &= [Px'e^{-it} - iPxe^{-it}](1-e^{-it}) - i[Pxe^{-it} - K]e^{-it} \\ &= [Px'(t) - iPx(t)](1-e^{-it}) - i[Px(t)e^{-it} - K] \\ &= Px'(t) - iPx(t) - i\frac{Px(t)e^{-it} - K}{1-e^{-it}} = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

El último termino en (2.12) coincide nuevamente con el Valor actual neto, lo cual equivale al valor que el suelo adquiere por capitalización a tiempo infinito, se tendrá ahora que:

$$Px'(t) - iPx(t) - i\frac{Px(t)e^{-it} - K}{1-e^{-it}} = Px'(t) - i(Px(t) + V). \tag{2.13}$$

Al igual que el enfoque de Samuelson [41], se interpreta de la siguiente manera, es de interés cortar cuando la tasa de cambio con respecto al tiempo del valor posicionado de la masa forestal iguala al tipo de interés multiplicado por el valor de mercado del suelo más el vuelo[7], en otras palabras $Px'(t)$ mide el valor marginal de no cortar, ósea lo que se gana posponiendo la corta, mientras que el termino $i(Px(t)+V)$ mide lo que se pierde por posponer la corta.

2.4 Solución de Boulding: maximización de la Tasa Interna de Rendimiento TIR.

Kenneth Boulding [39], define el turno óptimo como la vida de la masa forestal para la que la tasa de rendimiento interna (TIR) de la inversion subyacente es maxima.

[7]Traslado de capital para la inversión más segura posible para protegerse de una posible pérdida

Recordemos que el TIR es el tipo de descuento para el cual el VAN se hace cero, es decir:

$$\int_0^n R(t)e^{-\lambda t}dt - K = 0 \tag{2.14}$$

donde λ es el valor del TIR, $R(t)$ los flujos de caja, n la vida de la inversion y K el pago de la inversion.

Se considera que una inversion es financieramente viable si el TIR es mayor al coste del capital invertido , es decir su capacidad de endeudamiento, en caso contrario la inversion no es viable.

Procedemos a calcular dicho turno, para lo cual igualamos a cero el VAN de la inversion en la forma de Faustmann, despejando el parámetro λ antes i, el cual se quiere maximiza, con esto:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{Px(t)e^{-\lambda t} - K}{1 - e^{-\lambda t}} \\
0 &= \frac{Px(t) - Ke^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - 1} \\
0 &= Px(t) - Ke^{\lambda t} \quad \text{(Ya que para } t = 0\text{, no se contempla.)} \\
e^{\lambda t} &= \frac{Px(t)}{K} \\
\lambda t &= \ln \frac{Px(t)}{K} \\
\lambda &= \frac{1}{t} \ln \frac{Px(t)}{K}. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Derivando esta expresión (2.15) con respecto al tiempo e igualando a cero, se obtiene la condición de equilibrio buscada:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d(\lambda)}{dt} &= \frac{d[\frac{1}{t}\ln\frac{Px(t)}{K}]}{dt} \\ &= \frac{\frac{KPx't}{PxK} - \ln\frac{Px(t)}{K}}{t^2} \\ &= \frac{1}{t}\frac{x'}{x} - \frac{\ln\frac{Px(t)}{K}}{t^2} \\ &= \frac{x'}{x} - \frac{\ln\frac{Px(t)}{K}}{t} \\ &= \frac{x'(t)}{x(t)} - \lambda. \end{aligned} \tag{2.16}$$

De inmediato percibimos que si la tasa maxima de rendimiento calculada λ coincide con i (lado derecho en 2.16), coincidirán los turnos en Boulding y Fisher-Hotelling, también se deduce que se mantiene el hecho que como en el turno de Fisher-hotelling el turno de Boulding decrece (crece) al crecer (decrecer) el tipo de interés i, lo mismo se evidencia en este turno, deducido directamente por inspección comparando (2.4) y (2.16).

Otro aspecto que se desprende de lo anterior es que en el contexto de las inversiones viables (e.g. $\lambda > i$) mientras más grande sea la diferencia $(\lambda - i)$, más reducidos quedaran los turnos de Boulding respectos a los otros turnos estudiados, aspecto que ha fundamentado en parte las controversias tildándolo de ser poco proteccionista.

$$t_B < t_{FPO} < t_H.$$

2.5 El modelo de Hartman y los beneficios no madereros.

Una forma sencilla de adaptar los planteamientos anteriores para el cálculo de los turnos óptimos en el contexto de usos multiples del bosque fue sugerida por Hartmann en 1976, mediante la introducción de una función de beneficios no madereros (ambientales, recreativos, etc.) que genera un bosque a una edad de t años. Puede decirse que tal función, es una función de producción temporal en la que las productividades marginales nunca se hacen negativas.

Para poder incluir tal función en el modelo económico, razonamos de la siguiente manera. Consideramos un intervalo de tiempo infinitesimal ds por tanto el beneficio en ese pequeñisimo intervalo sera igual a $\pi(s)ds$ y su valor actual $\pi(s)e^{-is}ds$, luego el valor de los beneficios de un bosque a la edad de t años sera igual a:

$$\int_0^t \pi(s)e^{-is}ds. \tag{2.17}$$

Incluyendo esta ecuación en (2.3), tenemos que:

$$\max_t \quad Px(t)e^{-it} + \int_0^t \pi(s)e^{-is}ds - K. \tag{2.18}$$

Luego derivamos con respecto a t e igualamos a cero y aplicamos la regla de Leibnitz para llegar a:

$$\frac{d}{dt}VAN = Px'(t)e^{-it} - iPx(t)e^{-it} + \pi(t)e^{-it} = 0 = (Px'(t) - iPx(t) + \pi(t))e^{-it}. \tag{2.19}$$

Esta nueva condición de equilibrio se interpreta de igual forma a lo -Jevons- , es decir el equilibrio de flujos de servicios madereros, $Px'(t)$ y no madereros $\pi(t)$ (i.e. valor marginal de no cortar) iguala el valor financiero de la madera $ix(t)$.

Seguidamente revisamos la condición de segundo orden para garantizar la existencia de un máximo, esto es derivando (2.19), se llega a:

$$Px''(t) + \pi'(t) < iPx'(t).$$

Se tiene que (2.19), representara un máximo si la pendiente del coste marginal $iPx'(t)$ de cortar, supere el valor marginal $Px'(t) + \pi'(t)$.

CAPÍTULO 3

CARACTERIZACIÓN DEL CONTROL ÓPTIMO EN TIEMPO CONTINUO A TRAVÉS DEL PRINCIPIO DEL MÁXIMO DE LEV PONTRYAGIN.

El objetivo principal a estudiar en este capítulo se centra en la obtención de cierta función continua a trozos, dentro del horizonte temporal de vida de la explotación que optimize la función de beneficios, tal que dicha función describa continuamente la intensidad de las pautas de tala como una aplicación del tiempo t, y cuyo fin sea dirigir y mantener el stock (biomasa) en niveles máximos y seguros de explotación.

3.1 Preliminares matemáticos en tiempo continuo.

En atención a lo anterior, la variable independiente t representara el *tiempo*, siendo $x(t)$ la cantidad de biomasa como la variable dependiente. Sean t_0, t_1 numeros reales tales que $t_0 < t_1$ y consideramos el intervalo de planeación de la explotación como $[t_0, t_1]$. Luego definimos el siguiente conjunto de funciones:

$$\Omega = \{x : [t_0, t_1] \longrightarrow R \mid x \text{ posee derivadas primeras y segundas, continuas en } [t_0, t_1]\}$$

En este conjunto de funciones, se consideran las operaciones usuales de suma y producto por un numero real:

Para $x_1, x_2 \in \Omega, t \in [t_0, t_1]$, se define $(x_1 + x_2)(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Para $\lambda \in R, x \in \Omega, t \in [t_0, t_1]$, se define $(\lambda x)(t) = \lambda \cdot x(t)$.

El conjunto Ω, sobre el cuerpo R, con las dos operaciones definidas, tiene estructura de espacio vectorial.

En Ω, se define ahora la siguiente norma: $\| \cdot \| : \Omega \longrightarrow R$.
Donde:

$$\| x \| = \max_{x \in [t_0, t_1]} |x(t)|.$$

Esta función es una norma llamada la norma del supremo, denotada por $\| x \|_\infty$ que mide o determina la mayor abertura que tiene el gráfico de la función x respecto al eje de las abscisas, usando para ello la composición $\| x \|$.

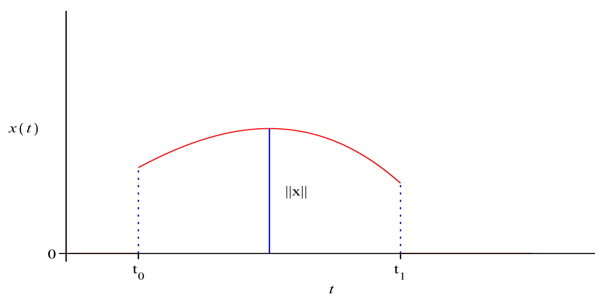

Figura 3.1: Norma del máximo de una función, $\| x \|$.

El espacio vectorial Ω, con la norma definida, es un espacio normado. El cual representa al par $(\Omega, \| \cdot \|)$ donde Ω es un R-espacio vectorial y $\| \cdot \|$ es una función tal que a cada vector $x \in \Omega$, asocia el numero real $\| x \|$, verificando las siguientes propiedades:

1. **Para todo** $x \in \Omega$

   $\| x \| \geq 0, \quad$ y $\quad \| x \| = 0 \quad$ si y solo si $x = 0$.

2. **Para todo** $\lambda \in \ R$ **y** $x \in \Omega$

   $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$.

3. **Para todo** $x, y \in \Omega$

   $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \quad$ (desigualdad triangular).

Con lo que la función $\| \, . \, \|$ (ver página 59), es una norma. La cual induce una distancia definida para $x_1, x_2 \in \Omega$

$$d(x_1, x_2) = \| x_1(t) - x_2(t) \| = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

En la interpretación geométrica de la distancia definida se observa una distancia definida por una función $d : \Omega \times \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ y el valor de cada una de estas funciones en el punto (t, x) es la longitud del segmento que une los puntos t y x:

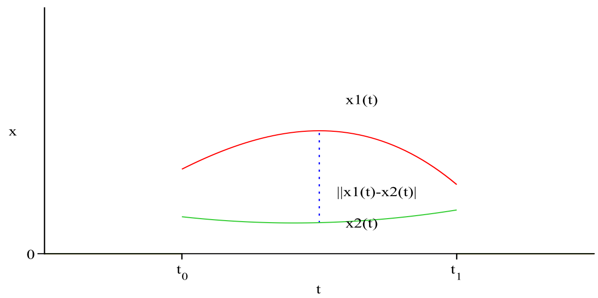

Figura 3.2: Distancia entre dos funciones.

En estas condiciones, se dice que el par (Ω, d) es un espacio métrico. Por otra parte, cuando se habla de una función definida en el espacio métrico (Ω, d), se refiere a una función en Ω, pero haciendo énfasis en la utilización de la distancia d.

Por otro lado, sean $x_0 \in \Omega, \delta \in R, (\delta > 0)$. Se define la bola abierta de centro x_0 y radio δ, de la siguiente forma: $B(x_0, \delta) = \{x \in \Omega : d(x, x_0) < \delta\}$

Cualquier $x_0 \in \Omega$, cuya gráfica este contenida en la franja representada en el siguiente gráfico, pertenece a la bola $B(x_0, \delta)$.

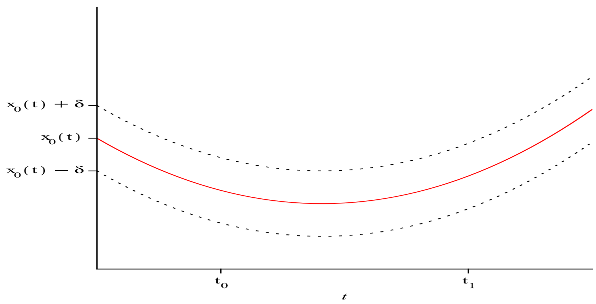

Figura 3.3: Bola abierta de centro x_0 y radio δ.

Definición 3.1. [40] ***Funcional.***
Un funcional es una aplicación cuyo dominio es una estructura basada en un cuerpo y cuyo rango es un subconjunto de dicho cuerpo.

En adelante se consideran funcionales J cuyo dominio es el conjunto Ω y cuyo rango es el conjunto de los numeros R, es decir:

$$\begin{aligned} J:\Omega &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow J(x). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2. *Si a cada función $x \in \Omega$, se le hace corresponder $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} x(t)dt$. Es claro ver que como $x \in \Omega$, es una función continua por lo que es integrable, es decir, $J(x)$ es un numero real, y por tanto se trata de un funcional.*

3.2 Planteamiento del cálculo de variaciones.

En atención a la formulación del problema del cálculo de variaciones para el caso escalar, con extremos fijos t_0, t_1. Se tiene lo siguiente:

Sea F una función de tres variables, de clase $C^2(\Omega)$ (donde $C^2(\Omega)$ quiere decir que posee todas sus derivadas parciales primeras y segundas y estas además son continua en el dominio definido). Se considera entonces el funcional:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt.$$

En donde $\dot{x}(t)$ es la derivada de $x(t)$ con respecto a t.

Luego se trata de encontrar aquella función $x^*(t)$ ($x(t)$ óptima), con derivadas primeras y segundas continuas en $[t_0, t_1]$, verificando que $x^*(t_0) = x_0, x^*(t_1) = x_1$, siendo x_0 y x_1 dados, para que el funcional J alcance el valor máximo o el valor mínimo.

En optimización es habitual considerar solo el máximo (o el mínimo) de la función a optimizar, sin perdida de generalidad, ya que:

$$\min_{x\in\Omega} J(x) \quad \text{es equivalente a} - \max_{x\in\Omega}[-J(x)].$$

El elemento x que minimiza $J(x)$ es el mismo x que maximiza [-J(x)].

El problema en el caso de la maximización es:

$$\max_{x\in\Psi} \Big[J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), \dot{x}(t)]dt\Big]. \tag{3.1}$$

El conjunto de funciones admisibles es:

$$\Psi = \{x \in \Omega| \quad x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1\}.$$

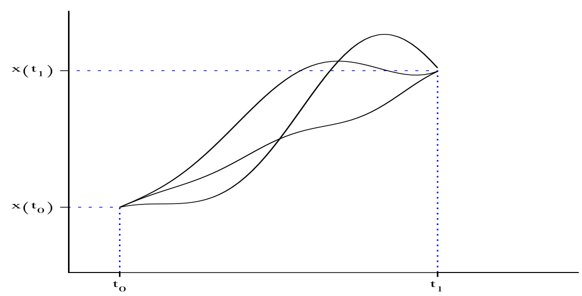

Figura 3.4: Ejemplo gráfico de funciones admisibles.

3.2.1 Condiciones necesarias de optimalidad.

De primer orden: permite obtener candidatos para máximos y mínimos

Teorema 3.3. [9] *Condición de Euler. Sea $x^*(t)$ es un máximo local del planteamiento de maximización anterior, entonces $x^*(t)$ verifica la siguiente condición:*

$$F_x[t, x^*(t), \dot{x^*}(t)] - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}}[t, x^*(t), \dot{x^*}(t)] = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{3.2}$$

En donde F_x es la derivada parcial de F con respecto a su primera variable x, y $F_{\dot{x}}$ es la derivada parcial de F con respecto a su segunda variable $\dot{x}$.

Demostración: Sea $x^*(t)$ un máximo local del problema (3.1) y $\eta(t)$ una función de clase C^2 definida en $[t_0, t_1]$, verificando que $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ y que $\| \eta \| \neq 0$ (Ósea, $\eta(t)$ no vale cero en todos los puntos).

Para cada numero real ε se define la siguiente función: $x_\varepsilon(t) = x^*(t) + \varepsilon\eta(t)$, para $t_0 \leq t \leq t_1$. La cual es representada por la curva punteada en el siguiente gráfico:

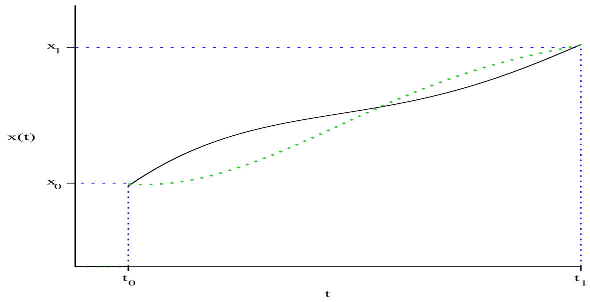

Figura 3.5: Función perturbada $x_\varepsilon(t) = x^*(t) + \varepsilon\eta(t)$.

Para $\varepsilon = 0$, es $x_\varepsilon(t) = x^*(t), \forall t \in [t_0, t_1]$.

Si ε es "pequeño", $x_\varepsilon(t)$ esta cerca de la función $x^*(t)$.

Claramente $x_\varepsilon(t)$ es una función admisible. Para cada $\varepsilon \in R$, ya que:

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t_0) &= x^*(t_0) + \varepsilon\eta(t_0) = x_0 \\ x_\varepsilon(t_1) &= x^*(t_1) + \varepsilon\eta(t_1) = x_1. \end{aligned}$$

x_ε es de clase C^2, por definición de x_ε, siendo x^* y η de clase C^2. Además, por ser x^* un máximo local del problema, se verifica que existe un $\delta > 0$ tal que $x_\varepsilon \in B(x^*, \delta)$.

$$\begin{aligned} J(x^*) &\geq J(x_\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x_\varepsilon(t), \dot{x_\epsilon}(t)]dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F[t, x^*(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{x^*}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t)]dt. \end{aligned}$$

Una vez fijados x^* y η, el valor tomado por el funcional para x_ε depende solo de ε, de allí que se pueda definir que $J(x_\varepsilon) = J(\varepsilon)$, con lo cual se consigue reducir el problema a un problema de maximización de una función de una sola variable real.

Dado que la función $J(\varepsilon)$ alcanza un máximo local para $\varepsilon = 0$, la condición necesaria de optimalidad local, para funciones de variable real asegura:

$$[J'(\varepsilon)]_{\varepsilon=0} = 0.$$

Calculando:

$$J'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\{\int_{t_0}^{t_1} F[t, x^*(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{x^*(t)} + \epsilon\dot{\eta(t)}]dt\}.$$

Utilizando para ello la formula de Leibniz, para el caso particular en donde los limites de integración no dependen del parámetro sobre el que se deriva, es decir: Si $u(\alpha) = a$, $v(\alpha) = b$, y las funciones f y $\frac{d}{d\alpha}$ son continuas se verifica que:

$$\frac{d}{d\alpha}(\int_a^b f(\alpha, z)dz) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha} f(\alpha, z)dz. \tag{3.3}$$

Luego:

$$J'(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\varepsilon} F[t, x^*(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{x^*(t)} + \epsilon\dot{\eta(t)}]dt.$$

Aplicando la regla de la cadena, se obtiene que la expresión anterior resulta:

$$\begin{aligned} J'(\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} \{\eta(t) F_x[t, x^*(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{x^*(t)} + \varepsilon\dot{\eta(t)}] + \\ &= +\dot{\eta(t)} F_{\dot{x}}[t, x^*(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{x^*(t)} + \epsilon\dot{\eta(t)}]\}dt. \end{aligned}$$

Particularmente en $\varepsilon = 0$, se obtiene :

$$\begin{aligned} J'(0) &= 0 \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \{\eta F_x[t, x^*(t), \dot{x^*(t)}] + \dot{\eta} F_{\dot{x}}[t, x^*(t), \dot{x^*(t)}]\} dt. \end{aligned}$$

Simplificando se tiene:

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta F_x dt + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta} F_{\dot{x}} dt = 0.$$

en donde $F_x, F_{\dot{x}}$ están definidas en $[t, x^*, \dot{x^*}]$, y $\eta, \dot{\eta}$ lo están en t. La segunda de las dos integrales anteriores se puede resolver por partes:

$$u = F_{\dot{x}} \Longrightarrow du = \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} dt.$$

Siendo

$$dv = \dot{\eta} dt \Longrightarrow v = \eta.$$

Sustituyendo y ordenando:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \eta F_x dt + (\eta F_{\dot{x}} \mid_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \eta \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} dt) &= \int_{t_0}^{t_1} \eta [F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Considerando el siguiente lema:

Lema 1. [9] Sea f una función continua definida en $[t_0, t_1]$. Sea η una función diferenciable, definida en $[t_0, t_1]$ con $\eta(t_1) = \eta(t_0) = 0$. Si $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta(t)dt = 0$ para toda función η que cumple las condiciones señaladas, entonces $f(t) = 0$, para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Aplicando el lema se obtiene que:

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0.$$

con lo que el teorema queda demostrado.

De lo anterior, se tiene que la ecuación de Euler, para una función $x(t)$ genérica es:

$$F_x(t, x(t), \dot{x(t)}) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x(t)}) = 0.$$

Desarrollando el segundo sumando a partir de la regla de la cadena, derivando con respecto a t se obtiene:

$$F_x - F_{\dot{x}x}\dot{x} - F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} - F_{\dot{x}t} = 0.$$

En donde $F_{\dot{x}x}$ es la derivada segunda (cruzada) de F con respecto a sus variable x y $\dot{x}$, $F_{\dot{x}\dot{x}}$ es la derivada segunda de F con respecto a su variable $\dot{x}$ (dos veces), $F_{\dot{x}t}$ es la derivada segunda (cruzada) de F, con respecto a sus variables t y $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ es la derivada de $x(t)$ con respecto a t dos veces.

La ecuación de Euler es por tanto, una ecuación diferencial de segundo orden. Las soluciones a dicha ecuación se llaman ***extremales*** y dependen de dos constantes C_1 y C_2, es decir es de la forma $x = x(t, C_1, C_2)$.

Ejemplo 3.4. *Obtener las posibles funciones para máximo o mínimo local del siguiente problema:*

$$\max_x \int_0^2 (-6xt + 3\dot{x}^2)dt \quad x(0) = 2 \ y \ x(4) = 6.$$

Donde $x \in C^2[0, 4]$ *y satisface* $x(0) = 2$ *y* $x(4) = 6$

Solución:

En este caso la función objetivo es $F(t, x, \dot{x}) = -6xt + 3\dot{x}^2$ *. Calculamos sus derivadas parciales con respecto a* x *y* $\dot{x}$ *y aplicamos el teorema anterior:*

Donde $F_x = -6t$*,* $F_{\dot{x}} = 6\dot{x}$*,* $\frac{dF_{\dot{x}}}{dt} = 6\ddot{x}$*.*

Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} -6t &= 6\ddot{x} \\ -t &= \ddot{x} \quad \textit{integrando a ambos lados} \\ -t^2 + C_1 &= \dot{x} \\ -\frac{1}{3}t^3 + C_1 t + C_2 &= x^*(t). \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones iniciales y finales se tiene que $C_1 = \frac{25}{3}$ *y* $C_2 = 2$ *, con lo que la curva la curva buscada es:*

$$x^*(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{25}{3}t + 2 \quad t \in [0, 4].$$

De segundo orden: discrimina entre máximos y mínimos entre candidatos que verifiquen la ecuación de Euler.

A continuación se presenta el siguiente lema que se utiliza en la posterior demostración del teorema de Legendre:

Lema 2 [9] Sean $P(t)$ y $Q(t)$ funciones continuas dadas en $[t_0, t_1]$ y sea el funcional cuadrático:

$$\int_{t_0}^{t_1} \{P(t)[\dot{\eta}]^2 + Q(t)[\eta]^2\}dt$$

definido para todas las funciones $\eta(t)$, con derivadas continuas en $[t_0, t_1]$.
Una condición necesaria para que el funcional dado sea menor o igual que cero, para todas las funciones $\eta(t)$ que verifiquen las hipótesis es que P(t) sea menor o igual a cero para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Teorema 3.5. [9] *Condición de Legendre.*
Si $x^*(t)$ *es un máximo local en (3.1), entonces* $x^*(t)$ *verifica la siguiente condición:*

$$F_{\dot{x}\dot{x}}[t, x^*(t), \dot{x^*}(t)] \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{3.4}$$

Si $x^*(t)$ *es un mínimo local en (3.1), entonces* $x^*(t)$ *verifica que:*

$$F_{\dot{x}\dot{x}}[t, x^*(t), \dot{x^*}(t)] \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{3.5}$$

Donde $F_{\dot{x}\dot{x}}$*, es la segunda derivada de* F*, con respecto a su variable* $\dot{x}$*.*

Demostración:

En el teorema anterior se estableció que $J'(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1}[\eta(t)F_x + \dot{\eta(t)}F_{\dot{x}}]dt$. Donde $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$, F_x y $F_{\dot{x}}$, están definidas en:

$$(t, x^* + \varepsilon\eta(t), \dot{x^*} + \varepsilon\dot{\eta}(t)).$$

Aplicando de nuevo la regla de Leibniz (3.3), se tiene que derivando:

$$J''(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \{\eta(t)[F_{xx}\eta(t) + F_{x\dot{x}}\dot{\eta}(t)] + \dot{\eta}(t)[F_{\dot{x}x}\eta(t) + F_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}(t)]\}dt.$$

Por ser F de clase C^2, verificará que sus derivadas parciales cruzadas son iguales $F_{x\dot{x}} = F_{\dot{x}x}$, por lo tanto evaluando en ε=0, se tiene que:

$$J''(0) = \int_{t_0}^{t_1} [\eta^2 F_{xx} + 2\eta\dot{\eta}F_{x\dot{x}} + \dot{\eta}^2 F_{\dot{x}\dot{x}}]dt.$$

Resolviendo por partes la integral central, tomando:

$$u = F_{x\dot{x}} \Rightarrow du = \frac{d}{dt}F_{x\dot{x}}$$

$$dv = \eta\dot{\eta}dt \Rightarrow v = \frac{1}{2}\eta^2.$$

Luego:

$$\begin{aligned} 2\int_{t_0}^{t_1} \eta\dot{\eta}F_{x\dot{x}}dt &= 2\{[\frac{1}{2}\eta^2 F_{x\dot{x}}]_{t_0}^{t_1} - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \eta^2 \frac{d}{dt}F_{x\dot{x}}\} \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} \eta^2 \frac{d}{dt}F_{x\dot{x}}dt. \end{aligned}$$

ya que el primer bloque es nulo por ser $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ por lo tanto nos queda

$$J''(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \{F_{\dot{x}\dot{x}}[\dot{\eta}]^2 + [F_{xx} - \frac{d}{dt}F_{x\dot{x}}][\eta^2(t)]\} \leq 0.$$

Aplicando el lema 2 se obtiene que $F_{\dot{x}\dot{x}} \leq 0$ como se quería demostrar (la demostración para el caso del mínimo es análoga).

