UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE AGRONOMÍA
POSTGRADO EN ESTADISTICA

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA DESDE UNA PERSPECTIVA DIFUSA

Lic. Luisa Henriquez.
C.I. 14.793.112
Tutor: Dr. Miguel Balza.

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER SCIENTIARUM EN ESTADÍSTICA.

Maracay, julio de 2014.

Dedicatoria

A Dios, por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino, aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante toda mi vida.

A mi Madre, por ser mi Ángel, por la inmensidad de su amor y por sus incansables cuidados. Ha sido, es y será mi modelo a seguir. Te Extrañaré por siempre.

A mi Padre, por su incondicional apoyo, por estar pendiente de mí en todo momento. Gracias por ser ejemplo de arduo trabajo y tenaz lucha en la vida.

A mi esposo, que ha estado a mi lado dándome cariño, confianza y apoyo incondicional para seguir adelante y cumplir otra etapa en mi vida.

A mis hijos, Alicia, Analuisa y Luciano, que son el motivo y la razón que me ha llevado a seguir superándome día a día, para alcanzar mis más apreciados ideales de superación, ellos quienes en todo momento me brindan su amor y compresión, quiero dejarles una enseñanza, que cuando se quiere alcanzar algo en la vida, no hay tiempo ni obstáculo que impida para poderlo lograrlo.

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Le doy gracias a mis padres por apoyarme en todo momento y por los valores que me han inculcado.

Mamá, no me equivoco cuando digo que fuiste la mejor mamá del mundo, gracias por todo el esfuerzo, apoyo y por la confianza que depositaste en mí. Gracias porque siempre, aunque no estés físicamente, has estado a mi lado. Te quiero mucho.

Papá, éste es un logro que quiero compartir contigo, gracias por apoyarme, por orientarme, por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida y por creer en mí y sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir. Te Quiero.

Agradecida con mi esposo y mis hijos por acompañarme y apoyarme en todo momento, por ser una parte muy importante de mi vida, por su paciencia y amor incondicional.

A mis hermanos y a mis sobrinos Daniel y Paola, por ser parte importante de mi vida y por llenar mi vida de alegrías y amor.

Debo agradecer de manera especial al Dr. Miguel Balza, por aceptarme para realizar esta tesis bajo su dirección. Su apoyo, su orientación y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar mis ideas ha sido un aporte invaluable, no solamente en el desarrollo de esta tesis, sino también en mi formación como investigador.

Quiero expresar también mi más sincero agradecimiento a la Dra. Harú Martínez y al Dr. Willin Álvarez por su importante aporte y su disponibilidad en el desarrollo de esta tesis.

Luisa.

INDICE GENERAL

CAPITULO I

CAPITULO II

Índice de Figuras

Pág.

Probabilidad y estadística desde una perspectiva difusa. Henriquez, Luisa. Facultad de Agronomía. Postgrado en estadística. UCV. (2014).

RESUMEN

En esta investigación, se intenta construir un enfoque interpretativo de la teoría clásica de probabilidad y estadística desde una perspectiva difusa. Con este propósito, se hace uso de un esquema de aproximación entre los elementos fundamentales de ambas teorías y, para ello, se describen los elementos básicos y las operaciones fundamentales de la lógica difusa, y se conectan con los procesos esenciales de la teoría de probabilidad y estadística clásica. Para llevar a cabo la investigación, se realizó una revisión documental exhaustiva que permitió describir y comparar los procesos básicos de ambas teorías, para alcanzar una aproximación entre las mismas, sustentada en las investigaciones realizadas por los creadores y expertos principales de la lógica difusa y en los procesos formales de la probabilidad y estadística clásica. Esto condujo posteriormente a un enfoque interpretativo de esta aproximación, lo cual es el objetivo de este trabajo. La construcción de este enfoque interpretativo representa el aporte principal de esta investigación, porque allana el camino hacia la profundización de las conexiones que caracterizan estas dos importantes teorías y la consiguiente facilitación del estudio de eventos de interés caracterizados por la vaguedad y la imprecisión. Como consecuencia de esto, se alcanzaron los objetivos inicialmente propuestos y se busca representar un aporte en la dirección de generar conocimientos interconectados entre ambas teorías, para promover el impulso a nuevas investigaciones que señalen otras opciones y caminos para la comprensión de la naturaleza y alcance de dicha relación y, obviamente, para el enriquecimiento de ambos campos de estudio.

Palabras Claves: Lógica difusa, conjuntos borrosos, probabilidad y estadística.

Statistic and probability from a fuzzy perspective. Henriquez, Luisa. Facultad de Agronomía. Postgrado en estadística. UCV. (2014).

ABSTRACT

The goal of this investigation is to establish an interpretative focus of the statistical and probability classical theory based on the fuzzy approach. For this purpose, it was used an approximation outline between the principal elements of both theories. For making this approximation, it was described the basic elements and fundamental operations of the fuzzy logic approach, in order to connect with the essentials process of the statistical and probability classical theory. The first part of this study was a documental review that permitted to describe and compare the basic processes of both theories, with the intention of getting an approximation between them. That approximation was based on the investigations realized for the primary experts of the fuzzy logic and the formal processes of the statistical and probability classical theory. Subsequently, this study led an interpretative focus of that approximation being that, the principal goal of this work, because this focus smooth the way towards the deep of connections between these important theories; and consequently the easy study about events characterized for the ambiguity. As a result, the objectives of the study were achieved, so as to generate interconnected knowledge about these approaches and to promote new investigations, which could encourage both study fields.

Key words: Fuzzy logic, fuzzy sets, probability and statistics.

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

Vivimos una época caracterizada por la búsqueda constante de la exactitud y la precisión. Se construyen artefactos que son capaces de fotografiar a un hombre, con la mayor nitidez, a miles de kilómetros de distancia; se construyen computadoras capaces de realizar las más complejas operaciones en un tiempo que se mide en milésimas de segundo, la moderna tecnología y las ciencias formales (la Matemática, sobre todo), imponen su ley.

Sin embargo, frente a ese mundo que busca la precisión y la exactitud, se encuentra un mundo real, en el que se desenvuelve el comportamiento humano, caracterizado por una sutil imprecisión. En efecto, si algo distingue la inteligencia humana de esa inteligencia artificial que constituye el ordenador, es la capacidad de nuestro cerebro de pensar y razonar en términos imprecisos, en términos difusos, borrosos. Así, somos capaces de descifrar un texto incompleto, de comprender un discurso alterado, de captar los diferentes matices que a una misma palabra se le pueden dar, de leer entre líneas. El ordenador, por el contrario, necesita que se le dote de lenguajes especiales que traduzcan, con el mayor grado de precisión, la información que demanda.

Esto demuestra, en definitiva, que estamos lejos de construir máquinas que rivalicen con el cerebro humano, en tareas tales como: el reconocimiento de lenguajes, la traducción de idiomas, la comprensión de intenciones, entre otros.

No obstante, en el afán por ampliar el conocimiento científico de una realidad, que es en esencia compleja, los hombres de ciencia desarrollan y construyen teorías y modelos cada vez más sofisticados, cada vez más precisos. Pero a menudo, la propia naturaleza del modelo utilizado para representar la realidad, impone una restricción que obliga al investigador, a aceptar la imprecisión de variables y datos que son vagos, difusos.

El problema que se nos presenta es entonces obvio: ¿cómo aprender y tratar esa imprecisión, cómo introducirla en nuestros esquemas? En La Teoría de los Conjuntos

Borrosos, que nace en el seno de la ciencia matemática, parece estar la respuesta adecuada, ya que busca dar "grados" de precisión a fenómenos que son imprecisos.

En efecto, la Teoría de los Conjuntos Borrosos, supone una aproximación entre la precisión de la matemática clásica y la sutil imprecisión del mundo real. Constituye, como afirma Zadeh (1977), una aproximación nacida de la incesante búsqueda humana para una mejor comprensión de los caminos mentales y del conocimiento. .

La fundamentación de esta teoría, se encuentra, como afirma Azorín (1979), en la confluencia de varias corrientes y acontecimientos. Por una parte; las relacionadas con la probabilidad; las ampliaciones del razonamiento lógico y la exactitud. Por otra, las que se refieren a las nociones de agregado, partición y clasificación.

La Teoría de los Conjuntos Borrosos investiga y trata de imponer un nuevo punto de vista, en el cual lo "borroso", sea aceptado como algo real y constante en la actividad cotidiana del ser humano. Las posibilidades que abre esta teoría dentro de las ciencias sociales, son numerosas. Así, 1a sociología, la lingüística, la economía, la informática, la investigación de operaciones, entre otros, constituyen ámbitos donde esta teoría puede ser aplicada y obviamente en el útil, y cada vez más importante, campo de la estadística.

El crear conclusiones útiles, a partir de la información incompleta o imprecisa, no es una tarea imposible, pues los seres humanos lo hacen de manera automática a diario y en muchos aspectos de nuestro quehacer humano. Los médicos realizan diagnósticos correctos y recomiendan tratamientos a partir de síntomas ambiguos, los mecánicos analizan los problemas de los automóviles a partir de observaciones, y todos los seres humanos comprendemos el lenguaje hablado, corporal o escrito a pesar de tener frases confusas e incompletas; también reconocemos a otras personas por sus voces o sus gestos. Así, para realizar el proceso de toma de decisiones se utiliza la lógica. Con lógica algunas piezas de conocimiento son utilizadas en el razonamiento, y pueden ser parte de las explicaciones o conclusiones. Desde los años sesenta del siglo pasado, se ha tratado de automatizar la toma de decisiones en diversos campos del conocimiento a través de sistemas expertos, basados en reglas lógicas de la forma “si… entonces…” con resultados muy positivos. Sin embargo, el empleo de la lógica tradicional en el desarrollo de sistemas de razonamiento automático tiene sus limitantes, especialmente en los casos en los que hay información faltante o niveles de incertidumbre. En estos casos, los procedimientos de inferencia tradicional pueden no ser útiles. Por ejemplo, puede suceder que las observaciones tengan un amplio margen de error, que las relaciones de causa -efecto no sean claras, que se cuente solamente con conocimiento no explicito u observable para tomar una decisión, o simplemente que los términos utilizados en la descripción del problemas sean vagos o ambiguos. Para compensar estas deficiencias, se han propuesto diversas metodologías, como la lógica difusa y la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer (1976), que han probado su valor al emplearse en sistemas de apoyo a la toma de decisiones.

De lo anterior, surge la motivación y el interés para realizar esta investigación, donde de manera primordial, se intenta establecer un enfoque borroso para explicar elementos fundamentales de la teoría de probabilidad y estadística clásica, bajo la perspectiva difusa, y haciendo uso, entre otros, de un esquema de aproximación a los elementos fundamentales de la teoría estadística con el apoyo de la estructura y reglas de la teoría de los conjuntos borrosos, describiendo para ello, las operaciones de la lógica difusa y su relación con los procesos básicos de la teoría de probabilidad y estadística; para finalmente, establecer el aporte que la lógica difusa podría brindar a la teoría clásica de probabilidad y estadística.

Antecedentes de la Investigación

La teoría de los conjuntos borrosos es introducida por Zadeh (1965), quien define el conjunto borroso como una clase de objetos con un continuo grado de pertenencia. Tal conjunto, está caracterizado por una función de asociación, la cual asigna a cada objeto un grado de pertenencia evaluable entre cero y uno. Las nociones de inclusión, unión, intersección, complemento, relación, convexidad, entre otros, son extendidas a tales conjuntos; y varias propiedades de estas nociones están establecidas en el contexto de conjuntos borrosos. En particular, un teorema de separación para conjuntos borrosos convexos es demostrado sin requerir que los conjuntos borrosos sean disjuntos.

Stein y Talati (1981), afirman que una teoría de variables aleatorias borrosas puede ser desarrollada para aplicarse a situaciones que implican aleatoriedad y borrosidad. El uso de las funciones de pertenencia cuasi-cóncava, juega un papel importante en la teoría, quedando entendido que la esperanza de una variable aleatoria borrosa es una variable borrosa (conjunto borroso).

Aranguren y Muzachiodi (2003), establecen que la lógica difusa es un acercamiento matemático, para tratar con la naturaleza imprecisa del lenguaje cotidiano y del mundo que nos rodea. La teoría del conjunto borroso, extiende los conceptos del conjunto de miembros de la lógica tradicional binaria a uno más natural, donde los objetos pueden tener grados de pertenencia que va desde 0 a 1. También, se han redefinido el conjunto de operaciones básicas de unión, intersección y complemento para trabajar en conjuntos borrosos

Reyes y García (2005), señalan en su artículo: Toma de Decisiones mediante Técnicas de Razonamiento Incierto, "en el mundo real no existe algo que sea cien por ciento seguro". Todos los días, se presentan situaciones que implican el tomar una decisión con información imprecisa. El método que se ha utilizado tradicionalmente para manejar estos problemas ha sido el modelo de Bayes. Buscando algunas alternativas que sobrepasaran las limitaciones mostradas por este método, se han creado otros modelos que tratan ciertos tipos de incertidumbre, cada uno de manera diferente. Entre estos métodos, está la teoría de lógica difusa, creada por Lofti Zadeh (1965), y que trata de la vaguedad en la información. Otro método utilizado, es la teoría de la evidencia de Dempster y Shafer (1976). Esta teoría trata la ambigüedad en la información, y provee una gran variedad de medidas que suministra información más precisa acerca del tipo de incertidumbre en los datos. En este artículo, se muestran las ventajas y desventajas de cada uno de los métodos mencionados, se explica por qué se considera a la teoría de la evidencia de Dempster y Shafer, como una de las que tiene mayor potencial. Finalmente, se presenta la biblioteca numérica LIDSET para el manejo de la incertidumbre.

Loquin y Strauss (2008), Presentan un estimador de densidad del histograma, basado sobre una partición borrosa. Se ha demostrado su consistencia para estimar el cuadrado medio del error (MSE), y se obtuvo una amplitud óptima para la minimización de cuadrado medio del error integrado asintótico (AIMSE). La ventaja principal de esta herramienta, es que mejora la robustez del estimador de densidad del histograma con respecto al carácter arbitrario de su distribución.

Akbari y Rezaei. (2008), proponen un nuevo método para la estadística de orden borroso. En este estudio se hace uso de los estadísticos de orden y se desarrolla dicho método para una muestra aleatoria borrosa. Establecen que teoría de conjuntos borrosos, es una herramienta útil de este tipo, para la formulación y análisis de los conceptos de subjetividad e imprecisión. Varios métodos de clasificación han sido propuestos en la literatura. En este estudio se construye un nuevo método para los estadísticos de orden en un ambiente borroso, el cual, es completamente diferente a los mencionados anteriormente. Se proponen dos técnicas diferentes, para obtener la distribución de estadísticos de orden usando variables aleatorias borrosas.

Justificación

Tal como se mencionó anteriormente, lo usual de la mente humana es buscar la exactitud y la precisión en la explicación de los fenómenos reales; sin embargo, el hombre ha logrado entender que el comportamiento humano es extremadamente complejo, y esta complejidad, genera múltiples imprecisiones tanto en su comportamiento, como en la percepción que tiene del mundo que le rodea (Dempster, 1976). Si se acepta entonces esta argumentación, resulta totalmente justificado intentar una aproximación de modelos y teorías que combinen la fortaleza de la precisión y la exactitud, tal como lo hace la teoría estadística; con las condiciones de imprecisión y ambigüedad que se genera en nosotros y en nuestro entorno, tal como intenta estudiarlo con rigor la lógica difusa.

Es interesante observar, que en la probabilidad y estadística estamos obligados a utilizar estimados; ¿no es válido también utilizar otras técnicas diferentes a la probabilidad, que enriquezcan la solidez de las conclusiones, relacionadas a eventos condicionados por la imprecisión? (Reyes y García, 2005).

Es importante señalar que la lógica difusa se sustenta en el concepto de la vaguedad de la evidencia, para lo cual siempre es interesante establecer un criterio definido en el momento de hallar una relación de pertenencia, por lo que es necesario establecer algún tipo de definición que conecte la realidad del pensamiento humano con el reconocimiento de patrones para la toma de decisiones en ese mundo abstracto. (Reyes y García, 2005).

De acuerdo a estas consideraciones, se aspira que esta investigación, genere un enfoque interpretativo que surja de la comparación de las bondades de la lógica difusa y de la potencia y utilidad de la probabilidad y estadística clásica. En consecuencia, este estudio, desde el punto de vista teórico, intenta ser un aporte en la dirección de generar conocimientos interconectados de ambas teorías. De allí, que su aporte estaría representado por el impulso a nuevas investigaciones, que señalen otras opciones y caminos, para la comprensión de la naturaleza y alcance de dicha relación, y obviamente, para el enriquecimiento de estos campos de estudio.

Objetivo General:

Establecer un enfoque a la teoría de probabilidad y estadística clásica desde una perspectiva difusa.

Objetivos Específicos:

1. Identificar los elementos fundamentales de la teoría de conjuntos borrosos y la lógica difusa.
2. Describir las operaciones de la lógica difusa y su relación con los procesos básicos de la teoría de probabilidad y estadística clásica.
3. Construir un enfoque interpretativo de la teoría clásica de probabilidad y estadística desde una perspectiva difusa.

CAPITULO II

MARCO TEORICO

En 1965, Zadeh introduce la teoría de conjuntos borrosos, como un mecanismo para representar la vaguedad e imprecisión de los conceptos empleados en el lenguaje natural. Estos conjuntos borrosos, fueron definidos como una extensión de los conjuntos clásicos, capaces de modelar la imprecisión propia de los conceptos humanos. A mediados de los años 70, llega la ampliación del concepto de conjunto al campo de la lógica; apareciendo las lógicas borrosas y sus aplicaciones. Hoy en día, son muchas las aplicaciones, tanto industriales como domésticas, que hacen uso de este paradigma.

