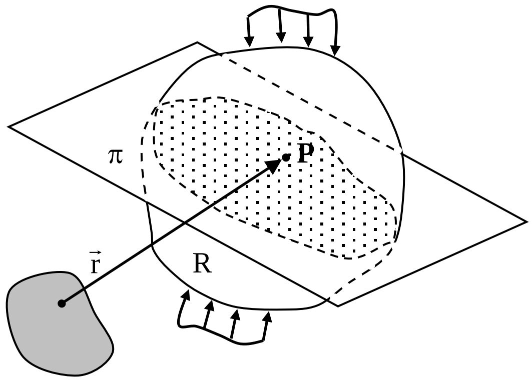
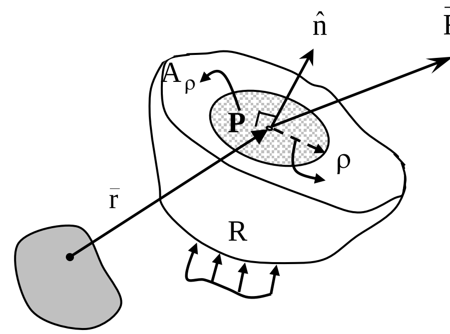
7.2.- MARCO TEÓRICO

7.2.1.- DEFINICIONES

Consideremos un cuerpo sometido a la acción de fuerzas externas aplicadas y a fuerzas de volumen.





Donde:

P: Partícula arbitraria del cuerpo, cuyo vector de posición es $\bar{r}$.

π: Plano de normal unitaria exterior $\hat{n}$ que contiene a la partícula P.

$\bar{F}_P$: Resultante del sistema de fuerzas distribuidas sobre un disco contenido en π, de centro P, radio ρ y área A_ρ, provenientes de la interacción con la otra parte del cuerpo.

$\bar{S}(\bar{r},\hat{n})$: Vector tracción en una partícula P de vector de posición $\bar{r}$, medido sobre un plano de normal exterior $\hat{n}$. (N/m^2), (Pa)

$\sum$: Matriz de esfuerzos.

ε: Matriz de deformaciones

N: Componente normal del vector tracción.

T: Componente cortante del vector tracción.

$\bar{\sigma}^{x}_{(\bar{r})} = \bar{S}(\bar{r},\hat{i})$: Vector esfuerzo que representa la fuerza por unidad de área que actúa sobre la partícula P, medida sobre un plano paralelo al plano yz.

$\bar{\sigma}^{y}_{(\bar{r})} = \bar{S}(\bar{r},\hat{j})$: Vector esfuerzo que representa la fuerza por unidad de área que actúa sobre la partícula P, medida sobre un plano paralelo al plano xz.

$\bar{\sigma}^{z}_{(\bar{r})} = \bar{S}(\bar{r}, \hat{k})$: Vector esfuerzo que representa la fuerza por unidad de área que actúa sobre la partícula P, medida sobre un plano paralelo al plano xy.

$\bar{f}$: Fuerza de volumen (N/m^3)

γ: Peso específico del cuerpo (N/m^3)

ϕ: Función de Airy

E: Módulo de Young (N/m^2)

ν: Módulo de Poisson

G: Módulo de Corte (N/m^2)

Θ: Invariante de esfuerzos (N/m^2)

ϑ: Invariante de deformaciones

Π: Matriz identidad

7.2.2- TRACCIONES Y ESFUERZOS

$$\bar{S}(\bar{r}, \hat{n}) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\bar{F}_\rho}{A_\rho}; \quad \bar{S}(\bar{r}, \hat{n}) = \Sigma\, \hat{n}; \qquad N = \bar{S}(\bar{r}, \hat{n}) \circ \hat{n}; \qquad T = \sqrt{S^2 - N^2}$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}^x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}^y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}^z}{\partial z} + \bar{f} = \bar{0}; \qquad [\Sigma - \sigma \Pi]\hat{n} = \bar{0}$$

7.2.2.1.- Relación entre los Esfuerzos y la Función de Airy

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \qquad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad \text{y} \qquad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}$$

7.2.2.2.- Círculos de Mohr

$$d = \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right); \qquad r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$d_1 = \frac{\sigma_3 + \sigma_2}{2}; \qquad r_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}; \qquad n_x^2 = \frac{(N - d_1)^2 + T^2 - r_1^2}{4\, r_2\, r_3}$$

$$d_2 = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}; \qquad r_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \qquad n_y^2 = -\left[\frac{(N - d_2)^2 + T^2 - r_2^2}{4\, r_1\, r_3}\right]$$

$$d_3 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}; \qquad r_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}; \qquad n_z^2 = \frac{(N - d_3)^2 + T^2 - r_3^2}{4\, r_2\, r_1}$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

7.2.3.- DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

7.2.3.1.- Vector Desplazamiento

$$\bar{u}(\bar{r}) = \bar{u}(x, y, z) \quad \text{y a su vez} \quad \bar{u}(x, y, z) = u_x(x, y, z)\,\hat{i} + u_y(x, y, z)\,\hat{j} + u_z(x, y, z)\,\hat{k}$$

7.2.3.2.- Deformación Normal o Axial

$$e_{nn} = \frac{L - L_o}{L_o} = \frac{\Delta L}{L_o}$$

7.2.3.3.- Deformación Cortante o Angular

$$e_{mn} = e_{nm} = \frac{1}{2}(\varphi + \beta)$$

7.2.3.4.- Deformación por Temperatura

$$\Delta L = \alpha\, L_o\, \Delta T$$

Donde:
α: Coeficiente de dilatación térmica del material
ΔT: Gradiente de temperatura aplicado al cuerpo

7.2.3.5.- Relación Desplazamientos-Deformaciones

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \qquad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \qquad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right); \quad e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right); \quad e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{zz} = E\, e_{zz}$$

$$e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz}$$

$$\Theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \qquad \text{y} \qquad \vartheta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\Sigma = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon + \frac{\nu\vartheta}{1-2\nu}\Pi\right] \qquad \text{y} \qquad \Sigma = 2G\left[\varepsilon + \frac{\nu\vartheta}{1-2\nu}\Pi\right]$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\Sigma - \nu\Theta\Pi\right] \qquad \text{y} \qquad \varepsilon = \frac{1}{2G}\left[\Sigma - \frac{\nu\Theta}{(1+\nu)}\Pi\right]$$