Ejemplo 3.6. *Obtener las posibles funciones que verifiquen las condiciones de máximo o mínimo local del siguiente problema según los distintos parámetros a, b, c :*

$$\max_x \int_0^4 (a\dot{x}^2 + bx + ct)dt \quad x(0) = 2 \ y \ x(4) = 4.$$

Donde $x \in C^2[0, 4]$ y satisface $x(0) = 2$ y $x(4) = 4$.

Solución:

En este caso la función objetivo es $F(t, x, \dot{x}) = a\dot{x}^2 + bx + ct$. Calculamos sus derivadas

parciales con respecto a x y $\dot{x}$ y aplicamos el teorema anterior:
Donde $F_x = b$, $F_{\dot{x}} = 2a\dot{x}$, $\frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 2a\ddot{x}$ y la ecuación de Euler es:

$$\ddot{x} = \frac{b}{2a}.$$

cuya solución general imponiendo las condiciones iniciales y final es:

$$x^*(t) = \frac{b}{2a}t^2 - (\frac{b}{a} - \frac{1}{2})t + 2 \quad para\ t \in [t_0, t_1]. \tag{3.6}$$

Luego usando el criterio $F_{\dot{x}\dot{x}} = 2a$, por lo tanto si $a > 0$ (3.6) se tratara de un mínimo local sin posibilidad para extremales de máximos y si $a < 0$ todas las extremales para estos parámetros son máximos.

Condiciones de óptimo global.

Entre las condiciones necesarias de optimalidad de primer y segundo orden además de las suficientes, que en el caso convexo son de optimalidad global. A continuación se enuncia y se demuestra un teorema que establece que en determinadas condiciones se puede asegurar que una solución es un óptimo global para un problema de cálculo de variaciones.

Consideremos ahora nuevamente el problema (3.1), variando las condiciones terminales de $x(t_1)$ en Ψ , esto es:

$$\max_{x \in \Psi} \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), \dot{x}(t)]dt \quad x(t_0) = x_0.$$

Manteniendo t_0, t_1 fijos, y $x(t_1)$ sujeta a las siguientes condiciones terminales:
(i) $x(t_1) = x_1$, (ii) $x(t_1) \geq x_1$ y (iii) $x(t_1)$ libre, con F de clase C^2. Cuando estas condiciones terminales no se conocen como en los casos (ii) y (iii), significa que hay libertad para escoger el valor de la variable de estado al final del intervalo. Por ejemplo en la aplicación económica se requiere a veces que la variable óptima supere cierto valor del stock al final de las ventas o que sea independiente de esta, con influencia en la planificación del siguiente periodo.

Teorema 3.7. [9] *Supongamos que $F[t,x,\dot{x}]$ es una función cóncava en $(x,\dot{x})$para cada $t \in [t_0,t_1]$. Si $x^* = x^*(t)$ verifica la condición de Euler, junto con la condición inicial y las siguientes condiciones finales en (i), (ii), (iii) y la condiciones de transversalidad $[F^*_{\dot{x}}]\mid_{t_1} \leq 0$ en (ii) y (iii). Entonces $x^*(t)$ es un máximo global.*

Demostración Sea F cóncava en $(x,\dot{x})$ y diferenciable entonces:

$$\begin{aligned} F[t,x,\dot{x}] - F[t,x^*(t),\dot{x^*}(t)] &\leq F_x[t,x^*(t),\dot{x^*}(t)](x-x^*) + \\ &+ F_{\dot{x}}[t,x^*(t),\dot{x^*}(t)](\dot{x}-\dot{x^*}). \end{aligned}$$

Tomando para simplificar la notación :

$$F \equiv F[t,x,\dot{x}] \quad y \quad F^* \equiv F[t,x^*,\dot{x^*}].$$

De acuerdo con la ecuación de Euler: $F^* = \frac{d}{dt}F^*_{\dot{x}}$ sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos:

$$F - F^* \leq \frac{d}{dt}F^*_{\dot{x}}(x-x^*) + F^*_{\dot{x}}(\dot{x}-\dot{x^*}) = \frac{d}{dt}[F^*_{\dot{x}}(x-x^*)].$$

Integrando miembro a miembro entre t_0 y t_1 y efectuando operaciones:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1}(F-F^*)dt &\leq \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}[F^*_{\dot{x}}(x-x^*)]dt \\ &= [F^*_{\dot{x}}(x-x^*)]\mid_{t_0}^{t_1} \\ &= [F^*_{\dot{x}}]\mid_{t_1}[x(t_1)-x^*(t_1)] \\ &= d. \end{aligned}$$

Puede observarse que $d \leq 0$ en cada una de las condiciones terminales:

(i) $[x(t_1)-x^*(t_1)] = 0 \Longrightarrow d = 0$.

(ii) La condición de transversalidad es:$[F^*_{\dot{x}}]\mid_{t_1} \leq 0$.

Si $x^*(t_1) > x_1$ entonces tomamos $[F^*_{\dot{x}}]\mid_{t_1} = 0 \Longrightarrow d = 0$.

Si $x^*(t_1) = x_1$, se verifica que $[x(t_1)-x^*(t_1)] > 0$ luego $d \leq 0$.

(iii) tomamos $[F_{\dot{x}}^*] \mid_{t_1}= 0$ y luego $d = 0$.

En cualquier caso

$$\int_{t_0}^{t_1} (F - F^*)dt \leq 0 \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})dt \leq \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*, \dot{x^*})dt$$

Por lo que $x^*(t)$ es un máximo global y el teorema que da demostrado.

3.2.2 Modelo para la gestión del stock forestal.

Supongamos que se parte de una cantidad inicial $x(0) = x_0$ de madera en píe en una plantación forestal. Siguiendo los resultados de los teoremas anteriores (Euler y Legendre.) y el planteamiento básico (1.7) para la explotación del recurso maderera basado en la curva de producción $x(t)$ en el intervalo de planeación $[0, T]$ y considerando la función de utilidad Π de la cantidad de madera dispuesta para la venta (y) por:

$$\Pi(y) = Py, \tag{3.7}$$

donde P es el precio para la venta de la madera que se considera constante a lo largo de intervalos regulares de tiempo es decir sin facturaciones importantes, $y(t)$ es la cantidad substraída del stock que sigue la dinámica $x(t)$

Entonces:

Sustituyendo (3.7) en (1.8), el problema queda propuesto de la siguiente manera:

$$\max_x \int_0^T [\Pi(\mathbf{F}(x(t)) - x'(t)) - C(x)]e^{-it}dt.$$

Donde $\mathbf{F}(x)$ es la función de crecimiento marginal.

Que es equivalente a:

$$\max_x \int_0^T [P\mathbf{F}x(t) - Px'(t) - C(x)]e^{-it}dt. \tag{3.8}$$

De donde

$$F(t, x, \dot{x}) = [P\mathbf{F}(x) - Px'(t) - C(x)]e^{-it}.$$

$$F_x = [P\mathbf{F}'(x) - C'(x)]e^{-it}.$$

$$F_{\dot{x}} = -Pe^{-it}.$$
$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = iPe^{-it}.$$

La ecuación de Euler se simplifica por:

$$P\mathbf{F}'(x) - C'(x) = iP.$$

Sustituyendo el hecho que $\dot{x} = F(x)$, nos queda que $P\ddot{x} - C'(x) = iP$.
Integrando esta ultima ecuación en la variable x, se obtiene equivalentemente que:

$$P\dot{x} - C(x) = iPx. \tag{3.9}$$

Esto es, (3.9) se interpreta como el equilibrio "Jevoniano", también conocido como la regla de Hotelling, es decir la comparación de las ganancias y perdidas de mantener o vender el stock. El lado derecho representa el beneficio marginal menos el costo de mantener el stock en píe (Sin cortar un año más), mientras que el lado derecho representa la utilidad financiera de cortar y colocar el capital en el mercado por un año.

3.3 Principio del Máximo de Lev Pontryagin.

El principio del máximo da condiciones necesarias que debe cumplir el control óptimo asociado a la trayectoria óptima del siguiente problema las cuales permiten su cálculo en el siguiente problema:

$$\max_{u(t)\in U} J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), u(t)]dt + S[x(t_1)]. \tag{3.10}$$

Sujeto a:

$$\begin{cases} \dot{x(t)} & = & f(t, x(t), u(t)) \\ Con & : & x(t_0) = x_0 \\ u(t) & \in & U \end{cases}$$

Donde $x(t) \in R^n, u \in U \subseteq R^m$ y S es una funcion real que valora el estado final de la variable de estado. Para $\lambda(t) \in R^n$ llamado vector de variables adjuntas, se define el ***Hamiltoniano*** del problema de la siguiente forma:

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = F(t, x(t), u(t)) + \lambda f(t, x(t), u(t)) \tag{3.11}$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano tiene un dominio contenido en $R \times R^n \times R^m \times R^n$ y toma valores en R.

Teorema 3.8. [9] [33] *Principio del Máximo de Pontryagin. Sean $u^*(t)$ la trayectoria optima de control continuo a trozos y $x^*(t)$ la trayectoria de estado optima asociada , definida en el intervalo $[t_0, t_1]$. Entonces existe una función vectorial $\lambda^*(t) = (\lambda_1^*(t), ..., \lambda_n^*(t))$ continua que posee derivadas primeras continuas a trozos tal que para cada $t \in [t_0, t_1]$ se tiene que:*

$$\dot{\lambda_i^*}(t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) \quad \textit{para cada } i = 1..n.$$

En todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$ con:
$\lambda^*(t_1) = (\frac{\partial}{\partial x_1} S[x^*(t_1)], ..., \frac{\partial}{\partial x_n} S[x^*(t_1)])$
$H[t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)] \geq H[t, x^*(t), u(t), \lambda^*(t)] \quad \forall u \in \Omega$
$\dot{x_i^*}(t) = f_i(t, x^*, u^*) \quad$ *para cada* $i = 1..n$
En todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$, con $x_1^*(t_0) = x_{io}$,...,$x_n^*(t_0) = x_{in}$

Demostración

Para hacer más simple la deducción se consideran las variables x, u, λ no sujetas a restricciones conjuntista, por lo cual se pueden tomar unidimensionales sin pérdida de generalidad. Utilizando métodos del cálculo de variaciones, el Hamiltoniano asociado al problema es:

$$H(t, x, u, \lambda) = F(t, x, u) + \lambda f(t, x, u). \tag{3.12}$$

Como $(f(t, x, u) - \dot{x}) = 0, \forall t \in [t_0, t_1]$ se deduce que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)(f(t, x, u) - \dot{x})dt = 0.$$

Sumando este valor a la función objetivo:

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_1} F[t,x,u] + \lambda(t)[f(t,x,u) - \dot{x}]dt + S[x(t_1)] \\ &= \int_{t_0}^{t_1} H[t,x,u,\lambda]dt - \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)\dot{x}dt + S[x(t_1)]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Resolviendo por partes la segunda integral en (3.13)

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)\dot{x(t)}dt &= \lambda(t)x(t) \mid_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} x(t)\dot{\lambda(t)}dt \\ &= \lambda(t_1)x(t_1) - \lambda(t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} x\dot{\lambda(t)}dt. \end{aligned}$$

Nos queda:

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t,x,u,\lambda) + x\dot{\lambda(t)}]dt - \lambda(t_1)x(t_1) \\ &\quad +\lambda(t_0)x(t_0) + S[x(t_1)]. \end{aligned}$$

Para cualquier trayectoria de control $u(t)$, con trayectoria de estado $x(t)$, que verifica $\dot{x} = f(t,x,u)$, con $x(t_0) = x_0$.

Sea $u^*(t)$, la trayectoria de control óptimo. Se perturba ahora dicha trayectoria con una función $\alpha(t)$, continua a trozo, arbitraria:

$$u^*_\epsilon(t) = u^*(t) + \epsilon\alpha(t)$$

Siendo $\alpha(t)$ fija y ϵ parámetro, Es claro que $u^*_0(t) = u^*(t)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$, de igual forma la trayectoria $x(t,\epsilon)$ asociada el control $u_\epsilon(t)$ es continua con derivada parcial continua con respecto a ϵ, tal que $x(t,0) = x^*(t)$ de manera que el funcional objetivo asociado a $u^*_\epsilon(t)$ y $x(t,\epsilon)$ solo depende de ϵ

$$\begin{aligned} J(\epsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t, x(t,\epsilon), u^*(t) + \epsilon\alpha(t), \lambda) + x(t,\epsilon)\dot{\lambda(t)}]dt \\ &\quad -\lambda(t_1)x(t_1,\epsilon) + \lambda(t_0)x_0) + S[x(t_1,\epsilon)]. \end{aligned}$$

$J(\epsilon)$ alcanza el valor máximo para $\epsilon = 0$ por lo cual satisface la condición de optimalidad $\dot{J}(0) = 0$, derivando nos queda:

$$\begin{aligned} \dot{J(\epsilon)} &= \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial H}{\partial u}\alpha(t) + \frac{\partial x}{\partial \epsilon}\dot{\lambda}]dt - \\ &\quad -\lambda(t_1)\frac{\partial x(t_1,\epsilon)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial S[x(t_1,\epsilon)]}{\partial \epsilon}. \end{aligned}$$

Donde $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial u}$ están definidas en $(t, x(t,\epsilon), u^*(t) + \epsilon\alpha(t))$

Evaluando en $\epsilon = 0$ e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \dot{J(0)} &= \int_{t_0}^{t_1} [(\frac{\partial H^*}{\partial x} + \dot{\lambda})\frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial H^*}{\partial u}\alpha(t)]dt \\ &\quad -\lambda(t_1)\frac{\partial x(t_1,0)}{\partial \epsilon} + \dot{S}[x(t_1)]\frac{\partial x(t_1,0)}{\partial \epsilon}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

En donde: $\frac{\partial H^*}{\partial x} = \frac{\partial H(t,x^*,u^*,\lambda)}{\partial x}$, $\quad \frac{\partial H^*}{\partial u} = \frac{\partial H(t,x^*,u^*,\lambda)}{\partial u}$

El impacto $\frac{\partial}{\partial \epsilon}x$ por la modificación de la variable de control es difícil de determinar, si se toma $\lambda(t)$ de manera que no haya la necesidad de calcularlo, como:

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(t,x^*,u^*,\lambda^*)}{\partial x}, \quad con \quad \lambda^*(t_1) = \frac{dS[x(t_1)]}{dx}.$$

Se tiene que sustituyendo estas condiciones en (3.14), nos queda:

$$\dot{J}(0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(t,x^*,u^*,\lambda^*)}{\partial u}\alpha(t)dt = 0.$$

Para cualquier función $\alpha(t)$ continua a trozos en particular tomando: $\alpha(t) = \frac{\partial H(t,x^*,u^*,\lambda^*)}{\partial u}$ se cumple que:

$$\int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial H(t,x^*,u^*,\lambda^*)}{\partial u}]^2 dt = 0 \Longrightarrow \frac{\partial H(t,x^*,u^*,\lambda^*)}{\partial u} = 0 \quad \forall t.$$

Por lo tanto existe una función $\lambda^*(t)$ continua con derivada continua por trozos, tal que para cada $t \in [t_0, t_1]$ se verifica:

1) $\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(t,x^*,u^*,\lambda^*)}{\partial x}, \quad con \lambda^*(t_1) = \frac{\partial}{\partial x}S[x^*(t_1)]$

2) $\frac{\partial H(t,x^*,u^*,\lambda^*)}{\partial u} = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$

3) $\dot{x^*}(t) = f(t, x^*, u^*)$ en todos los puntos de continuidad de $u^*(t), con x^*(t_0) = x_0$.

3.3.1 Aplicaciones del Principio del Máximo de Lev Pontryagin.

Problema 1 El instante óptimo de finalización.

Pasemos ahora a la obtención de resultados más específicos en materia del punto o ***turno óptimo*** (continuo) utilizando el Principio de Lev Pontryagin.

Teorema 3.9. [9] *Sean:* $u^*(t), x^*(t)$*, las trayectorias de control óptimo y su variable de estado asociado, sea* t_1^* *el instante óptimo de finalización, definidas en el intervalo* $[t_0, t_1^*]$*. Entonces, existe una función continua a trozos* $\lambda^*(t)$ *, tal que para cada* $t \in [t_0, t_1^*]$*, verifica:*

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)).$$

En todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$ *con :*

$\lambda^*(t_1^*) = \frac{\partial}{\partial x} S[t_1^*, x^*(t_1^*)]$

$\frac{\partial}{\partial u} H[t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)] = 0$

$\dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t))$ *En todos los puntos de continuidad de* $u^*(t)$*, con* $x^*(t_0) = x_o$*.*

Además debe de cumplirse la siguiente condición de transversalidad en t_1^**:*

$$H[t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1)^*, \lambda^*(t_1^*)] + \frac{\partial}{\partial t_1} S[t_1^*, x^*(t_1^*)] = 0.$$

Demostración

Si $x(t), u(t)$ cumplen que $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$. Se verificara entonces $\lambda(t)[f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}] = 0$, para cualquier función $\lambda(t)$, continua con derivadas a continua a trozos. De donde se deduce que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)[f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}(t)]dt = 0.$$

Sumando el valor de esta integral al funcional objetivo y operando, se obtiene:

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_1} \{F(t,x,u) + \lambda(t)[f(t,x,u) - \dot{x}]\}dt + S[t_1 x(t_1)] \\ & \int_{t_0}^{t_1} H(t,x(t),u(t),\lambda)dt - \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)\dot{x}(t)dt + S[t_1 x(t_1)]. \end{aligned}$$

Resolviendo por partes la segunda integral y efectuando operaciones, resulta:

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t,x,u,\lambda)dt + \lambda(t)\dot{x}]dt + \\ & -\lambda(t_1)x(t_1) + \lambda(t_0)x(t_0) + S[t_1 x(t_1)]. \end{aligned}$$

Para cualquier trayectoria de control $u(t)$, continua a trozos, con trayectoria de estado asociada $x(t)$ al problema en el horizonte temporal $[t_0, t_1]$.

Sea $t_1^* = t_1$ el instante final óptimo, es decir el mejor momento donde se debería culminar el control y $x^*(t), u^*(t)$, las trayectoria de estado y control óptimas asociadas.

Se va a comparar $u^*(t)$, definida en $[t_0, t_1^*]$, con otro control $u(t)$ continuo a trozos, definido en el intervalo $[t_0, t_1^* + \delta t_1]$. Los dominios de definición de las dos controles pueden ser diferentes, ya que δt_1 puede ser positivo, negativo, o nulo. Para que ambas funciones tengan el mismo dominio, se extiende la de menor dominio. Así, si $\delta t_1 > 0$, se extiende u^* de la siguiente forma:

$$u^*(t) = u^*(t_1^*) \quad para \quad t \in [t_1, t_1 + \delta t_1].$$

Si $\delta < 0$, se extenderá u por extrapolación análoga.

Se define el control $\alpha(t) = u(t) - u^*(t)$, para $t_0 \leq t \leq max(t_1, t_1 + \delta t_1)$, que sera continua a trozos, con $\alpha(t)$ continua a trozos.

Sean $\delta t_1, \alpha(t)$ fijos. Para cada $\epsilon \in R$, se define:

$$\begin{aligned} t_1^\epsilon &= t_1^* + \epsilon \delta t_1 \\ u_\epsilon(t) &= u^*(t) + \epsilon \alpha(t) \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_1^\epsilon. \end{aligned}$$

Sea $x(t,\epsilon)$, la trayectoria de estado asociada al control $u_\epsilon(t)$, la cual se supone continua, con derivada parcial continua con respecto a ϵ. Es claro que:

$$x(t,0) = x^*(t), \text{para todo } t \in [t_0, t_1^*].$$

Fijados $\delta, \alpha(t), t_1^*, x^*(t), u^*(t)$, el valor del funcional objetivo asociado a $u_\epsilon(t)$ y $x(t,\epsilon)$, solo depende de ϵ, en el intervalo $[t_0, t_1^\epsilon]$, por lo tanto valdrá:

$$\begin{aligned} J(\epsilon) &= \int_{t_0}^{t_1^*+\epsilon\delta t_1} [H(t, x(t,\epsilon), u^*(t)+\epsilon\alpha(t), \lambda(t)) + \dot{\lambda} x(t,\epsilon)]dt \\ &\quad -\lambda(t_1^*+\epsilon\delta t_1)x(t_1^*+\epsilon\delta t_1^\epsilon, \epsilon) + \lambda(t_0)x_0 + \\ &\quad S[t_1^*+\epsilon\delta t_1, x(t_1^*+\epsilon\delta t_1, \epsilon)]. \end{aligned}$$

Como t_1^* es el instante final óptimo, $u^*(t)$ el control óptimo y $x^*(t)$ la trayectoria de estados óptima, entonces $J(\epsilon)$ alcanza el valor máximo para $\epsilon = 0$, se cumplirá la condición necesaria de optimalidad $J'(0) = 0$.
Derivando $J(\epsilon)$ con respecto a ϵ, utilizando nuevamente la formula de *Leibniz*, se obtiene:

$$\begin{aligned} J'(\epsilon) &= H\{t_1^*+\epsilon\delta t_1, x(t_1^*+\epsilon\delta t_1, \epsilon), u^*(t_1^*+\epsilon\delta t_1) \\ &\quad +\epsilon\alpha(t_1^*+\epsilon\delta t_1), \lambda(t_1^*+\epsilon\delta t_1)\}\delta t_1 \\ &\quad +x(t_1^*+\epsilon\delta t_1, \epsilon)\dot{\lambda}(t_1^*+\epsilon\delta t_1, \epsilon)\delta t_1 \\ &\quad +\int_{t_0}^{t_1^*+\epsilon\delta t_1} [\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x(t,\epsilon)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial H}{\partial u}\alpha(t) + \dot{\lambda}(t)\frac{\partial x(t,\epsilon)}{\partial \epsilon}]dt \\ &\quad -\dot{\lambda}(t_1^*+\epsilon\delta t_1)x(t_1^*+\epsilon\delta t_1, \epsilon)\delta t_1 \\ &\quad -\lambda(t_1^*+\epsilon\delta t_1)[\frac{\partial x(t_1^*+\epsilon\delta t_1, \epsilon)}{\partial t}\delta t_1 + \frac{\partial x(t_1^*+\epsilon\delta t_1, \epsilon)}{\partial \epsilon}] \\ &\quad +\frac{\partial S[t_1^*+\epsilon\delta t_1, x(t_1^*+\epsilon\delta t_1, \epsilon)]}{\partial x}[\frac{\partial x(t_1^*+\epsilon\delta, \epsilon)]}{\partial t}\delta t_1 \\ &\quad +\frac{\partial x(t_1^*+\epsilon\delta t_1, \epsilon)]}{\partial \epsilon}] + \frac{\partial S[t_1^*+\epsilon\delta t_1, x(t_1^*+\epsilon\delta t_1, \epsilon)]}{\partial t_1}\delta t_1. \end{aligned}$$

En donde $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial u}$, están definidas en $(t, x(t, \epsilon), u^*(t) + \epsilon\alpha(t), \lambda(t))$, tomando $\epsilon = 0$, e igualando a cero se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= H[t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*), \lambda(t_1^*)]\delta t_1 + x(t_1^*)\dot{\lambda}(t_1^*)\delta t_1 \\ &+ \int_{t_0}^{t_1^*} [(\frac{\partial H^*}{\partial x} + \dot{\lambda})\frac{\partial x(t,0)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial H}{\partial u}\alpha(t)]dt \\ &- \dot{\lambda}(t_1^*)x^*(t_1)\delta t_1 \\ &+ [\frac{\partial S[t_1^*, x^*(t_1^*)]}{\partial x} - \lambda(t_1^*)][\frac{\partial x(t_1^*, 0)]}{\partial t}\delta t_1 + \frac{\partial x(t_1^*, 0)]}{\partial \epsilon}] \\ &+ \frac{\partial S[t_1^*, x^*(t_1)]}{\partial t_1}\delta t_1. \end{aligned}$$

En donde $\frac{\partial H^*}{\partial x} = \frac{\partial H(t,x^*,u^*,\lambda)}{\partial x}$, y $\frac{\partial H^*}{\partial u} = \frac{\partial H(t,x^*,u^*,\lambda)}{\partial u}$.

Simplificando y factorizando:

$$\begin{aligned} 0 &= [H(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*), \lambda(t_1^*))]\delta t_1 + \frac{\partial S(t_1^*, x^*(t_1))}{\partial t_1}]\delta t_1 \\ &+ \int_{t_0}^{t_1^*} [(\frac{\partial H^*}{\partial x} + \dot{\lambda})\frac{\partial x(t,0)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial H}{\partial u}\alpha(t)]dt \\ &+ [\frac{\partial S[t_1^*, x^*(t_1^*)]}{\partial x} - \lambda(t_1^*)][\frac{\partial x(t_1^*, 0)]}{\partial t}\delta t_1 + \frac{\partial x(t_1^*, 0)]}{\partial \epsilon}]. \end{aligned}$$

Como el impacto preciso que produce en la variable de estado una modificación de la variable de control, es decir $\frac{\partial x(t,0)]}{\partial \epsilon}$, es difícil de determinar, se selecciona $\lambda(t)$, de manera que no haya necesidad de calcularlo, por lo tanto $\dot{\lambda}(t)$ se toma así:

$$\dot{\lambda}^*(t) = \frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial x} \quad con \quad \lambda^*(t_1^*) = \frac{\partial S[t_1^*, x^*(t_1)]}{\partial x}.$$

Con lo que resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= [H(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*), \lambda(t_1^*)) + \frac{\partial S(t_1^*, x^*(t_1))}{\partial t_1}]\delta t_1 \\ &+ \int_{t_0}^{t_1^*} \frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial u}\alpha(t)dt. \end{aligned}$$

Esto es cierto para cualquier δt_1 y cualquier función $\alpha(t)$, continua a trozos. En particular para $\delta t_1 = 0$, se tendrá que: $\int_{t_0}^{t_1^*} \frac{\partial H(t,x^*,u^*,\lambda^*)}{\partial u}\alpha(t)dt = 0$.