Antes de abordar el estudio de la teoría de conjuntos borrosos, se revisarán algunos de los conceptos básicos de la teoría clásica, con el objeto de alcanzar una mayor comprensión de ambas.

2. 1. Revisión de la teoría clásica de conjuntos

2.1.1. Definiciones, terminología y notación:

El punto de partida de la teoría de conjuntos, son las nociones de elemento y de conjuntos. Un conjunto se define genéricamente como una colección de elementos. Típicamente, los elementos que forman parte de un conjunto, tienen algún tipo de propiedad en común que les haga susceptibles de pertenecer al conjunto, pero tal requisito es meramente anecdótico. El conjunto se suele representar con una letra mayúscula, tipo **A**, **B, C**, entre otros, y los elementos del mismo se representan con una letra minúscula (***a***, ***b***, ***c***, entre otros).

Sobre los conjuntos se define una relación de pertenencia, la cual se denota con el símbolo $\in$. Así pues, si el elemento a pertenece al conjunto **A,** este hecho se formaliza mediante la expresión:

$$\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$$

En el caso de que ***b*** no pertenezca a **A**, se escribe: $\boldsymbol{b} \notin \mathbf{A}$

Respecto a la forma de descripción del conjunto, ésta se puede realizar de manera enumerativa, $A=\{a_1,a_2,....,a_n\}$, o bien, mediante la ley de formación a la que se ha hecho referencia, **A**= "los diez primeros números naturales". Tal definición, como puede imaginarse, es equivalente a escribir de forma enumerativa $A=\{1,2,3,....,10\}$.

Se define el cardinal de un conjunto, como el número de elementos que forman parte de dicho conjunto. Si dicho cardinal es un número finito, el conjunto se denominará finito. Caso contrario, será infinito. Dentro de estos últimos, deben distinguirse los de cardinal numerable, que serán aquellos cuyos elementos se pueden poner en relación con los números enteros (por ejemplo el conjunto de los números pares). Por otra parte, se encuentran conjuntos de cardinal no numerable, como por ejemplo, el conjunto de los números reales comprendidos entre dos números a y b.

La relación de inclusión, se deriva de la relación de pertenencia. Por ejemplo, un conjunto **B** se dice que está incluido dentro de un conjunto **A**, cuando todos los elementos de **B** están en **A**. Si tal es el caso, podemos expresar de forma abreviada que $B \subset A$, o bien que $A \supset B$. Si se verifica que $B \subset A$ y que $A \subset B$ de forma simultánea, entonces es que los dos conjuntos son iguales.

Se dice que dos conjuntos son disjuntos si no tienen ningún elemento en común. A estos conjuntos, se les denomina también mutuamente excluyentes.

Dado un problema, el conjunto universal, denotado por ***E***, será el conjunto formado por todos los elementos del problema. De forma complementaria, el conjunto vacío, denotado por ϕ, será un conjunto sin ningún elemento. Como es natural, los conjuntos ***E*** y ϕ son mutuamente excluyentes.

Sea ***E*** un universo del cual cualquier conjunto **A** es subconjunto, este es:

$$A \subseteq E, \forall A$$

En teoría clásica de conjuntos, cualquier elemento *x* perteneciente a ***E***, pertenece o no pertenece al subconjunto **A** de manera clara e inequívoca, sin que exista ninguna otra posibilidad al margen de estas dos.

La pertenencia o no, de un elemento arbitrario *x,* a un subconjunto **A**; viene dada en la mayoría de los casos, por la verificación o no, de un predicado que caracteriza a **A**, y da lugar a una bipartición del universo de discurso S.

Por ejemplo, sea ***E*** el universo de discurso formado por todos los ríos del mundo. Definiremos el conjunto **A**, como aquél que está formado por todos aquellos elementos de ***E*,** que verifiquen el predicado *"x fluye por europa"*. Por citar algunos ejemplos ilustrativos: Rhim$\in$ **A**, Nilo$\notin$ **A** y Ebro $\in$ **A**.

Debe hacerse notar, que ha sido posible proporcionar una definición clásica del conjunto **A**, porque su correspondiente predicado permite la bipartición del universo ***E***.

2.1.2 Función Característica

El concepto de pertenencia o no de un elemento a un conjunto **A**, puede expresarse numéricamente mediante una función característica. Esta función, asigna a cada elemento *x* del universo de discurso, un dígito binario (1 ó 0), según *x* pertenezca o no al conjunto **A**.

$$\mu_A : E \rightarrow \{0,1\} \qquad \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

Cualquier conjunto $A \subset E$ se puede definir por los pares que forman cada elemento x del universo y su función característica, expresándose de la siguiente forma:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in E\}$$

Por ejemplo, el conjunto $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ se puede representar por su función característica

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & para \quad x \in \{3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ 0 & otro \quad caso \end{cases}$$

2.1.3 Operaciones básicas entre conjuntos.

Dados dos conjuntos cualesquiera, **A** y **B** incluidos en ***E***, es posible definir un conjunto de operaciones básicas entre ellos:

Complemento: El complemento de **A** se denota por $\overline{A}$, y está formado por todos los elementos de ***E*** que no pertenecen a **A** (operador unario):

$$x \in \overline{A} \text{ si } x \notin A$$

Su función característica será:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Intersección: **S**e define por el conjunto formado por aquellos elementos de ***E*** que pertenecen a **A** y a **B** simultáneamente. Se denota $A \cap B$:

$$x \in A \cap B \text{ si } x \in A \text{ y } x \in B$$

La función característica correspondiente es:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$$

Unión: Es el conjunto formado, por aquellos elementos que pertenecen a **A**, o pertenecen a **B**, o bien ambos simultáneamente. Se denota por $A \cup B$ y su función característica es:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$$

2.1.3.1 Propiedades de las operaciones básicas de los conjuntos clásicos:

Las operaciones entre conjuntos clásicos presentan ciertas leyes y propiedades:

1. Propiedad conmutativa:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

2. Propiedad asociativa :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3. Leyes de idempotencia:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

4. Leyes de Absorción:

$$(A \cup B) \cap A = A$$
$$(A \cap B) \cup A = A$$

5. Propiedad distributiva:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

6. Propiedades de absorción por E y ϕ:

$$A \cup E = E$$
$$A \cap \phi = \phi$$

7. Propiedades de identidad:

$$A \cup \phi = A$$
$$A \cap E = A$$

8. Involución del complemento:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

9. Leyes de Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

10. Leyes complementarias:

$$A \cup \overline{A} = E$$
$$A \cap \overline{A} = \phi$$

2.2 Extensión a conjuntos borrosos:

Se ha visto, cómo la mayoría de las veces los conjuntos clásicos se definen mediante un predicado, que da lugar a una clara bipartición del universo de discurso *E*. Sin embargo, el razonamiento humano utiliza frecuentemente predicados, de los cuales no resulta esa bipartición; son los denominados predicados vagos.

Siguiendo con el universo de discurso anterior, el formado por todos los ríos del mundo, podemos definir en él el conjunto **B**, como aquél formado por los ríos "largos".

Por supuesto, es imposible dar a **B** una definición clásica, ya que su correspondiente predicado no divide el universo ***E*** en dos partes claramente diferenciadas. No resulta nada fácil afirmar, que un río es "largo" o no lo es. El problema podría resolverse en parte considerando que un río es "largo" cuando su longitud supera cierto umbral fijado de antemano. Decimos que el problema tan sólo se resuelve en parte, y de manera no muy convincente, por dos motivos: de una parte el umbral mencionado se establece de una manera arbitraria, y por otro lado podría darse el caso de que dos ríos de longitudes muy diferentes fuesen considerados ambos como "largos". Evidentemente, el concepto "largo" así definido nos daría una información muy pobre sobre la longitud del río en cuestión.

La manera más apropiada de dar solución a este problema es considerar que la pertenencia o no pertenencia de un elemento *x* al conjunto **B** no es absoluta sino gradual En definitiva, definiremos **B** como un conjunto borroso. Su función característica (ahora "de asociación") ya no adoptará valores en el conjunto discreto $\{0,1\}$, sino en el intervalo cerrado $[0,1]$.

Mediante notación matemática se define un conjunto borroso **A** como:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in E, \mu_A(x) \in [0,1]\}$$

2.2.1 Función de Asociación:

En lugar de la función característica, usada para asociar un elemento del universo en estudio a un conjunto "clásico", se reemplaza por una función de asociación que se define

$$\mu_A : E \rightarrow [0,1]$$

De tal modo que $\mu_A(x) \in [0,1]$ es el grado con el que un elemento $x \in E$ (siendo ***E*** el universo de discurso) pertenece al conjunto borroso **A**.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad x \quad \in \quad A \\ . \\ \frac{1}{2} \quad si \quad x \quad más \quad ó \quad menos \quad pertenece \quad A \\ . \\ 0 \quad si \quad x \quad \notin \quad A \end{cases}$$

La forma de la función de asociación tiene un cierto componente subjetivo, frente a la forma rígida (objetiva) de las funciones características de la lógica clásica. En función de la aplicación de los conjuntos o de los conceptos representados por ellos, estas funciones pueden adquirir diversas formas y muchas veces pueden ser elegidas con un amplio grado de libertad por parte del "diseñador", lo que en la práctica puede traducirse como la posibilidad de incluir cierto conocimiento experto.

A pesar de que las funciones podrían tener cualquier forma, en la literatura se tiende a trabajar con funciones de asociación estándares:

1. ***Funciones Gaussianas o con forma de S:*** Usan la formula

$$\mu(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(x-m)^2}{2d^2} \right)$$

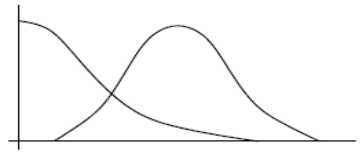

Figura 1. Funciones de asociación Gaussiana

2. ***Funciones triangulares o trapezoidales:*** Se definen en función de los vértices de las funciones; Δ (a, b, c). Para las triangulares y T (a, b, c, d) para las trapezoidales. Son sencillas de manejar en algoritmos numéricos.

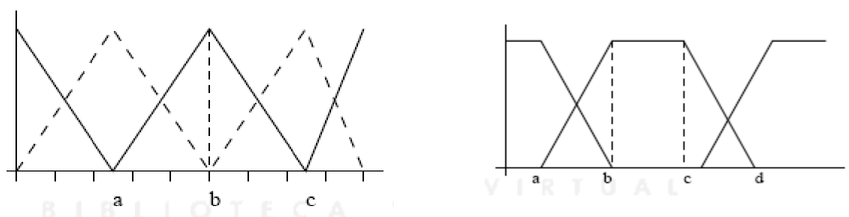

Figura 2. Funciones de asociación Triangulares y Trapezoidales

Zeng y Singh (1995), definen un modelo de función de asociación que agrupa a las principales clases, entre ellas la función pseudo – trapezoidal.

3. ***Función pseudo – trapezoidal:*** La función ***PTS*** (del inglés pseudo trapezoide - shaped) es una función continua dada por:

$$A(x;a,b,c,d,h)=\begin{cases} I(x) & x\in[a,b) \\ h & x\in[b,c] \\ D(x) & x\in(c,d] \\ 0 & x\in U-[a,d]=\{x|x\in U,\, x\notin[a,d]\} \end{cases}$$

donde $a\leq b\leq c\leq d, a<d, I(x)\geq 0$ es una función monótona estrictamente creciente en $[a,b)$ y $D(x)\geq 0$ es una función monótona estrictamente decreciente en $(c,d]$. Cuando la

función de asociación de un conjunto borroso **A** es una función PTS, se llama función de asociación PTS y se denota por $A(x) = A(x; a, b, c, d, h)$. Cuando el conjunto borroso es normal (es decir, h = 1), su función de asociación se denota simplemente por $A(x) = A(x; a, b, c, d)$.

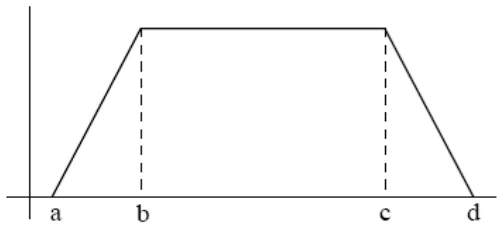

Figura 3. Función pseudo – trapezoidal (PTS)

De acuerdo con la definición, las funciones trapezoidales son un caso especial de funciones PTS cuando b < c y

$$I(x) = \frac{x-a}{b-a}, D(x) = \frac{x-d}{c-d}$$

y las funciones triangulares es el caso especial cuando b = c y

$$I(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-a}{c-a}, D(x) = \frac{x-d}{c-d} = \frac{x-d}{b-d}$$

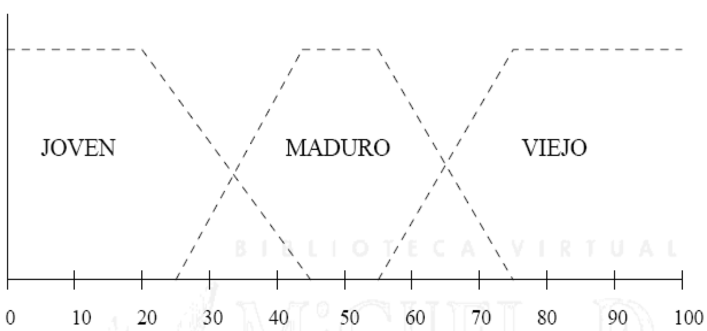

Figura 4. Ejemplo de conjuntos borrosos

Como ejemplo, en la figura 4 se muestran algunos conjuntos borrosos definidos en el universo de discurso Edad. El conjunto borroso “Joven” representa el grado de asociación respecto al parámetro juventud que tendrían los individuos de cada edad. Dicho de otra manera, el conjunto expresa la posibilidad de que un individuo sea caracterizado como “Joven”. Un conjunto borroso podría ser considerado una distribución de posibilidad, que es diferente a una distribución de probabilidad.

Puede verse que los conjuntos borrosos de la figura 4 se superponen, entonces un individuo *x*, podría tener un grado de asociación en dos conjuntos: “Joven” y “Maduro”, indicando que posee cualidades asociadas con ambos conjuntos.

Por razones prácticas, muchas veces se asume que el universo de discurso E es finito, esto es $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, y el par $\{\mu_A(x), x\}$ se denota por $\mu_A(x)/x$, y cada par $\mu_A(x)/x$ se denomina individualidad borrosa (fuzzy Singleton). El conjunto borroso **A** se puede reescribir como:

$$A = \{\mu_A(x), x\} = \{\mu_A(x)/x\} = \mu_A(x_1)/x_1 + ... + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

donde + y Σ deben entenderse desde el sentido de la teoría de conjuntos. Por convenio, los pares $\mu_A(x)/x$ con $\mu_A(x) = 0$ se omiten.

Según Azorin (1979), la elección del tipo de función de asociación a utilizar puede fundamentarse en alguno de los siguientes criterios:

a. ***Criterio individual:*** Los grados de asociación de los distintos elementos del conjunto borroso en cuestión son establecidos de forma subjetiva por el investigador.

b. ***Criterios colectivos:*** Consiste en tomar una muestra de opiniones sobre el valor p(x) correspondiente a cada elemento *x*, y hallar un promedio teniendo en cuenta el peso relativo de cada opinante.

c. Procedimientos experimentales: Supone posible el obtener físicamente el valor p(x). Es el caso de las mezclas.

d. ***Procedimiento analítico:*** Exige la utilización de modelos que permitan explicitar la función p(x).

2.2.2 Definiciones Básicas sobre conjuntos borrosos:

A continuación se presentan una serie de definiciones básicas de utilidad en el manejo de los conjuntos borrosos.

Según Zimmermann (1976).El conjunto borroso definido en la forma que lo hemos hecho presenta una serie de propiedades y características que se exponen a continuación:

1. Soporte del conjunto borroso: Se*a* ***U*** el universo de discurso. El soporte de un conjunto borroso **A** definido en **U** es el conjunto no borroso

$$S_A = \{x \in U : \mu_A(x) > 0\} \text{ y } \phi \subseteq S_A \subseteq U$$

2. Condición de normalidad: Si el valor supremo de la función de asociación para los elementos del conjunto borroso **A** es igual a la unidad, podemos afirmar que ***A*** es normal. Es decir:

$$\max_{x \in U} \mu_A(x) = 1$$

Todo conjunto borroso puede ser normalizado dividiendo cada $\mu_A(x)$ por $\max_{x \in U} \mu_A(x)$.

3. Condición de igualdad: Dos conjuntos borrosos ***A*** y **B** definidos sobre el mismo universo de discurso U son iguales y se escribe **A** = **B** si y sólo sí

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in U$$

4. Conjunto Vacío: Se dice que un conjunto borroso **A** es vacío, y se escribe $A = \phi$ si y sólo sí

$$\mu_A(x) = 0, \forall x \in U$$

5. Contención: Dados dos conjuntos borrosos A y B, con funciones de asociación dadas por $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$, respectivamente, se dice que A está contenido en B, o de forma equivalente, que A es un subconjunto de B o que A es menor que B, si y solo si,

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in U$$

Zeng y Singh (1995), introducen nuevas definiciones que conducen al concepto de orden entre conjuntos borrosos.

Sea el espacio de entrada $U \subset R$ el universo de discurso; los conjuntos A_i definidos sobre U $(i = 1,2,...,N)$ son conjuntos borrosos y $A_i(x)(i = 1,2,....,N)$ son las funciones de asociación borrosas correspondientes.

6. Partición Completa: Se dice que los conjuntos borrosos $A_1, A_2,...., A_N$ son una partición completa de **U** si $\forall x \in U$ existe al menos un $A_i(i = 1 \leq i \leq N)$ tal que $A_i(x) > 0$. Por simplicidad, se dice que los conjuntos $A_1, A_2,...., A_N$ son completos si forma una partición completa.

7. Consistencia: Se dice que los conjuntos borrosos $A_1, A_2,...., A_N$ son consistentes si se verifica que si $A_i(x_0) = 1$ para algún $x_0 \in U$, entonces $\forall j \neq i, A_j(x_0) = 0$

8. Subconjunto normal de un conjunto borroso normal: Se define el subconjunto normal de un conjunto borroso normal **A** como

$$M(A) = \{x | x \in U \text{ y } A(x) = 1\}$$

que es un subconjunto de S_A (el soporte del conjunto borroso **A**). Si el conjunto borroso normal **A** tiene función de asociación PTS, entonces $M(A) = [b, c]$.

9. *Orden entre conjuntos borrosos Normales:* Para dos conjuntos borrosos normales **A** y $B \subset U$, se dice que A > B si $M(A) > M(B)$, definiéndose esta desigualdad como $\max_x M(A) > \max_x M(B)$

Proposición 1: Si A_i son conjuntos borrosos normales en $U \subset R$ son funciones de asociación PTS $A_i(x) = A_i(x; a_i, b_i, c_i, d_i)$ $(1 \leq i \leq N)$, existe una reordenación $\{i_1, i_2, ..., i_N\}$ de $\{1 \leq i \leq N\}$ tal que $A_{i1} < A_{i2} < .... < A_{iN}$.

2.2.3 Operaciones entre conjuntos borrosos:

Las tres operaciones básicas definidas sobre los conjuntos clásicos (complemento, intersección y unión) pueden ser generalizadas a los conjuntos borrosos de diversas formas, Zadeh (1965,1977), Balza (1984). Dentro de la teoría de los conjuntos borrosos tiene especial relevancia la que hace uso de operaciones conocidas como operaciones estándar, definidas como:

Intersección: $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Unión: $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Complemento: $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

No obstante, al contrario pasa con los conjuntos clásicos, ésta no es la única forma posible de definir estas operaciones; diferentes funciones pueden ser apropiadas para representarlas en diferentes contextos. Por lo tanto, no sólo las funciones de asociación de los conjuntos borrosos van a ser dependientes del contexto sino también de las operaciones sobre dichos conjuntos. La figura 5 que se presenta a continuación, es un ejemplo gráfico de la unión, intersección y complemento de dos funciones de asociación, una trapezoidal representando al conjunto borroso **A** y una triangular, representando al conjunto borroso **B**, tal cual fueron definidas en la figura 2 anterior, las cuales se explican por sí solas.

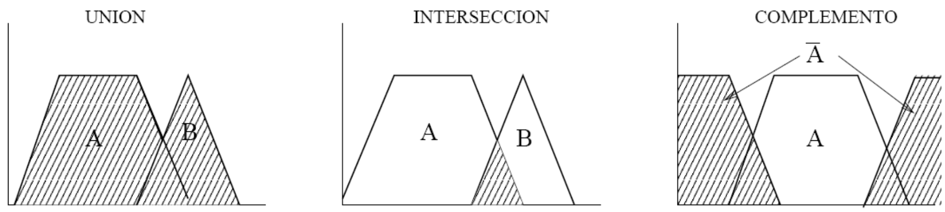

Figura 5. Operaciones básicas entre conjuntos borrosos. Definición estándar

a) ***Complemento Borroso***

Dado un conjunto borroso $A \subset U$, se define su complemento como el conjunto borroso $\overline{A}$ cuya función de asociación viene dada por la expresión

$$\mu_{\overline{A}}(x) = C(\mu_A(x)), \forall x \in U$$

donde C(x) es una función que debe cumplir las siguientes propiedades:

1. Condiciones de contorno: C(0) = 1, C(1) = 0.
2. Monotonía: para todo a, b $\in [0,1]$, si $a \leq b$, entonces $C(a) \geq C(b)$

   La función C(x) es conocida por algunos autores como *c – norma*.

En la mayoría de los casos, es deseable considerar algunos requerimientos adicionales para estas funciones:

3. C(x) es una función continua.
4. C(x) es involutiva, lo que significa que C(C(a)) = a, $\forall a \in [0,1]$

Existen muchas funciones que cumplen las propiedades antes descritas, y que por lo tanto pueden ser usadas para representar el complemento borroso. Alguna de ellas son:

$$C(x) = 1 - x \qquad \textit{Negación}$$

$$C(x) = \frac{1-x}{1-\lambda x} \quad \lambda \in (0, \infty) \qquad \textit{Sugeno}$$

$$C(x) = \left(1 - x^{\omega}\right)^{1/\omega} \quad \omega \in (0, \infty) \qquad \textit{Yager}$$

b) *Intersección borrosa: t – norma*

Dados dos conjuntos borrosos A y B, definidos sobre un mismo universo de discurso U, se define su intersección como un conjunto borroso $A \cap B$ cuya función de asociación viene dada por la expresión

$$\mu_{A \cap B}(x) = T\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right] \forall x \in U$$

donde la función T (x, y) es una norma triangular o *t – norma* . Una t – norma es una aplicación $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ se verifican las siguientes propiedades:

1. Conmutativa: T (x, y) = T (y, x), $\forall x, y \in [0,1]$
2. Asociativa: T(T (x, y), z) = T(x, T (y, z)), $\forall x, y, z \in [0,1]$.
3. Monotonía: si $(x \leq y)$ y $(w \leq z)$ entonces $T(x, w) \leq T(y, z), \forall x, y, w, z \in [0,1]$.
4. Elemento Absorbente: $T(x, 0) = 0, \forall x \in [0,1]$.
5. Elemento Neutro: $T(x, 1) = x, \forall x \in [0,1]$.

Existen muchas funciones que cumplen estas propiedades y que por lo tanto pueden ser utilizadas para representar la intersección entre conjuntos borrosos. Algunas de ellas son las siguientes:

$T(x, y) = \min(x, y)$	Mínimo
$T(x, y) = \max(0, x + y - 1)$	Diferencia acotada
$T(x, y) = x * y$	Producto algebraico
$T(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & si \;\; \max(x, y) = 1 \\ 0 & en \; cualquier \; otro \; caso \end{cases}$	Producto drástico

En ocasiones es necesario restringir las posibles t – normas considerando tres requerimientos adicionales:

1. Continuidad: T(x) es una función continua.
2. Subidempotenciag: T(*x*, *x*) < *x*.
3. Monotonia estricta: $a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2$ implica $T(a_1, b_1) < T(a_2, b_2)$

El axioma de continuidad propone una situación en la que un pequeño cambio en el grado de asociación de los conjuntos **A** ó **B** produzcan un cambio grande (discontinuo) en el grado de asociación de $A \cap B$. La subidempotencia se tiene en cuenta cuando los grados de asociación de **A** y **B** para alguna *x* tienen el mismo valor. Este axioma expresa el requerimiento de que el grado de asociación de $A \cap B$ en este caso no exceda este valor. El tercer requerimiento es una condición más fuerte de monotonía.

La intersección de dos conjuntos borrosos expresada como, $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$ donde ^ representa el operador mínimo (intersección borrosa estándar).

c) ***Unión borrosa: t – conorma***

Dado dos conjuntos borroso A y B definidos sobre el mismo universo de discurso U, se define su unión como un conjunto borroso $A \cup B$ cuya función de asociación viene dada por la expresión:

$$\mu_{A \cup B}(x) = S[\mu_A, \mu_B] \quad \forall x \in U$$

donde la función *S(x, y)* es una conorma triangular, también llamada t- conorma o s – norma. Es una aplicación $S:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ que satisface los siguientes requisitos:

1. Conmutativa: *S (x, y) = S (y, x),* $\forall x, y \in [0,1]$
2. Asociativa: *S(x, S (y, z)) = S(S (x, y), z),* $\forall x, y, z \in [0,1]$.
3. Monotonía: si $(x \leq y)$ y $(w \leq z)$ entonces $S(x,w) \leq S(y,z), \forall x, y, w, z \in [0,1]$.
4. Elemento Absorbente: $S(x,1) = 1, \forall x \in [0,1]$.
5. Elemento Neutro: $S(x,0) = x, \forall x \in [0,1]$.

Al igual que en los casos anteriores, existe un gran número de funciones que cumplen estas propiedades y que pueden ser utilizadas para representar la unión. Algunos ejemplos son:

$S(x,y) = \max(x,y)$	Máximo
$S(x,y) = \min(1, x+y)$	Suma acotada
$S(x,y) = x + y - x \cdot y$	Suma algebraica
$S(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & si \quad mim(x,y) = 0 \\ 1 & en \ cualquier \ otro \ caso \end{cases}$	Suma drástica

En ocasiones es necesario restringir las posibles t – conormas considerando tres requerimientos adicionales, que tengan en cuenta casos especiales, tal y como se hizo para la t - norma:

1. Continuidad: S(x) es una función continua.
2. Subidempotencia: S(*x*, *x*) > *x*.
3. Monotonia estricta: $a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2$ implica $S(a_1, b_1) < S(a_2, b_2)$

Es corriente encontrar en la bibliografía la unión de dos conjuntos borrosos expresada como

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

donde $\vee$ representa al operador máximo (unión borrosa estándar).

2.2.4 Propiedades de los conjuntos borrosos

Las leyes y las propiedades que, según se ha visto, cumplen los conjuntos clásicos no siempre se cumplen en el caso de los conjuntos borrosos. **A** continuación se exponen según Kaufmann et. al (1994), qué leyes verifican los conjuntos borrosos y cuáles no:

1. Propiedad Conmutativa: siempre se verifica, debido que las t – normas y las t – conormas son conmutativas por definición.
2. Propiedad Asociativa: se verifica puesto que las t – normas y las t – conormas son asociativas.
3. Leyes de idempotencia: se cumplen si se elige el mínimo y máximo como operadores para la intersección y la unión respectivamente. Pero si se escoge por ejemplo el producto algebraico y la suma algebraica, no se cumplen.
4. Leyes de absorción: también se cumplen si se elige el par mínimo – máximo. Con otras normas no ocurre necesariamente lo mismo.

5. Propiedad distributiva: también se cumple para el mínimo y máximo, pero no necesariamente para otras normas.
6. Propiedades de absorción e identidad: siempre se cumplen debido a la última propiedad de las t – normas y t- conormas.
7. Involución del complemento: es cierta si se define $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, es decir:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) = 1 - (1 - \mu_{\overline{A}}(x) = \mu_{\overline{A}}(x)$$

8. Leyes De Morgan: se garantiza su cumplimiento si la t – norma y la s – norma elegidas se derivan la una de la otra. Es decir: $T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y)$.
9. Leyes complementarias: en general no se cumplen. Es quizás la consecuencia más clara de introducir el concepto de borrosidad en los conjuntos.

Se puede comprobar fácilmente que en el caso de que los conjuntos sean clásicos (función de asociación restringida a 0 ó 1) las diferencias entre las diversas normas desaparecen, convirtiéndose en los operadores de intersección y unión clásicos.

Puede parecer un inconveniente el hecho de que exista arbitrariedad a la hora de elegir los operadores de unión e intersección, pero esto es una ventaja, ya que nos permite una gran flexibilidad a la hora de abordar distintos problemas que involucren conceptos vagos. Si se precisa mantener ciertas propiedades de los conjuntos clásico, deben elegirse una t – norma y una t – conorma que lo permitan. Está elección dará lugar a un tipo u otro de lógica borrosa.

2.3 Principio de extensión

Este principio proporciona un mecanismo para calcular los conjuntos borrosos obtenidos por medio de una transformación concreta (no borrosa) de cierto número (N) de conjuntos borrosos. Específicamente, si $X_1, X_2, ..., X_N$ son conjuntos borrosos con funciones de asociación $\mu_1(X_1), \mu_2(X_2), ..., \mu_N(X_N)$, el nuevo conjunto borroso $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ tendrá como función de asociación:

$$\mu(y) = \max_{y=f^{(-1)}(x)} \left[\min_{i=1}^{N} \right] \mu_i(x_i)$$

2.4 α – cortes

Existe una manera directa de pasar de conjuntos borrosos a conjuntos clásicos mediante los llamados α – cortes. Dado un número $\alpha \in [0,1]$ y un conjunto borroso **A**, definimos el α – corte de **A** como el conjunto A_α, cuya función característica se define:

$$\varphi A_\alpha(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \quad \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 \ \ en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

En definitiva, el α – corte se compone de aquellos elementos cuyo grado de asociación supera o iguala el umbral α.

Se habla de α – cortes estrictos si:

$$\varphi A_\alpha(x) = \begin{cases} 1 \quad si\ \mu_A(x) > \alpha \\ 0 \quad en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Cualquier conjunto borroso **A** se puede representar mediante la unión de sus α – cortes de la siguiente manera:

$$\mu_A(x) = \max_{\alpha \in [0,1]} \left[\alpha \cdot \varphi A_\alpha(x) \right]$$

Los cortes son de especial utilidad en el estudio de propiedades tales como la reflexividad, simetría y transitividad en conjuntos borrosos.

2.5 Números borrosos:

Un caso particular y de especial interés de los conjuntos borrosos son los llamados números borrosos. Surgen éstos como un intento de introducir vaguedad en los números reales.

Un conjunto difuso **A** definido en la recta real **R** se llama un número difuso si **A** cumple las siguientes propiedades:

1. Es normal, o lo que es lo mismo, existe al menos un elemento *x* de ***R*** tal que $\mu_A(x) = 1$.
2. Es convexo, lo cual quiere decir que

$$\forall \delta \in [0,1] \quad \forall x, y \in R$$

$$\mu_A(\delta x + (1-\delta) y) \geq \min\left(\mu_A(x), \mu_A(y)\right)$$

Geométricamente esta propiedad quiere decir que todos los α – cortes de **A** son intervalos cerrados en ***R***. La función de asociación es creciente hasta llegar al punto en que $\mu_A(x) = 1$ y decreciente a partir de él.

3. gLa función de asociación es continua en intervalos.
4. El soporte de **A** es acotado.

La enorme importancia de los números borrosos, estriba en que son muchos los ejemplos prácticos, en los que el grado de asociación de un determinado elemento del universo $U \subset R$ se puede expresar como función de una característica mensurable del mismo.

Como ejemplo visual, se presenta unas posibles definiciones gráficas de los números borrosos que expresan los predicados “aproximadamente 4” y “aproximadamente 6”. De un modo arbitrario se han escogido funciones de tipo gaussiano y triangular, respectivamente, tal y como se muestran en la figura 5.

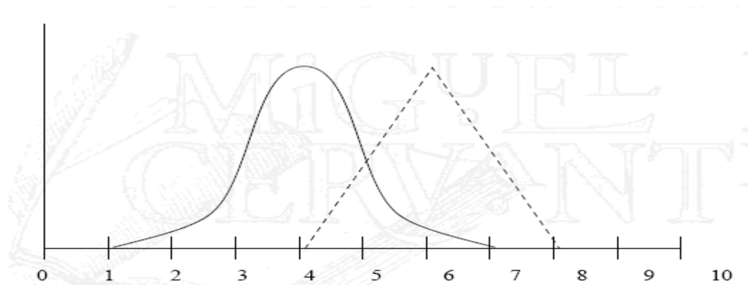

Figura 6. Números borrosos “aproximadamente 4” y “aproximadamente 6”.

2.6 Subconjunto Aleatorio Borroso:

Este instrumento ha sido desarrollado, entre otros, por Hirota (1984) y Kaufmann y Gil (1990). Si un subconjunto borroso $\tilde{A}$ definido en un conjunto referencial X viene dado por su función de asociación $\mu_{\tilde{A}}(x)$, que indica el grado de asociación de x a $\tilde{A}$, $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$ y dicha asociación es un valor cierto; en contraposición, en un subconjunto aleatorio borroso, que notaremos como $\dot{\tilde{A}}$, el nivel de asociación de un valor x vendrá dado por una distribución de probabilidad. Así, la asociación de un valor x a $\dot{\tilde{A}}, \mu_{\dot{\tilde{A}}}(x)$, será aleatoria, y vendrá dada por $f(\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x) = \alpha)$, siendo $f(\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x) = \alpha)$ una probabilidad si $\mu_{\dot{\tilde{A}}}(x)$ es una variable aleatoria discreta y una función de densidad, si el nivel de asociación de x es una variable aleatoria continua.

De esta forma, los operadores básicos para subconjuntos borrosos como el mínimo y el máximo, correspondientes a la intersección y unión de conjuntos- se ven afectados por las leyes de la probabilidad, ya que el nivel de asociación de un valor x a un subconjunto aleatorio borroso viene dado por una ley de probabilidad. Es decir, si se opera con subconjuntos aleatorios borrosos no se puede hallar, lógicamente, el nivel de asociación de un elemento x al conjunto unión, intersección o al conjunto complementario, sino de la probabilidad de que su nivel de asociación al conjunto unión, intersección y complemento tome un determinado valor.