En particular, tomando:

$$\alpha(t) = \frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial u}$$

deberá cumplirse que:

$$\int_{t_0}^{t_1^*} \{\frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial u} \alpha(t)\}^2 dt = 0.$$

De donde se deduce:

$$\frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial u} = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1^*].$$

Por lo tanto se tiene que:

$$[H(t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1^*), \lambda(t_1^*)) + \frac{\partial S(t_1^*, x^*(t_1))}{\partial t_1}]\delta t_1 = 0.$$

Entonces se ha deducido la existencia la existencia de una función $\lambda^*(t)$, continua, con derivada continua a trozo, tal que para todo $t \in [t_0, t_1^*]$, se verifica:

$$\dot{\lambda^*}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)).$$

En todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$ con:

$\lambda^*(t_1^*) = \frac{\partial}{\partial x} S[t_1^*, x^*(t_1^*)]$

$\frac{\partial}{\partial u} H[t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)] = 0$

$\dot{x^*}(t) = f(t, x^*(t), u^*(t))$.

En todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$, con $x^*(t_0) = x_o$.

Con la condición de transversalidad en t_1^*:

$$H[t_1^*, x^*(t_1^*), u^*(t_1)^*, \lambda^*(t_1^*)] + \frac{\partial}{\partial t_1} S[t_1^*, x^*(t_1^*)] = 0.$$

Con lo que se obtiene el resultado deseado.

Problema 2 En un problema típico de tala forestal, lo que se trata de encontrar es la variable de control $u(t)$ que hace máximo el funcional objetivo:

$$VAN = \int_0^T p(t)u(t)e^{-it}dt + q(T)x(T)e^{-it}. \tag{3.15}$$

Sujeto a:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)F(x) - u(t) \quad \text{con } 0 \leq u(t) \leq u_{max}. \tag{3.16}$$

Definimos el Hamiltoniano del problema por:

$$\begin{aligned} H &= p(t)u(t)e^{-it} + \lambda(t)[\alpha(t)F(x) - u(t)] \\ &= [p(t)e^{-it} - \lambda(t)]u(t) + \lambda(t)\alpha(t)F(x). \end{aligned} \tag{3.17}$$

La ecuación adjunta asociada es:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda(t)\alpha(t)F'(x). \tag{3.18}$$

Con la condición terminal de transversalidad:

$$\lambda(T) = q(T)e^{-iT}. \tag{3.19}$$

Sabemos que el ritmo óptimo de tala, descrito por $u^*(t)$, debe maximizar H para todo $t \in [0, T]$ y expresando al Hamiltoniano en (3.17) como: $H = \sigma(t)u(t) + \lambda(t)\alpha(t)F(t)$, donde $\sigma(t) = [p(t)e^{-it} - \lambda(t)]$, se tendrán los siguientes casos para el control óptimo u^*

1. $\sigma(t) < 0$, el valor de u, que maximiza H debe ser $u^* \equiv 0$, mientras que si $\sigma(t) > 0$, para maximizar H se deberá tomar u tan grande como se pueda esta es $u^* = u_{max}$. De aquí que el efecto de $\sigma(t)$ sobre $u(t)$ es de conmutación entre los valores fijos 0 y u_{max}, y este tipo de control resultante recibe el nombre de ***control bang-bang***.

2. $\sigma(t) = 0$, es decir $\lambda(t) = p(t)e^{-it}$. Para este caso cualquier valor de u maximizará a H, sin embargo existe un valor particular de u, que se obtiene de usar esta condición y $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, conocida como estrategia de ***control singular***.

Para determinar tales controles singulares ($u(t)$, cuando $\sigma(t) \equiv 0$), empezaremos con operar con estas condiciones, a saber:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\sigma}{dt} \\ &= \frac{d[p(t)e^{-it} - \lambda(t)]}{dt} \\ &= [p'(t) - ip(t)]e^{-it} - \dot{\lambda}(t) \\ &= [p'(t) - ip(t)]e^{-it} + \lambda(t)\alpha(t)F'(x) \quad \text{Usando (3.18).} \end{aligned}$$

Simplificando al reemplazar $\lambda(t) = P(t)e^{-it}$, obtenemos:

$$\alpha(t)F'(x) = i - \frac{p'(t)}{p(t)}. \tag{3.20}$$

La solución de esta ultima ecuación es la trayectoria de estado óptima $x^*(t)$, y mirando con un poco más de detalle el lado derecho en (3.20) nos damos cuenta que representa la condición de *Euler* , evaluada en cada punto t, esto es considerando la función objetivo $\bar{F} = p(t)u(t)e^{-it}$ se tendrá que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t \partial u} \\ \frac{\partial(p(t)u(t)e^{-it})}{\partial x} &= \frac{\partial(p(t)e^{-it})}{\partial t} \\ 0 &= [p'(t) - ip(t)]e^{-it} \\ 0 &= [p'(t) - ip(t)]. \end{aligned}$$

Con esto por (3.20), se tiene que $\alpha(t)F'(x) = 0$, integrando respecto a x, $F(x)$ resulta constante K en esta y como x^* esta sujeta a (3.16), de esta se toma que el control óptimo es:

$$u^*(t) = K\alpha(t) - \dot{x}^*(t).$$

En general intuitivamente lo que se considera acertado, es aproximar las trayectoria de estados $x(t)$, con pautas de tala selectivas (controles $u(t)$), usando las del tipo 1, fuera de la trayectoria singular y hasta alcanzar ésta. Para continuar con las del (tipo 2), hasta cierto tiempo previo al momento de corta final.

Esto puede explicarse por el hecho de que cuando el volumen de madera es bajo y su potencial de crecimiento alto, no se contempla ninguna tala. De hecho este es el caso si $x_0 < x^*(0)$ (en donde $\sigma(t) > 0$), de forma que, en el proceso de optimización no se efectúa la tala selectiva hasta que el volumen de explotación haya crecido lo suficiente para alcanzar la senda singular (el momento t_1 de la fig. 3.6). Después continua operando el control singular, durante cierto intervalo, hasta alcanzar el momento t_2 en la senda singular y a partir de este momento no se efectúa ninguna tasa selectiva hasta el momento final T de corta final.

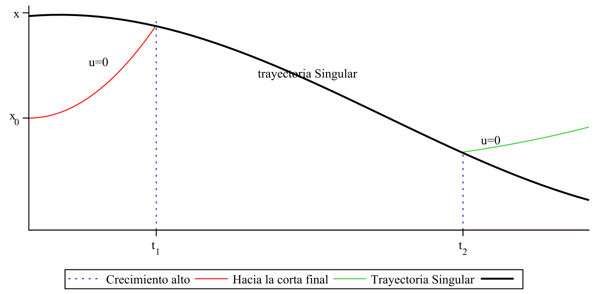

Figura 3.6: Trayectoria de control singular, alcance óptimo.

La ecuación de trayectoria singular descrita por:

$$\alpha(t)F'(x) = i - \frac{p'(t)}{p(t)}.$$

Se interpreta en la teoría del capital, como que a lo largo de la senda singular la productividad marginal del capital maderable es exactamente igual a la tasa de descuento, esto es:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\frac{dy}{dt}] = i. \tag{3.21}$$

Donde $y(t) = p(t)x(t)$, representa el ingreso neto que puede obtenerse de la tala selectiva en el momento t, y puede considerarse como el capital maderable.

Para deducir la expresión (3.21), se tiene que:

$$\begin{aligned} y'(t) &= (p(t)x(t))' \\ &= p'(t)x(t) + p(t)x'(t) \\ &= p'(t)x(t) + p(t)(\alpha(t)F(t) - u(t)). \end{aligned}$$

Aplicando el operador $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{p(t)}\frac{\partial}{\partial x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y'(t)}{\partial y} &= \frac{1}{p(t)}\frac{\partial[p'(t)x(t) + p(t)(\alpha(t)F(t) - u(t))]}{\partial x} \\ &= \frac{1}{p(t)}[p'(t) + p(t)\alpha(t)F'(t)] \\ &= \frac{p'(t)}{P(t)} + [\alpha(t)F'(t)] \\ &= \frac{p'(t)}{P(t)} + [i - \frac{p'(t)}{P(t)}] = i. \end{aligned}$$

3.3.2 Hamiltoniano de valor presente.

En muchos de los problemas ya vistos, aparece en la función objetivo un factor de descuento e^{-it}, que a veces complica las operaciones encaminadas a la obtención de las soluciones óptimas. Para facilitar el estudio de estas situaciones se utiliza el Hamiltoniano de "valor presente", que se explica a continuación con el planteamiento:

$$\max_u J = \int_0^T G(t, x.u)e^{-it}dt.$$

Sujeto a:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in \Omega(t).$$

Aplicando el principio del máximo, se tiene que el Hamiltoniano sera:

$$H(t, x, u, \lambda) = G(t, x, u)e^{-it} + \lambda f(t, x, u).$$

Las condiciones del principio del máximo se traducen en:

1. $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x}e^{-it} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}$, con $\lambda(T) = 0$.

2. $\max_{u\in\Omega} H$.

3. $\dot{x} = f(t,x,u) \quad x(0) = x_0$.

Además si T fuese libre, debe añadirse $H\mid_{t=T}= 0$.

Se define el Hamiltoniano de valor "presente", representado por $\boldsymbol{H}$, de la siguiente forma.

$$\boldsymbol{H} = He^{it} = G(t,x,u) + \lambda(t)e^{it}f(t,x,u).$$

Sea $m(t) = \lambda(t)e^{it}$. Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\boldsymbol{H} = G(t,x,u) + m(t)f(t,x,u) \quad y \quad \dot{\lambda}(t) = \dot{m}(t)e^{-it} - im(t)e^{-it}.$$

Se reformula el principio del máximo, en función del Hamiltoniano de valor "presente" $\boldsymbol{H}$ y la variable asociada m.

- La condición (1) del Principio del máximo se transforma en:

$$\begin{aligned}
\dot{m}(t)e^{-it} - im(t)e^{-it} &= -\frac{\partial G}{\partial x}e^{-it} - m(t)e^{-it}\frac{\partial f}{\partial x} \\
\dot{m}(t)e^{-it} - im(t)e^{-it} &= -\frac{\partial G}{\partial x}e^{-it} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\
\dot{m}(t) &= -\frac{\partial G}{\partial x} - \lambda e^{it}\frac{\partial f}{+}im(t) \\
\dot{m}(t) &= -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x} + im(t).
\end{aligned}$$

  Con la condición de transversalidad $\lambda(T) = 0$, equivalente a $m(T)e^{-iT} = 0 \Rightarrow m(T) = 0$.

- La condición (2) puede expresarse como $\max_u \boldsymbol{H}e^{-it}$.

- De igual forma $H\mid_{t=T}= 0$ se transforma en $\boldsymbol{H}\mid_{t=T}= 0$.

Por tanto se ha obtenido una formulación alternativa del principio del máximo, para el problema considerado.

3.3.3 Descuento temporal y exenciones a varias variables.

Para los problemas que implican descuento temporal, resulta a menudo más conveniente expresar el principio del máximo en términos del hamiltoniano de valor actual o corriente, mediante la utilización de variables adjuntas de valor actual. Para el problema de maximización de:

$$\int_0^T r(t,x(t),u(t))e^{-it}dt + R(T,x(T))e^{-it}.$$

Sujeto a:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x(t),u(t)) \quad u \in U.$$

Se define el hamiltoniano de valor actual, $\bar{H}$ como:

$$\bar{H} = \bar{H}(t,x(t),u(t),\mu(t)) \equiv r(t,x(t),u(t)) + \mu f(t,x(t),u(t)).$$

Siendo $\mu(t)$ la variable adjunta de valor corriente la cual satisface:

$$\frac{d\mu}{dt} = i\mu - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} = i\mu - \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Con la condición de transversalidad: $\mu(T) = \frac{\partial R}{\partial x}|_T$.

El principio del máximo exige que la variable de control $u(t)$, maximize a $\bar{H} \quad \forall t \in [0,T]$.

La variable adjunta de valor corriente $\mu(t)$, se interpreta económicamente como el precio sombra del recurso, es decir, representa el incremento en el valor presente (óptimo) del recurso en el momento t, consecuencia de un aumento unitario de las existencias del recurso x en ese momento.

Los principios enunciados anteriormente se refieren a sistemas donde se involucra una sola variable de estado $x(t)$ y una sola variable control $u(t)$. Sin embargo, con frecuencia se plantean problemas en los cuales la variable de estado y/o controles son vectores de dimension dos o superiores. Para estos casos existe una generalización directa del Principio del Máximo. En esencia se introduce una variable adjunta correspondiente a cada una de las variables de estado. Luego la variable de estado es un vector bidimensional $x(x_1, x_2)$, cuya dinámica es expresada por:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x, u) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x, u). \end{aligned}$$

Definiéndose el Hamiltoniano de valor corriente $\bar{H}$ como:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \bar{H}(t, x(t), u(t), \mu_1(t), \mu_2(t)) \\ &\equiv r(t, x(t), u(t)) + \mu_1 f_1(t, x(t), u(t)) + \mu_2 f_2(t, x(t), u(t)). \end{aligned}$$

Con las ecuaciones adjuntas:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= i\mu_1 - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} \quad \text{con } \mu_1(T) = \tfrac{\partial R}{\partial x_1}|_T. \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= i\mu_2 - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2} \quad \text{con } \mu_2(T) = \tfrac{\partial R}{\partial x_2}|_T. \end{aligned}$$

De igual forma se requiere que el vector de la variables de control u maximize a $\bar{H}$ para todo t.

Un ejemplo de un sistema lo constituye un hipotético rodal sujeto a riesgo de destrucción total por causa de incendio.

Para cuantificar la probabilidad de incendio (Reed (1984) [35]), puede utilizarse la siguiente función de riesgo:

$$\eta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \{ \frac{P[\text{rodal destruido en } (t, t+\Delta)\text{:haya sobrevivido a t}]}{\Delta} \}.$$

Se supone que la tasa de riesgo solo depende de la edad del rodal t, y no de su densidad $x(t)$, ni de la intensidad de la entresaca representada por el control $u(t)$. A partir de esta función de riesgo, se establece la siguiente función de supervivencia $S(t) = P$[que vive hasta la edad t], esto es:

$$S(t) = e^{-\int_0^t \eta(z)dz}.$$

Si el fuego destruye el rodal en el momento $\tau(\tau < T)$, la entresaca solo produce beneficios hasta ese instante, desapareciendo los correspondientes a la tasa final. Si por el contrario, esto no ocurriera se obtendrían beneficios tanto de la entresaca como de la tala final. La esperanza del valor presente EVP, de los beneficios netos en estas condiciones (utilizando la esperanza condicional) es:

$$EVP = E\{\int_0^\tau p(t)u(t)e^{-it}dt\} + q(T)x(T)S(T)e^{-it}.$$

El valor de la entresaca se descuenta para cada t dentro del intervalo aleatorio de longitud $(0, \tau)$ y a la esperanza de dicho valor se le suma el resultado de multiplicar el beneficio resultante de la tala total por la probabilidad de obtenerlo $S(t)$, luego la EVP resulta ser:

$$EVP = E\{\int_0^T p(t)u(t)S(t)e^{-it}dt\} + q(T)x(T)S(T)e^{-it}.$$

Ahora el problema de control óptimo consiste en maximizar esta función objetivo, teniendo en cuenta las restricciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(t)F(x) - u(t) \quad \text{con } x(0) = x_0. \\ 0 &\leq u(t) \leq u_{max} \quad \text{para } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Considerando el negativo del logaritmo Neperiano de $S(t)$ como la variable de estado para cuantificar el cálculo del riesgo. Haciendo pues $y(t) = -ln[S(t)]$, luego derivando

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{\eta(t)S(t)}{S(t)} = \eta.$$

De esta forma el problema de maximizar el valor presente de los beneficios resultantes de la entresaca y la tala final puede expresarse como:

$$\max_{u(t)}\{\int_0^T p(t)u(t)e^{-it-y(t)}dt\} + q(T)x(T)e^{-it-y(t)}.$$

Sujeto a :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \alpha(t)F(x) - u(t) \qquad x(0) = x_0. \\
\frac{dy}{dt} &= \eta(t) \qquad y(0) = 0. \\
0 &\leq u(t) \leq u_{max} \quad \text{para } 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}$$

Donde puede observarse que es un problema en dos variables de estado x, y y una variable de control u. El hamiltoniano de valor actual es ahora:

$$\begin{aligned}
\bar{H}(t,x,y,u) &\equiv p(t)u(t)e^{-y(t)} + \mu_1[\alpha(t)F(x) - u(t)] + \mu_2\eta(t) \\
&= [P(t)e^{-y(t)} - \mu_1]u(t) + \mu_1\alpha(t)F(x) + \mu_2\eta(t).
\end{aligned}$$

Con las siguientes ecuaciones adjuntas y condiciones transversales:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu_1}{dt} &= i\mu_1 - \mu_1\alpha(t)F(x), \quad \mu_1(T) = q(T)e^{-y(T)}. \qquad (3.22) \\
\frac{d\mu_2}{dt} &= i\mu_2 - p(t)u(t)e^{-y(t)}, \quad \mu_2(T) = q(T)x(T)e^{-y(T)}.
\end{aligned}$$

El hamiltoniano es lineal en $u(t)$, por lo cual el control óptimo contiene elementos de control **bang-bang** y de control singular. La función de conmutación es ahora $\sigma(t) = p(t)e^{-y(t)} - \mu_1(t)$ y para el control singular dado por la condición $\frac{d\sigma}{dt} \equiv 0$, es decir cuando:

$$p'(t)e^{-y(t)} - \eta(t)p(t)e^{-y(t)} - \mu_1' = 0.$$

Ahora, sustituyendo (3.22), para μ_1, se obtiene la ecuación para la senda singular:

$$\alpha(t)F'(x) = i + \eta - \frac{p'(t)}{p(t)}.$$

En la cual se evidencia que la inclusión del riesgo por destrucción por incendio $\eta(t)$, trajo consigo el aumento en la tasa de descuento i, en una cuantía igual a la tasa de riesgo.

3.3.4 Problemas con horizonte temporal infinito.

En Problemas previos analizados, hemos siempre supuesto un horizonte finito T, esto requiere imponer una condición final para el stock de capital, y esta en general no se conoce. Además, el proceso de acumulación de capital se sigue de manera natural en el tiempo y no existe un instante en el cual termine. Por esto se recurre al estudio de un problema de este tipo, con un horizonte temporal infinito, es decir cuando $T = \infty$.

$$\max_u J = \int_0^\infty G(t,x,u)e^{-it}dt.$$

Sujeto a la restricción dinámica:

$$\dot{x} = f(t,x,u) \quad x(0) = x_0 \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = x_s.$$

Donde x_s es un estado estacionario, f y G (acotadas), y poseen derivadas parciales primeras y segundas continuas.

Se se define el Hamiltoniano de valor presente del problema

$$H(t,x,u,m) = G(t,x,u) + mf(t,x,u).$$

Reformulando el principio del máximo como:

1. $\dot{m} = im - \frac{\partial H}{\partial x} = im - G_x - mf_x$.
2. Hay que resolver $\max_u H$.
   como u no esta sujeto a restricciones sera: $\frac{\partial H}{\partial u} = G_u + mf_u = 0$.
   Suponiendo el cumplimiento de la condición de máximo en la condición (2) $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0$.
3. $\dot{x} = f(t,x,u) \quad x(0) = x_0 \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = x_s$.

Por ser x_s punto estacionario, existirán m_s y u_s, tales que cumplan la condición necesaria de optimalidad en (2):

$$G_u(x_s, u_s) + m_s f_u(x_s, u_s) = 0.$$

$$G_u(x, u) + m f_u(x, u) = 0.$$

Define a u como función implícita diferenciable de (x, m),alrededor del punto (x_s, m_s), sea $u_s = U(x_s, m_s)$, obteniendo los valores de $\frac{\partial U}{\partial x}$ y $\frac{\partial U}{\partial m}$; se verificara que:

$$G_u(x, U(x, m)) + m f_u(x, U(x, m)) = 0.$$

Derivando miembro a miembro con respecto a x:

$$G_{ux} + G_{uu}\frac{\partial U}{\partial x} + m[f_{ux} + f_{uu}\frac{\partial U}{\partial x}] = 0.$$

Despejando la derivada parcial de U, con respecto a x:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{G_{ux} + m f_{ux}}{G_{uu} + m f_{uu}} = -\frac{H_{ux}}{H_{uu}}.$$

Análogamente derivando miembro a miembro, con respecto a m:

$$G_{uu}\frac{\partial U}{\partial x} + f_u(x, U(x, m)) + m f_{uu}\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

De donde despejamos:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{f_u}{H_{uu}}.$$

Llevando el resultado obtenido a las condiciones del principio del máximo, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, U(x, m)). \\ \dot{m} &= -H_x(x, U(x, m), m) + im. \end{aligned}$$

Cada una de las funciones del segundo miembro se aproxima por un polinomio de Taylor de primer grado en las variables (x, u), alrededor del punto de equilibrio (x_s, m_s).

Dado que en el punto de equilibrio (x_s, m_s), las derivadas de x y de m serán cero, se verificará:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, U(x,m)). \\ 0 &= -H_x(x, U(x,m), m) + im. \end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema dado se puede aproximar por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (f_x + f_u U_x)(x - x_s) + (f_u U_m)(m - m_s). \\ \dot{m} &= -(H_{xx} + H_{xu} U_x)(x - x_s) + (i - H_{xu} U_m - f_x)(m - m_s). \end{aligned}$$

Pero por ser $U_x = -\frac{H_{xu}}{H_{uu}}$ y $U_m = -\frac{f_u}{H_{uu}}$, nos queda:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (f_x - f_u \frac{H_{xu}}{H_{uu}})(x - x_s) - \frac{f_u^2}{H_{uu}}(m - m_s). \\ \dot{m} &= -(H_{xx} + \frac{H_{xu}^2}{H_{uu}})(x - x_s) + (i - H_{xu} \frac{f_u}{H_{uu}} - f_x)(m - m_s). \end{aligned}$$

El cual se puede simplificar por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x - x_s) + b(m - m_s). \\ \dot{m} &= c(x - x_s) + (i - a)(m - m_s). \end{aligned}$$

Donde:

$$a = f_x - f_u \frac{H_{xu}}{H_{uu}}, \quad b = -\frac{f_u^2}{H_{uu}}, \quad c = -(H_{xx} + \frac{H_{xu}^2}{H_{uu}}).$$

Que están definidos particularmente en x_s, m_s y $u_s = U(x_s, m_s)$

Luego se ha logrado aproximar el sistema de ecuaciones diferenciales que siguen las trayectorias óptimas, por un sistema lineal que se comporta como el sistema original, alrededor del estado estacionario (teorema de Linealización de Hartman). Utilizando la notación matricial el sistema queda expresado como:

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ m \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & i - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_s \\ m - m_s \end{pmatrix}.$$

Para estudiar la estabilidad del sistema se deben calcular los autovalores y autovectores de la matriz de coeficientes (constantes):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & i-a \end{pmatrix}$$

de polinomio característico es:

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A).$$

Donde $tr(A)$ es la traza de la matriz A y $det(A)$, su determinante. Esto es:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & i-a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - i\lambda + a(i-a) - bc = 0.$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{i^2 - 4(a(i-a) - bc)} \\ &= \frac{i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{i^2 - 4ai + 4a^2 + 4bc} \\ &= \frac{i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4bc + (i-2a)^2}. \end{aligned}$$

Distinguiéndose así tres casos:

1. $4bc + (i-2a)^2 > 0$ Hay dos autovalores reales distintos λ_1, λ_2, luego:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + x_s.$$

2. $4bc + (i-2a)^2 = 0$ Hay un autovalor real de multiplicidad 2. $\lambda = \frac{i}{2}$, luego:

$$x(t) = (A + Bt)e^{\lambda t} + x_s.$$

3. $4bc + (i-2a)^2 < 0$

   Hay dos autovalores complejos conjugados $\lambda = \frac{i}{2} \pm \boldsymbol{j}\sqrt{w}$.

   Donde $w = |4bc + (i-2a)^2|$ y $\boldsymbol{j}$ es la unidad imaginaria compleja. Luego:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + x_s \equiv Ae^{\frac{i}{2}t}Cos(\sqrt{w}t) + Be^{\frac{i}{2}t}Sen(\sqrt{w}t) + x_s.$$

En cada uno de los casos, A y B son constantes, cuyo valor se obtendrá al imponer las condiciones iniciales: $x(0) = x_0$ y final $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s$.

Analizando cada uno de los tres casos enumerados se tiene:

1. En este caso, cuando los autovalores son reales tomemos $\lambda_1 > 0$, donde λ_2 puede ser, positivo, negativo o nulo. Se comprueba fácilmente que si:

   - $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$.

     En este caso hay estabilidad punto de silla, y existe una única trayectoria verificando $x(0) = x_0$ y $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s$.

     En efecto sustituyendo la condición $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s$. Se tendrá que $A = 0$, ya que $\lim_{t\to\infty} x(t) = e^{\lambda_1 t} = \infty$ y no es el caso contemplado, mientras que $\lim_{t\to\infty} x(t) = e^{\lambda_2 t} = 0$, por ser $\lambda_2 < 0$. Por otra parte: $x(0) - x_s = B$ lo cual conduce a

     $$x^* = x_s + (x_0 - x_s)e^{\lambda_2 t}.$$

   - $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$. En este caso hay inestabilidad ya que no existe trayectoria alguna que satisfaga $x(0) = x_0$ y $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s$. siempre que $x_0 \neq x_s$, por cuanto:

     $$\lim_{t\to\infty}[x(t) - x_s] = \lim_{t\to\infty} Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = \infty.$$

   - $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$ Se tendría que:

     $$\begin{aligned} \frac{i}{2} + \sqrt{i^2 - 4(a(i-a) - bc)} &< 0. \\ \frac{i}{2} - \sqrt{i^2 - 4(a(i-a) - bc)} &< 0. \\ i &< 0 \end{aligned}$$

     Pero este caso no se contempla ya que la tasa i, se considera todo el tiempo positiva.

2. En los casos 2 y 3 hay inestabilidad, ya que en (2)

$$\lim_{t\to\infty}(A+Bt)e^{\frac{i}{2}t}=\infty.$$

y en (3) la solución oscila con gran amplitud.

Por tanto las condición para obtener optimalidad es $4bc+(i-2a)^2>0$, la cual podemos resumir como $(\frac{tr(A)}{2})^2-Det(A)>0$. En el siguiente gráfico se muestra el resumen del comportamiento cualitativo aproximado de los tres casos señalados en función de la Traza y el Determinante de la matriz A.