De esta forma, sea x $\in$ X, y dos subconjuntos borrosos aleatorios $\dot{\tilde{A}}$ y $\dot{\tilde{B}}$, para los cuales el nivel de asociación x viene dado por $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_1$ y $\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_2$, que son variables aleatorias. Para el operador mínimo, si se denota como p una medida de probabilidad, se obtiene:

$$\mathrm{p}(\mu_1 \wedge \mu_2 = \alpha) = \mathrm{p}(\mu_1 = \alpha)\,\mathrm{p}(\mu_2 > \alpha) + \mathrm{p}(\mu_2 = \alpha)\,\mathrm{p}(\mu_1 > \alpha) + \mathrm{p}(\mu_1 = \alpha)\,\mathrm{p}(\mu_2 = \alpha)$$

Por otra parte, para el operador máximo, los resultados son:

$$\mathrm{p}(\mu_1 \vee \mu_2 = \alpha) = \mathrm{p}(\mu_1 = \alpha)\,\mathrm{p}(\mu_2 < \alpha) + \mathrm{p}(\mu_2 = \alpha)\,\mathrm{p}(\mu_1 < \alpha) + \mathrm{p}(\mu_1 = \alpha)\,\mathrm{p}(\mu_2 = \alpha)$$

y para el complementario se obtiene:

$$p(\mu_{\tilde{A}^c}(x) = \alpha) = p(\mu_1 = 1 - \alpha)$$

Si $\mu_{\tilde{A}}(x)$ y $\mu_{\tilde{B}}(x)$ son variables aleatorias continuas, donde se denota como $f_1(\mu)$ a la función de densidad de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ y $f_2(\mu)$ a la función de densidad de $\mu_{\tilde{B}}(x)$, entonces, las funciones de densidad del nivel de presunción resultante de realizar las operaciones mínimo, máximo y complementación son:

$$f(\mu_1 \wedge \mu_2 = \alpha) = f_1(\alpha)\int_{\alpha}^{1} f_2(\mu)d\mu + f_2\int_{\alpha}^{1} f_1(\mu)d\mu$$

$$f(\mu_1 \vee \mu_2 = \alpha) = f_1(\alpha)\int_{0}^{\alpha} f_2(\mu)d\mu + f_2\int_{0}^{\alpha} f_1(\mu)d\mu$$

$$f(\mu_{\tilde{A}^C}(x) = \alpha) = f_1(1 - \alpha)$$

Asimismo, se pueden definir estas operaciones, de forma que se simplifique la notación, a través de las funciones de distribución complementarias de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ y $\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_2$, las cuales se denotan respectivamente como $F_1(\alpha)$ y $F_2(\alpha)$. Para $\mu_{\tilde{A}}(x)$, si ésta es una variable aleatoria discreta, se obtiene $F_1(\alpha)$ como:

$$F_1(\alpha) = \sum_{\forall \mu \geq \alpha} p(\mu)$$

Y si $\mu_{\tilde{A}}(x)$ es una variable aleatoria continúa:

$$F_1(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} f_1(\mu) d\mu$$

De esta forma, se pueden hallar las funciones de distribución complementarias de $\mu_1 \wedge \mu_2, \mu_1 \vee \mu_2$ y la de $\mu_{\tilde{A}^c}(x)$ como:

$$\begin{aligned}
&F(\mu_1 \wedge \mu_2 = \alpha) = F_1(\alpha) F_2(\alpha) \\
&F(\mu_1 \vee \mu_2 = \alpha) = F_1(\alpha) + F_2(\alpha) - F_1(\alpha) \cdot F_2(\alpha) \\
&F(\mu_{\tilde{A}^C}(x) = \alpha) = 1 - F_1(1-\alpha)
\end{aligned}$$

Por otra parte, para el subconjunto borroso $\tilde{\tilde{A}}$, se puede hallar su valor esperado, $E\left[\tilde{\tilde{A}}\right]$, que será un subconjunto borroso ordinario, ya que $\forall$ x su nivel de asociación en $\tilde{\tilde{A}}$ queda reducido a un valor cierto. De esta forma:

$$\mu_{E\left[\tilde{\tilde{A}}\right]}(x) = \int_{0}^{1} \mu f_1(\mu) d\mu$$

Para finalizar, se esboza el concepto de número aleatorio borroso. Para ello se parte, de que para un subconjunto aleatorio borroso $\tilde{\tilde{A}}$, se puede generar un subconjunto borroso ordinario para cada uno de los niveles de $\alpha \in [0,1]$, pudiendo estos ser denotados como $\tilde{A}^{(\alpha)}$. Para dicho subconjunto se define su función de asociación como:

$$\mu_{\tilde{A}^{(\alpha)}}(x) = F(\alpha)$$

donde se denota como $F(\alpha)$ al valor de la función de distribución complementaria de $\mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x)$ en α.

De esta forma, se dice que $\tilde{\tilde{A}}$ será un número aleatorio borroso si $\tilde{A}^{(\alpha)}$ $\forall \alpha$ es un número borroso, es decir, si:

a) El conjunto referencial de $\tilde{\tilde{A}}$ son los reales.

b) $\forall \alpha$, $\tilde{A}^{(\alpha)}$ es normal y convexo. Así:

b.1) $\sup_{\forall x \in X} \mu_{\tilde{A}^{(\alpha)}}(x) = 1 \forall \alpha \in [0,1]$

b.2) $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1], \forall \alpha \in [0,1] \mu_{\tilde{A}^{(\alpha)}}[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \mu_{\tilde{A}^{(\alpha)}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}^{(\alpha)}}(x_{2.})$

2.7 Probabilidad de eventos borrosos:

Para definir el concepto de probabilidad de un evento borroso, se empieza enunciando para un conjunto probabilizable Ω, donde Ω es el conjunto de sucesos elementales, el concepto de probabilidad, que es una aplicación tal que:

$$p : \Omega \rightarrow R^+$$
$$A \subset \Omega \rightarrow p(A)$$

donde A es un conjunto clásico de Ω, o un evento ordinario.

Los axiomas que rigen a la probabilidad, suponiéndose, en cualquier caso, que los conjuntos que se definen sobre Ω son booleanos, son:

1) $p(A) \geq 0$

2) $\forall A \in \Omega$ y $\forall B \in \Omega$ y $A \cap B = \varnothing$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

3) $p(\Omega) = 1$

A partir de estos axiomas, se deducen fácilmente las siguientes propiedades:

4) p(Ø)=0

5) $p(A^c) = 1 - p(A)$

6) $p(A) + p(B) = p(A \cap B) + p(A \cup B)$

7) Si $B \subset A \Rightarrow p(B) \leq p(A)$

Zadeh (1968), denomina como evento borroso a un subconjunto borroso $\tilde{A}$ definido sobre el conjunto de sucesos elementales Ω. Por supuesto, para $\tilde{A}$ la asociación de un elemento $\omega \in \Omega$ tiene asignado un nivel de verdad que vendrá dado por su función asociación, $\mu_{\tilde{A}}(\omega)$. Zadeh propone hallar la probabilidad de un evento borroso, $p(\tilde{A})$, como:

$$p(\tilde{A}) = \sum_{\Omega} \mu_{\tilde{A}}(\omega) p(\omega)$$

Si el conjunto referencial, sobre el que se define la distribución de probabilidad fueran los números reales, es decir $\Omega \subset$ R y si para éste se denota como un suceso elemental al número real, la probabilidad del evento borroso $\tilde{A}$ será, en general:

$$p(\tilde{A}) = \int_{\Omega} \mu_{\tilde{A}}(x) dF(x)$$

donde F(x) es la función de probabilidad acumulada. Si el conjunto Ω es discreto, y se denota como p(x) a la probabilidad de un elemento x, entonces:

$$p(\tilde{A}) = \sum_{\Omega} \mu_{\tilde{A}}(x) p(x)$$

y es continuo:

$$p(\tilde{A}) = \int_{\Omega} \mu_{\tilde{A}}(x) f(x) dx$$

La probabilidad definida para eventos borrosos cumple asimismo los axiomas de la probabilidad:

1) $p(\tilde{A}) \geq 0$

2) $\forall \tilde{A} \in \Omega$ y $\forall \tilde{B} \in \Omega$ y $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset$

   $p(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = p(\tilde{A}) + p(\tilde{B})$

3) $p(\Omega) = 1$

A partir de estos axiomas se deduce fácilmente:

4) p(Ø)=0

5) $p(\tilde{A}^c) = 1 - p(\tilde{A})$, donde $\mu_{\tilde{A}^c}(\omega) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(\omega)$

6) $p(\tilde{A}) + p(\tilde{B}) = p(\tilde{A} \cap \tilde{B}) + p(\tilde{A} \cup \tilde{B})$

7) Si $\tilde{B} \subset \tilde{A} \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(\omega) \geq \mu_{\tilde{B}}(\omega) \forall \omega$, se cumple que $p(\tilde{B}) \leq p(\tilde{A})$

2.8 Variables Aleatorias Borrosas:

2.8.1 Conceptos y definiciones

El concepto de variable aleatoria borrosa ha sido desarrollado, de forma dispersa en diferentes trabajos, siendo los más representativos Kwakernaak (1978), Nahmias (1978), Puri y Ralescu (1986) y Kruse y Meyer (1987). En ellos se analiza como trasponer y generalizar a las variables aleatorias para el caso de subconjuntos borrosos en R. Como la herramienta por excelencia para expresar cuantías borrosas, son los números borrosos, únicamente se analizará, el caso de que las variables aleatorias borrosas sean números borrosos.

Una variable aleatoria borrosa, se construye sobre el conjunto de sucesos elementales Ω, en los que se ha definido una ley de probabilidad:

$$\tilde{A}_\omega : \Omega \to F(R)$$
$$\omega \in \Omega \to \tilde{A}_\omega$$

donde F(R) es el conjunto de números borrosos y $\tilde{A}_\omega$ es el número borroso asociado al suceso elemental ω, y por tanto, puede venir representado por:

$$\tilde{A}_\omega = \{x, \mu_{\tilde{A}_\omega}(x)\} = \{A_{\omega} = [A^1_\omega(\alpha), A^2_\omega(\alpha)]\, 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

En este caso, únicamente se estudiaran, las variables aleatorias borrosas discretas, y que provienen de un espacio de sucesos elementales $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ..., \omega_n\}$. Así, para ω_i, el número borroso asociado a dicho suceso será denotado como $\tilde{A}_i$, donde:

$$\tilde{A}_i = \{x, \mu_{\tilde{A}_i}(x)\} = \{A_{i\alpha} = [A^1_i(\alpha), A^2_i(\alpha)]\, 0 \leq \alpha \leq 1, i = 1,2,...,n\}$$

A partir de los posibles eventos en que pueden concretarse cada uno de los sucesos, se puede definir dentro de $\tilde{X}$, variables aleatorias convencionales, X, cuyos eventos son $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y que deben llevar aparejadas consigo un nivel de presunción. Así, se puede hallar la función característica de una variable aleatoria borrosa $\tilde{X}$, $\mu_{\tilde{X}}(X)$, como:

$$\mu_{\tilde{X}}(X) = \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}_i}(x_i)$$

que indicará el grado de verdad, con que la variable aleatoria X reconstruye a la variable aleatoria borrosa $\tilde{X}$.

Normalmente, cuando se deba manipular subconjuntos borrosos suele ser difícil trabajar con funciones de asociación, y en cambio es mucho más fácil trabajar con conjuntos de nivel. De esta forma, se puede definir a $\tilde{X}$ a través de los conjuntos de nivel asociados a los α-cortes de $\tilde{A}_i$, i=1,2,...,n. Así, los α-cortes de $\tilde{X}$, X_α, son aquéllas variables aleatorias cuyos eventos son:

$$X_\alpha = \left\{x_i \in R \middle| \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \geq \alpha\right\}$$

Así, para X_α, se define como variable aleatoria inferior, $X^1(\alpha)$ aquélla que sus valores son los extremos inferiores de los α-cortes de $A_{i\alpha}$, i=1,2,...n., y como variable aleatoria superior, $X^2(\alpha)$ aquélla cuyos valores son sus extremos superiores. Así:

$$X^1(\alpha) = \inf\left\{x_i \in R \middle| \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \geq \alpha\right\} = A_i^1(\alpha), \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n.$$

$$X^2(\alpha) = \sup\left\{x_i \in R \middle| \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \geq \alpha\right\} = A_i^2(\alpha), \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n.$$

2.8.2 Esperanza, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria borrosa.

La primera definición que se ofrece para la esperanza matemática, y las medidas de dispersión, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria borrosa, es la propuesta en Kruse y Meyer (1987), y consiste en definirlas vía principio de extensión de Zadeh (1965). De esta forma, estas medidas vendrán dadas también por los subconjuntos borrosos que se denotan como $\tilde{\mathrm{E}}[\mathrm{X}]$, $\tilde{V}[\mathrm{X}]$ y $\tilde{D}[\mathrm{X}]$, cuyas funciones de asociación quedarán definidas a través de la de $\tilde{\mathrm{X}}$. Así, se obtiene la función de asociación de la esperanza matemática como:

$$\mu_{\tilde{\mathrm{E}}[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}) = \bigvee_{x=\mathrm{E}[\mathrm{X}]} \mu_{\tilde{\mathrm{X}}}(\mathrm{X})$$

varianza será:

$$\mu_{\tilde{V}[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}) = \bigvee_{x=V[\mathrm{X}]} \mu_{\tilde{\mathrm{X}}}(\mathrm{X})$$

y la desviación estándar:

$$\mu_{\tilde{D}[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}) = \bigvee_{x=D[\mathrm{X}]} \mu_{\tilde{\mathrm{X}}}(\mathrm{X}) = \mu_{\tilde{V}[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}^2)$$

Como $E[\mathrm{X}]$, $V[\mathrm{X}]$ y $D[\mathrm{X}]$ se denotan los operadores esperanza matemática, varianza y desviación estándar para una variable aleatoria ordinaria.

Por otra parte, para una variable aleatoria discreta X cuyos valores son: {x_1, x_2,...,x_n} las cuales presentan una probabilidad {p_1, p_2,...,p_n}, se puede entender que E[X], V[X] y D[X] son funciones de estos eventos y las probabilidades que éstos llevan asociadas. Así, su expresión es:

$$E[\mathrm{X}] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$V[\mathrm{X}] = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right)^2$$

$$D[\mathrm{X}] = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right)^2}$$

Por lo tanto, se entiende como variable aleatoria borrosa a una variable aleatoria cuya i-ésimo valor es un número borroso $\tilde{A}_i$, siendo su probabilidad asociada pi, i=1,2,...,n, la función de asociación de la esperanza, la varianza y la desviación estándar pueden ser halladas a través del principio de extensión de Zadeh realizando:

$$\mu_{\tilde{\mathrm{E}}[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}) = \bigvee_{x=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(\mathrm{X}_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(\mathrm{X}_2) \wedge \ldots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(\mathrm{X}_n) \right)$$

$$\mu_{\tilde{V}[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}) = \bigvee_{x=\sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right)^2} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(\mathrm{X}_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(\mathrm{X}_2) \wedge \ldots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(\mathrm{X}_n) \right)$$

$$\mu_{\tilde{D}[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}) = \bigvee_{x=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right)^2}} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(\mathrm{X}_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(\mathrm{X}_2) \wedge \ldots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(\mathrm{X}_n) \right) = \mu_{\tilde{V}[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}^2)$$

Es evidente, que en muchas ocasiones, no se podrá hallar la expresión analítica de la función de asociación de $\tilde{\mathrm{E}}[\mathrm{X}]$, $\tilde{V}[\mathrm{X}]$ y $\tilde{D}[\mathrm{X}]$, pero sí será posible, representar dichos momentos de una variable aleatoria borrosa a través de sus α-cortes. Así, los α-cortes de la esperanza matemática, $E[X]_\alpha$ vienen dados por:

$$E[\mathrm{X}]_\alpha = \left\{ x \middle| x = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i , x_i \in A_{i\alpha}, i = 1,2,\ldots,n \right\}$$

Y como la función esperanza matemática es monótona creciente respecto a ese valor, se obtiene que:

$$E[\mathrm{X}]_\alpha = \left[\mathrm{E}^1[\mathrm{X}](\alpha), \mathrm{E}^2[\mathrm{X}](\alpha)\right] = \left[\mathrm{E}\left[\mathrm{X}^1(\alpha)\right], \mathrm{E}\left[\mathrm{X}^2(\alpha)\right]\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i A_i^1(\alpha), \sum_{i=1}^{n} p_i A_i^2(\alpha)\right]$$

Ese valor coincide, con el que se obtiene para el valor medio de un haz de números borrosos.

Respecto a la varianza, sus α-cortes son:

$$V[X]_\alpha = \left\{ x \in R^+ | x = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i)^2, x_i \in A_{i_\alpha}, i = 1,2,\ldots,n \right\} = [\text{ Min x, Max x}]$$

Dado que no existe monotonía de V[X] respecto a los valores de x, para hallar los extremos de $V[X]\alpha$ se debe plantear el siguiente programa matemático:

Minimizar (Maximizar) $x = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right)^2$

$$A_i^1(\alpha) \le x_i \le A_i^2(\alpha) \quad \text{i= 1,….,n}$$

Siendo el máximo de x, el extremo superior de $V[X]\alpha$, y el mínimo de x, su extremo inferior. Si bien, estos programas matemáticos son relativamente sencillos de resolver, realizar dicha implementación para todo lo que se desee, puede ser complejo. Por ejemplo, Frühwirth-Schnatter (1992), propone una aproximación a la desviación estándar muestral, cuando ésta se compone de números borrosos, basada en la aritmética de los intervalos de confianza. Estos intervalos, permiten una aproximación a los α-cortes de la varianza que facilitan su determinación, aunque a costa de obtener un número borroso más incierto.

Se puede definir a una realización centrada de una variable aleatoria X, como: $c_i = x_i - E[X]$, siendo entonces la variable C, C=X- E[X], la variable aleatoria centrada que deriva de X.

De forma análoga, se define para el i-ésimo valor de $\tilde{X}$, $\tilde{A}_i$, por tanto, lo correspondiente a una variable aleatoria borrosa, a su valor centrado como $\tilde{C}_i = \tilde{A}_i - \tilde{E}[X]$, utilizándose en la construcción de los α-cortes de $\tilde{C}_i, C_{i\alpha}$ la aritmética de intervalos de confianza se tiene:

$$C_{i_\alpha} = \left[C_i^1(\alpha), C_i^2(\alpha)\right] = \left[A_i^1(\alpha) - E^2[X](\alpha), A_i^2(\alpha) - E^1[X](\alpha)\right]$$

A partir de los α-cortes de $\tilde{C}_i$, se halla $\left(\tilde{C}_i\right)^2$, que es un número borroso cuyos α-cortes son:

$$\left(C_{i_\alpha}\right)^2 = \left[\left[(C_i)^2\right]^-(\alpha), \left[(C_i)^2\right]^+(\alpha)\right]$$

donde:

$$\left[(C_i)^2\right]^-(\alpha) = \begin{cases} \left[C_i^1(\alpha)\right]^2 & si\ C_i^1(\alpha) \geq 0 \\ \left[C_i^2(\alpha)\right]^2 & si\ C_i^2(\alpha) \leq 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \quad y \quad \left[(C_i)^2\right]^+(\alpha) = \begin{cases} \left[C_i^2(\alpha)\right]^2 & si\ C_i^1(\alpha) + C_i^2(\alpha) \geq 0 \\ \left[C_i^1(\alpha)\right]^2 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

De esta forma, $V[X]_\alpha \approx \sum_{i=1}^{n} p_i \left(C_{i_\alpha}\right)^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \left[(C_i)^2\right]^-(\alpha), \sum_{i=1}^{n} p_i \left[(C_i)^2\right]^+(\alpha)\right]$

y así, como $D[X]_\alpha = \sqrt{V[X]_\alpha}$, entonces:

$$D[\mathrm{X}]_\alpha \approx \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i \left[(C_i)^2\right]^-(\alpha)}, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i \left[(C_i)^2\right]^+(\alpha)} \right]$$

El concepto de varianza y desviación estándar que se ha planteado anteriormente está basado en el concepto de distancia euclídea borrosa entre números borrosos (Dubois y Prade ,1980). Sin embargo, diversos autores como Feng *et al.* (2001), consideran que, aunque es razonable sostener que el valor esperado de una variable aleatoria borrosa es un número borroso, la varianza de una variable aleatoria borrosa no debe ser borrosa, ya que por la naturaleza del indicador varianza o desviación estándar éstos deben ser índices ciertos. Así, la idea subyacente de esta modelización de varianza, es la utilización del concepto de distancia ordinaria entre números borrosos, como instrumento en la aproximación de números borrosos. Basándose en el concepto de distancia euclídea ordinaria entre números borrosos, Feng *et al.* (2001), la definen como varianza ordinaria de una variable aleatoria borrosa, la cual se denota como $V^*[X]$ a:

$$\begin{aligned} V^*[\mathrm{X}] &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(V\left[\mathrm{X}^1(\alpha)\right] + V\left[\mathrm{X}^2(\alpha)\right]\right) d\alpha \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \left(A_i^1(\alpha) - \sum_{i=1}^{n} p_i A_i^1(\alpha) \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i \left(A_i^2(\alpha) - \sum_{i=1}^{n} p_i A_i^2(\alpha) \right)^2 \right\} d\alpha \end{aligned}$$

Siendo entonces la desviación estándar que se deriva del concepto de varianza de Feng, $D^*[X]$:

$$D^*[\mathrm{X}] = \sqrt{V^*[\mathrm{X}]} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^1 \left(V\left[\mathrm{X}^1(\alpha)\right] + V\left[\mathrm{X}^2(\alpha)\right]\right) d\alpha}$$

2.8.3 Función de distribución y cuantiles de una variable aleatoria borrosa.

Para una variable aleatoria discreta X, cuyos valores son $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y cuyas probabilidades asociadas son $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, la función de distribución de X, que se denota como F[x] es una función tal que:

$$F[x] = p[\mathrm{X} \le x] = \sum_{\forall i | x_i \le x} p_i$$

Una función de distribución F[x] debe cumplir las siguientes propiedades:

i) F[x] es no decreciente
ii) $F[x] \to 0$ si $x \to -\infty$ y $F[x] \to 1$ si $x \to 0$
iii) $p[X>x] = 1 - p[X \le x] = 1 - F[x]$

En el caso de variables aleatorias borrosas, la función de distribución será un subconjunto borroso $\tilde{F}[x]$, que indicará $p[\tilde{X} \le x]$. Su función de asociación se podrá hallar a través de la de $\tilde{X}$ planteando:

$$\mu_{\tilde{F}[x]}(Z) = \vee_{Z=F[x]=p(X \le x)} \mu_{\tilde{X}}(X)$$

Asimismo, también se puede hallar sus α-cortes, lo cual será normalmente más operativo. En este caso, se debe tener en cuenta que dos variables aleatorias X e Y discretas, cuyo campo de variación es, $\{x_i\}$i=1…n y $\{y_i\}$i=1…n respectivamente con $P[X = x_i] = P[Y=y_i] = p_i$, si $x_i \ge y_i \ \forall$ i, se cumple siempre que $P[X \le x] \le P[Y \le x]$. De esta forma, para X_α se definen los α- cortes de la función de distribución, $F[x]_\alpha$ a través de los α-cortes de la variable aleatoria inferior y superior para dicho nivel α. En concreto, el extremo inferior $F^1[X](\alpha)$, se construirá a través de $X^2(\alpha)$ y el superior $F^2[X](\alpha)$ a través de $X^1(\alpha)$:

$$F^2[x](\alpha) = p[X^1(\alpha) \le x] = \sum_{\forall i / A_i^1(\alpha) \le x} p_i \ y \quad F^1[x](\alpha) = p[X^2(\alpha) \le x] = \sum_{\forall i / A_i^2(\alpha) \le x} p_i$$

Así, $F[x]_\alpha$ no será, en variables aleatorias borrosas discretas, un intervalo de confianza, ya que su dominio es discreto. Sin embargo se puede afirmar que:

$$F[x]_\alpha \subseteq \left[F^1[x](\alpha), F^2[x](\alpha)\right]$$

cumpliéndose asimismo que $F[x]_\alpha \supseteq F[x]_{\alpha'}, \forall \quad \alpha \leq \alpha' \; ya \quad que \quad A_{i\alpha} \supseteq A_{i\alpha'}, i = 1,2,...,n.$

Por supuesto, también se puede hallar la función de asociación de $\tilde{F}[x]$ través de $F[x]\alpha$ como:

$$\mu_{\tilde{F}[x]}(z) = \left\{Max \quad \alpha \middle| z \in F[x]_\alpha\right\}, con \quad \alpha \in [0,1]$$

Para definir el concepto de cuantil en una variable aleatoria borrosa, se iniciará por concepto de cuantil para una variable aleatoria discreta. Se denomina ε-cuantil de una variable aleatoria X, al menor valor que acumula a su izquierda una probabilidad de ε, siendo dicho cuantil denotado como q^ε. En concreto, éste se halla:

$$q^\varepsilon = Min \quad x \middle| F[x] \geq \varepsilon \, o \quad Min\, x \quad \middle| p[X \leq x] \geq \varepsilon$$

Se considera, en una variable aleatoria borrosa, los cuantiles serán subconjuntos borrosos. A partir de la función de asociación $\tilde{X}$, se puede definir el ε-cuantil de $\tilde{X}$, $\tilde{Q}^\varepsilon$ como:

$$\mu_{\tilde{Q}^\varepsilon}(q) = \bigvee_{q = Min x \quad | F[x] \geq \varepsilon} \mu_{\tilde{X}}(X)$$

A pesar de que los α-cortes de la función de distribución, no vienen estrictamente dados mediante un intervalo de confianza, los α-cortes del 1-ε cuantil de $\tilde{Q}^\varepsilon$, Q_α^ε, si lo serán. De esta forma para hallar Q_α^ε se debe partir de $F[x]_\alpha$, obteniéndose:

$$Q_\alpha^\varepsilon = \left[Q^{1\varepsilon}(\alpha), Q^{2\varepsilon}(\alpha)\right]$$

donde:

$$Q_{\alpha}^{1\varepsilon} = Min\, x \quad \left| F^{2}[x](\alpha) \geq \varepsilon \right. \; y \quad Q^{2\varepsilon}(\alpha) = Min\, x \quad \left| F^{1}[x](\alpha) \geq \varepsilon \right.$$

Es decir, a partir de la inversa de la función de distribución inferior, que es la de $X^2(\alpha)$, se obtendrá el extremo superior del α-corte de $\tilde{Q}^{\varepsilon}$ y viceversa.

Asimismo, si las realizaciones de las variables aleatorias borrosas $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n$ cumplen que:

$$A_i^1(\alpha) \leq A_{i+1}^1(\alpha), i = 1,2,...,n-1 \forall \alpha$$
$$A_i^2(\alpha) \leq A_{i+1}^2(\alpha), i = 1,2,...,n-1 \forall \alpha$$

Los extremos inferior y superior de Q_{α}^{ε} son:

$$Q^{1,\varepsilon}(\alpha) = A_i^1(\alpha) \left| \underset{i}{Min} \sum_{j \leq i} p_j \geq \varepsilon \right. \; y \quad Q^{2,\varepsilon}(\alpha) = A_i^2(\alpha) \left| \underset{i}{Min} \sum_{j \leq i} p_j \geq \varepsilon \right.$$

y por tanto:

$$\tilde{Q}^{\varepsilon} = \tilde{A}_1$$

2.8.4 Inferencia estadística en muestras donde las observaciones vienen dadas por números borrosos.

En este tópico se analizó la determinación del la media muestral, de la varianza y desviación estándar muestral, la función de distribución empírica y los cuantiles empíricos en muestras tomadas de variables aleatorias, cuando las observaciones no vienen dadas de forma cierta, sino mediante números borrosos. Es decir, en este caso, se supone que el observador dispone de n observaciones que vienen dadas por números borrosos, siendo el correspondiente a la i-ésima observación $\tilde{A}_i$:

$$\tilde{A}_i = \left\{ x, \mu_{\tilde{A}_i}(x) \right\} = \left\{ A_{i_\alpha} = [A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)] \middle| 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}, i = 1,2,...,n.$$

El hecho de que, los datos obtenidos de la muestra sean borrosos, puede venir dado, por ejemplo, por la dificultad o la imposibilidad de cuantificar exactamente los mismos. Puede darse el caso, de que la metodología que se utiliza para su medición no es la adecuada o bien por la misma naturaleza de los datos, por ejemplo, en los mercados financieros, durante una misma sesión no suele negociarse un único precio, sino que suelen negociarse varios, de forma que, el precio de una acción un determinado día no es "2000", sino "aproximadamente 2000". En estas circunstancias la cuantificación de dichos datos es vaga, siendo más realista modelarlos a través de números borrosos.

2.8.4.1 Media muestral, varianza muestral y desviación estándar muestral.

Estos parámetros representativos del valor medio y la dispersión serán definidos a través del principio de extensión de Zadeh(1965). Para ello, la esperanza muestral de una variable aleatoria X, $\hat{E}[\mathrm{X}]$, su varianza, $\hat{V}[\mathrm{X}]$ y su desviación estándar, $\hat{D}[\mathrm{X}]$, si la muestra obtenida es un vector (x_1, x_2,...,x_n), siendo sus componentes cuantías ciertas, puede expresarse como una función f:$R^n \rightarrow R$, en la que las variables independientes son los datos obtenidos. En concreto:

$$E[\mathrm{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$V[\mathrm{X}] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$D[\mathrm{X}] = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Sin embargo, si los datos vienen dados a través de un vector borroso, donde el i-ésimo componente es el número borroso $\tilde{A}_i$, i=1,2,…,n, la esperanza, la varianza y la desviación estándar muestral son unos números borrosos que se denotan respectivamente como $\hat{\tilde{\mathrm{E}}}[\mathrm{X}]$, $\hat{\tilde{V}}[\mathrm{X}]$, $\hat{\tilde{D}}[\mathrm{X}]$. Su función de asociación puede ser hallada vía principio de extensión de Zadeh como:

$$\mu_{\hat{\tilde{\mathrm{E}}}[\mathrm{X}]}(x) = \bigvee_{x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \right)$$

$$\mu_{\hat{\tilde{V}}[\mathrm{X}]}(x) = \bigvee_{x=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \right)$$

$$\mu_{\hat{\tilde{D}}[\mathrm{X}]}(x) = \bigvee_{\sqrt{x=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \right) = \mu_{\hat{\tilde{D}}[\mathrm{X}]}(x^2)$$

Por otra parte, los α-cortes de la esperanza matemática de $\hat{\tilde{\mathrm{E}}}[\mathrm{X}]$, $\hat{E}[\mathrm{X}]_\alpha$, son intervalos de confianza que se pueden hallar como:

$$\hat{E}[\mathrm{X}]_\alpha = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , x_i \in A_{i\alpha}, i = 1,2,\ldots,n \right\}$$

Y como la media muestral es monótona creciente, respecto al valor de las cuantías que la forman, se obtiene que:

$$\hat{E}[\mathrm{X}]_\alpha = \left[\hat{E}^1[\mathrm{X}](\alpha), \hat{E}^2[\mathrm{X}](\alpha)\right] = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i^1(\alpha), \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i^2(\alpha) \right]$$

Respecto a la varianza muestral, se observa que:

$$\hat{V}[\mathrm{X}]_\alpha = \left\{ x \in R^+ \,\middle|\, x = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2, x_i \in A_{i_\alpha}\, i = 1,2,\ldots,n \right\} = [Min \quad x, Max \quad x]$$

Dado que no existe monotonía de $\hat{V}[\mathrm{X}]$ respecto al valor de los valores obtenidos en la muestra, para hallar los extremos de $\hat{V}[\mathrm{X}]_{\alpha}$ se debe plantear y resolver el siguiente programa matemático:

Minimizar (Maximizar) $x = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$

s.a.:

$$A_i^1(\alpha) \le x_i \le A_i^2(\alpha) \text{ i=1, 2,….,n.}$$

Siendo el máximo de x, el extremo superior de $\hat{V}[\mathrm{X}]_{\alpha}$, y el mínimo de x, su extremo inferior.

Cuando se estudio la determinación de los α-cortes de la varianza borrosa, de una variable aleatoria borrosa, se presume que, si la escala de verdad que emplea el observador es relativamente detallada, este enfoque puede no ser operativo, ya que el número de programas a resolver puede ser excesivo. Frühwirth-Schnatter (1992), proponen una aproximación a la varianza y a la desviación estándar muestral, que se basa en la aritmética de intervalos, siendo dicha aproximación la que inspiró la propuesta para aproximar la varianza de una variable aleatoria borrosa. Esta aproximación incluye al α-corte real de la varianza, y facilita su cálculo, si bien a costa de obtenerse un número borroso más incierto.

Para ello, se debe hallar el valor centrado de cada una de las observaciones de forma análoga a lo realizado en la esperanza, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria borrosa. Para la i = ésima realización de la muestra $\tilde{A}_i$, su valor centrado es $\tilde{C}_i = \tilde{A}_i - \tilde{\hat{E}}[\mathrm{X}]$. Para hallar los α-cortes de $\tilde{C}_i$ se utiliza la aritmética de intervalos, de forma que:

$$C_{i_\alpha} = \left[C_i^1(\alpha), C_i^2(\alpha)\right] = \left[A_i^1(\alpha) - \hat{E}^2[\mathrm{X}](\alpha), A_i^2(\alpha) - \hat{E}^1[\mathrm{X}](\alpha)\right]$$

A partir de los α-cortes de $\tilde{C}_i$, se halla $(\tilde{C}_i)^2$, siendo los α-cortes de este último número borroso:

$$\left(C_{i_\alpha}\right)^2 = \left[\left[(C_i)^2\right]^-(\alpha), \left[(C_i)^2\right]^+(\alpha)\right]$$

donde:

$$\left[(C_i)^2\right]^-(\alpha) = \begin{cases} \left[C_i^1(\alpha)\right]^2 & si\ C_i^1(\alpha) \geq 0 \\ \left[C_i^2(\alpha)\right]^2 & si\ C_i^2(\alpha) \leq 0 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases} \quad y \quad \left[(C_i)^2\right]^+(\alpha) = \begin{cases} \left[C_i^2(\alpha)\right]^2 & si\ C_i^1(\alpha) + \quad C_i^2(\alpha) \geq 0 \\ \left[C_i^1(\alpha)\right]^2 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

De esta forma,

$$\hat{V}[\mathrm{X}]_\alpha \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(C_{i_\alpha}\right)^2 = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(C_i)^2\right]^-(\alpha), \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(C_i)^2\right]^+(\alpha)\right]$$

Y así, como $\hat{D}[\mathrm{X}]_\alpha = \sqrt{\hat{V}[\mathrm{X}]_\alpha}$, entonces:

$$\hat{D}[\mathrm{X}]_\alpha \approx \left[\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(C_i)^2\right]^-(\alpha)}, \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(C_i)^2\right]^+(\alpha)}\right]$$

2.8.4.2 Función de distribución muestral y cuantiles muestrales:

Para definir la función de distribución y los cuantiles para muestras con observaciones borrosas, se partirá de su definición suponiendo que la muestra tomada se compone de cuantías ciertas, las cuales vienen dadas por el vector $(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)$. El valor de la función de distribución empírica para una cuantía x, $\hat{F}[x]$ es:

$$\hat{F}[x] = \sum_{\forall x_i \leq x} \frac{1}{n}$$

siendo el dominio de $\hat{F}[x]$ el conjunto discreto $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\right\}$.