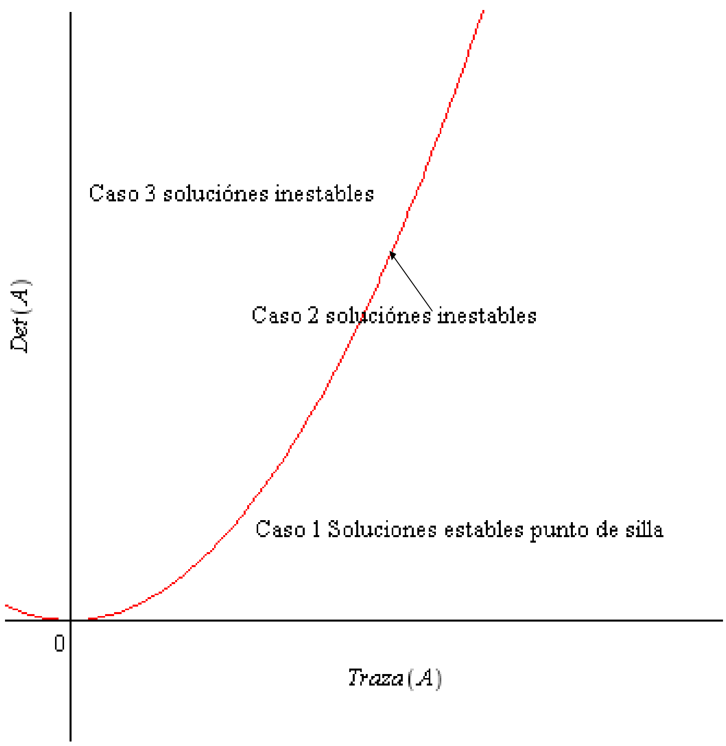

Figura 3.7: Comportamiento cualitativo de las soluciones.

3.4 Interpretación económica del Principio del Máximo.

Se considera el problema de decisión de una empresa, cuyo objetivo es maximizar el flujo de beneficios obtenidos a lo largo de un horizonte temporal dado, que comienza en el tiempo t_0 y termina en t_1, para cada instante t, se tendrá el problema planteado:

$$\max_{u(t)\in U} J = \int_{t_0}^{t_1} F[t,x(t),u(t)]dt + S[x(t_1)].$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \dot{x(t)} &= f(t,x(t),u(t)) \\ con &: x(t_0)=x_0 \\ u(t) &\in U. \end{aligned}$$

Donde:

- $x(t)$ representa el stock de capital de la empresa. Se supone conocido el stock de capital inicial $x(t_0)=x_0$.
- $u(t)$ representa las decisiones tomadas por la empresa (en este caso maderera y las desiciones son la Tipo de produccion, precios tala, entresaca, corta ,ect.), estas son las variables de control. Dichas desiciones estaran sujetas a ciertas restricciones $u(t)\in U$.
- $F(t,x(t),u(t))$, es la tasa de beneficio instantaneo, medida en Bolivares Fuertes de la empresa por unidad de tiempo.
- $S[x(t_1)]$, es el valor en Bolivares de la empresa, en el tiempo final, cuando el stock de capital es $x(t_1)$.

Sea, además para cada t, $\lambda(t)$ el cambio marginal en la función valor $V^*(t,x)$ frente a cambios infinitamente pequeños en el stock del capital $x(t)$, es decir, es la variación marginal en los beneficios óptimos generados, desde t hasta el final, producidos por un cambio en el stock de capital en t. Por tanto, es el precio sombra de una unidad de capital.

La empresa puede elegir, dentro de los limites determinados por el conjunto de restricciones, la trayectoria requerida para el vector de control $u(t)$, pero no puede decidir independientemente, el stock de capital en cada instante.

El Hamiltoniano del problema es en forma resumida

$$H = F + \lambda f.$$

A partir de un instante cualquiera $t \in [t_0, t_1]$, en el que el stock de capital es $x(t)$, y el vector de control es $u(t)$, se considera un incremento de tiempo dt , suficientemente pequeño, de manera que la empresa no cambie entre la política $u(t)$ entre t y $t + dt$.

Multiplicamos el Hamiltoniano por dt:

$$Hdt = Fdt + \lambda f dt = Fdt + \lambda \dot{x} dt = \underbrace{Fdt}_{1} + \underbrace{\lambda dx}_{2}.$$

Donde se ha utilizado el hecho que $\dot{x} = f(t,x,u)$ y $dx = \dot{x}dt$, además:

1. $F(t,x,u)dt$, es el beneficio obtenido entre los tiempos t y $t + dt$, si se parte del stock de capital x, y se aplica el control u representando la contribución directa en Bolívares Fuertes en este lapso de tiempo infinitesimal o relativamente pequeño.

2. $dx = f(t,x,u)dt$ es el cambio en el stock de capital desde t a $t + dt$, cuando se esta en el estado x y se aplica el control u. Por lo que λdx representa el valor en Bolívares Fuertes del incremento del stock de capital. Es decir el cambio de stock

de capital de x a $x + dx$ el cual proporciona un beneficio generado hasta el final del horizonte temporal, utilizando las decisiones óptimas de λx Bolívares fuertes. Por tanto, puede ser considerado como la contribución indirecta a J en Bolívares fuertes.

Por tanto, Hdt puede ser interpretado como la contribución indirecta a J, desde t a $T + dt$, cuando $x(t) = x$ y $u(t) = u$. A partir de esta interpretación se da razón de por que la maximización en cada instante de tiempo t, es realizada en el Hamiltoniano y no en la función F, tal como lo expresa la condición (2) del Principio del Máximo.

En efecto, las decisiones que se toman en el tiempo t, representadas por $u(t)$, afectan al beneficio obtenido en $[t, t + dt]$ (contribución directa), pero también a $x(t + dt)$, y con ello al punto de partida de la empresa en $t + dt$ y por tanto a su capacidad de general beneficios desde $t + dt$ hasta el final del horizonte temporal (contribución indirecta). Esta claro por que la elección de u de manera que maximize el Hamiltoniano, ya que con ello se maximiza la suma de las contribuciones directa e indirectamente.

Siguiendo, ahora con la interpretación de la condición (1) del Principio del Máximo:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad con \lambda(t_1) = \frac{dS[x(t_1)]}{dx}.$$

Se puede expresar:

$$-d\lambda = H_x dt = F_x dt + \lambda(f_x dt).$$

Donde $H_x = \frac{\partial H}{\partial x}$, $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ y $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Por lo cual, a lo largo del camino óptimo el decrecimiento en el precio sombra del capital desde t a $t + dt$, es decir la depreciación del precio sombra del capital en este lapso de tiempo, siendo considerado como el coste marginal de mantener dicho capital, se iguala al ingreso marginal de invertir dicho capital, que consiste en la suma de las contribuciones marginales directa e indirecta.

Por ultimo la contribución final $\lambda(t_1) = \frac{dS[x(t_1)]}{dx}$, resulta evidente a la vista de la interpretación dada a λ. En efecto, en t_1, final del horizonte temporal ya no existe la necesidad de tomar decisión alguna, teniendo el valor de la empresa en $S[x(t_1]$ y por tanto, el precio sombra de una unidad de capital es $\lambda(t_1) = \frac{dS[x(t_1)]}{dx}$.

3.5 Condiciones suficientes de optimalidad.

El principio del Máximo de Lev Pontryagin proporciona condiciones necesarias de optimalidad. En esta sección se estudian las condiciones suficientes, cuyo cumplimiento garantiza que las condiciones necesarias proporcionadas por el Principio del Máximo también sean suficientes de optimalidad global. -como es habitual en teoría de optimización, estas condiciones requerirán algún tipo de concavidad de las funciones que definen el problema.

A continuación se presentan dos tipos de condiciones: las de Mangasarian y las de Arrow. Las condiciones suficientes que se obtienen en el teorema de Arrow son más generales y su comprobación involucra mayor dificultad.

Se considera el siguiente problema básico de control óptimo:

$$\max_{u(t)\in U} J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), u(t)]dt + S[x(t_1)].$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} \dot{x(t)} &= f(t, x(t), u(t)) \\ con &: x(t_0) = x_0 \\ u(t) &\in U. \end{aligned}$$

Supongamos que $x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)$ verifican las condiciones necesarias de optimalidad proporcionadas por el principio del máximo. Es decir, usando la notacion vectorial se verifica que:

1. $\dot{\lambda}^* = -\nabla_x F(t, x^*, u^*) - \lambda \nabla_x f(t, x^*, u^*)$ con $\lambda^*(t_1) = \nabla_x S[x^*(t_1)]$.

2. $\nabla_u F(t, x^*, u^*) + \lambda \nabla_u f(t, x^*, u^*) = 0$.

3. $\dot{x}^* = f(t, x^*, u^*)$, con $x^*(t_0) = x_0$.

En donde se ha utilizado la siguiente notacion:

$$\nabla_x F = \{\frac{\partial F}{dx_1}, \ldots, \frac{\partial F}{dx_n}\}; \quad \nabla_x f = \{\frac{\partial f}{dx_1}, \ldots, \frac{\partial f}{dx_n}\}.$$

$$\nabla_u F = \{\frac{\partial F}{du_1}, \ldots, \frac{\partial F}{du_n}\}; \quad \nabla_u f = \{\frac{\partial f}{du_1}, \ldots, \frac{\partial f}{du_n}\}.$$

Particularizadas o evaluadas en (t, x^*, u^*), y además:

$$\nabla_x S = \{\frac{\partial S}{dx_1}, \ldots, \frac{\partial S}{dx_n}\}; \quad \text{particularizadas en } x^*(t_1).$$

Se usara también la notacion $F^* = F(t, x^*, u^*)$, $F = F(t, x, u)$, $f^* = f(t, x^*, u^*)$, $f = f(t, x, u)$ y $S^* = S[x^*(t_1)]$.

3.5.1 Condición suficiente de Mangasarian.

A continuación se enuncia y demuestra el teorema asegurador de que la verificación de ciertas condiciones adicionales garantizan que $u^*(t)$ es el control óptimo del problema:

Teorema 3.10. [9] ***Mangasarian***. *Sean $x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ los resultados obtenidos al aplicar el Principio del Máximo de Pontryagin al problema de control óptimo. Si se verifica que:*

a) F y f son cóncavas en x, u para cada $t \in [t_0, t_1]$.

b) S es cóncava en x.

c) $\lambda^*(t) \geq 0$ para cada $t \in [t_0, t_1]$.

Si $f(t, x, u)$ es no lineal en x, u entonces u^* es el control óptimo global del problema con x^* su trayectoria de estado asociada y $\lambda^*(t)$ la trayectoria óptima de las variables adjuntas.

Demostración: Al plantear el problema básico de control óptimo en tiempo continuo se ha partido del principio que las funciones F, f y S poseen derivadas derivadas parciales primeras continuas. Partiendo de las siguientes caracterizaciones de las funciones cóncavas diferenciables, se verifica para cada $t \in [t_0, t_1]$:

$$F^* - F \geq \nabla_x F^*(x^* - x) + \nabla_u F^*(u^* - u). \tag{3.23}$$

$$f^* - f \geq \nabla_x f^*(x^* - x) + \nabla_u f^*(u^* - u). \tag{3.24}$$

$$S^* - S \geq \nabla_x S[x^*(t_1)](x^*(t_1) - x(t_1)). \tag{3.25}$$

Sea $u(t)$ un control admisible y sea $x(t)$ la trayectoria de estado asociada, es decir que verifica: $\dot{x}(t) = f(t, x, u)$, con $x(t_0) = x_0$, veremos que entonces:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*, u^*)dt + S[x^*(t_1)] \geq \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)dt + S[x(t_1)].$$

Con lo que quedara demostrado el teorema.

Aplicando la anterior caracterización de funciones cóncavas diferenciales e integrando y usando (3.23), (3.24) y (3.25) se obtiene que:

$$\begin{aligned} J^* - J &= \int_{t_0}^{t_1} [F(t, x^*, u^*) - F(t, x, u)]dt \\ &\quad + S[x^*(t_1)] - S[x(t_1)] \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} [\nabla_x F^*(x^* - x) + \nabla_u F^*(u^* - u)]dt \\ &\quad + \nabla_x S[x^*(t_1)](x^*(t_1) - x(t_1)). \end{aligned}$$

Sustituyendo los integrandos por sus equivalentes según (1) y (2) de las condiciones del principio del máximo anteriormente enunciadas, la expresión del lado derecho de la desigualdad precedente se transforma en:

$$\begin{aligned} J^* - J &\geq \int_{t_0}^{t_1} [-\dot{\lambda}^* - \lambda^* \nabla_x f^*(x^* - x) - \lambda^* \nabla_u f^*(u^* - u)]dt \\ &\quad + \lambda^*(t_1)(x^*(t_1) - x(t_1)) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Distribuyendo el segundo miembro respecto a la integral:

$$\begin{aligned} J^* - J \;\geq\; & -\int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}^*(x^* - x)dt - \int_{t_0}^{t_1} [\lambda^* \nabla_x f^*(x^* - x) \\ & + \lambda^* \nabla_u f^*(u^* - u)]dt + \lambda^*(t_1)(x^*(t_1) - x(t_1)). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Resolviendo, por partes, la primera integral:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}^*(x^* - x)dt &= \lambda^*(t)[x^*(t) - x(t)]|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \lambda^*(\dot{x}^* - \dot{x})dt \\ &= \lambda^*(t)[x^*(t_1) - x(t_1)] - \int_{t_0}^{t_1} \lambda^*(f^* - f))dt. \end{aligned}$$

Finalmente sustituyendo en (3.27), se tiene:

$$\begin{aligned} J^* - J \;\geq\; & -\lambda^*(t_1)[x^*(t_1) - x(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} \lambda^*(f^* - f))dt \\ & - \int_{t_0}^{t_1} [\lambda^* \nabla_x f^*(x^* - x) + \lambda^* \nabla_u f^*(u^* - u)]dt \\ & + \lambda^*(t_1)(x^*(t_1) - x(t_1)) \\ = \; & \int_{t_0}^{t_1} [\lambda^*(f^* - f) - \lambda^* \nabla_x f^*(x^* - x) - \lambda^* \nabla_u f^*(u^* - u)]dt \\ = \; & \int_{t_0}^{t_1} \lambda^*[(f^* - f) - \nabla_x f^*(x^* - x) - \nabla_u f^*(u^* - u)]dt. \qquad (3.28) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Analizando el integrando de esta expresión, se pueden dar dos posibilidades:

1. Que f no sea lineal en x, u. En este caso, por hipótesis $\lambda^*(t) \geq 0$ y por la propiedad de concavidad de f, la cantidad entre corchetes es positiva por (3.24), resulta $J^* - J \geq 0$.

2. Si f es lineal en x, u. Sean: $f(t, x, u) = ax + bu + g(t)$, entonces resulta $f(t, x^*, u^*) = ax^* + bu^* + g(t)$, por lo tanto:

$$\nabla_x f(t, x^*, u^*) = a \quad y \quad \nabla_u f(t, x^*, u^*) = b.$$

Sustituyendo estos hechos en (3.28) se llega a que:

$$f^* - f - \nabla_x f^*(x^* - x) - \nabla_u f^*(u^* - u) = 0.$$

Con lo que vale nuevamente $J^* - J \geq 0$, $\lambda^*(t) \geq 0$ puede tomar valores positivos, negativos o nulos y el teorema queda demostrado.

3.5.2 Condición suficiente de Arrow.

Antes de enunciar el teorema de Arrow, sobre condiciones suficientes de optimalidad para el problema de control, se necesita una definición y una proposición previa.

Definición 3.11. [9] ***Hamiltoniano derivado.***
Se propone la función llamada Hamiltoniano derivado, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H^o : R^n \times R^n \times [t_0, t_1] &\rightarrow R \\ (t, x, \lambda) &\rightarrow H^o(t, x, \lambda) = \max_{u(t)\in U} H(t, x, u, \lambda). \end{aligned}$$

Suponiendo que al resolver el problema:

$$\max_{u(t)\in U} H(t, x, u, \lambda).$$

se obtiene la función: $u(t) = u^{\mathrm{o}}(t, x, \lambda)$.

Con esto el hamiltoniano derivado sera: $H^{\mathrm{o}}(t, x, \lambda) = H(t, x, u^{\mathrm{o}}, \lambda)$.

Se enuncia la siguiente proposición que sera de utilidad en la demostración del teorema:

Proposición 2 Si u^{o} es diferenciable se verifica:

$$\nabla_x H^{\mathrm{o}}(t, x, \lambda) = \nabla_x H(t, x, u^{\mathrm{o}}, \lambda), \quad \forall u \in U.$$

Demostración Como se definió anteriormente $H^{\mathrm{o}}(t, x, \lambda) = H(t, x, u^{\mathrm{o}}, \lambda)$, pero u^{o} es una función dependiente de t, x, λ.

Se verificara, para cada $i = 1, 2..., n$

$$\frac{\partial H^{o}(t,x,\lambda)}{\partial x_i} = \frac{\partial H^{o}(t,x,u^{o},\lambda)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H^{o}(t,x,u^{o},\lambda)}{\partial u_j} \frac{\partial u_j^{o}}{\partial x_i}.$$

En notacion vectorial resulta:

$$\nabla_x H^{o}(t,x,\lambda) = \nabla_x H(t,x,u^{o},\lambda) + \nabla_u H(t,x,u^{o},\lambda) J_x u^{o}.$$

Donde ∇_x, ∇_u representan los gradientes, con respecto a las variable x, u respectivamente y J_x, la matriz jacobiana de u^{o}, con respecto a x
Luego, se verificara

$$\nabla_u H(t,x,u^{o},\lambda) = 0, \quad \forall x.$$

En efecto se distinguen dos casos:

1. El programa: $\max_u H(t,x,u,\lambda), u$ no esta sujeto a restricciones. Alcanza su óptimo en el conjunto u . En tal caso, se cumple:

$$\nabla_u H(t,x,u^{o},\lambda) = 0, \quad \forall x.$$

2. El programa: $\max_u H(t,x,u,\lambda), u$. Alcanza el punto óptimo en un punto no perteneciente al conjunto U, en este caso $J_x = 0$, ya que cambiando x no se modifica el valor de u.

   Por lo tanto la proposición queda demostrada.

A continuación se enuncia y demuestra el teorema que garantiza que si se verifican ciertas condiciones adicionales, $u^*(t)$ es el control óptimo del problema.

Teorema 3.12. [9] ***Arrow***. *Sean $x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$, los resultados de aplicar el Principio del Máximo de Pontryagin.*
Si la función $H^o(t,x,\lambda^*)$ es cóncava en x, para cada $t \in [t_0, t_1]$ y S(x), es cóncava en x , entonces u^* es el control óptimo global del problema, con x^* la trayectoria de estado óptima y λ^* la trayectoria óptima de las variables adjuntas.

Demostración. Sea $u(t)$ cualquier control admisible y sea $x(t)$ la trayectoria asociada, es decir, verificando que $\dot{x}(t) = f(t, x, u)$, con $x(t_0) = x_0$.

Veamos que:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*, u^*)dt + S[x^*(t_1)] \geq \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)dt + S[x(t_1)].$$

Con lo cual se demostrara el teorema.

Por definición el Hamiltoniano derivado, se tiene que para cada $t \in [t_0, t_1]$

$$H(t, x, u, \lambda^*) \leq H^{\mathrm{o}}(t, x, \lambda^*).$$

Por ser H^{o} cóncava en x, se verifica:

$$H^{\mathrm{o}}(t, x, \lambda^*) \leq H^{\mathrm{o}}(t, x^*, \lambda^*) + \nabla_x H^{\mathrm{o}}(t, x^*, \lambda^*)(x - x^*).$$

Pero se tiene:

$$H^{\mathrm{o}}(t, x, \lambda^*) = H(t, x^*, u^*, \lambda^*).$$

Y por la proposición 2: $\nabla_x H^{\mathrm{o}}(t, x, \lambda) = \nabla_x H(t, x, u^{\mathrm{o}}, \lambda)$.

Resultando:

$$H(t, x, u, \lambda^*) \leq H(t, x^*, u^*, \lambda^*) + \nabla_x H^{\mathrm{o}}(t, x^*, \lambda^*)(x - x^*).$$

Por definición de H y utilizando la condición 1) del Principio del Máximo, la desigualdad anterior se puede expresar como:

$$\begin{aligned} F(t, x, u) + \lambda^* f(t, x, u) \quad \leq \quad & F(t, x^*, u^*) + \lambda^* f(t, x^*, u^*) \\ & + [-\dot{\lambda}](x - x^*). \end{aligned}$$

De donde se deduce:

$$F(t, x^*, u^*) - F(t, x, u) \geq \dot{\lambda}^*(x - x^*) + \lambda^*(\dot{x} - \dot{x}^*) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Integrando ambos miembros de la desigualdad anterior, desde t_0 a t_1, y tomando en cuenta que $x(t_0) = x^*(t_0)$ y $\lambda^*(t_1) = \nabla_x S[x^*(t_1)]$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*, u^*)dt - \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)dt &\geq \int_{t_0}^{t_1} [\lambda^*(x - x^*)]' dt \\
&= [\lambda^*(x - x^*)]|_{t_0}^{t_1} \\
&= \lambda^*(t_1)[(x(t_1) - x^*(t_1)] - \lambda^*(t_0)[(x(t_0) - x^*(t_0)] \\
&= \nabla_x S[x^*(t_1)][x(t_1) - x^*(t_1)].
\end{aligned}$$

Por tanto, se asume que:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*, u^*)dt - \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)dt - \nabla_x S[x^*(t_1)][x(t_1) - x^*(t_1)] \geq 0. \tag{3.30}$$

Por otro lado, por ser $S[x(t_1)]$, una función cóncava, se tiene:

$$S[x^*(t_1)] - S[x(t_1)] + \nabla_x S[x^*(t_1)][x(t_1) - x^*(t_1)] \geq 0. \tag{3.31}$$

Sumando las ecuaciones (3.30) y (3.31), se obtiene:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*, u^*)dt + S[x^*(t_1)] \geq \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)dt + S[x(t_1)].$$

Con lo cual el teorema queda demostrado.

CAPÍTULO 4

EQUIDAD INTERGENERACIONAL Y MEDIO AMBIENTE.

La preocupación por el medio ambiente se ha convertido en uno de los principales debates abiertos en el seno de la sociedad actual. Esta discusión se esta desarrollando no solo en el terreno económico, sino que implica también a otras disciplinas como la Biología, la Sociología, la Ética, la Filosofía o la Política. Básicamente, se plantea en ésta el objetivo de incorporar el medio ambiente a la toma de decisiones, teniendo en cuenta sus tres aportes fundamentales a la economía mundial:

- Por un lado proporciona lo que pueden denominarse "Servicios ambientales". Así por ejemplo, los bosques ayudan a regular el clima, además de tener un uso recreativo importante. Es el mismo caso de las playas, las montañas, etc. Por otra parte, proporciona bienes indispensables y de difícil sustitución, como la atmósfera. En definitiva, se puede decir que el medio natural constituye una base necesaria para la existencia.

- Además, suministra recursos tanto para el proceso productivo como para la satisfacción directa de las necesidades humanas. Este es el caso de los recursos agrícolas, pesquero y los mismos bosques por ejemplo.

- Por último, sirven de depósito de los residuos después del consumo de los recursos.

El debate aparece precisamente en el momento y en el lugar en que comienza a apreciarse que estas funciones están siendo “sobreutilizadas”. Determinados recursos comienzan a ser sobreexplotados (bosques, pesca,..); otros son utilizados en forma intensiva sin tener en cuenta sus limites de disponibilidad (Petróleo, gas natural y otros minerales); y en algunos lugares se rebasa con creces la capacidad del medio natural para poder absorber los residuos que producimos, creando así problemas tan graves y preocupantes como por ejemplo la destrucción de los ríos y de la capa de ozono. Y todo ello comienza en los países industrializados, de forma que es en estos mismos donde la inquietud por las consecuencias de tal ritmo de actuaciones es más acuciante, dado que es precisamente en estos países donde la riqueza natural es ahora más escasa.

En tal situación, la cuestión que se plantea es la obligación o no de mantener el medio. Es decir, básicamente se trata de responder a la siguiente pregunta: ¿Tienen las generaciones presentes (GP) la obligación de conservar para las generaciones futuras (GF) las condiciones ambientales heredadas su vez de sus descendientes? O por el contrario, ¿Pueden hacer uso más o menos indiscriminado del medio ambiente en busca del beneficio propio, aunque ello suponga consecuencias fatales sobre las generaciones venideras? El problema es pues el de la equidad distributiva desde el punto de vista intergeneracional y sus posibles respuestas son fundamentalmente dos:

- Puede considerarse que todos los bienes naturales son propiedad únicamente de las generaciones presentes, idea que se refleja nítidamente en afirmaciones como la siguiente: *Las generaciones pasadas ya no están, y las que han de venir vendrán por que nosotros queremos que vengan.* El mundo, dicho con cierta brutalidad, nos pertenece a los que ahora vivimos en el y a nadie más.

- O bien se puede entender que las generaciones futuras (GF) poseen ciertos derechos sobre el capital natural existente. Así, la Comisión Mundial para el Medio Ambiente y Desarrollo afirma: El desarrollo económico debe permitir: ***Satisfacer las necesidades del presente sin comprometer la capacidad de las***

generaciones futuras para satisfacer las suyas.

En este último caso han de diseñarse y ponerse en practica los mecanismos oportunos para que los miembros de las (GP) respeten los derechos que se hayan establecido a favor de sus descendientes. Para conseguir una distribución justa, bastaría con que la asignación de recursos se realizara bajo el velo de la ignorancia de Rawls, de forma que los individuos tomasen las decisiones sin saber en ningún momento a que generación van a pertenecer. De esta forma se garantiza la imparcialidad.

El problema de la distribución intergeneracional de los recursos puede enfocarse básicamente sobre dos puntos de vista:

1. Por un lado, estaría el "enfoque individualista". Se denomina así precisamente por el hecho de basar el análisis en los individuos y no en las generaciones como colectivo. Cada individuo trata de maximizar su bienestar en función, no únicamente de su satisfacción propia, sino también del bienestar de sus descendientes. Obviamente estos cálculos variaran de individuo a individuo, por que cada uno tendrá sus propias preferencias. En este contexto, el problema de distribución intergeneracional se considera que no existe, puesto que es solucionado en particular por cada individuo cuando toma sus propias decisiones entre consumo y ahorro.