Si la muestra viene dada por n valores borrosos $\tilde{A}_i$, i=1,2,...,n, entonces, la función de distribución para un valor x viene dado por un subconjunto borroso $\hat{\tilde{F}}[x]$ cuya función de asociación es:

$$\mu_{\hat{\tilde{F}}[\mathrm{x}]}(z) = \bigvee_{z=\sum_{\forall x_i \le x}^{n} \frac{1}{n}} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \right)$$

También se puede hallar los α-cortes de la función de distribución muestral, a través de sus α-cortes, $\hat{F}[x]_\alpha$. El valor inferior de $\hat{F}[x]_\alpha$, $\hat{F}^1[x](\alpha)$se hallará a través de los extremos superiores de los α-cortes de las observaciones, $A_i^2(\alpha), i=1,2,...,n$ y el superior, $\hat{F}^2[x](\alpha)$, a través de los inferiores, $A_i^1(\alpha), i=1,2,...,n$. Así:

$$\hat{F}^2[x](\alpha) = \sum_{\forall A_i^1(\alpha) \le x} \frac{1}{n} \quad y \quad \hat{F}^1[x](\alpha) = \sum_{\forall A_i^2(\alpha) \le x} \frac{1}{n}$$

Así, $\hat{F}[x]_\alpha$ no será un intervalo de confianza, ya que como se ha presentado, su dominio es discreto, $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\right\}$, pero si se cumple que:

$$\hat{F}[x]_\alpha \subseteq \left[\hat{F}^1[x](\alpha), \hat{F}^2[x](\alpha)\right]$$

cumpliéndose asimismo que $\hat{F}[x]_\alpha \supseteq \hat{F}[x]_{\alpha'}, \forall \quad \alpha \le \alpha' \ ya \quad que \quad A_{i\alpha} \supseteq A_{i\alpha'}, i=1,2,...,n.$

Por supuesto, se puede obtener la función de asociación de $\hat{\tilde{F}}[x]$ través de $\hat{F}[x]_\alpha$ como:

$$\mu_{\tilde{F}[x]}(z) = \left\{ Max \quad \alpha \middle| z \in \hat{F}[x]_\alpha \right\}, con \quad \alpha \in [0,1]$$

Por otra parte, para definir el concepto de cuantil borroso en una muestra donde las observaciones son borrosas, se partirá del concepto de cuantil en el caso en que la muestra sea un vector cierto (x_1, x_2,...,x_i,...,x_n) donde $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_r \leq \ldots \leq x_n$

El cuantil de orden ε, $\hat{q}^{\varepsilon}$ es aquel valor x_{i+1} que presenta una frecuencia acumulada tal que:

$$\hat{q}^{\varepsilon} = x_{i+1} \quad \left| \hat{F}[x_i] = \frac{i}{n} < \varepsilon \leq \hat{F}[x_{i+1}] = \frac{i+1}{n} \right.$$

Si las observaciones de la muestra son borrosas, $\tilde{A}_i$, i=1,2,...,n, entonces, dicho cuantil será también un número borroso, que se denota como $\hat{\tilde{Q}}^{\varepsilon}$, donde la posibilidad de un valor del mismo $q^{\varepsilon} = x_{i+1}$ vendrá dado por:

$$\mu_{\hat{\tilde{Q}}^{\varepsilon}}(q) = \bigvee_{q = x_{i+1} \left| F[x_i] < \varepsilon \leq F[x_{i+1}] \right.} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \right)$$

Como en el caso de las variables borroso aleatorias, los α-cortes del cuantil de orden ε, pueden ser hallados a través de los α-cortes de las observaciones que componen la muestra estudiada. De esta forma, para hallar $\hat{Q}_{\alpha}^{\varepsilon}$, donde:

$$\hat{Q}_{\alpha}^{\varepsilon} = [\hat{Q}^{1\varepsilon}(\alpha), \hat{Q}^{2\varepsilon}(\alpha)]$$

se debe hallar el valor inferior de su α-corte $\hat{Q}^{1\varepsilon}(\alpha)$ a través de los extremos inferiores de los α- cortes con dicho nivel de presunción de $\tilde{A}_i$, i=1,2,...,n, $A_i^1(\alpha)$, y el superior, $\hat{Q}^{2\varepsilon}(\alpha)$, a través de los superiores, $A_i^2(\alpha)$, i=1,2,...,n. Para ello se ordenan los extremos de los α-cortes de $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n$, para cada nivel en orden creciente, de forma que:

$$A_r^1(\alpha) \leq A_{r+1}^1(\alpha), i = 0,1,\ldots, n-1 \forall \alpha$$
$$A_r^2(\alpha) \leq A_{r+1}^2(\alpha), i = 0,1,\ldots, n-1 \forall \alpha$$

Donde, tras la ordenación efectuada, el i-ésimo extremo inferior que se obtiene no tiene por qué pertenecer al mismo número borroso que el i-ésimo extremo superior.

Finalmente, se obtienen los extremos del α-corte del cuantil, que se pretende hallar de forma que: $\hat{Q}^{1,\varepsilon}(\alpha)^{\varepsilon}$ es aquel extremo $A_{i+1}^{1}(\alpha)$ *y* $\hat{Q}^{2,\varepsilon}(\alpha)$ es aquel extremo $A_{i+1}^{2}(\alpha)$ que cumplen respectivamente:

$$\hat{F}^{2}\left[A_{i}^{1}(\alpha)\right]=\frac{i}{n}<\varepsilon\leq\hat{F}^{2}\left[A_{i+1}^{1}(\alpha)\right]=\frac{i+1}{n} \quad y \quad \hat{F}^{1}\left[A_{i}^{2}(\alpha)\right]=\frac{i}{n}<\varepsilon\leq\hat{F}^{1}\left[A_{i+1}^{2}(\alpha)\right]=\frac{i+1}{n}$$

CAPITULO III

METODOLOGIA

Este trabajo comprende fundamentalmente, una aproximación teórica de carácter documental, descriptivo y comparativo, a un enfoque de la teoría clásica de probabilidad y estadística, desde la perspectiva de la borrosidad.

Dicho enfoque, intenta configurar un marco teórico referencial que aproxime las propiedades y bondades de la borrosidad y la lógica difusa al mundo práctico y real de la teoría clásica de la probabilidad y la estadística.

Para la construcción teórica de este enfoque, se realizaron los siguientes pasos:

1. Se realizó una revisión documental, para identificar los elementos fundamentales de la lógica difusa, que pudieran relacionarse con los conceptos básicos de la teoría clásica, con el objeto de alcanzar una aproximación teórica y práctica entre ambas teorías.

2. Se elaboró un enfoque previo de la teoría clásica de conjuntos.

3. Se identificaron los elementos fundamentales de la borrosidad y lógica difusa, detallando:

3.1 Extensión de la teoría clásica de conjuntos a los conjuntos borrosos, señalando:

3.1.1 Función de asociación: explicando como la forma de la función de asociación tiene un cierto componente subjetivo, frente a la forma rígida de las funciones características de la lógica clásica. Igualmente, la manera en que estas funciones pueden adquirir diversas formas y en ocasiones pueden ser elegidas con un amplio grado de libertad por parte del "diseñador", lo que en la práctica puede traducirse como la posibilidad de incluir conocimiento experto.

3.1.2 Definiciones básicas sobre conjuntos borrosos.

3.1.3 Operaciones entre conjuntos borrosos:

Se señalan como las tres operaciones básicas de los conjuntos clásicos (complemento, intersección y unión), pueden ser generalizadas a los conjuntos borrosos de diversas formas. Con especial relevancia de la que hace uso de operaciones conocidas como operaciones estándar, definidas como:

Intersección: $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Unión: $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Complemento: $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

3.1.4 Propiedades de los conjuntos Borrosos:

Las leyes y las propiedades que, según se ha visto, cumplen los conjuntos clásicos no siempre se cumplen en el caso de los conjuntos borrosos. En este trabajo se muestra qué leyes verifican los conjuntos borrosos y cuáles no.

Las leyes y propiedades que se evaluaron, son: Propiedad Conmutativa, propiedad Asociativa, leyes de idempotencia, leyes de absorción, propiedad distributiva, propiedades de absorción e identidad, involución del complemento, leyes De Morgan, leyes complementararias.

3.1.5 Principio de Extensión.

3.1.6 Números borrosos.

3.1.7 Subconjuntos aleatorios borroso.

3.1.8 Probabilidad de eventos borrosos.

3.2 Variables aleatorias borrosas:

El concepto de variable aleatoria borrosa ha sido desarrollado, de forma dispersa en diferentes trabajos, siendo los más representativos Kwakernaak (1978) y Ralescu (1984). En ellos se analizaron como trasponer y generalizar a las variables aleatorias y los conceptos que de dicho instrumento se derivan al caso en que las realizaciones de la misma sean subconjuntos borrosos en $\Re$. Como la herramienta por excelencia para expresar cuantías borrosas son los números borrosos, únicamente se analizaron, el caso en que los eventos de las variables aleatorias borrosas sean números borrosos.

3.2.1 Esperanza, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria borrosa.

La primera definición que se ofrece para la esperanza matemática, y las medidas de dispersión, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria borrosa, es la propuesta en Kruse y Meyer (1987), y consiste en definirlas vía principio de extensión de Zadeh(1965). De esta forma, estas medidas vendrán dadas también para los subconjuntos borrosos que se denotan como $\tilde{\mathrm{E}}[\mathrm{X}]$, $\tilde{V}[\mathrm{X}]$ y $\tilde{D}[\mathrm{X}]$, cuyas funciones de asociación se abordaron en esta investigación.

3.2.2 Función de distribución y cuantiles de una variable aleatoria borroso.

3.2.3 Inferencia estadística en muestras donde las observaciones vienen dadas por números borrosos.

En este tópico se describió la determinación de la media muestral, de la varianza y desviación estándar muestral, la función de distribución empírica y los cuantiles empíricos en muestras tomadas de variables aleatorias, cuando las cuantías que son observadas no vienen dadas de forma cierta, sino mediante números borrosos. Es decir, en este caso, se supone que el observador dispone de n observaciones que vienen dadas por números borrosos, siendo el correspondiente a la i-ésima observación $\tilde{A}_i$.

Los parámetros representativos del valor medio y la dispersión fueron definidos a través del principio de extensión de Zadeh.

4. Descritas ya las operaciones de la lógica difusa, para alcanzar el tercer objetivo, se elaboró un análisis interpretativo, de las características, propiedades y principios, susceptibles de ser relacionados entre la teoría clásica de la probabilidad y estadísticas y la teoría de la lógica difusa.

CAPITULO IV

ENFOQUE INTERPRETATIVO

Es fundamental señalar, que la falta de información en los experimentos científicos, se presenta de dos maneras diferentes: con incertidumbre y con imprecisión. Por esta razón, dos teorías diferentes se han desarrollado, con el fin de resolver esta falta de información, a saber: la teoría de probabilidades y la teoría de los conjuntos borrosos. Pero como la incertidumbre y la imprecisión se presentan simultáneamente, esto ha obligado al uso de una combinación de las dos teorías mencionadas. En los capítulos anteriores, se revisaron, identificaron y caracterizaron los elementos fundamentales de ambas teorías, configurando un marco teórico referencial, con el objeto de construir, a continuación, un enfoque interpretativo, que permita conectar las propiedades y bondades de la borrosidad y la lógica difusa, con el mundo práctico y real de la teoría clásica de la probabilidad y estadística.

Como es conocido, fue Zadeh (1965), quien introdujo la teoría de los conjuntos borrosos y desde ese mismo momento, comenzaron los intentos por parte de muchos investigadores, de combinar adecuadamente, la teoría de los conjuntos borrosos con la teoría de probabilidades, para minimizar el problema que representaba la imprecisión y la aleatoriedad en los diferentes experimentos llevados por cualquier investigador. Ese ha sido precisamente, uno de los elementos fundamentales de esta investigación; describir las aproximaciones que han desarrollado en las referencias consultadas para resolver el problema de la incertidumbre y la imprecisión desde una perspectiva borrosa.

Zadeh (1965), establece que la función característica es reemplazada por una función de asociación y que el conjunto borroso es como una clase de objetos con un continuo grado de asociación. Tal conjunto, está caracterizado por una función de asociación, la cual asigna a cada objeto un grado de asociación evaluable entre cero y uno. A diferencia del conjunto clásico, el cual está caracterizado por una función de asociación (función característica), evaluable en cero ó uno.

Por ejemplo, para un conjunto clásico tendríamos lo siguiente:

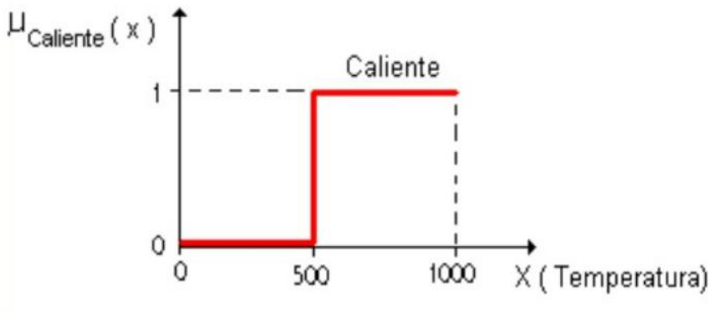

Figura 7. Ejemplo de conjunto clásico.

En conjunto se definiría así: Caliente = $\{x \mid x > 500\}$, Temp $[°C]$

$$\mu_{Caliente(x)} = \begin{cases} 1 & x \in Caliente \\ 0 & x \notin Caliente \end{cases}$$

Para un conjunto difuso tendríamos lo siguiente:

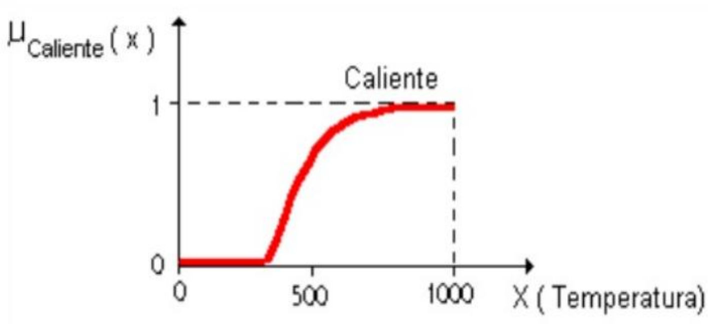

Figura 8. Ejemplo de conjunto difuso.

El conjunto se definiría así: Caliente = $\{x, \mu_{Caliente}(x) | \ x \ \in U\}$

Abscisas (eje x) Universo de discurso: U = [0 , 1000]

Ordenadas (eje y) Grados de asociación en el intervalo: $\mu_{Caliente(x)} = [\,0\,,\ \ 1\,]$

Un conjunto difuso puede contener elementos con grados de asociación, a diferencia de los conjuntos clásicos en los que los elementos pueden “pertenecer” o “no pertenecer” a dichos conjuntos.

La forma de la función de asociación, de la lógica difusa, tiene un cierto componente subjetivo, frente a la forma rígida (objetiva), de las funciones características de la lógica clásica. En función de la aplicación de los conjuntos o de los conceptos representados por ellos, estas funciones pueden adquirir diversas formas y muchas veces pueden ser elegidas con un amplio grado de libertad por parte del “diseñador”, lo que en la práctica puede traducirse como la posibilidad de incluir cierto conocimiento experto.

Es importante señalar, lo establecido por Azorin (1979), acerca de que la elección del tipo de función de asociación a utilizar, puede fundamentarse en alguno de los siguientes criterios:

a. *Criterio individual:* Los grados de asociación de los distintos elementos del conjunto borroso en cuestión son establecidos de forma subjetiva por el investigador.

b. *Criterios colectivos:* Consiste en tomar una muestra de opiniones sobre el valor p(x) correspondiente a cada elemento *x,* y hallar un promedio teniendo en cuenta el peso relativo de cada opinante.

c. Procedimientos experimentales*:* Supone posible el obtener físicamente el valor p(x). Es el caso de las mezclas.

d. *Procedimiento analítico**:* Exige la utilización de modelos que permitan explicitar la función p(x).

Entre las funciones de asociación estándares se encuentran:

Función de asociación Trapezoidal:

Ejemplo: Representación del conjunto difuso, persona Joven.

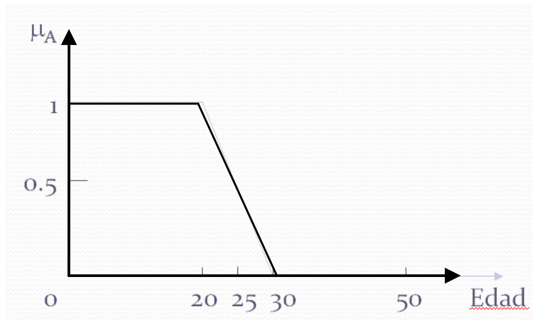

Figura 9. Representación del conjunto difuso, persona Joven.

Se observa que el grado de asociación de una persona de 25 años al conjunto Persona Joven es de 0.5, mientras que la edad 20, su grado de asociación al conjunto es igual a 1.

Para conjuntos difusos con universos continuos se encuentra la función de asociación Gaussiana.

Ejemplo:

Conjunto difuso B = más o menos 50 años de edad.

X = conjunto de números reales positivos (continuos)

$$B = \{(x, \mu_B(x)) | xinX\}$$

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-50}{10}\right)^2}$$

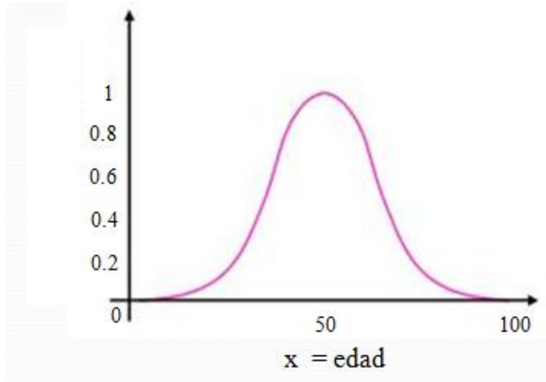

Figura 10. Ejemplo de función de asociación gaussiana.

Entre las funciones de asociación L y GAMMA se usan para calificar valores lingüísticos extremos, tales como bebé o anciano, respectivamente. Las funciones PI y LAMBDA se usan para describir valores intermedios (como joven, de mediana edad, maduro). Su principal diferencia reside en que la función PI, implica un margen de tolerancia alrededor del valor que se toma como más representativo del valor lingüístico asociado al conjunto difuso.

Se considera la variable lingüística “Altura de una persona adulta”, que toma valores en el universo de discurso U = [1.4, 2.50]. Se hace una clasificación difusa de los seres humanos en tres conjuntos difusos (o valores lingüísticos): Bajo, mediano y alto.

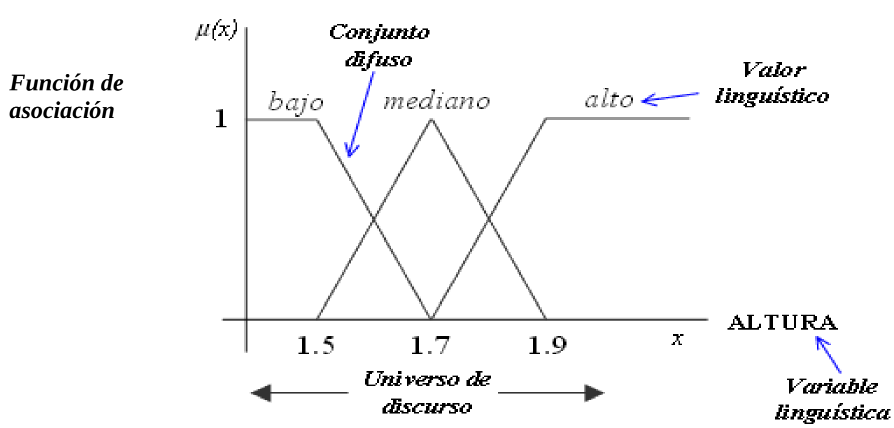

Figura 11. Ejemplo de función de asociación tipo L, triangulo y gamma.

En esta ilustración se muestran tres conjuntos difusos sobre la variable lingüística altura, cuyos valores lingüísticos asociados son: bajo, mediano y alto respectivamente. Las funciones de asociación son de tipo L para bajo, lambda o triangulo para el mediano y Gamma para el alto. Si José mide 1.80 metros, la lógica difusa nos dice que es un 0.2 mediano y un 0.8 alto. De este modo, expresamos que mientras un elemento puede estar dentro de un determinado conjunto, puedo no cumplir las especificaciones al cien por cien (por ejemplo, en el caso de José, a la vista del resultado se podría afirmar que es poco mediano y más bien alto).

La notación habitual para los conjuntos difusos es la definida por Zadeh(1965), que es la siguiente: sea **A** un conjunto difuso definido sobre el universo **U**:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\}$$

Que indica que **A** está formado por todos los pares ordenados x y el resultado de la función de asociación para todo elemento **u** dentro del universo de discurso **U**. Para denotar el conjunto difuso **A**:

Si el universo es discreto: $\sum_U \mu_A(x)/x$

Si el universo es continúo: $F = \int_u \mu_A(x)/x$

Se debe tener cuidado con esta notación, La sumatoria o la integral pierden su significado habitual. En la lógica difusa quieren simbolizar una mera enumeración de duplas. La barra tampoco indica una fracción sino que simplemente se separa los dos elementos de la dupla. Así por ejemplo, el conjunto difuso discreto “numero grande” al lanzar el dado, podría definirse como:

$$F = \left\{ {}^{1}/_{6} + {}^{0,7}/_{5} + {}^{0,5}/_{4} + {}^{0,2}/_{3} \right\}$$

La parte derecha de la dupla indica el elemento y la parte izquierda el grado de asociación.

Los conjuntos difusos y las funciones de asociación pueden emplearse de dos formas posibles:

- Para estimar grados de asociación a un conjunto. Por ejemplo, si nos dicen que una persona mide 170 cm, ¿en qué grado es una persona alta?
- Para expresar posibilidades en una situación en la que se dispone de información incompleta. Por ejemplo, si nos dicen que una persona es mediana, ¿cuál será su altura? En este caso la función de asociación μ puede interpretarse como una distribución de posibilidad que nos indica la preferencia sobre los valores que una variable de valor desconocido puede tomar.

De este modo, se observa, que la principal diferencia entre la teoría de conjuntos clásica y la difusa es que mientras que los valores de la función de pertenencia de un conjunto clásico son siempre 0 ó 1, la función de asociación de un conjunto difuso toma valores en todo el intervalo [0,1]. Al contrario de los conjuntos clásicos, que pueden definirse de varias formas, los conjuntos difusos vienen siempre definidos por su función de asociación.

En 1966, Loginov hizo un primer intento de combinar la teoría de la probabilidad con la teoría de los conjuntos borrosos, pero no tuvo éxito. Fue precisamente el mismo Zadeh (2002), quien usando los operadores máximos y mínimos logro definir la unión y la intersección de eventos borrosos. Estableció de forma contundente, que el uso de estos operadores en la combinación de ambas teorías, satisfacía completamente los axiomas de Kolmogorv, lo cual había sido la limitante principal hasta ese momento.

De manera similar a los conjuntos clásicos que realizan operaciones entre ellos, en conjuntos difusos se puede hacer lo mismo, pero debido a la naturaleza diferente de ellos, la formulación de estas operaciones es algo especial.

Ello lleva a concluir, que las tres operaciones básicas definidas sobre los conjuntos clásicos (complemento, intersección y unión), pueden ser generalizadas a los conjuntos borrosos de diversas formas. Dentro de la teoría de los conjuntos borrosos tiene especial relevancia la que hace uso de operaciones conocidas como operaciones estándar, definidas como:

Intersección: $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Unión: $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Complemento: $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

No obstante, al contrario de lo que pasa con los conjuntos clásicos, ésta no es la única forma posible de definir estas operaciones; diferentes funciones pueden ser apropiadas para representarlas en diferentes contextos. Por lo tanto, no sólo las funciones de asociación de los conjuntos borrosos van a ser dependientes del contexto, sino también las operaciones sobre dichos conjuntos.

Se muestran dos conjuntos difusos los cuales nos servirán para definir las operaciones fundamentales que entre ellos se pueden realizar.

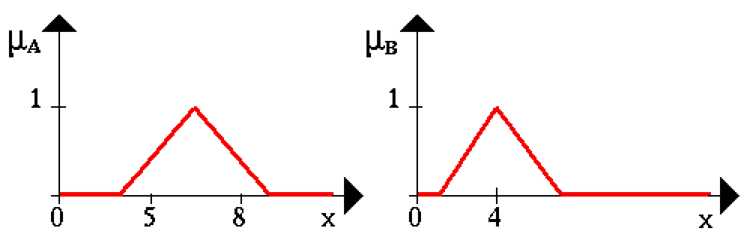

Figura 12. Función de asociación de los conjunto **A** y **B**.

La idea intuitiva de intersección heredada de los conjuntos clásicos, expresa que el conjunto intersección de dos conjuntos **A** y **B**, se define como los elementos que están en el conjunto **A y** en el conjunto **B**.

Siguiendo esta idea, se podría graficar la intersección de los conjuntos difusos:

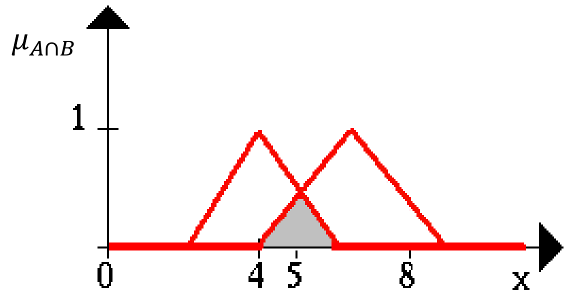

Figura 13. Intersección de dos conjuntos difusos.

De manera similar a como se define el nivel de asociación a un conjuntos difuso, vamos a encontrar el nivel de asociación de valor x= 4.5 a la intersección de los dos conjuntos difusos mostrados.

Graficamente, el valor x=4.5 tiene un nivel de asociación de 0.8 al conjunto **A** y de 0.2 al conjunto **B**, siendo el valor de asociación de x= 4.5, correspondiente a la intersección (zona sombreada). Si se desea expresar como una operación entre estos valores, se observa que de estos dos valores, el que "toca" la zona sombreada es el de 0.2, por lo que de manera intuitiva, se puede afirmar que el valor de asociación del valor dado a la intersección de los conjuntos **A** y **B**, es el **valor mínimo** de los valores de asociación del dicho valor con respecto a los conjuntos de manera individual; de manera matemática lo anterior se puede expresar así:

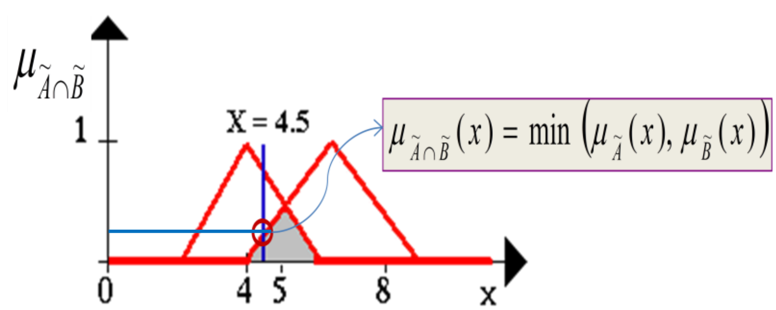

Figura 14. Ejemplo de la intersección de dos conjuntos difusos.

Por su parte, la intersección borrosa (t-norma), viene: dados dos conjuntos borrosos **A** y **B**, definidos sobre un mismo universos de discurso U, se define su intersección como un conjunto borroso $A \cap B$ cuya función de asociación viene dada por la expresión

$$\mu_{A \cap B}(x) = T[\mu_A(x), \mu_B(x)] \forall x \in U$$

donde la función T (x, y), es una norma triangular o $t - norma$.

Existen varias funciones que cumplen las propiedades de las t – norma y que por lo tanto, pueden ser utilizadas para representar la intersección entre conjuntos borrosos. Algunas de ellas son las siguientes:

$T(x, y) = \min(x, y)$	Mínimo
$T(x, y) = \max(0, x + y - 1)$	Diferencia acotada
$T(x, y) = x * y$	Producto algebraico
$T(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & si \ \max(x, y) = 1 \\ 0 & en \ cualquier \ otro \ caso \end{cases}$	Producto drástico

Se expresa la intersección de dos conjuntos borrosos como $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$, donde ^ representa el operador mínimo (intersección borrosa estándar).

En los conjuntos clásicos se expresa que la unión de dos conjuntos A y B, se define como los elementos que están en el conjunto **A** o están en el conjunto **B**.

Siguiendo esta idea, se podría graficar la unión de los conjuntos difusos:

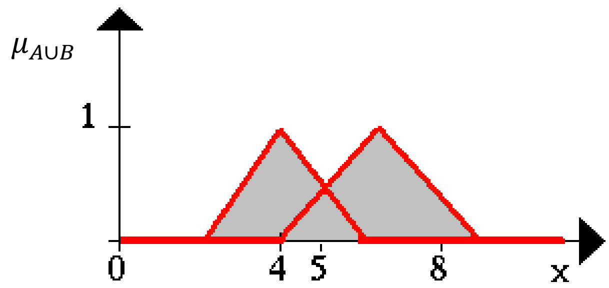

Figura 15. Unión entre dos conjuntos difusos

De manera similar, a como se define el nivel de asociación a un conjuntos difuso, vamos a encontrar el nivel de asociación de valor x = 4.5 a la unión de los dos conjuntos difusos mostrados.

Gráficamente, el valor x=4.5 tiene un nivel de asociación de 0.8 al conjunto **A** y de 0.2 al conjunto **B**, y el valor de asociación de x= 4.5 a la unión (zona sombreada), se desea expresar como una operación entre estos valores. Se observa que de estos dos valores, el que "toca" la zona sombreada es el de 0.8, por lo que de manera intuitiva se puede afirmar, que el valor de asociación del valor dado a la unión de los conjuntos **A** y **B**, es el **valor máximo** de los valores de asociación. De manera matemática, lo anterior se puede expresar así:

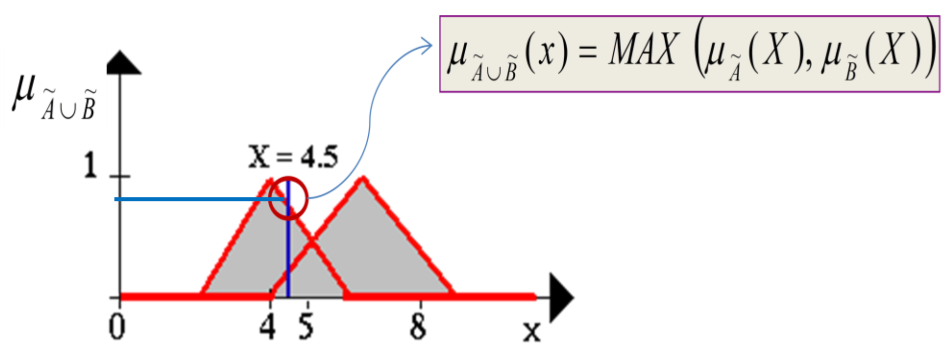

Figura 16. Ejemplo de Unión entre dos conjuntos difusos

Es corriente encontrar en la bibliografía, la unión de dos conjuntos borrosos expresada como $\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$, donde $\vee$ representa al operador máximo (unión borrosa estándar).

En lo referente a la unión borrosa (t-conorma), queda definida: Dados dos conjuntos borrosos **A** y **B**, definidos sobre el mismo universo de discurso **U**, se define su unión como un conjunto borroso $A \cup B$, cuya función de asociación viene dada por la expresión: $\mu_{A\cup B}(x) = S[\mu_A, \mu_B] \forall x \in U$, donde la función *S(x, y),* es una conorma triangular, también llamada: t- conorma ó, s – norma.

Al igual que en los casos anteriores, existen diferentes funciones que cumplen con las propiedades y que pueden ser utilizadas para representar la unión. Algunos ejemplos son:

$S(x, y) = \max(x, y)$	Máximo
$S(x, y) = \min(1, x + y)$	Suma acotada
$S(x, y) = x + y - x \cdot y$	Suma algebraica
$S(x, y) = \begin{cases} \max(x, y) & si \;\; mim(x, y) = 0 \\ 1 & en \;\; cualquier \;\; otro \;\; caso \end{cases}$	Suma drástica

En los conjuntos clásicos, se define el complemento como el conjunto de los elementos que le faltan a un conjunto para ser igual al conjunto universo.

De la misma manera, en conjuntos difusos se habla del complemento como el conjunto formado por los valores de asociación, que le permitirían al conjunto obtener el valor máximo de asociación posible, siendo 1 el valor máximo de asociación que un conjunto difuso puede suministrar. Este conjunto se podría formar restándole a 1, los valores de asociación del conjunto difuso al que se desea encontrar el complemento.

Gráficamente, esto se visualiza así:

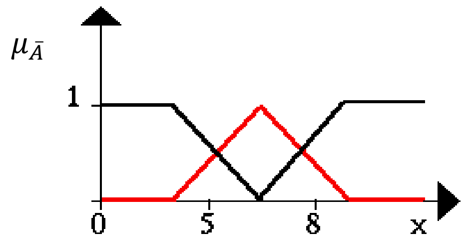

Figura 17. Complemento de un conjunto difuso

En la grafica anterior, el conjunto complemento se ha dibujado con trazo negro. De manera similar, a como se define el nivel de asociación a un conjuntos difuso, vamos a encontrar el nivel de asociación de valor x = 6, al complemento del conjunto difuso **A**.

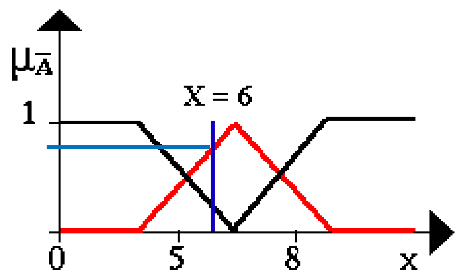

Figura 18. Ejemplo del Complemento de un conjunto difuso

En x = 6, se observa que el valor de asociación al conjunto **A**, es de 0.8 si pensamos en el complemento como lo que le falta a este valor para alcanzar el máximo valor posible que es 1, se tendría que el nivel del asociación de x = 6 del complemento, es de 0.2. En la grafica, se puede verificar esta conclusión. Matemáticamente, esta operación se expresa así:

$$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$$

Existen muchas funciones que cumplen con las propiedades, y que por lo tanto, pueden ser usadas para representar el complemento borroso. Algunas de ellas son:

$$C(x) = 1 - x$$

Negación

$$C(x) = \frac{1-x}{1-\lambda x}\ \lambda \in (0,\infty)$$

Sugeno

$$C(x) = \left(1 - x^{\omega}\right)^{1/\omega}\ \omega \in (0,\infty)$$

Yager

Es importante señalar, que los operadores básicos para subconjuntos borrosos como el mínimo y el máximo, correspondientes a la intersección y unión de conjuntos, se ven afectados por las leyes de la probabilidad, ya que el nivel de asociación de un valor x a un subconjunto aleatorio borroso, viene dado por una ley de probabilidad. Es decir, si se opera con subconjuntos aleatorios borrosos, el nivel de asociación de un elemento x al conjunto unión, intersección o al conjunto complementario, viene dado por la probabilidad de que su nivel de asociación a estos conjuntos tome un determinado valor.