2. Por otra parte, se sitúa el que puede denominarse "enfoque colectivista", que considera el consumo de las generaciones futuras básicamente como un bien publico. El individuo, cuando toma sus decisiones sobre consumo, ha de elegir de alguna forma entre consumo propio y consumo de todos los miembros de las (GF). Su decision no sera aumentar su ahorro, porque sabe que actuando solo no mejorara el bienestar global de las (GF). Sin embargo, estaría dispuesto a soportar un impuesto que gravase también a los demás miembros de su generación, y cuyos fondos se desatinarían a las GF.

El enfoque individualista no resuelve el problema de la equidad intergeneracional, sino que simplemente niega su existencia. Sin embargo el problema existe, y una prueba irrefutable de ello es que la mayoría de los recursos naturales poseen fuertes características de bienes colectivos, o bien no existe un mercado donde sean objeto de intercambio, por lo tanto un comportamiento individual racional nunca puede dar lugar a una asignación eficiente ni equitativa, sino que se produciría irremediablemente lo que Garrett Hardin denominó "La Tragedia de los comunes"(*The tragedy of the commons* (Azqueta,1994)[1]). Y aún en el caso de bienes naturales de propiedad privada, como pueden ser los bosques por ejemplo, tampoco esta de ninguna manera garantizada la eficiencia.

Los objetivos que se persiguen en este capítulo son básicamente dos. En primer lugar justificar la necesidad de tener en cuenta a las generaciones futuras a la hora de tomar decisiones que afectan el medio ambiente. En éste se analizan las deficiencias entre el calculó tradicional de los costes y beneficios asociados a proyectos y a las políticas publicas. Por lo cual se propone la utilización de un método alternativo más completo que considere explícitamente la existencia de las generaciones, seguidamente se realiza un análisis de las externalidades tanto en el plano intrageneracional, como entre generaciones distintas, presentándose posteriormente una propuesta para el reparto intergeneracional de los derechos de propiedad sobre los recursos naturales.

El segundo objetivo consiste en desarrollar los métodos adecuados para que la equidad intergeneracional sea efectivamente considerada en la practica, se presenta una clasificación de los recursos naturales en función del modo correcto de gestionarlos teniendo en cuenta los derechos de propiedad establecidos entre GP y GF.

4.1 Problema de cálculo: la necesidad del descuento intergeneracional.

Al considerar la necesidad de tener en cuenta los intereses de las generaciones futuras no solo se van a ver afectado el modo de tomar decisiones, sino también la forma de valorar los impactos de las mismas.

En este sentido, los métodos tradicionales de evaluación de proyectos, valor actuar neto (VAN) y tasa interna de rendimiento(TIR) no son del todo correctos, puesto que no tienen en cuenta explícitamente la existencia de generaciones. Los costes y los beneficios se computan como si afectasen únicamente a los individuos actuales. Este comportamiento seria valido únicamente si se tratara de individuos de vida ilimitada - *supuesto de inmortalidad*- o bien cuando el proyecto fuese de muy corta duración. En otro caso, los impactos afectaran también a individuos que ahora están por nacer, y por lo tanto deberían tenerse en cuenta sus intereses de manera explícita al realizar la evaluación. Para ello, a la hora de calcular el VAN debería hacerse para cada generación por separado y referido al periodo en el que nacen como momento inicial. A partir de ahí, y utilizando una tasa de descuento intergeneracional, se agregarían todos los VAN generacionales para obtener el VAN generacional total, en el cual basar la decision.

A continuación, se presenta un sencillo ejemplo de como puede variar la rentabilidad de un proyecto según se tenga en cuenta o no la existencia de una tasa de descuento intergeneracional. Considérese el caso de una sociedad compuesta por dos individuos A y B que viven dos periodos. Cada uno de ellos tiene un hijo en el segundo periodo de su vida. A' es el hijo de A, B' es el hijo de B y A" es el hijo de A'. Se trata de estudiar la conveniencia de un proyecto de inversion en infraestructura cuyos beneficios afectan a varias generaciones, siendo el coste de oportunidad del capital del 100 por ciento ($r = 1$). En el periodo inicial (0) tiene lugar la inversion por valor de 2 unidades monetarias. Las obras se realizan durante este periodo inicial, y desde el periodo 1 hasta el 3 se producen unos beneficios netos de 2 unidades monetarias por cada periodo, tal como puede verse en el cuadro 2:

	Tiempo	0	1	2	3	$VAN_0(r=1)$
Total		-2	2	2	2	$VAN_0 = -0{,}25$

Cuadro 4.1: VAN con supuesto de inmortalidad.

Como el VAN calculado al modo usual es negativo, el proyecto debería rechazarse. Sin embargo, es ilustrativo examinar como afectaría este proyecto a cada individuo en función de la generación a la que pertenece, como se muestra en el cuadro 3:

	Tiempo	0	1	2	3	$VAN_0(r=1)$
A	0	-1				$VAN_0 = -1$
B	0	-1	1			$VAN_0 = -0{,}5$
A’	1		1	1		$VAN_0 = 0{,}75$
B’	2			1	1	$VAN_0 = 0{,}375$
A”	3				1	$VAN_0 = 0{,}125$
Total		-2	2	2	2	$VAN_0 = -0{,}25$

Cuadro 4.2: VAN con supuesto de inmortalidad (desagregado).

En el segundo periodo, los demás individuos por su parte descendientes de A y B, son ganadores netos porque únicamente perciben beneficios sin tener que asumir ningún coste. Si la toma de decisiones es democrática el proyecto sera rechazado desde el punto de vista de las GP, porque su VAN total es negativo (VAN=-1.5). Además, aunque parece que tiene en cuenta a las GF, el resultado continua siendo negativo en términos de VAN (-0.25), por lo tanto el proyecto no es rentable, como ya se sabia.

Pero el planteamiento anterior, aun siendo el habitual no puede considerarse correcto, porque la actualización de flujos se realiza exclusivamente desde la perspectiva de las GP. El periodo 0 es el inicial únicamente para las generaciones presentes, los individuos A y B, pero no para todos los demás, puesto que todavía no han nacido. El periodo actual o inicial es el 1 para A', el 2 para B' y el 3 para A". Si se calcula el VAN teniendo en cuenta el periodo inicial para cada individuo resulta lo siguiente:

	Tiempo	0	1	2	3	$VAN_0(r = 1)$
A	0	-1				$VAN_0 = -1$
B	0	-1	1			$VAN_0 = -0{,}5$
A'	1		1	1		$VAN_1 = 1{,}5$
B'	2			1	1	$VAN_2 = 1{,}5$
A"	3				1	$VAN_3 = 1$
Total		-2	2	2	2	**No Sumable**

Cuadro 4.3: VAN para cada generación.

Puede apreciarse que las GP (los individuos A y B) pierden con la realización del proyecto, mientras que todas las GF resultan beneficiadas, ya que reciben beneficios positivos sin haber asumido ningún coste. La cuestión es averiguar si en conjunto la sociedad en general, pierde o gana con la realización de esta inversion. No seria correcto sumar costes y beneficios de generaciones distintas como se ha llegado a proponer (Kula 1992 [21], entre otros.) porque ello significaría indiferencia entre el consumo entre una y otra generación, lo que esta en abierta contradicción con la realidad. Lo que se precisa, es una forma de agregar los beneficios netos pertenecientes a generaciones distintas consistentes con las preferencias. De hecho, los individuos no solo tienen preferencias definidas sobre consumo propio actual y consumo propio futuro, sino también entre consumo propio y consumo de sus descendientes o, si se prefiere, entre consumo de las GP y consumo de las GF, como se revela en instituciones tales como los museos o el sistema de herencias. Supondremos, que cada individuo tiene preferencias definidas sobre su consumo propio y el de sus descendientes, de forma que descuenta este último a una tasa R, la tasa de descuento intergeneracional. Es decir, sus preferencias se pueden presentar mediante la siguiente igualdad:

$$Consumo \quad propio = \frac{Consumo \quad hijo}{1+R}.$$

Donde R es mayor que cero y finito.

Teniendo en cuenta estas preferencias, el beneficio que recibe un individuo deberá ser calculado en base al que recibirán sus descendiente, descontando a la tasa R.

De forma que la obtención del VAN generacional total, se consigue atendiendo a que:

$$\begin{aligned} VAN_G(total) &= VAN_G(A) + VAN_G(B) \\ &= \{VAN_A + \frac{VAN_{A'}}{1+R} + \frac{VAN_{A''}}{(1+R)^2}\} + \{VAN_B + \frac{VAN_{B'}}{1+R}\} \\ &= \{-1 + \frac{1{,}5}{1+R} + \frac{1}{(1+R)^2}\} + \{-0{,}5 + \frac{1{,}5}{1+R}\} \\ &= -1{,}5 + \frac{3}{1+R} + \frac{1}{(1+R)^2}. \end{aligned}$$

Para una tasa R de un 20 % resulta un VAN generacional total de 1,69. Es decir, que un proyecto no rentable según el VAN tradicional (-0.25), resulta ahora rentable si se agrega un beneficio social que considere adecuadamente los intereses de las generaciones futuras.

4.2 La difícil internalización de externalidades, como las intergeneracionales.

Cuando se examina la abundante y rigurosa literatura acerca de la teoría de las externalidades, las posibles formas de solucionar los problemas que representan y las numerosas aplicaciones reales, es casi inevitable pensar que, por lo menos sobre el papel, ya esta todo resuelto y que en la practica, el proceso de *internalización*[1] de las externalidades seguirá avanzando imparable en todo el mundo. Sin embargo, tal intuición es menos certera de lo que parece a simple vista. Incluso sin abandonar el cómodo marco empleado habitualmente para el análisis, surgen cuestiones que al caso no están bien estudiadas. Veamos por ejemplo que ocurre con la solución impositiva a la *Pigou*[2] y con la solución de *Coase*[3], para hablar tan solo de las más acreditadas.

Si se internalizan los costes marginales externos mediante un impuesto, esta claro que aumentaran los precios al consumidor. Este aumento de precios no supone mayor problema en los mercados locales: poco importa que la visita al peluquero o la compra de caramelos y cotufas en la sala de cine sea algo más gravosa. Pero no ocurre lo mismo cuando se opera con productos que compiten en el mercado internacional. Cuando se trata de producir sábanas, fragatas o avellanas, la internalización significa reducir drásticamente los beneficios en la medida que el precio internacional no incorpore los costes externos, que es el caso habitual (por supuesto, si los productores agravados a la Pigou incrementaran el precio más allá de cierto -pequeño- umbral serían expulsados del mercado ipsofacto).

De echo, cuesta pensar que en unos mercados cada vez más globalizados la solución pigouviana tenga una presencia significativa, sobre todo si se tiene en consideración que

[1] absorber los efectos negativos, causados directa o indirectamente por factores externos sin que se perturbe drásticamente la producción de los beneficios

[2] internalizar los costes marginales externos mediante un impuesto

[3] basada en la libre negociación de derechos de propiedad (DDP) en el mercado

algunos países pueden preferir una modesta ganancia en la cuota del mercado a una mayor internalización de los costes externos por parte de sus productores, por lo que tenderán a practicar el denominado “dumping verde”. En estas circunstancias, no es de esperar que la internalización a la Pigou se lleve a cabo en todos los productos, y en todo caso el impuesto sea muy inferior al óptimo.

Algo semejante ocurrirá con todas las externalidades con características de bien colectivo debido a que cada país adoptara el comportamiento propio del polizón ***free rider*** como consecuencia de encontrarse en un juego como el dilema del prisionero.

Tomando la solución a través de la redistribución de los DDP y su asignación mediante el mecanismo de mercado o solución a la Coase. Como es bien sabido, en ausencia de costes de transacción se llega a producir la cantidad óptima con independencia de como se repartan los DDP y el precio que se arbitra en el mercado coincide con el impuesto pigouviano.

Dado el contexto ideal en el que fue concebida, los resultados de la solución de Coase son indistinguibles de los que proporcionaría la pigouviana, siendo la única diferencia el carácter descentralizado de la primera y el distinto impacto redistributivo. Por lo tanto, lo ya dicho acerca de las limitaciones de aplicación practica de la solución pigouviana es aplicable también a la regulation coasiana.

Existe un problema adicional: la valoración de partida tanto del coste de oportunidad por no contaminar, como de la situación con menos contaminación, sera muy distinta en función de la cantidad y forma de distribución de la renta, la riqueza y de la proporción de riqueza y renta natural de que se disponga. Como estos parámetros no siempre son más o menos adecuados, la negociación puede dar lugar a resultados grotescos: un país rico con una escasa proporción de riqueza natural, puede vender por un precio más bajo su contaminación a otro país, que es pobre pero que dispone de una gran riqueza natural; el resultado de este intercambio paretiano sera un incremento espectacular de la contaminación por la diferencia de valoración que, a su vez, se debe a la forma de distribución de la riqueza y a su composición.

Por otro lado, los costes de transacción (CT) en la solución de Coase, es el efecto relevante para efectos prácticos. Si los DDP están en manos de los contaminadores, el efecto de la acción de mercado sera siempre una cantidad de contaminación ineficiente por exceso y el precio resultante mayor o menor al óptimo en función de como se reparten los costes CT entre demandantes y oferentes. Cuando son las víctimas de la contaminación las que disfrutan las DDP, la negociación acabara en una cantidad de contaminación ineficiente por defecto, siendo el precio inferior o superior al óptimo dependiendo del reparto de los CT. Por lo tanto, en presencia de CT, no solo no se obtendrá un resultado ineficiente sino que existirá un sesgo en la valoración de la externalidad, y el signo de este sesgo esta indeterminado *a priori.*

Existe un problema de cálculo cuando la externalidad afecta a las generaciones futuras (GF) y mal podría internalizarse un coste si no esta bien calculado. El cálculo del coste marginal externo esta sesgado porque priva la perspectiva de las generaciones presentes (GP) al adoptarse el *supuesto de inmortalidad.* En particular, las GP tenderán a subvalorar las *bombas de tiempos*, por ejemplo, las externalidades acumuladas en la atmósfera o en el mar, sin plantear graves problemas hasta un futuro que para las GP es lejano.

Si introducimos las GF en el análisis, es inevitable darse cuenta que la internalización de los costes externos tropieza con serias dificultades. La solución *Pigouviana* depende de la voluntad de los gobiernos para internalizar los costes de las GF, pero estas no participan de ninguna forma en el proceso politico, por lo que sus intereses tendrán a ser olvidados. Tampoco hay manera de aplicar la solución a la *Coase* en tanto las GF no puedan negociar libremente con las GP, y lo que es previo, que las GF tengan algo que negociar, es decir, dispongan de una parte de los DDP.

En resumen, al margen de las limitaciones reales de las soluciones clásicas para la internalización de los costes externos entre miembros de las GP, al tener en consideración a las GF dichas soluciones son inaplicables si no se abordan profundas reformas institucionales. Con esto, es necesario que se lleve a cabo una reasignación de parte de los DDP en su favor y que se diseñe y pongan en funcionamiento las instituciones necesarias, para que las GF puedan disponer de una representación apropiada en todos los organismos sociales relevantes.

4.3 El reparto intergeneracional sobre los recursos de los Derechos de Producción DDP.

La premisa básica de la que suelen partir los economistas para analizar el problema medioambiental es la necesidad de cumplir con el *requisito de sostenibilidad*. Aquí subyace la primera dificultad para el análisis, en saber en que consiste exactamente este termino. La pregunta inmediata que surge es ¿como se puede encontrar la solución de un problema? Si no se conoce exactamente cual es. En consecuencia, si no existe acuerdo acerca de que es sostenibilidad, difícilmente existirá la posibilidad para proponer las formas de gestión adecuadas de los recursos naturales en aras de conseguirla.

Recientemente el termino desarrollo sostenible ha empezado en el diccionario de la Real Academia Española. Como cabria esperar, la definición escogida es aquella popularizada en 1987 por el informe de las Naciones Unidas, también llamado **Informe Brundtland**. Dicho documento, definió el desarrollo sostenible como *el modelo de desarrollo que, cubriendo las necesidades del presente preserva la posibilidad de que las generaciones futuras satisfagan las suyas*, acuñando el significado dado al termino desde entonces en los foros internacionales. Cinco años más tarde, la celebre Cumbre de Rio de Janeiro (1982) lanzaría definitivamente el concepto de desarrollo sostenible a la arena publica, momento a partir del cual el uso del termino transcendió de las filas de los movimientos ecológistas para incorporarse no solo al debate social, sino también en el discurso politico e inclusive en el marketing empresarial.

En este trabajo se parte también de la sostenibilidad como condición necesaria, aunque no suficiente, para lograr la eficiencia y la equidad distributiva intergeneracional en la gestión de recursos. Entendiéndose por sostenibilidad el mantenimiento del stock de recursos disponibles constante en el tiempo.

Para tratar el reparto intergeneracional de un recurso necesariamente se ha de afrontar el problema de como distribuir los derechos de propiedad (DDP) sobre el mismo entre las diferentes generaciones. A continuación, se examinan las alternativas posibles para el caso hipotético de un bien cuyo valor inicial viene dado por Q_0, susceptible a ser explotado y producir así una rentabilidad del q por ciento. La generación presente formada por n_0 individuos y la primera generación futura por n_1. De forma que la sostenibilidad en amplio sentido exigiría la siguiente condición:

$$\frac{Q_0}{n_0} = \frac{Q_1}{n_1}.$$

Siendo Q_1 el valor del recurso en el momento 1, cuando vive la siguiente generación. La expresión anterior es equivalente a la siguiente:

$$Q_1 = \alpha Q_0.$$

Siendo $\alpha = \frac{n_1}{n_0}$.

Partiendo de la hipótesis de un crecimiento cero de la población. es decir que $\alpha = 1$, la sostenibilidad se alcanzara como se ha dicho, manteniendo constante el stock inicial del recurso, es decir, $Q_0 = Q_1 = Q$.

Básicamente, existen las siguientes posibilidades en cuanto a la definición de los DDP sobre los recursos naturales:

- Caso I: pertenecientes exclusivamente a las generaciones presentes (GP).
- Caso II: que sean en su totalidad de las generaciones futuras (GF).
- Caso III: divididas de alguna forma entre unos y otros.

Caso I: Los DDP están en manos de las GP, que pueden utilizar libremente el recurso. De la riqueza total obtenida con la explotación de la cantidad del recurso inicial consumirán una proporción $h(0 < h < 1)$ y dejaran el resto en herencia a sus descendientes. En particular, las GP tendrían derecho a consumir todo los recursos disponibles ($h = 1$) y no dejar ninguna herencia a sus descendientes. La asignación seria pues la siguiente:

$$GP = hQ(1 + q).$$

$$GF = (1 - h)Q(1 + q).$$

Caso II: Los DDP pertenecen en exclusiva a las GF, pero las GP tienen el derecho de uso (no consuntivo) y explotación del recurso, de lo contrario se llevaría el problema al absurdo; nunca se podría consumir por que los propietarios son siempre las GF, y así hasta el infinito. Por lo tanto, se supone que las GP pueden explotar el recurso y disponer de la renta obtenida, pudiendo consumir totalmente o en parte, y quedando para las GF la riqueza inicial y en su caso la herencia dejada por sus ascendentes:

$$GP = hQq.$$

$$GF = Q + (1 - h)Qq.$$

Caso III: Se considera que los DDP están repartidos, de forma que las GP disponen de una parte p del recurso ($0 < p < 1$) y el resto ($1 - p$) les pertenece a las GF. En este caso, el consumo para las GP y GF seria como sigue:

$$GP = hpQ + hQq.$$

$$GF = (1 - p)Q + (1 - h)pQ + (1 - h)Qq.$$

Si se supone que todas las generaciones tienen el mismo derecho sobre el recurso inicial (es decir, los DDP se reparten a partes iguales) la proporción de recursos correspondientes a la GP vendrán dada por $p = \frac{n}{g}$, siendo n el numero de GP y g el numero de GF. Pero si el numero de generaciones futuras es grande, como en principio debe suponerse, p tendera a 0, lo cual seria equivalente a considerar que todos los DDP están en manos de las GF; es decir, estaríamos de nuevo en el Caso II.

El reparto de los DDP en los casos II y III cumple el principio de sostenibilidad, tan reclamado en buena parte de la literatura económica medioambiental: las GP tienen derecho a explotar el recurso y a quedarse con la renta obtenida, pero siempre que ello no implique un coste de oportunidad para las GF, es decir la riqueza inicial debe aumentar o mantenerse constante. La generación siguiente, por su parte, tendrá que hacer lo mismo, y así sucesivamente: la riqueza inicial Q siempre estará disponible y lo único que se consume en cada periodo es una parte, mayor o menor de la renta de explotación. Por el contrario, el caso I no necesariamente supone el cumplimiento del requisito de sostenibilidad cuando las GP están autorizadas a consumir la cantidad de recurso que les plazca, e incluso agotarlo.

Existen diferentes argumentaciones a favor de asignar los DDP de una u otra forma. Los defensores de la asignación a favor de las GP argumentan por ejemplo, que con el tiempo es de esperar evidenciar nuevos avances tecnológicos que permitan la existencia de sustitutos perfectos, o que incluso el cambio de los niveles en el precio relativos provocase que tales recursos tuviesen para las GF un valor muy inferior al otorgado por las GP. Si esto fuese así, el resultado final seria una disminución del bienestar social: las GP sacrifican un consumo que las GF "desperdician". Pero puede ocurrir lo contrario, las GP pueden dilapidar recursos que las GF consideraran muy valiosos dada su escasez, a lo que muy bien podrían decir:

Cuando uno piensa esto, siente una gran vergüenza incluso de las generaciones pasadas.

En cualquier caso, dado que esta alternativa incumple el requisito de sostenibilidad planteado desde un principio como ineludible, no puede ser considerada como correcta.

En opinion de otros autores, el principio de sostenibilidad implica necesariamente un reparto de la propiedad del recurso. Y en consecuencia, si las GP realizan la explotación deberán dedicar una parte de los beneficios al pago de los DDP a las GF. El problema se convertirá entonces en como determinar esa cantidad a pagar y posteriormente, la forma de realizar ese pago.

En resumen, una vez examinada las tres alternativas posibles en el reparto intergeneracional de los DDP del capital natural, se llega a la siguiente conclusion: descartando el *todo vale* como regla de optimalidad (CASO I), la solución más eficiente y al mismo tiempo garante de la sostenibilidad, consiste en asignar todos los DDP a las GF, quedando para las GP los derechos de uso y explotación.

D.D.P.	Disponible	Consumo G.P.	Recursos G.F.	Asegurada
GP(Caso I)	$(1+q)Q$	$h(1+q)Q$	$(1-h)(1+q)Q$	Indeterminada
GF (Caso II y III)	$(1+q)Q$	hQq	$Q+(1-h)Qq$	$\geq Q$

Cuadro 4.4: Distribución de los DDP para los casos citados.

La asignación de todos los DDP en exclusiva a las GF (Caso II y III) implica que las GP pueden disponer del recurso y quedarse con la renta de explotación obtenida, garantizando en todo caso la conservación de la riqueza inicial (Q), lo cual tiene las siguientes implicaciones:

1. Marca un limite de consumo de los recursos, el cual estará en función del tipo de recurso tratado.

2. Implica que ninguna generación tiene todo el derecho a destruir recursos, y por tanto en caso de hacerlo debe pagar una compensación adecuada por dicha acción.

4.4 Clasificación de los recursos naturales según su consumo.

Para tratar el problema de la distribución entre las GP y las GF se necesita, en primer lugar, la identificación y clasificación operativa de los recursos. Existen muchas definiciones de recurso natural, pero la más general es aquella que considera como tales todos los bienes disponibles por el hombre como *un regalo de la naturaleza*. Evidentemente, esta definición es lo suficientemente amplia para agrupar bienes con características muy diferentes. Sin embargo, de cara al problema estudiado, interesa clasificarlos en las siguientes categorías, ya que el tratamiento en cada una de ellas tiene sus características propias:

1. *Bienes Libres:* Son bienes cuyo consumo no provoca ningún coste de oportunidad para los demás posibles usuarios, incluidas por supuesto, las generaciones futuras. Seria el caso de la Fuerza de gravedad o el sol.

2. *Bienes no renovables:* Son aquellos cuya existencia en el planeta es limitada, pero poseen la característica de mantenimiento a lo largo del tiempo sin variar su calidad ni su cantidad, es decir, existe la posibilidad de almacenamiento a precio cero durante un tiempo ilimitado. Es el caso básicamente de los recursos minerales. Sin embargo, es necesario a su vez diferenciar diferentes tipos de recursos no renovables, según si el consumo de los mismos implica o no su destrucción y esta sea total o parcial:

   (a) **Duraderos:** Se trata de bienes cuyo consumo consiste únicamente en poseerlos y/o administrarlos y por tanto no se destruyen. Seria el caso de los metales preciosos, como el oro, las gemas (esmeraldas y diamantes...), las obras de arte (las pirámides, catedrales, cuevas de pinturas rupestres...) o restos arqueológicos.

(b) **No duraderos:** A diferencia de los anteriores, los bienes no renovables no duraderos se destruyen cuando se consumen. Sin embargo, es necesario a su vez distinguir si existe o no la posibilidad de reciclaje, en cuyo caso la destrucción seria en cierto modo reversible.

i. **Reciclables:** Son aquellos minerales para los que su uso no supone la destrucción total, sino que existe la posibilidad de reciclarlos a un cierto coste (el hierro, cobre, el aluminio,...).

ii. **No reciclables:** Se trata básicamente de combustible fósiles (petróleo, carbon, gas natural) cuyo consumo implica su destrucción inmediata e irreversible.

3. *Bienes renovables:* Son aquellos recursos de los cuales se puede hacer un uso consuntivo, pero al mismo tiempo renovarse, de forma que las generaciones futuras también puedan disponer de ellos cuando existan. También dentro de los bienes renovables, se deben hacer distinciones, ya que no existe un tratamiento general.

(a) **Biológicos:** Son aquellos recursos cuyo consumo implica la destrucción de una parte, pero que se autorreproducen mediante un ciclo biológico propio de forma que la cantidad disponible puede mantenerse invariable. Obviamente, esto ocurrirá únicamente si no se consumen en una proporción superior a su tasa de renovación, en cuyo caso si se destruiría el recurso. Este grupo estarían incluidos los bosques, los bancos de pesca o los acuíferos entre otros. Un caso particular de estos recursos serían las flores de un jardín o los frutos de los árboles: se trata de bienes peredecederos, de manera que si las generaciones presentes no los consumen se autodestruirían con el mero paso del tiempo y se produciría una perdida neta.

(b) **No biológicos:** En este grupo se incluyen los recursos clasificados como "bienes ambientales", es decir, el aire el suelo, la capa de ozono, el mar, ...Son recursos que en otros tiempos pudieron ser bienes libres, pero han dejado de pertenecer a esa categoría porque el consumo que se hace de ellos puede perjudicar al resto de los usuarios: se pueden contaminar. Este tipo de bienes tienen una capacidad limitada de regenerarse cuando la acción sobre ellos los destruye.

Una vez identificados y clasificados los recursos naturales el paso siguiente es reconocer su valor. La unidad de cuenta común a todos ellos no puede ser otra que la monetaria, es decir, ha de ponérsele un precio a todo. En realidad la solución no resulta sencilla, en primer lugar por la dificultad para encontrar ese precio, y en segundo lugar porque no va a ser una medida exacta del bienestar que proporcionan los recursos. Efectivamente, teniendo en cuenta este precio, el valor obtenido solo sera una parte del area por debajo de la curva de demanda correspondiente (area $OPEQ$), ignorando el resto (PAE), integradora del valor social total, como puede verse en el gráfico 4.1.

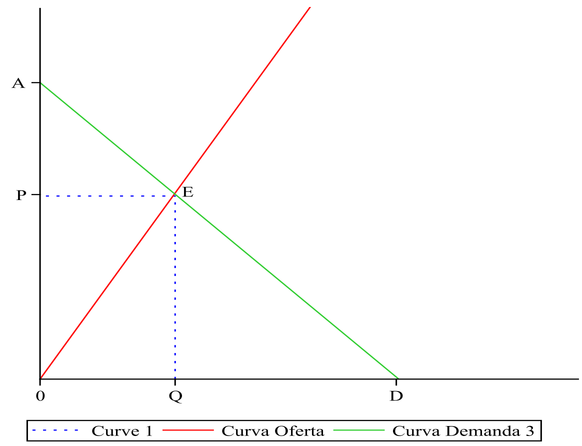

Figura 4.1: Aproximación al valor social total a través del precio.

Existe además una dificultad añadida. Por cuanto el precio de un recurso natural no se forma de manera aislada, sino que depende en gran medida del stock disponible de otros recursos naturales y también del otros tipos de bienes no naturales. Así por ejemplo, un bosque tendría un precio muchísimo más alto si fuese el único en un país, que si existiesen cien. Además, su precio también estaría influido por la existencia o no de otros bienes naturales (praderas, explotaciones agrícolas, etc.) y de otros recursos no naturales.

Para realizar el análisis con más detalle, es necesario ceñirse a un contexto especial determinado, como puede ser el de un estado o una region. Hoy por hoy, resulta impracticable una actuación coordinada a nivel global. Básicamente por problemas de indole política y económica, aunque se debe avanzar en esta linea de actuación. Si se parte del nivel estatal por ejemplo, la cuestión básica es determinar cual es la riqueza total de un pais, medida en términos monetarios.

Dicha riqueza estará formada por la suma de los valores monetarios de los recursos naturales y los demás recursos. Para empezar se necesita un inventario de los bienes naturales disponibles. A continuación deben valorarse estos recursos asignándoles un precio, de forma que finalmente se obtendrá un valor monetario total para el stock de recursos naturales por un lado y para el resto de recursos por otro. Sin embargo, y como ya se ha dicho eso no significa que la sociedad sea indiferente entre el stock de recursos naturales existentes y la cantidad monetaria asignada como valor total.

La razón es que a medida que empecemos a disminuir el stock inicial, el valor del capital restante aumentara, de esta forma, no existirá suficiente dinero en la tierra para comprar la tierra.

4.5 Caracterización del consumo para la asignación intergeneracional.

Para tratar adecuadamente el problema de la asignación de los recursos naturales es necesario partir de un conocimiento previo de las externalidades y de los bienes colectivos. Concretamente en el caso de la asignación intergeneracional, resulta muy útil conocer las características del consumo de un bien, tanto dentro de una misma generación como entre generaciones distintas. Para ello, los bienes pueden caracterizarse mediante un factor K de eficiencia en su consumo en donde:

$$K = \frac{Variacion \quad de \quad la \quad cantidad \quad disponible}{cantidad \quad consumida}.$$

De forma que:

K	Tipo de bien	Característica de la cantidad disponible
$K < 0$	hípercolectivo	aumenta al aumentar el consumo.
$K = 0$	colectivo puro	constante con independencia del consumo.
$0 < K < 1$	colectivo local	decrece en menor proporción que el consumo
$K = 1$	privado puro	decrece exactamente con el consumo
$K > 1$	híperprivados	decrece en mayor proporción que el consumo

Cuadro 4.5: Caracterización del consumo de un bien mediante el factor K.

Cuando los recursos naturales tienen características de bienes colectivos puros entre generaciones, es decir, cuando el consumo realizado por las GP no disminuye la cantidad de bien disponible para las GF, se puede decir que el conflicto intergeneracional no existe. Este es el caso de los bienes libres.

El conflicto aparece cuando esto no ocurre, es decir, cuando los bienes naturales se comportan como bienes colectivos locales, privados o híperprivados entre generaciones. Esto implica que la cantidad consumida por los individuos actuales supone un coste de oportunidad para sus descendientes. En este grupo están prácticamente todos los demás recursos naturales, sean renovables o no.

A continuación se presenta un análisis detallado para cada uno de los diferentes tipos de recursos. Se omite el caso de los bienes libres, puesto que su generación no plantea conflicto de equidad ni en el plano intra ni en el intergeneracional.

4.5.1 Los recursos no renovables.

Como se ha visto, son aquellos cuya existencia en la naturaleza es limitada. Sin embargo, de cara a estudiar la asignación intergeneracional de este tipo de recursos es necesario tener en cuenta su consumo, el cual no necesariamente implica su desaparición, dadas las posibilidades de reutilización y de reciclaje. De ahí la necesidad de realizar una clasificación más exhaustiva de los mismos y tratarlos por separado.

Duraderos: Se tratan de bienes privados dentro de una misma generación (pertenecen únicamente a ciertos individuos), pero con carácter de colectivo entre generaciones distintas, en la medida si el consumo de las generaciones presentes (GP) no disminuye la cantidad disponible para las siguientes. Por lo tanto, el consumo de este tipo de bienes no supone un coste de oportunidad para las generaciones futuras (GF), siendo así, inexistente el conflicto por la redistribución intergeneracional.

Poniendo el problema en términos de DDP es equivalente a asignarlos todos a las GF, puesto que las GP pueden usar y disfrutar del bien pero no tienen derecho a destruirlo, de forma a garantizar la sostenibilidad. En realidad es probable que una pequeña parte de este tipo de recursos se pierda de una generación a otra por diferentes motivos; en este caso, esta parte extraviada deberá tratarse como un recurso no renovable y no reciclable, dado que las GF ya no podrán disfrutar de ellas (Es un bien privado entre generaciones).

No duraderos: En general, su consumo implica su destrucción, aunque si existe la posibilidad de reciclaje esta no puede considerarse total. En definitiva se tratan de bienes privados dentro de una misma generación, que pueden ser también bienes privados entre generaciones distintas (en caso de no lograrse el reciclaje) o bienes colectivos locales intergeneracionales si existe el reciclaje, porque la cantidad disponible no disminuye el la misma proporción a la cantidad consumida, sino en una proporción menor.

En ambos casos el consumo de las GP impone un coste de oportunidad sobre las GF. Si no se puede reciclar dicho coste sera exactamente el valor del recurso *in situ* (antes de extraerlo y transformarlo), mientras que si es posible el reciclaje, el coste de oportunidad impuesto por las GP a las GF es la diferencia entre el coste de reciclaje y el coste de extracción del recurso. La pregunta planteada en ambos casos es como se deben repartir este tipo de bienes entre las diferentes generaciones.

Con el objetivo de cumplir con el requisito de sostenibilidad todos los DDP sobre los recursos deben asignarse a las GF (caso II y III del cuadro 4.4). Las GP pueden explotar el recurso en caso de que les resulte rentable hacerlo, pero han de tener en cuenta un nuevo coste cuando se les evalué la rentabilidad del proyecto, que seria el pago de los DDP a las GF. Dicho de otra manera, de los beneficios totales obtenidos por la explotación una parte no quedaran disponibles para el consumo de las GP, sino que por alguna via han de ir a parar al bolsillo de las GF.

Por otra parte, la rentabilidad que puede extraerse de la explotación del recurso, (denominado q en el cuadro 4.4), suponiendo total extracción del stock disponible seria:

$$q = \frac{Q' - Q}{Q}.$$

En donde Q' expresaría el valor del recurso extraído una vez transformado y puesto en el mercado.

$$Q' = p_t X_d.$$

Siendo p_t el precio sombra del recurso una vez transformado, o sea, teniendo en cuenta el coste de extracción.

Es decir, explotando el recurso se obtendría una riqueza final de $Q(1 + q)$, de forma que, aplicando la regla de asignación de los casos II y III del cuadro 4.4, las GP podrán consumir qQ, mientras tendrán que dejar a disposición de las GF la cantidad Q. Denotando por h la proporción de consumo, los DDP a pagar serán iguales al valor de la cantidad consumida. es decir:

$$DDP = hQ = hp_sX_d.$$

En particular si las GP consumiesen todo el recurso disponible (X_d), el valor de los DDP que las GP han de pagar a las GF seria el valor total del recurso *in situ:*

$$DDP = Q = hp_sX_d. \tag{4.1}$$

Considérese la posibilidad de lograr reciclarse una parte λ de la cantidad consumida, es decir:

$$Cantidad \quad reciclable = \lambda hX_d.$$

Denotando el coste de reciclar por C_r, puede deducirse que el valor de esa cantidad una vez reciclada sera la diferencia entre el valor del recurso y el coste de reciclar:

$$\text{Valor de la cantidad reciclada} = \lambda hX_d(p_t - C_r). \tag{4.2}$$

Y por consiguiente, la cantidad de las GP habrán de pagar a las GF en concepto de DDP debe ser la diferencia entre las expresiones (4.1) y (4.2):

$$DDP = hX_d[p_s - \lambda(p_t - C_r)]$$

Es decir, las GP han de pagar a las GF en concepto de DDP, la diferencia entre el valor de la cantidad consumida y el valor residual de la misma, viene dado a su vez por la diferencia entre el precio de mercado y el coste de reciclar. Si las GP consumen toda la cantidad inicialmente disponible (h=1), la expresión anterior se simplificaría, quedando expresada como la diferencia entre el valor total inicial del recurso y el valor residual del mismo una vez utilizado y antes de ser reciclado:

$$DDP = X_dp_s - \lambda X_d(p_t - C_r).$$

Por consiguiente, el problema de la asignación intergeneracional de los recursos no renovables y no duraderos, sean o no reciclables, se limita únicamente a la no fácil tarea de calcular los precios sombra de cada recurso en la situación inicial (antes de extraerlos) y en la final (una vez transformados y dispuestos para el consumo). Aunque el concepto de precio sombra es muy simple, su calculó en la practica no resulta tan inmediato. Se trata de determinar el precio que un recurso tendría en un mercado perfectamente competitivo, o lo que es lo mismo, su coste marginal social. De ahí que, dado los fuertes desequilibrios caracteristicos de la mayoría de los mercados actuales, el precio de mercado no pueda tomarse como indicador del verdadero valor social del recurso.

Quedaría pendiente la cuestión de como debería traspasarse el pago de los DDP a las GF. La mayoría de las propuestas en este sentido se encaminan por la inversion de esta cantidad (Q) en bienes de capital renovables, de forma que si la inversion, como cabe esperar, resulta rentable, se cumpliría con creses el requisito de sostenibilidad, en tanto las GF se encontrarían con una riqueza inicial superior a Q. Sin embargo, la adopción de solución al pie de la letra implicaría que todos los recursos son perfectamente sustituibles entre si, de lo cual no existe ninguna prueba lógica: nada garantiza el gozo por parte de las GF del mismo bienestar que las GP si cuando lleguen se encuentran sin petróleo pero con muchos más bancos pesqueros. Es de pensar que la solución idónea consistiría en la creación de una serie de instrucciones que, por un lado velasen por el cumplimiento de los DDP establecidos, y por otro se encargasen de gestionar de la forma más rentable el capital de las GF en caso de negociar esos DDP con las GP. Dichas instituciones actuarían a modo de representantes de las GF, lo cual plantea la cuestión de como diseñarlas correctamente: han de ser totalmente independiente de los intereses de las GP y quedar al margen de los conflictos influyentes en sus miembros aunque, inevitablemente, estarán formadas por personas que pertenecen a las GP.

4.5.2 Los recursos renovables.

Se trata de un caso muy diferente al tratado en la sección anterior. En esta ocasión difícilmente se podrían emplear algunos de los argumentos mencionados, como la aparición de sustitutivos o la disminución de valor en el tiempo. Así por ejemplo, en el caso de un bosque es posible encontrarse un sustitutivo de la madera, pero no para otras funciones del bosque como pueden ser su valor ecológico (por ejemplo en la absorción de la contaminación o su influencia en el clima) o su valor recreativo, que incluso es más provable que aumenten con el tiempo. Un razonamientos similar podría ser aplicado a los bancos de pesca, la flora y la fauna del planeta o a los acuíferos, entre otros. De ahí que el tratamiento de los recursos renovables sea, desde este punto de vista, mucho más complejo y, a la vez, mucho más trascendente a el de los no renovables. La causuística se puede reducir a dos grandes casos, en función de si el recurso tiene o no el carácter biológico.

No biológicos El problema reside en el tratamiento de bienes colectivos dentro de una misma generación, con libre acceso a los mismos, con lo cual no existe ningún mecanismo que actué como equilibrador de su destrucción. Cada agente se ve incentivado a realizar acciones que suponen destruir en parte estos bienes, porque soporta una cantidad muy pequeña de los costes y en cambio recoge todos los beneficios de su acción. Por lo tanto, se trata de recursos que deberían ser también colectivos entre generaciones; y sin embargo no lo son debido precisamente a las consecuencias de ser colectivos dentro de una misma generación. La solución a la gestión eficiente de este tipo de recursos pasa necesariamente por la aplicación de la teoría de las externalidades y de los bienes colectivos: ha de buscarse algún mecanismo donde los costes generados por la destrucción del recurso recaigan directamente sobre el agente que los ha provocado y no se diluyan en el espacio o en el tiempo. La literatura existente sobre esta cuestión es cuantiosa y las propuestas de solución también.

Biológicos El recurso esta formado por poblaciones (árboles, peces,...) con una tasa de crecimiento (c) más o menos intensa, que es una función del stock inicial (X). El stock final del recurso depende del stock inicial, de la tasa de crecimiento y de la tasa de explotación. Cuando la tasa de explotación coincide con la de crecimiento, el stock permanece constante y si la tasa de explotación es menor (mayor) que la de crecimiento este aumenta (disminuye). Existe un tamaño mínimo para garantizar la continuidad del recurso biológico: si las exigencias llegan a ser inferiores a un umbral determinado, se produce el colapso.

Definida una función objetivo, calculado los costes y beneficios de la explotación para las GP y las GF y teniendo en consideración las restricciones relevantes, el problema queda planteado según el gráfico 4. Se supondrá que existe una solución única B^*, con lo que se determina la cantidad de recursos óptima X^*, la cual tiene asociada una tasa de crecimiento determinada (c^* y, si se gestiona el recurso con una tasa de explotación igual a la de crecimiento, las existencias del recurso se mantendrán constantes al nivel X^* en cada periodo por un tiempo ilimitado.

En el momento en que se plantea el problema de la gestión óptima del recurso pueden existir, por lo tanto, tres posibles situaciones:

A) $X = X^*$, es decir, la cantidad de recurso disponible es la óptima y su tasa de crecimiento (o reproducción) también es óptima $c = c^*$, con lo que el beneficio neto B^* es el máximo posible. Esto nos lleva a la conclusion inmediata: si se quiere cumplir con el requisito de sostenibilidad, y en consecuencia la inexistencia de algún coste de oportunidad para las GF, las GP pueden consumir una parte c^*X^* en cada periodo, lo cual garantiza la presencia en cualquier momento del tiempo de una cantidad disponible de recurso óptima X^*.

B) $X > X^*$. La Cantidad inicial del recurso esta por encima del óptimo X_B en el gráfico 4. Ante una situación como esta, la cuestión a responder es que parte del recurso pueden consumir las GP. Existirían básicamente dos posibilidades extremas no reñidas con la sostenibilidad:

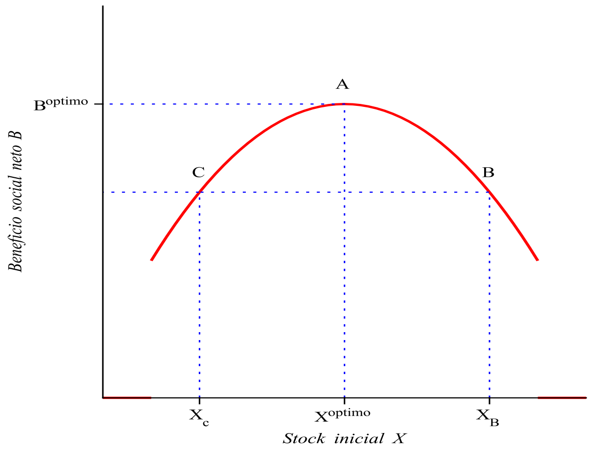

Figura 4.2: Relación stock inicial vs. Beneficio social neto.

(B.1) Mantener constante la dotación inicial del recurso superior a la óptima $X > X^*$.

(B.2) Consumir todo el exceso de dotación inicial $(X - X^*)$ y a partir de ahí hacerlo según la tasa de crecimiento óptima c^* para mantener el nivel de recurso en X^*.

Mientras el primer caso no supondría algún coste de oportunidad para las GF, si se opta por la segunda posibilidad este coste si existiría. La solución es tratar el exceso de dotación inicial $(X - X^*)$ como un recurso no renovable y no reciclable, ya analizado en (3.6.2) y a partir de ahí realizar la explotación siempre según la tasa de crecimiento óptima c^*, garantizando así en todo momento la disponibilidad de una cantidad de recurso también óptima X^*.

C) $X < X^*$. Esta es la situación más problemática y de hecho, la encontrada más a menudo en el mundo actual: la cantidad disponible de un determinado recurso natural esta por debajo de aquella considerada óptima X_C en el gráfico 4. Por lo tanto el análisis de este caso es el resultado más interesante en cuanto a sus implicaciones reales. Las posibilidades de actuación de las GP, dada una situación como la descrita y descartando la riqueza inicial (lo que iría en contra del requisito de sostenibilidad y agravaría la ineficiencia al aumentar la distancia respecto la cantidad óptima X^*), serían las siguientes:

(C.1) Consumir según la tasa de crecimiento asociada a la cantidad inicialmente disponible de recurso X (con $X < X^*$). El argumento podría ser: dado que las GP han heredado la cantidad X no tiene razones para renunciar a consumo propio a favor de las GF.

(C.2) Disminuir el consumo de tal forma que al final de cada periodo se consiga disponer de una dotación de recurso superior a la inicial. Y después de varios periodos con esta pauta de consumo se conseguiría que la dotación de recursos alcance el nivel óptimo X^*, y pueda ya pararse a consumir según la tasa de crecimiento óptima c^*.

La primera actuación (C.1) cumple con el requisito de sostenibilidad en sentido estricto, mientras que la segunda (C.2) lo superaría, en la medida que permite aumentar la cantidad disponible para las GP. La pauta (C.2) puede ser útil para compensar a las GF por el consumo destructivo de otro tipo de recursos, como los que son no renovables y no reciclable.

Llegados a este punto, se debe plantear cual es la conducta más adecuada desde el punto de vista social, y para ello ha de estar claro si la función objetivo guía del análisis engloba únicamente el bienestar de las GP o también el de las GF. El cuadro 8 recoge los cuatro posibles resultados en función de si la inversion es rentable desde el punto de vista de las GP (I y III) o no (II y IV); y si también lo es cuando se tiene en cuenta tanto a las GP como a las GF (I y II) o no (III y IV):

	$VAN(GP) > 0$	$VAN(GP) < 0$
$VAN(GP, GF) > 0$	I	II
$VAN(GP, GF) < 0$	III	IV

Cuadro 4.6: Jerarquización de los casos estudiados según el VAN de las GP y GF.

Las situaciones I y IV no plantean conflicto alguno, por que implican que el proyecto es rentable (I) o no lo es (IV) desde los dos puntos de vista. Por el contrario, en la situación II, las GP no invertirían por que no consideran los costes que ello supone para las GF.

A continuación, se realiza el análisis de las tres posibles actuaciones anteriores. Se supone una vida de 2 periodos para cada generación y se solapan, de forma que en el periodo 1 viven las que consideramos en general GP; en el periodo 2 nacerá la primera generación futura (GF_1), que convivirá con la GP durante ese periodo y con la GF_2 en el periodo 3 y así sucesivamente. Se considera un numero infinito de generaciones, para simplificar el calculó del valor actual, siendo r la tasa de descuento intertemporal.

Se denota por X^* la cantidad óptima de recurso y con c^* la tasa de explotación sostenible asociada, X_1 es la cantidad inicial, inferior a la óptima (X^*) y c_1 la tasa que permite mantener constante la cantidad inicial X_1. Se barajan dos pautas de consumo: con una tasa de explotación c_2, $c_2 < c_1$, se alcanza la cantidad óptima X^* en el periodo 3, mientras que con una tasa de explotación más conservadora (c_3), el óptimo se logra en el periodo 2.

Nota: los proyectos C.2 y C.2' son dos casos particulares de la actuación C.2, según los periodos que tarden en recuperar la dotación inicial óptima del recurso.

- Si la función objetivo contempla únicamente el bienestar de las GP, se han de comparar los proyectos (C.1),(C.2') de acuerdo con su VAN calculado únicamente

	GP	$GPGF_1$	GF_1GF_2	GF_2GF_3		$GF_{G-1}GF_G$	
Periodo	1	2	3	4	...	G+1	...
Proyecto C.1	c_1X_1	c_1X_1	c_1X_1	c_1X_1	...	c_1X_1	
Proyecto C.2	c_2X_1	c_2X_1	c^*X^*	c^*X^*	...	c^*X^*	
Proyecto C.2'	c_3X_1	c^*X^*	c^*X^*	c^*X^*	...	c^*X^*	

Cuadro 4.7: Análisis de proyectos según el comportamiento de las GP y GF.

hasta el periodo 2, que es cuando desaparece dicha generación, es decir:

$$\begin{aligned} VAN(C{,}1) &= c_1X_1\frac{2+r}{1+r} \\ VAN(C{,}2) &= c_2X_1\frac{2+r}{1+r} \\ VAN(C{,}3) &= c_3X_1\frac{c^*X^*}{1+r}. \end{aligned}$$

De donde puede probarse lo siguiente:

$$VAN(C{,}1) > VAN(C{,}2).$$

En tanto que los demás proyectos no son comparables *a priori.*

- Pero, puesto que se busca la equidad intergeneracional a partir del principio de sostenibilidad, la función objetivo ha de ser una agregación del bienestar tanto de las GP como de las GF, por lo tanto los VAN de los proyectos van a ser diferentes. Debe tenerse en cuenta que para obtener el VAN total de cada proyecto es necesario descontar intertemporal e intergeneracionalmente, tal y como se ha justificado en la sección 3.2 En primer lugar debe agregarse los flujos pertenecientes a cada generación utilizando la tasa de descuento intertemporal (r), obteniéndose un VAN para cada generación, y a continuación se agregan estos VAN generacionales teniendo en cuenta la tasa de descuento intergeneracional (R).

- El VAN para cada una de las actuaciones alternativas propuestas y suponiendo el numero de generaciones, $infinito^*$ sera:

$$\begin{aligned} VAN(C{,}1) &= c_1X_1\frac{2+r}{1+r}+c_1X_1\frac{2+r}{1+r}\frac{1}{R} \\ VAN(C{,}2) &= c_2X_1\frac{2+r}{1+r}+c^*X^*\frac{2+r}{1+r}\frac{1}{R} \\ VAN(C{,}3) &= c_3X_1\frac{c^*X^*}{1+r}+c^*X^*\frac{2+r}{1+r}\frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la aproximación: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a}{(1+r)^i}=\frac{a}{r}$.

- Comparando el VAN de los tres proyectos no puede llegarse a ninguna conclusion cierta. Ninguno de los tres puede considerarse *a priori* superior o inferior a los demás. Nuevamente, el resultado dependerá de los valores concretos de los parámetros asociados a cada recurso, así como de las tasas de descuento (intertemporal e intergeneracional). En cualquier caso, lo que si puede comprobarse es, como ya se había adelantado, el requisito de sostenibilidad es una condición necesaria pero no suficiente para garantizar el máximo bienestar.

Del análisis realizado pueden extraerse importantes conclusiones. En primer lugar que es necesario el estudio y tratamiento de cada paso por separado. No pueden extraerse reglas de actuación general para el caso de todos los recursos renovables, sino que debe realizarse el análisis para cada recurso, o para cada grupo de recursos con una situación actual parecida y un comportamiento también similar. Por tanto, debe disponerse de una especie de inventario de todos los bienes naturales, clasificados en renovables, no renovables y libres. El paso siguiente seria el estudio en profundidad de cada uno de esos recursos, comenzando por determinar su tasa de variación y su nivel sostenible de utilización en función del stock disponible, así como su situación actual.

En tercer lugar, para realizar la evaluación teniendo en cuenta los efectos sobre las generaciones futuras, se necesita primero la estimación de la tasa de la tasa de descuento intertemporal (r), para agregar los flujos que afectan a una misma generación en periodos del tiempo distintos y la estimación de la tasa de descuento intergeneracional (R), para agregar los flujos pertenecientes a diferentes generaciones. Por último, aunque no en orden de importancia, de nuevo surge la necesidad del diseño y funcionamiento de una serie de instituciones que actuasen a modo de representantes de las generaciones futuras en la actualidad para gestionar sus derechos.

Se ha examinado así las consecuencias de introducir los derechos de las generaciones futuras (GF) en los sistemas ortodoxos de análisis. Al tener en consideración a las GF, los resultados de los modelos cambian de forma sustancial, tanto porque se modifica la forma de cálculo de costes y beneficios a la largo del tiempo, como porque las soluciones clásicas para internalizar los costes externos se revelan como inoperantes.

La forma de cálculo convencional ignora de hecho la existencia de generaciones y, para tenerlas en consideración es preciso emplear dos tasas, la convencional (r) para agregar los flujos dentro de una misma generación y la tasa de descuento intergeneracional (R), que permite agregar los impactos sobre los individuos que pertenecen a generaciones distintas.

Como condición en la búsqueda de la internalización por parte de las generaciones presentes (GP) de las externalidades a soportar por las GF, es preciso llevar a cabo una reasignación de los derechos de propiedad (DDP) de los recursos, de forma que las GF detecten parte de estos DDP. El problema radica en la falta de representación de las GF ante las instituciones relevantes. Sin una representación efectiva, los intereses de las GF serán ignorados sistemáticamente por la administración publica, el mercado y el sistema politico. Por lo tanto, para lograr el reparto de los DDP entre GP y GF como consecuencia de la practica, es necesario que las GF dispongan de la representación de un conjunto de instituciones y capacidad para defender los DDP con una gestión eficiente, lo que incluye eventuales negociaciones e intercambios en todos los ámbitos relevantes.

Un análisis del reparto del capital entre generaciones, partiendo del requisito de sostenibilidad, definido como la necesidad de no disminuir el bienestar de generación, conlleva al examen de las particularidades de los distintos tipos de bienes. Se han distinguidos tres categorías básicas de recursos a saber, libres, no renovables y renovables, cada una de las cuales consta de unas características especiales que requieren un tratamiento diferenciado, como se resume en el cuadro E.

Para el caso de los recursos no renovables, la asignación eficiente y sostenible entre generaciones, pasa por la atribución integrada de los derechos de propiedad de las GF, reservando para las GP el derecho al uso y disfrute de los mismos, pagando a las GF el precio sombra del recurso *in situ* en concepto de DDP. En la búsqueda de una solución que sea efectiva, es preciso la negociación de la compensación adecuada en pie de igualdad entre los representantes de las GF y de las GP.

Cuando se trata de recursos renovables no biológicos, cuyas características permiten su destrucción por parte de algunos usuarios pagando un precio nulo, la solución debe basarse en la teoría de las externalidades y de los bienes colectivos por que este es el único tipo de problemas que se plantea.

De nuevo, las GF deben poder acudir a los poderes públicos, tanto para tener voz y voto en la comisión reguladora de estas externalidades como para defender sus DDP frente a eventuales transgresiones.

Por último, el caso más interesante es tal vez el de los recursos renovables. Este tipo de recurso se caracteriza por la denominada curva de renovación conformada por la relación entre la tasa de crecimiento del recurso y la cantidad existente del mismo. A partir de la función de beneficio social neto, puede distinguirse básicamente tres situaciones posibles: que la dotación inicial este por encima, por debajo o sea igual al óptimo.

Como es obvio, las consecuencias de cara al reparto intergeneracional son bastantes diferentes en cada caso. En la practica la situación más corriente en la actualidad es la ineficiencia por defecto: existe cantidad de recurso inferior a lo deseable y, en consecuencia su tasa de reproducción también es más baja.

El análisis ha revelado que el requisito de sostenibilidad resulta ser condición necesaria pero no suficiente para la asignación eficiente entre generaciones.

Otro resultado importante en una situación como esta, con una cantidad de recursos por debajo de la óptima, no necesariamente implica que la mejor actuación posible sea la reducción del consumo del recurso para llevar la dotación al óptimo. Dependerá de cada caso en concreto, puesto que en definitiva se trata de un proyecto de inversion a evaluar. En consecuencia, nada puede decirse a priori.

Como conclusion general, cabe destacar que el sistema institucional actual es inadecuado para incorporar los derechos de las GF en una forma adecuada. Es preciso pues, proceder al diseño de instituciones pensadas para representar a las GF ante la administración publica y para negociar, tanto en el mercado como en el sistema politico, para que los DDP asignados a las GF sean una realidad.

Queda pendiente un tema importante, determinar el nivel adecuado para llevar a cabo este tipo de actuaciones. Esta claro que una actuación general a nivel internacional es un ideal, por el momento, impracticable, aunque se trata de ir avanzando en esta linea. La ventaja del tipo de soluciones apuntadas es que pueden ponerse en funcionamiento de forma parcial a cualquier nivel del gobierno, con la certeza de mejorar tanto en eficiencia como en equidad intergeneracional. El nivel municipal, por ejemplo, es adecuado para gestionar de forma sostenible determinados bienes, como bosques, acuíferos, aire limpio o restos arqueológicos y, por supuesto, para una gestión apropiada de los residuos. Esto es así, dada la menor inercia y mayor independencia propia de las instituciones relativamente pequeñas permitiendo grandes avances, aunque los resultados se limiten a una porción de la población.

La posibilidad de actuar a nivel nacional es un caso intermedio entre el municipal y el internacional; el mayor coste necesario para alcanzar el consenso y conseguir resultados apreciables debería compensarse por el mayor beneficio derivado de actuar en un ámbito de mayor envergadura. En cualquier caso, la única forma de gestionar con eficiencia determinados recursos como una gran cuenca fluvial o la capa de ozono es a nivel internacional.

CAPÍTULO 5

RESUMEN, RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

5.1 Resumen.

En este trabajo confluyeron la teoría matemática del ***control óptimo***, el modelado del ***manejo sustentable*** de recursos forestales a través de ésta y una propuesta de ***reparto equilibrado*** del uso de estos recursos, entre las generaciones presentes y futuras.

El bosque natural proveedor de insumos forestales y asimilador de los residuos generados en los procesos de producción y consumo, ha empezado a dar signos de un paulatino agotamiento, intensificándose más en las últimas décadas. Esto ha despertado un debate permanente en diversos sectores del seno de nuestra sociedad, cuya propuesta es la incorporación del medio ambiente a la toma de decisiones. De aquí, que haya correspondido a la investigación científica el promulgar modelos validos del comportamiento del medio ambiente natural como primera instancia para su administración y control.

Entre las primeras formulaciones rigurosas de modelos para optimizar la explotación forestal, figuran los aportes de Faustmann (1849) [39] y Pressler (1860) [34]. Estos se basaron en el cálculo del momento óptimo (biológico) del crecimiento de la biomasa maderera, donde la extracción de la misma representa la forma de ejercer el control. Tanto para la capitalización maxima de los beneficios por la venta de esta (stock), como para la replantación de igual cantidad de masa boscosa. Aquí se usan el cálculo matemático elemental de máximos y mínimos aplicados a la función de producción en el tiempo $x(t)$, que representa la cantidad o nivel del stock maderero en el instante t en años. En tales funciones (de forma Sigmoidal), que se pueden obtener por métodos empíricos estadísticos se corrobora que representan el crecimiento logístico de una cierta población de árboles con cierta capacidad maxima de sustento del medio que ocupan, las cuales posee las propiedades usuales de la teoría de producción:

1. $x'(t) \geq 0$; Productividad marginal positiva. Lo cual significa que el stock maderero se incrementa con el paso del tiempo, hasta alcanzar el máximo valor de sustentabilidad del sistema.

2. $x''(t) \leq 0$; función cóncava hacia el origen y convexa a la derecha del punto de inflexion.

El valor financiero del stock para cada instante del tiempo (t) es: $P \cdot x(t)$, y la cantidad que habría que invertir en el tiempo presente t_0, para obtener esta última en el tiempo t conduce a $Px(t)e^{-it}$, de manera que sumando sobre el intervalo de vida de la plantación $[t_0, t_1]$, se obtiene que el Valor Actual Neto es:

$$VAN = \int_{t_0}^{t_1} Px(t)e^{-it}dt - I_0. \tag{5.1}$$

Donde P es el precio de la madera, pudiendo ser no constante en el tiempo $P(t)$, i la tasa de interés en el mercado de capitales e I_0 es la inversion inicial.

Maximizamos 5.1, sobre la variable t, para obtener la condición de equilibrio:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = i \Rightarrow Px'(t) = iPx(t).$$

Es decir, lo que se conoce como equilibrio “Jevoniano”. Lo cual plantea la igualdad de los dos diferentes usos del stock: cortar y colocar la inversion vale $iPx(t)$, mientras que no cortar y esperar un año más vale $Px'(t)$.

La decisión de no cortar, sino hasta que se den las condiciones de optimalidad en el nivel del stock, corresponde a la idea de ejercer una acción de control sobre el flujo de crecimiento natural de la biomasa.

- Si se escogen puntos temporales específicos para implementar tales pautas de cortas, hablaremos de ***control discreto***, usualmente en estos casos se retira la totalidad del material denominándose ***corta total*** o el retiro es parcial denominándose ***entresacas***.

- Mientras que si se contempla las cortas en intervalos de tiempo, a la vez que la intensidad de la corta responde a alguna función del tiempo en dichos intervalos, se hablara de ***control continuo*** .

El papel del control, es causar variaciones en el comportamiento de la trayectoria $x(t)$ (madera en pie), como respuesta del sistema dinámico descrito por la ecuación: $x'(t) = f(t, x(t), u(t))$ Cuya entrada es la trayectoria de control $u(t)$ y cuya salida es $x(t)$.

En los modelos de control discreto basados en el concepto de turno técnico, el comportamiento de $x(t)$ usado en (5.1), evoluciona naturalmente desde el origen hasta el punto denominado turno óptimo llamado también solución, este se obtiene derivando tal expresión y hallando su punto critico. Basados en esto se suceden una series de modelos regulares que incorporan cada vez más elementos económicos de ajustes para la industria forestal como lo son los costes fijos por pagos, los ciclos infinitos, el valor del arrendamiento del terreno y los beneficios no madereros. En orden correlativos entre otros figuran:

- El modelo de Fisher-Hotelling
$$\max_t \quad Pf(t)e^{-it} - K.$$
- El modelo de Faustmann-Pressler-Ohlin (El valor del suelo $R = iV$ y los ciclos infinitos)
$$\max_t \quad Px(t)e^{-it} - K + \frac{R}{i}[e^{-it} - 1].$$
- Otro método propuesto por Kenneth Boulding en 1935 basado en el cálculo de la tasa interna de rendimiento para la cual el $VAN \geq 0$, se obtiene despejando el parámetro λ de
$$\int_0^n R(t)e^{-\lambda t}dt - K = 0.$$
y luego se optimiza.
- Le sigue el modelo de Hartman el cual introdujo la función $\pi(s)e^{-is}ds$ de los beneficios no madereros a la renta forestal
$$\max_t \quad Px(t)e^{-it} + \int_0^t \pi(s)e^{-is}ds - K.$$

La soluciones resultante para cada modelo deben de satisfacer el equilibrio ***Jevoniano***, lo que nos dice que el valor marginal de no cortar debe ser igual al coste de cortar y colocar este en el mercado de inversiones a la tasa i adaptado a cada caso en especifico.

En la modalidad de ***control continuo*** el objetivo se centra en la obtención de una función continua a trozos $u(t)$, dentro del horizonte temporal de vida de la explotación $[t_0, t_1]$, que optimize la función de beneficios $F(t, x, u)$ medida por el funcional $VAN = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)dt$, donde dicha función describa en tiempo continuo, la intensidad de las pautas de tala que tenga como fin dirigir y mantener el stock de la biomasa $x(t)$, en niveles máximos y seguros de explotación.

Primeramente se define la topología, el planteamiento general y los teoremas concernientes a la optimización de trayectorias de este tipo.

En esta parte resulta muy útil los teoremas de ***Euler y Legendre*** ya que brinda las condiciones de primer y segundo orden necesarias que debe cumplir una trayectoria óptima, así las condiciones de optimalidad global para algunas condiciones de transversalidad. Se desarrollan ejemplos y se aplican estos en el manejo del stock maderero para llegar a los equilibrios de Jevons y Hotelling.

Con estos últimos teorema se dejan perfiladas las bases para la comprensión de los métodos usados de la optimización de problemas de trayectorias. Se emplea el potente principio del Máximo de ***Lev Pontryagin***, cuando dicha trayectoria es justamente una entrada de control $u(t)$, que actúa en el dominio de la función objetivo. Empleando para esto un artificios del cálculo, definiendo una cofunción vectorial continua denominada Hamiltoniano análogamente al caso estático de multiplicadores de Lagrange. Se propone el problema de la siguiente manera:

$$\max_{u(t)\in U} J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), u(t)]dt + S[x(t_1)]. \tag{5.2}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \dot{x(t)} &= f(t, x(t), u(t)) \\ con &: x(t_0) = x_0 \\ u(t) &\in U. \end{aligned}$$

Donde $x(t) \in R^n, u \in U \subseteq R^m$, para $\lambda(t) \in R^n$ llamado vector de variables adjuntas, se define el ***Hamiltoniano*** del problema de la siguiente forma:

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = F(t, x(t), u(t)) + \lambda f(t, x(t), u(t)). \tag{5.3}$$

Teorema 5.1. *Principio del Máximo de Pontryagin. Sean $u^*(t)$ la trayectoria optima de control continua a trozos y $x^*(t)$ la trayectoria de estado optima asociada , definida en el intervalo $[t_0, t_1]$. Entonces existe una función vectorial $\lambda^*(t)$ continua que posee derivadas primeras continuas a trozos tal que para cada $t \in [t_0, t_1]$ se tiene que:*

$$\dot{\lambda^*}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)).$$

En todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$ *con:*

$\lambda^*(t_1) = \frac{\partial}{\partial x} S[x^*(t_1)]$.

$H[t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)] \geq H[t, x^*(t), u(t), \lambda^*(t)], \quad \forall u \in \Omega.$

$\dot{x^*}(t) = f(t, x^*, u^*)$ *En todos los puntos de continuidad de* $u^*(t)$, *con* $x^*(t_0) = x_0$.

De modo que los sistemas de ecuaciones generados por estas condiciones nos conducen a las soluciones buscadas. Como aplicaciones de este principio se resuelven los problemas del cálculo como: el ***momento óptimo continuo*** (de finalización), donde se muestran condiciones para encontrar tal punto.

Otras aplicaciones como el de la tasa selectiva y el problema típico de tala forestal, donde se persigue la determinación de la trayectoria de control $u(t)$ que maximiza el planteamiento:

$$VAN = \int_0^T p(t)u(t)e^{-it}dt + q(T)x(T)e^{-it}. \tag{5.4}$$

Sujeto a:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)F(x) - u(t) \quad \text{con } 0 \leq u(t) \leq u_{max}. \tag{5.5}$$

Para los problemas en los que aparece en la función objetivo un factor de descuento e^{-it}, que a veces complica las operaciones encaminadas a la obtención de las soluciones óptimas. Se utilizo el Hamiltoniana de "valor presente", es decir en problemas del tipo:

$$\max_u J = \int_0^T G(t, x.u)e^{-it}dt.$$

Sujeto a:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in \Omega(t).$$

Se define el Hamiltoniano de valor "presente", representado por $\boldsymbol{H}$, de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{H} = He^{it} = G(t, x, u) + \lambda(t)e^{it}f(t, x, u).$$

Sea $m(t) = \lambda(t)e^{it}$, resulta por tanto:

$$\boldsymbol{H} = G(t,x,u) + m(t)f(t,x,u) \quad y \quad \dot{\lambda}(t) = \dot{m}(t)e^{-it} - im(t)e^{-it}.$$

Donde se reformula el principio del máximo:

- La condición (1) del Principio del máximo se transforma en:

$$\begin{aligned}
\dot{m}(t)e^{-it} - im(t)e^{-it} &= -\frac{\partial G}{\partial x}e^{-it} - m(t)e^{-it}\frac{\partial f}{\partial x} \\
\dot{m}(t)e^{-it} - im(t)e^{-it} &= -\frac{\partial G}{\partial x}e^{-it} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\
\dot{m}(t) &= -\frac{\partial G}{\partial x} - \lambda e^{it}\frac{\partial f}{+} im(t) \\
\dot{m}(t) &= -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x} + im(t).
\end{aligned}$$

  Con la condición de transversalidad $\lambda(T) = 0$, equivalente a $m(T)e^{-iT} = 0 \Rightarrow m(T) = 0$.

- La condición (2) puede expresarse como $\max_u \boldsymbol{H}e^{-it}$.

- De igual forma $H\mid_{t=T}= 0$ se transforma en $\boldsymbol{H}\mid_{t=T}= 0$.

Esta formulación alternativa, se emplea para la resolución de problemas con descuento temporal y en Problemas como el de tala típico, con un horizonte temporal (∞) infinito, donde no se conoce una condición final para el stock de capital, esto es:

$$\max_u J = \int_0^\infty G(t,x,u)e^{-it}dt.$$

Sujeto a la restricción dinámica:

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(0) = x_0, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = x_s.$$

Donde x_s es un estado estacionario, se supone que f y G son acotadas y poseen derivadas parciales primeras y segundas continuas.

Con esto se consigue representar el problema a nuevos sistemas de ecuaciones donde se puede estudiar usando diagramas Fases su estabilidad.

Otra aplicación del Principio del máximo es que puede ofrecer interesantes interpretations en el contexto económico cuando se consideran problemas en una linea decisiones de una empresa en general (en este caso la forestal), cuyo objetivo sea maximizar el flujo de beneficios obtenidos a lo largo de un horizonte temporal dado, que comienza en el tiempo t_0 y termina en t_1, para cada instante t, con un planteamiento análogo a los planteados:

$$\max_{u(t)\in U} J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), u(t)]dt + S[x(t_1)].$$

Donde:

- $x(t)$ representa el stock de capital de la empresa. Se supone conocido el stock de capital inicial $x(t_0) = x_0$.

- $u(t)$ representa las decisiones tomadas por la empresa (en este caso madedera y las desiciones son la Tipo de produccion, precios tala, entresaca, corta ,ect.), estas son las variables de control. Dichas desiciones estaran sujetas a ciertas restricciones $u(t) \in U$.

- $F(t, x(t), u(t))$, es la tasa de beneficio instantaneo, medida en Bolivares Fuertes de la empresa por unidad de tiempo.

- $S[x(t_1)]$, es el valor en Bolivares de la empresa, en el tiempo final, cuando el stock de capital es $x(t_1)$.

- $\lambda(t)$ mide el cambio marginal en la función valor $V^*(t, x)$ frente a cambios infinitamente pequeños en el stock del capital $x(t)$, es decir, el precio sombra de una unidad de capital.

Esto se explica de la siguiente manera, el Hamiltoniano del problema es en forma resumida $H = F + \lambda f$. Multiplicamos por dt:

$$Hdt = Fdt + \lambda f dt = Fdt + \lambda \dot{x} dt = \underbrace{Fdt}_{1} + \underbrace{\lambda dx}_{2}.$$

1. Fdt, es el beneficio obtenido entre los tiempos t y $t + dt$, si se parte del stock de capital x y se aplica el control u. Representa la contribución directa en Bolívares Fuertes, al objetivo en este lapso de tiempo infinitesimal o relativamente pequeño.

2. $dx = f(t, x, u)dt$, es el cambio en el stock de capital desde t a $t + dt$, cuando se esta en el estado x y se aplica el control u, por lo que λdx , representa el valor en Bolívares fuertes del incremento del stock de capital.

Por tanto, Hdt puede ser interpretado como la contribución indirecta a J, desde t a $t + dt$, cuando $x(t) = x$ y $u(t) = u$. A partir de esta interpretación se da razón de por que la maximización en cada instante de tiempo t, es realizada en el Hamiltoniano y no en la función F, tal como lo expresa la condición 2 del Principio del Máximo.

En efecto, las decisiones que se toman en el tiempo t representadas por $u(t)$, afectan al beneficio obtenido en $[t, t + dt]$ (contribución directa), pero también a $x(t + dt)$ y con ello al punto de partida de la empresa en $t + dt$ y por tanto a su capacidad de general beneficios desde $t + dt$ hasta el final del horizonte temporal (contribución indirecta). Es claro que la elección de u de manera de maximizar el Hamiltoniano y, con ello, la suma de contribuciones directa e indirecta.

Resultados y Conclusiones.

En el presente trabajo investigativo se exponen sus logros más resaltantes, seguido de sus conclusiones respectivas:

- En la búsqueda por comprender los aspecto funcionales de la explotación y la conservación de los recursos forestal madereros. Se realizo el levantamiento de modelos ordenándolos cronológicamente y actualizando dichas innovaciones explicando los ajustes que por presiones que nuestra sociedad ejerce al medio ambiente, demandan en estos la optimización de las técnicas de producción y los procesos económicos involucrados. Se estudiaron sus puntos de equilibrio óptimos describiendo su significado económico "Jevonianos", los cuales resultan modificados de acuerdo a la introducción tanto de nuevos parámetros, como de las nuevas tendencias económicas. Se concluye de esto que la evolución del planteamiento forestal viene respondiendo a la la cada vez más reducida capacidad productiva y regenerativa del bosque natural. Y por cuanto el criterio de uso sustentable de los recursos, dejan entrever el grado de preocupación frente al deterioro de las relaciones consumo-medioambiente, con el consecuente peligro de extinción para todas las especies vivientes.

- Se constato que en el país existe un amplio marco legal para el ordenamiento forestal clasificando las áreas boscosas como: bajo protección, reservas forestales y terrenos de propiedad privada destinadas a la producción forestal. Siendo la tala restringida, es decir controlada en estas ultimas y prohibidas en las primeras.

- Se logro unificar bajo la teoría de control en un modelo generalizado, uniendo las practicas de talas discretas donde se requieren tácticas standard del cálculo a las talas a tiempo continuo (en el terreno de la optimización dinámica), la cual requiere de amplio basamento teórico matemático, como lo son el principio del máximo de Lev Pontryagin, varios teoremas de optimalidad, y otros preceptos del tipo económico. Ya que estos potentes criterios establecen las condiciones que deben cumplir las trayectorias óptimas buscadas. Aplicamos estos preceptos al cálculo del instante óptimo continuo, problemas básicos de tala, con tasas de descuento temporal y el problema con horizonte temporal infinito.

- En problemas con descuento temporal en la función objetivo y en el problema de horizonte temporal infinito, se reformuló el Principio del Máximo de Lev Pontryagin, aplicando la conversión del Hamiltoniano a valor presente. Lo que permitió transformar los datos a un nuevo sistemas de ecuaciones, encontrando aplicaciones a sistemas lineales o linealizables, en los cuales aplicando la teoría de estabilidad se consigue mostrar soluciones estables del tipo continua.

- En estos se empleo la función denominada Hamiltoniano, en la cual se encontraron notables vinculaciones al area económica. En la interpretación económica del Hamiltoniano, se observo que el cambio del stock del capital de x a $x + dx$, determina el beneficio λdx Bolívares fuertes, que se obtendrá hasta el final del horizonte temporal, aplicando las decisiones óptimas. Por tanto puede ser considerado como la contribución indirecta a J en Bolívares fuertes.

- En cuanto a la formulación de una política de extracción sustentable se encontró que la derivada de la función de producción (stock) denominada producción marginal, representa una tasa de retiro seguro del material forestal, sobre todo en las proximidades al turno óptimo biológico de crecimiento de una especie, cumpliendo un papel primordial en los modelos de extracción.

- En cuanto al problema del reparto equitativo intergeneracional, se plantea la necesidad de tomar en cuenta a las generaciones futuras en la toma de decisiones que afectan el medio ambiente. Proponiéndose una tasa de descuento intergeneracional de consumo R, donde:

$$Consumo \quad GP = \frac{Consumo \quad GF}{1 + R}.$$

De manera que se pueda establecer equivalencia entre dichos consumos, o lo que es lo mismo entre los derechos de propiedad DDP intergeneracionales. Estos son asignados en el mejor de los casos a las Generaciones Futuras como las poseedoras del bien capital (stock) y los derechos de usos (Rentas de la explotación) para las Generaciones Presentes.

APÉNDICE A

APÉNDICES.

A.1 Biografías.

A.1.1 Leonhard Euler (1707-1783).

Matemático suizo, cuyos trabajos más importantes se centraron en el campo de las matemáticas puras, campo de estudio que ayudó a fundar. Euler nació en Basilea y estudió en la Universidad de Basilea con el matemático suizo Johann Bernoulli, licenciándose a los 16 años. En 1727, por invitación de la emperatriz de Rusia Catalina I, fue miembro del profesorado de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Fue nombrado catedrático de física en 1730 y de matemáticas en 1733. En 1741 fue profesor de matemáticas en la Academia de Ciencias de Berlín a petición del rey de Prusia, Federico el Grande. Euler regresó a San Petersburgo en 1766, donde permaneció hasta su muerte. Aunque obstaculizado por una pérdida parcial de visión antes de cumplir 30 años y por una ceguera casi total al final de su vida, Euler produjo numerosas obras matemáticas importantes, así como reseñas matemáticas y científicas.

En su Introducción al análisis de los infinitos (1748), Euler realizó el primer tratamiento analítico completo del álgebra, la teoría de ecuaciones, la trigonometría y la geometría analítica. En esta obra trató el desarrollo de series de funciones y formuló la regla por la que sólo las series convergentes infinitas pueden ser evaluadas adecuadamente. También abordó las superficies tridimensionales y demostró que las secciones cónicas se representan mediante la ecuación general de segundo grado en dos dimensiones. Otras obras trataban del cálculo (incluido el cálculo de variaciones), la teoría de números, números imaginarios y álgebra determinada e indeterminada. Euler, aunque principalmente era matemático, realizó también aportaciones a la astronomía, la mecánica, la óptica y la acústica. Entre sus obras se encuentran Instituciones del cálculo diferencial (1755), Instituciones del cálculo integral (1768-1770) e Introducción al álgebra (1770).

A.1.2 Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Matemático y astrónomo francés nacido en Turín (Italia), en cuya universidad estudió. Fue nombrado profesor de geometría en la Academia Militar de Turín a los 19 años y en 1758 fundó una sociedad que más tarde se convertiría en la Academia de Ciencias de Turín. En 1766 fue nombrado director de la Academia de Ciencias de Berlín, y 20 años después llegó a París invitado por el rey Luis XVI. Durante el periodo de la Revolución Francesa, estuvo al cargo de la comisión para el establecimiento de un nuevo sistema de pesos y medidas (véase Sistema métrico decimal). Después de la Revolución, fue profesor de la nueva École Normale y con Napoleón fue miembro del Senado y recibió el título de conde. Fue uno de los matemáticos más importantes del siglo XVIII; creó el cálculo de variaciones, sistematizó el campo de las ecuaciones diferenciales y trabajó en la teoría de números. Entre sus investigaciones en astronomía destacan los cálculos de la libración de la Luna y los movimientos de los planetas. Su obra más importante es Mecánica analítica (1788).

A.1.3 Lev Semionovich Pontryagin (1908-1988).

Nació en Moscú, su padre era un funcionario público. Su madre, Tat´yana Andreevna Pontryagina, tenía 29 años cuando él nació, era una mujer excepcional y desempeñó un papel crucial en su camino para convertirse en un gran matemático. Tal vez la descripción de "funcionario público", aunque precisa, da la impresión equivocada de que la familia tenia una situación económica holgada. Pero no era así, de hecho de hecho Tat´yana Andreevna trabajó utilizando sus habilidades de costura para ayudar a la economía familiar. A la edad de 14 años Pontryagin sufrido un accidente y una explosión lo dejó ciego. Esto podría haber significado el fin de su educación y carrera, pero su madre tenía otras ideas y se dedicó a ayudarle a tener éxito a pesar de las dificultades.

A partir de este momento Tat´yana Andreevna asume la total responsabilidad de ministrar las necesidades de su hijo en todos los aspectos de su vida. A pesar de las grandes dificultades con que había que lidiar, tuvo tanto éxito en su tarea de auto-aprendizaje que realmente merece la gratitud de la ciencia en todo el mundo. Durante muchos años trabajó, en efecto, como la secretaria de Pontryagin, leyendo obras científicas en voz alta para él, la escritura en las fórmulas de sus manuscritos, la corrección de su trabajo y así sucesivamente. Así como ayudándolo en todo lo demás, viendo a sus necesidades y teniendo gran cuidado de él.

Pontryagin ingresó en la Universidad de Moscú en 1925 y rápidamente se hizo evidente a su profesores que él era un estudiante excepcional. Por supuesto que un estudiante ciego que no podía tomar notas y sin embargo, era capaz de recordar las manipulaciones más complicadas con los símbolos es en sí mismo realmente notable. Aún más notable fue el hecho de que Pontryagin podía "ver"(si se excusa el mal uso de palabras) con mucha más claridad que cualquiera de sus compañeros de estudios de la profundidad de significado en los temas presentados a él. Pontryagin fue fuertemente influenciado por Aleksandrov y la dirección en la linea de investigación de este, fue su ámbito de trabajo por muchos años.

En 1927, a pesar de que no tenia más que 19 años de edad, Pontryagin había comenzado a producir resultados importantes en el teorema de la dualidad de Alexander. Su herramienta principal fue utilizar los números de enlace que habían sido introducido por Brouwer, y en 1932, había producido el más significativo de estos resultados de la dualidad, cuando probó la dualidad entre los grupos de homología de conjuntos cerrados delimitadas en el espacio euclidiano y el grupo de homología en el complemento del espacio.

Pontryagin se graduó de la Universidad de Moscú en 1929 y fue designado a la Facultad de Mecánica y Matemáticas. En 1934 se convirtió en miembro de la Steklov Institute y en 1935 se convirtió en jefe del Departamento de Topología y Análisis Funcional en el Instituto.

Pontryagin trabajo sobre los problemas de la topología y el álgebra, en problemas en los que estos dos dominios de las matemáticas se unen.

Uno de los 23 problemas planteados por Hilbert en 1900 era probar su conjetura de que en cualquier grupo topológico localmente euclídeo, se puede dar la estructura de las múltiples analíticas, con el fin de convertirse en un grupo de Lie. Esto se conoció como el Quinto problema de Hilbert. En 1929 von Neumann, mediante la integración en general en grupos compactos pudo resolver este problema. En 1934 Pontryagin pudo demostrar el Quinto problema de Hilbert para los grupos abelianos utilizando la teoría de los caracteres, en grupos abelianos localmente compactos que había introducido.

Entre los libros más importantes de Pontryagin sobre los temas mencionados, son los grupos topológicos (1938). Este libro pertenece a esa rara categoría de obras matemáticas que verdaderamente puede llamarse clásica. Libro que conservan su importancia desde hace décadas y ejercen una influencia formativa sobre el panorama científico de generaciones enteras de matemáticos.

En 1934 Cartan visitó Moscú y dio una conferencia en la Facultad de Mecánica y Matemáticas, pero Pontryagin no entiende el francés por lo que escuchó una traducción susurrada por Nina Bari, que estaba sentado a su lado. La conferencia de Cartan se basó en el problema del cálculo de los grupos de homología de la teoría compacta clásica de grupos. Cartan tenía algunas ideas de cómo esto podría ser logrado y explicó esto en la conferencia, al año siguiente, Pontryagin fue capaz de resolver el problema por completo usando un enfoque totalmente diferente a la sugerida por Cartan. De hecho Pontryagin utilizado ideas introducidas por Morse en superficies equipotenciales.

En 1952 Pontryagin cambió el rumbo de su investigación por completo. Comenzó a estudiar los problemas de las matemáticas aplicadas, en particular, el estudio de las ecuaciones diferenciales y la teoría de control. De hecho, este cambio de dirección no fue tan súbita como apareció. Desde la década de 1930 Pontryagin había sido amistoso con el físico de A. Andronov y había discutido regularmente con él los problemas en la teoría de las oscilaciones y la teoría de control automático en el que estaba trabajando Andronov. Publicó un documento con Andronov en sistemas dinámicos en 1932. Lamentablemente este gran cambio en el trabajo de Pontryagin en 1952, se produjo en la época de la muerte de Andronov.

En 1961 publicó su Teoría matemática de los procesos óptimos con sus alumnos VG Boltyanskii, RV Gamrelidze y Mishchenko EF. Al año siguiente apareció una traducción al Inglés y también en 1962, Pontryagin recibió el premio Lenin de su libro. A continuación, produjo una serie de artículos sobre juegos de diferencia que se extiende a su trabajo en teoría de control. Otro libro de ecuaciones diferenciales ordinarias Pontryagin apareció en traducción en Inglés, también en 1962.

Fue elegido miembro de la Academia de Ciencias en 1939, convirtiéndose en miembro de pleno derecho en 1959. En 1941 fue uno de los primeros receptores de los premios Stalin (más tarde llamados los Premios del Estado). Fue honrado en 1970 por haber sido elegido Vice-Presidente de la Unión Matemática Internacional.

A.1.4 La optimización dinámica en la historia.

Se puede considerar que la optimización dinámica tiene sus raíces en el cálculo de variaciones, la teoría clásica de control y la programación lineal y no lineal.

El ***cálculo de variaciones*** surgió en el siglo XVIII y recibió en los trabajos de Leonard Euler (1707-1783) y de Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) la forma de una teoría rigurosa. Tras algunos trabajos de Leonard Euler publico en 1744 el libro *Métodos de búsqueda de líneas curvas con propiedades del máximo o mínimo, o la resolución del problema isoperimétrico tomado en su sentido más amplio*, que es el primer libro en la historia sobre cálculo de variaciones.

En 1755 Joseph-Louis de Lagrange comunico a Leonard Euler el método general analítico, creado por el, en el que introduce la variación de una función y en donde extiende a las variaciones las reglas del cálculo diferencial.

Otras aportaciones importantes al cálculo de variaciones se deben a Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851), William Rowan Hamilton (1805-1865), Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), Oskar Bolza (1857-1942) y Gilbert Bliss (1876-1951).

El desarrollo sistemático de la ***teoría de control*** se inicio en Estados Unidos alrededor de 1930 en el campo de la ingeniería eléctrica y mecánica. Hasta 1940 aproximadamente, los sistemas de control construidos eran sistemas de regulation: la velocidad de un motor o de una turbina hidráulica debían ser mantenidas en un entorno de un valor constante. Los diseños trataban de evitar *inestabilidad*.

Durante la segunda guerra mundial aparecieron sistemas de control en los que la *transición* era más importante que la quietud; es la clase de los servomecanismos, sistemas de persecución. Por ejemplo, el sistema de control para un arma de fuego requerida para alcanzar un objeto móvil con la ayuda de un radar.

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad introducidos por Rudolph Emil Kalman (1960), así como los métodos de optimización de ***Richard Bellman*** (1957) y ***Lev Pontryagin*** (1962), fueron el origen de lo que se conoce como teoría moderna de control o teoría de control óptimo, basada en la descripción de un sistema según el enfoque del espacio de los estados. Los nuevos avances y sus aplicaciones no solo caían en el campo de la ingeniería, sino también en el area de la economía, biología, medicina y ciencias sociales.

En ***econometría***, aparecen en los años cincuenta y sesenta del siglo XX aportaciones que utilizan la teoría de control, algunas aisladas y otras utilizadas de forma sistemática como técnicas de control óptimo en la investigación de la *teoría de crecimiento*. A partir de 1970 se evidencio gran interés por la teoría de control en distintos campos de la economía, tanto en trabajos teóricos como empíricos y desde entonces proliferan los trabajos sobre el tema convirtiéndose así, en el instrumento básico para describir el comportamiento de individuos y empresas cuando la actividad económica se desarrolla a través del ***tiempo***.

En el campo de la econometría existió en los años setenta gran interés por la teoría de control. En ese tiempo, la modernización econometría y la teoría de control alcanzan un alto grado de madurez y al mismo tiempo, había importantes apoyos de software que permitían tratar problemas con altos requerimientos computacionales. A finales de esta década se atenuó el entusiasmo inicial de la macroeconomía por el control óptimo, a partir de las criticas procedentes de la escuela de la nueva macroeconomía clásica a su utilización en el análisis de políticas alternativas en modelos econométricos.

Sin embargo, métodos de teoría de control utilizada en un contexto diferente constituyen hoy en día el principal instrumento matemático de la nueva macroeconomía clásica. La utilización de estos métodos de análisis hace posible tener en cuenta la conocida critica de *Lucas* a la practica de la econometría en algunos modelos. Por tanto, ya sea en el tratamiento tradicional o en el tratamiento nuevo, los métodos de teoría de control son ampliamente utilizados en el análisis macroeconómico actual, de esta forma, en la literatura económica se habla cada vez con más insistencia de la ***economía dinámica***, en la cual la teoría de control es un instrumento fundamental.

A.2 La madera.

La madera es una estructura fibrosa constituida fundamentalmente por celulosa (50-60 %) y lignina (15-25 %). La celulosa es un compuesto orgánico, que su principal característica es el ser prácticamente inalterable por el aire seco y a gran cantidad de disolventes, constituyendo la estructura resistente de los vegetales. La lignina es otro compuesto orgánico que aporta a la madera la dureza y la rigidez.

Partes del tronco de un árbol:

Corteza: es la parte exterior que recubre el árbol. Tiene la misión de proteger el interior del ataque de los agentes atmosféricos. **Cambium:** es la zona más cercana a la corteza y esta formada por una serie de células tubulares que se reproducen por división. Aquí, se produce el crecimiento del árbol. **Albura:** es la parte más reciente del árbol y la que posee mayor cantidad de savia, siendo la zona que con al crecimiento adquiere mayor dureza. **Duramen:** es la parte del tronco que se produce a partir de la transformación de la albura, una vez que está madura. **Médula:** es la parte central del tronco y por consiguiente la de mayor edad. Esta formada por células tubulares, en las que la mayor parte del agua esta sustituida por resinas.

Mediante un corte transversal, también se puede apreciar una serie de anillos, llamados anillos de crecimiento porque se forman todos los años; de manera que para saber la edad de un árbol hay que contar el número de anillos que tiene. También al observar los anillos se puede apreciar si el árbol creció en mayor o menor medida durante esa época.

Clasificación de las maderas: Las maderas se pueden clasificar según diferentes criterios.

Según el origen: Maderas frondosas: son las maderas procedentes de árboles frondosos como el roble, la haya, el chopo y el eucalipto. Estas maderas se utilizan para fabricar cajas de envases de fruta o pasta de papel.

Coníferas: Son las que proceden de árboles de hoja perenne y acicular y de los que presentan una forma cónica como los pinos, abetos y alerces. Estas maderas se emplean como maderas de construcción.

A.3 Glosario de términos y expresiones.

Aforestación: Plantación de bosques en lugares donde históricamente no las ha habido.
Biodiversidad: Termino que se deriva de diversidad biológica, refleja la cantidad, la variedad y la variabilidad de los organismos vivos.
Biomasa: Cantidad o masa de materia orgánica procedente de organismos vivos que se puede encontrar en un lugar y un momento determinado
Bosques: Según la Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO), superficie de tierra de más de media hectárea, con árboles de altura superior a los 5 metros y una cubierta forestal de más del 10 %, o con árboles

para cumplir con dichos parámetros.

Brundtland(informe): Informe socio-económico elaborado por distintas naciones en 1987 para la ONU, por una comisión encabezada por la doctora Gro Harlem Brundtland. Originalmente, se llamó Nuestro Futuro Común (Our Common Future, en inglés). En este informe, se utilizó por primera vez el término desarrollo sostenible (o desarrollo sustentable), definido como aquel que satisface las necesidades del presente sin comprometer las necesidades de las futuras generaciones. Implica un cambio muy importante en cuanto a la idea de sustentabilidad, principalmente ecológica, y a un marco que da también énfasis al contexto económico y social del desarrollo.

Cambio climático: Fluctuaciones de la temperatura, las precipitaciones, los vientos y todas las demás componentes del clima en la tierra, atribuible directa o indirectamente a la actividad humana, sumada a la variabilidad climática natural observada durante periodos de tiempo comparables.

Captura de carbono: Extracción de carbono de la atmósfera en sumideros como los océanos o los bosques de la tierra, a través de procesos físico o biológicos como la fotosíntesis.

Deforestación: Conversion de tierras forestales en otros tipos de tierras como consecuencias directa de las actividades humanas.

Dilema del prisionero: Dilema de dos prisioneros que no pueden comunicarse entre si, y a quienes se les acusa de haber cometido un delito. Ambos tienen dos opciones confesar culpable o no a su compañero. Si ambos no se confiesan culpable el uno al otro, la pena sera reducida para ambos; si uno confiesa culpable a su compañero pero el otro no, la pena sera nula para el que denuncia al otro, pero alta para el que no denuncio al otro. Si ambos confiesan culpable a su compañero la penalización sera mediana para ambos. En este modelo se resume como la racionalidad de la acción individual se traduce en irracionalidad colectiva.

Energía derivada de la madera: Combustibles leñosos, solidos (leña y carbon), líquidos (licor negro, metanol y aceite pirolítico).

Free rider: contexto que se refiere a los individuos que utilizan los recursos sin cumplir las reglas de apropiación y aprovisionamiento que la comunidad ha definido para su aprovechamiento.

Kelsen, Hans: fundó el positivismo jurídico en Teoría pura del Derecho (1935), donde identificaba el derecho como un sistema de normas que debe estar separado de los fundamentos teóricos de la realidad, descrita mediante los conceptos de tiempo, espacio y causalidad; la esencia del derecho debe buscarse exclusivamente en el sistema normativo jurídico, sin recurrir a categorías sociológicas o políticas.

Madera en pie: Volumen total de árboles vivos de una determinada especie forestal o tierra boscosa, cuyo diámetro a la altura del pecho supera un valor determinado.

Producción: Proceso de creación, cultivo, fabricación o mejora de bienes y servicios. También hace referencia a la cantidad producida. en economía, se utiliza este termino para medir la eficiencia de la cantidad de bienes producidos con relación al contenido que se esta invirtiendo.

Rawls, John: expuso su doctrina en Filosofía Política y del Derecho (1971), que presupone un contrato social equitativo como fundamento de una sociedad justa. Un ordenamiento político verdaderamente justo, según Rawls, sería aquél en el que cada miembro de la comunidad aceptase suscribir el contrato social antes incluso de saber qué papel se le asignará en aquél.

Rodal: Lugar, sitio o espacio pequeño que por alguna circunstancia particular se distingue de lo que le rodea. Conjunto de plantas que pueblan un terreno diferenciándolo de los colindantes.

Tala, apeo o corte: Es retiro físico de la madera, se suele realizar mediante motosierra o por derribo con grandes máquinas excavadoras. Existen dos tipos de tala: La primera es el talado por zonas que sería talar una zona extensa de árboles y después repoblarla con árboles de vivero; y la segunda sería cortar los árboles más grandes, permitiendo a los pequeños crecer para autorepoblar el bosque.

Tragedia de los comunes: Situación en la que un conjunto de acciones aparentemente buenas pensadas y realizadas individualmente acarean problemas desde el punto de vista del bien común.

Turno de corta: Es el tiempo necesario para el cultivo de especies genere árboles maderables, es decir con una talla y características que hacen que su madera sea aprovechable.

Sostenibilidad: Característica o estado según el cual, se pueden satisfacer las necesidades de la población actual sin comprometer la capacidad de las generaciones futuras de satisfacer las suyas.

Valor: Cualidad de algo según la cual se piensa que ese algo es más o menos útil, estimable o importante. Según esta definición el valor de un bosque se mide por se belleza, singularidad, contribución a las funciones que sustentan la vida o las oportunidades comerciales y del recreo.

A.4 El modelo logístico.

El modelo logístico fue desarrollado por el matemático belga Pierre Verhulst (1838) quien sugirió que la tasa de crecimiento relativo de la población puede ser limitada, es decir, que puede depender de la densidad de población: $\frac{P'}{P} = r_0(1 - \frac{P}{K})$.

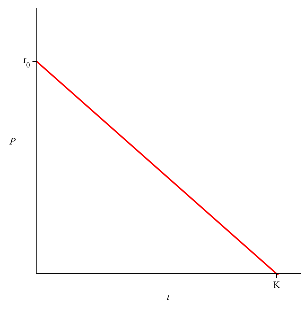

Figura A.1: Gráfica de la relación $\frac{P'}{P} = r_0(1 - \frac{P}{K})$.

En baja densidad ($P << 0$), la tasa de crecimiento de la población es máxima y es igual a r_0. El parámetro r_0 puede interpretarse como la tasa de crecimiento de la población en la ausencia específica de competencia. La población disminuye la tasa de crecimiento conforme aumenta la población P, y llega a 0 cuando P = K. El parámetro K es el límite superior de crecimiento de la población y se llama capacidad de carga. por lo general se interpreta como la cantidad de organismos que pueden ser apoyadas por estos recursos. Si las cifras de población superior a K, entonces la tasa de crecimiento de la población se convierte en números de descenso de la población (negativos). La dinámica de la población es descrito por la ecuación diferencial: $\frac{dP}{dt} = r_0 P(1 - \frac{P}{K})$. Que tiene por solución:

$$P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0)e^{-r_0 t}}.$$

El modelo logístico posee dos soluciones de equilibrio: N = 0 y N = K. El primer equilibrio es inestable, ya que cualquier pequeña desviación de este equilibrio conducirá al crecimiento de la población. El segundo equilibrio es estable, porque después de una perturbación pequeña de la población regresa a este estado de equilibrio.

A.5 Linealización y el teorema de Hartman.

Sea el siguiente sistema no linear y autónomo, descrito por las ecuaciones (A.1):

$$\begin{cases} \dot{x} &= P(x,y) \\ \dot{y} &= P(x,y) \end{cases}$$

Definición A.1. ***Punto crítico hiperbólico****. Un punto crítico es llamado hiperbólico si la parte real de los autovalores de la matriz Jacobiana $J(u,v)$ son distintas de zero. caso contrario es llamado no hiperbólico.*

Teorema A.2. *Supongamos que (u,v) es un punto hiperbólico del sistema A.5. entonces existe una vecindad del este punto critico donde el diagrama de fase del sistema no lineal se asemeja cualitativamente al de su sistema linealizado asociado.*

Supongamos que tiene un punto critico en el punto (u, v) , donde P y Q son al menos funciones cuadráticas en x, y, tomando una transformación lineal que traslade tal punto hasta el origen. Sea $X = x - u$ y $Y = y - v$, entonces el sistema anterior puede expresarse por un polinomio de Taylor de primer grado en dos variables:

$$\dot{X} = P(X+u, Y+v) = P(u,v) + X\frac{\partial P}{\partial x} \mid_{(x=u,y=v)} + Y\frac{\partial P}{\partial y} \mid_{(x=u,y=v)} + R(X,Y).$$

$$\dot{Y} = Q(X+u, Y+v) = Q(u,v) + X\frac{\partial Q}{\partial x} \mid_{(x=u,y=v)} + Y\frac{\partial Q}{\partial y} \mid_{(x=u,y=v)} + S(X,Y).$$

Si los términos no lineales R y S satisfacen la condición $\frac{R}{r} \to 0$ y $\frac{S}{r} \to 0$ cuando $r = sqrt(X^2 + Y^2) \to 0$, se pueden descartar estos términos en las cercanías del punto (u, v). Como $P(u, v) = Q(u, v) = 0$, puesto que (u, v) es un punto critico. Entonces el sistema linealizado toma la forma:

$$\dot{X} = X\frac{\partial P}{\partial x} \mid_{(x=u,y=v)} + Y\frac{\partial P}{\partial y} \mid_{(x=u,y=v)} .$$

$$\dot{Y} = X\frac{\partial Q}{\partial x} \mid_{(x=u,y=v)} + Y\frac{\partial Q}{\partial y} \mid_{(x=u,y=v)} .$$

Con la matriz Jacobiana:

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}_{(u,v).}$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] Azqueta, D. y Ferreiro, A., *Análisis económico y gestión de recursos naturales*, España. Alianza Editorial, 1994.

[2] Azócar, A., *Ética ambiental y solidaridad diacrónica dentro de los limites de la mera razón*, Ponencia presentada en la I Conferencia Mundial de Educación Ambiental celebrada en el Hotel Caracas Hilton del 25 al 30 de junio de 1995.

[3] Azócar, A., *Ética forestal: Equidad intergeneracional y turno de rotación*, III Congreso Forestal Venezolano, Ciudad Bolivar del 25 al 30 de Noviembre de 2002.

[4] Azócar, A., *Ética practica: Utilitarismo y equidad intergeneracional*, 5CSIEU, Granda España, 26,27 y 28 de Septiembre de 2007.

[5] Brealey, M., *Principios de finanzas corporativas*, Mc Graw Hill, 2006. [Documento en linea]. Disponible: http://es.wikipedia.org/wiki/Valor_actual_neto.

[6] Boulding, K., *The theory of a single investiment*, New York: Harper & Bros, 1935.

[7] Camero, J., *Teoría de control óptimo y gestión de recursos naturales renovables: caso pesquero*, Tesis U.C.V., Caracas, (2008).

[8] Carnero, C., *Aplicación de la teoría de control óptimo y la programación dinámica a la gestión de acuíferos*, Tesis U.C.V., Caracas, (2009).

[9] Cerdá, E., *Optimización dinámica*, Prentice Hall. España, 2001.

[10] Chiang, A., *Elements of dynamic optimization*, McGraw-Hill, 1992.

[11] Chiang, A. y Wainwright, K., *Métodos fundamentales de economía matemática*, Mexico. Mc Graw Hill: 4ta Edicion, 2006.

[12] Clark, C., *The optimal management of renewable resources*, New York. John Wiley & Sons, pp 197-219, 1990.

[13] Conrad, J., *Mathematical ecology*, Springer-Verlag. NY. pp 381-395, (1987).

[14] *Constitución de la República Bolivariana de Venezuela*, Publicada en Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela, $N^{ro.}$ 5.453, Caracas. Venezuela, 2000.

[15] Dasgupta, P. and Heal, G., *Economic theory and exhaustible resourses*, Cambridge University Press. Cambridge, 1979.

[16] Diaz, M. y Galindo, M., *Economía ambiental*, Biblioteca Nueva. Madrid, 1999.

[17] Escobar, D., *Economía matemática*. Alfaomega, Colombia, 2001.

[18] Faustmann, M., *On the determination of the value which forest land and inmature stands possess for forestry*, English edition by M. Gane, Oxford Institute paper 42,1968. Reprinted in Journal of Forest Economics (1985). 1(1): 7-44.

[19] Fisher, I., *The Theory of Interest*, New York: The Macmillan Co., 1930.

[20] Gligo, N., *La dimensión ambiental en el desarrollo de América Latina*, CEPAL. Editorial Universitaria Centroamericana (Educa), San Jose de Costa Rica, 1986.

[21] Kula, E., *Economics of natural resources and the environment*. Chapman & Hall, New York.(1992).

[22] Hardin, G., *The tragedy of the commons*, Science 162, 1243-1248., (1968).

[23] Hartman, R., *The harvesting decision when a standing forest has value*, Economic Inquiry 14, 52-58., (1976).

[24] Hernández, G. y Velasco, J., *El manantial escondido*, Fondo de la Cultura Economica. Mexico, 1999.

[25] Intriligator, M., *Optimización matemática y teoría económica*, Pretince Hall International, 1992.

[26] Jevons, W., *The coal question*, Macmillian. Londres, 1985.

[27] Kamien, M. & Schawrtz, N., *Dynamic optimization: The calculus of variation and optimal control in economics and management*, North-Holland. New York, (1991).

[28] *Ley Organica del Ambiente*, Gaceta Oficial de la Republica Bolivariana de Venezuela, $N^{ro.}$ 31004, Caracas. Venezuela, 1976.

[29] Lynch, Stephen., *Dynamical Systems with applications using MAPLE*, Birkhauser. Boston, (2002).

[30] Murray., *Mathematical biology*, Springer-Verlag, (1993).

[31] Naslund, B., (1969). *Optimal rotation and thinking*, Forest Science 15, 446–451.

[32] Ohlin, B., (1921) *Till frägan om skogernes omloppdtid*, Ekonomisk Tidskrift, 22. Printed in Journal of Forest Economics 62(2), 158-166.

[33] Pontryagin L., Boltyanskii R., *The mathematical theory of optimal processes*, New York. John Wiley and Sons, (1962).

[34] Pressler, M., (1860), *Aus der holzzuwachlehre*, Allgemeine Forst-und Jagdzeitung, 36. Reprinted in Journal of Forest Economics (1995). 1(1): 45-87.

[35] Reed, W., (1984), *The effects of the risk of fire on the optimal rotation of a forest*, Journal of Environmental Economics and Management 11, 180-190.

[36] Riera, P. y Otros., *Manual de economía ambiental y de los recursos naturales*. Thomson Paraninfo. Madrid, 2005.

[37] Rodríguez, M., *Teoría de control óptimo y manejo sustentable de recursos forestales*, Tesis U.N.A., Caracas. Venezuela, (2007).

[38] Romero, C., *Economía de los recursos ambientales y naturales*. Alianza Editorial. (1997).

[39] Romero, C., *Teoría de la desición multicriterio: Conceptos, técnicas, y aplicaciones*, Alianza Editorial. Madrid, 1993.

[40] Simmons, G., *Introducction to topology and modern analysis*, McGraw-Hill, 1963.

[41] Samuelson, P., (1976). *Economics of forestry in a evolving society*, Economic Inquiry 14, 466-492.

[42] Smith, V., *Economics of reductions from natural resources*, American Economic. Review 58, 409 - 431. 1968.