A continuación, veamos el siguiente ejemplo:

Sea **E** un conjunto continuo ó discreto, se llama **subconjunto borroso E** a todo conjunto de pares ordenados :

$$\tilde{A} = \{(x \,/\, \mu_{\tilde{A}}(x)), \forall\, x \in E\}$$

$\mu_{\tilde{A}}: E \rightarrow [0,1]$, es la función de asociación

$\mu_{\tilde{A}}(x)$, es el grado o nivel de asociación de x a E.

La notación que emplearemos en adelante para distinguir un conjunto borroso de uno nítido es el símbolo ~ colocado sobre la letra que indica el conjunto.

Sea un conjunto de inversiones E = {a, b, c, d, e, f}. Tales que a: bonex, b: acciones, c: fondo de inversión, d: plazos fijos, e: bonos Brady, f: otros activos.

En un determinado período “a” resultó una muy buena inversión, “b” mala, “c” ni buena ni mala, “d” muy redituable, “e” bastante buena y “f” bastante mala.

Podemos definir en el conjunto de inversiones E, el siguiente subconjunto borroso:

$$\tilde{A} = \{(a/1), (b/0), (c/.5), (d/.9), (e/.7), (f/.4)\}$$

Debe quedar claro que $\tilde{A}$ podrá ser diferente en otro momento, o bien si las inversiones de E son analizadas por otra persona. Es decir, no hay unicidad para un subconjunto borroso, en la realidad tampoco existe unicidad ¿o siempre coincide con su agente de bolsa?

El conjunto $\tilde{A}$, o cualquier conjunto difuso incluido en un referencial finito, también puede expresarse de la siguiente manera:

x	a	b	c	d	e	f
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	1	0	.5	.9	.7	.4

Gráficamente, podremos representarlo del siguiente modo:

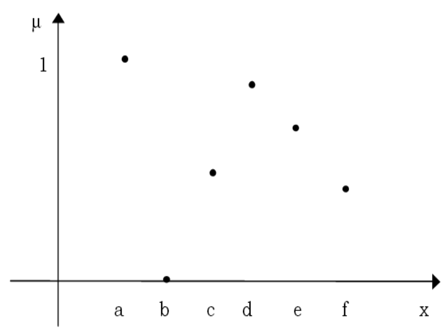

Figura 19. Representación grafica de un conjunto difuso.

La definición de un subconjunto borroso depende de la situación que se considere; veamos este ejemplo sobre una idea extraída de Tanaka (1997): Cuando uno piensa en la velocidad de un auto, la interpretación de cuán "rápido" el auto está circulando difiere según se considere el tránsito en una avenida, en una autopista o bien en un circuito de carrera. La siguiente figura, muestra las funciones de asociación correspondiente cada uno de los casos mencionados para el subconjunto borroso de $\mathfrak{R}$ que podemos llamar "velocidad de circulación rápida". Se observa que 60km/h es considerada una velocidad rápida para una avenida, pero no lo es para una autopista y menos aun para un circuito de carrera.

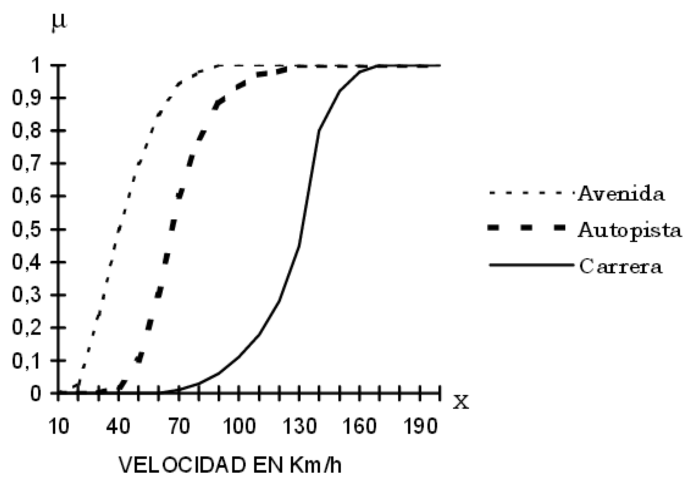

Figura 20. Funciones de asociación de un subconjunto borroso aleatorio.

Igualmente se debe concluir, que el hecho de que, los datos obtenidos de la muestra sean considerados borrosos, puede venir dado, por ejemplo, por la dificultad o la imposibilidad de cuantificar exactamente los mismos. Ello puede darse, si la metodología que se utiliza para su medición no es la adecuada o bien por la misma naturaleza de los datos. Por ejemplo, en los mercados financieros, durante una misma sesión no suele negociarse un único precio, sino que suelen negociarse varios, de forma que, el precio de una acción un determinado día no es “2000”, sino “aproximadamente 2000”. En estas circunstancias la cuantificación de dichos datos es vaga, siendo más realista representarlos a través de números borrosos.

En probabilidades, un evento **F** es un conjunto ordinario de un espacio de muestreo U. Por ejemplo, al tirar un dado, el espacio de muestreo U es el conjunto de números naturales,

$$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y un evento como **E** dado por

$$E = \{x/x \ es \ natural \ y \ menor \ que \ 4\} = \{1,2,3\}$$

E es un subconjunto ordinario de **U**. El evento ocurre si al menos uno de los elementos del subconjunto ocurre (es decir 1,2,3).

La probabilidad condicional, P(E/E'), define la probabilidad de un evento E dado que E' ha ocurrido. Por ejemplo, tomando el mismo universo U y el evento E definido anteriormente viene dada por la siguiente expresión P(E/3)=1.

Supongamos ahora que E no es un subconjunto ordinario, sino $\tilde{E}$, un subconjunto difuso. Por ejemplo, sea "$\tilde{E}$ = un número grande" y su función de asociación se puede definir como:

$$\tilde{E} = \mu_{grande(u)} = {}^{1}/_{6} + {}^{0,7}/_{5} + {}^{0,5}/_{4} + {}^{0,2}/_{3}$$

¿Cuál es la probabilidad de tirar un número grande?

$$P(\tilde{E}) = \sum_i P(u_i).\mu_{grande}(u_i) = \frac{1}{6}(1 + 0,7 + 0,5 + 0,2) = 0,4\ ,$$

en donde $\frac{1}{6}$ es la probabilidad de cada u_i.

Otro tipo de probabilidad es la llamada probabilidad subjetiva, que se describe por el grado de confianza subjetiva de que un evento va a ocurrir. Para describir estos eventos se le pide ciertas propiedades, entre ellas la claridad, que dice que "cada proposición a la que se asocia una medida de probabilidad debe poder clasificarse en términos de verdadera o falsa".

Zadeh (1965), señala que un conjunto difuso induce una distribución posibilística en el universo. Por ejemplo, el conjunto difuso "número grande" del ejemplo anterior induce una distribución posibilística:

Es “imposible” que 1 ó 2 sean números grandes.

Es 0,2 “posible” que 3 sea un número grande.

Es 0,5 “posible” que 4 sea un número grande.

Es 0,7 “posible” que 5 sea un número grande.

Es “posible” que 6 sea un número grande.

Se concluye entonces, que la definición de probabilidad de eventos difusos es una extensión de la probabilidad clásica propuesta por Zadeh. Desde la intersección y la unión de los conjuntos difusos que dependen de T Normas y T Conormas, considerando además, si los axiomas de Kolmogorov se mantienen o no; esto depende de la T Norma elegida. Zadeh demostró que su probabilidad satisface los axiomas de Kolmogorov cuando la intersección y la unión se definen por medio de los operadores mínimo y máximo. A pesar de esto, existen otras T Normas que no satisfacen los axiomas de Kolmogorov, razón por la cual, se caracterizaron los T Normas continuas, que permiten la probabilidad de eventos difusos definidos por Zadeh, para satisfacer los axiomas de Kolmogorov, y a la cuales llamamos las Normas T compatibles con la probabilidad Zadeh (PZ). También se demostró, que cada T Norma estricta es compatible con la PZ, mientras que el único nilpotente compatible con las T Normas y compatibles con PZ, es el operador Łukasiewicz. Por otro lado, cada suma ordinal sin elementos nilpotentes (no triviales), también es compatible con PZ, pero debe satisfacer las ecuaciones (1) y (2) con el fin de ser compatible con la probabilidad de eventos difusos. Los resultados obtenidos se han aplicado a algunas conocidas familias paramétricas de T Normas, y se puede concluir que la familia que mejor se comporta con respecto a la compatibilidad PZ es la familia Frank, ya que es la única, en la que todos sus miembros son continuos y compatibles con PZ.

Ejemplo: Sea T una suma ordinal definida por $T = \left(\langle 0, \frac{1}{4}, T_L \rangle, \langle \frac{1}{4}, 1, T_L \rangle\right)$:

$$T(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}T_L(4x,4y) & if(x,y) \in \left[0,\frac{1}{4}\right]^2, \\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4}T_L\left(\frac{4x-1}{3},\frac{4y-1}{3}\right) & if(x,y) \in \left[\frac{1}{4},1\right]^2, \\ \min(\mathrm{x},\mathrm{y}) & en\ cualquier\ otro\ caso. \end{cases}$$

Esta t – norma P_z-compatible. En efecto:

- Eq.(1) se satisface para cada (x,y) ∈ $Z(T)$ satisfaciendo (x,y) ∈ $\left(0,\frac{1}{4}\right)^2$ también satisface $(1-x,1-y) \in \left(\frac{3}{4},1\right)^2$, y por definición $T(1-x,1-y) = 1-x-y$.

- Eq.(2) se mantiene desde $s = \theta = \frac{1}{4}$, y ambas.

$$1 - s > \theta\ y\ \theta \leq \frac{1}{2}$$

En otro orden de ideas, es importante concluir, que un sistema probabilístico altamente impreciso podría ser formalizado mediante la teoría de conjunto difuso o variables aleatorias de valor, tal como lo estableció Stojakovic, en su trabajo esperanza de una variable aleatoria borrosa en 1994, y tal como fue ratificado posteriormente por Zadeh, en su investigación sobre el uso de la teoría de probabilidades imprecisas en el 2002 y por Augustin y Coolen en el 2004, en su trabajo sobre intervalos de probabilidad e inferencia predictiva no paramétrica. Acordaron estos investigadores que un conjunto de datos incompletos, proporciona una evaluación imprecisa de la probabilidad de un evento que podría ser expresado por un subconjunto de [0, 1], o conjunto difuso, en lugar de un número, tal como lo exige la teoría clásica de probabilidades. En otras palabras, la teoría de probabilidad se complementa con una dimensión extra de incertidumbre proporcionada por la teoría difusa. Este concepto ha recibido el nombre genérico de la probabilidad incierta. Sin embargo, este término genérico se ha interpretado y matemáticamente formalizado de diversas maneras.

Una de las interpretaciones más atractivas de una probabilidad imprecisa es la probabilidad de que un evento imprevisto ocurra, debido a la imprecisión de los conocimientos previos o escasez de la muestra de datos, se expresa en términos de subconjunto o conjunto difuso de [0, 1].

El conjunto o la teoría de la probabilidad difusa valorada no pretende reemplazar, sino complementar y ampliar la noción clásica de la probabilidad bayesiana para enfocar la teoría de probabilidades, poniendo a su disposición herramientas para trabajar con los estados de información más débiles, como por ejemplo, el método de conjuntos de aritmética restringida, realizado por Klir y Pan en 1998, donde este método se utiliza para tratar las probabilidades de un conjunto de valores difusos, donde la suma de todas las probabilidades individuales es uno. Se puede considerar este concepto como la extensión generalizada del modelo clásico de la teoría clásica de la probabilidad.

Igualmente, se debe señalar, que la probabilidad imprecisa es un término genérico, para cubrir todos los modelos matemáticos que miden la probabilidad o la incertidumbre sin alcanzar probabilidades numéricas estrictas (Stojakovic, 2010). Esta probabilidad imprecisa, incluye elementos tanto cualitativos tales como: probabilidad comparativa y ordenaciones parciales preferentes, como cuantitativos (intervalo de probabilidades, teoría de la posibilidad, funciones de creencias, previsiones superior e inferiores, probabilidades superiores e inferiores, la probabilidad difusa, entre otros). Concluyó, que se necesitan modelos de probabilidades imprecisas en problemas inferenciales donde la información pertinente sea escasa, imprecisa o contradictoria, y en los problemas de decisión donde las alternativas de respuesta pudieran estar incompletas. Un tema común en todos estos métodos generalizados es que se centran en la reflexión realista de la información y las alternativas de respuesta disponibles, y como tal, las decisiones de apoyo informativo. Igualmente, la incertidumbre con respecto a un experimento puede tener esencialmente dos orígenes: la aleatoriedad debido a la variabilidad natural de la observación ó la imprecisión debido a la información incompleta de los datos de interés.

Posteriormente, se estableció una lógica para razonar acerca de las probabilidades de eventos difusos, bajo un enfoque modal (Flaminio y Godo, 2006), donde la idea básica ha sido tratar un evento difuso como una forma de la lógica finita valorada de Lukasiewicz $Ł_{n,}$ en lugar de la Lógica Booleana clásica, y usando la noción de estado para capturar la generalización de un número finito aditivo de medidas de probabilidad de álgebras MV.

Debe considerarse también, que una variable aleatoria difusa, X, es una aplicación que asigna un espacio a un subconjunto difuso, $X(\omega) \in F(\Omega_2)$, siendo este subconjunto, cualquier elemento del espacio inicial, $\omega \in \Omega_1$ provisto de la estructura de espacio de probabilidad (Cousoa y Sánchez, 2010). Esta asociación expresa alguna información imprecisa acerca de los resultados en ambos espacios. Así, el concepto de variable aleatoria difusa se extiende de la definición clásica de variable aleatoria. De hecho, una variable aleatoria le asigna un elemento en Ω_2 a cada resultado de $\omega_1 \in \Omega_1$. Entonces, este expresa una relación deterministica entre Ω_1 y Ω_2. Una vez, que un elemento de Ω_1 ha sido seleccionado, el elemento en Ω_2 queda inequívocamente determinado.

En otro orden de ideas, desde un punto de vista formal, el concepto de variable aleatoria borrosas no es único, y cada definición en la literatura difiere de las otras en la estructura del espacio, la forma y de su posibilidad de medición. Por otra parte, a las variables aleatorias borrosas se le han dado diferentes interpretaciones en la literatura, independientemente de la definición formal específica. Por ejemplo, Puri y Ralescu (1986), consideran que las observaciones de algunos experimentos aleatorios no consisten en salidas numéricas, sino que están representados por términos lingüísticos vagos. Cuando en particular, la variable aleatoria difusa tiene un número finito de imágenes, los valores de probabilidad pueden ser asignados a diferentes "etiquetas difusas". Por ejemplo, se podría generar el siguiente modelo: el resultado es "alto" con una probabilidad de 0,5, "medio" con una probabilidad de 0.25 y "bajo" con una probabilidad de 0.25, donde "alto", "medio" y "bajo" son etiquetas lingüísticas asociadas a los subconjuntos difusos del espacio final.

Es importante mencionar, que Kruse y Meyer (1987), ofrecen una interpretación alternativa de variables aleatorias borrosas, como el caso de la representación de variables aleatorias desconocidas. Para ello, la variable aleatoria borrosa, induce una "función de asociación ", definida sobre la clase de todas las variables aleatorias. En esta configuración, se define una función de asociación sobre la clase de todas las posibles distribuciones de probabilidad, de una manera natural. Desde un punto de vista teórico, este modelo es una distribución de posibilidades de segundo orden, ya que la información acerca de la probabilidad de la verdad, se representa por una medida de posibilidad definida sobre la clase de todas las medidas de probabilidad, con una interpretación adicional de variables aleatorias borrosas, diferentes de los enfoques de Puri y Ralescu (1986). La diferencia esencial del enfoque Kruse y Meyer (1987), es que se centra en la omisión de la suposición acerca de la existencia de una variable aleatoria subyacente.

Bajo esta nueva interpretación, el resultado final en Ω_2 no es asumido para determinar el resultado inicial de $\omega_1 \epsilon \Omega_1$, y es así como la variable aleatoria difusa, no representa más la función de aceptabilidad sobre la clase de variable aleatoria. De todas formas, la nueva interpretación, está de acuerdo a la interpretación probabilística de los conjuntos difusos y del enfoque de Kruse y Meyer. Más específicamente, supone que se tiene una información parcial sobre la distribución de probabilidad que modela una secuencia de dos experimentos en Ω_1 y Ω_2, respectivamente y que la distribución de probabilidad que modela el primer experimento está completamente determinada. Por otro lado, el segundo experimento es solo conocido a través de una familia de medidas condicionales posibles. Este ejemplo, modela el nivel de conocimiento sobre las relaciones entre el resultado del primer experimento y los posibles resultados del segundo. Si el resultado del primer experimento es ω, entonces, el grado de posibilidad de que x ocurra en el segundo es $X(\omega)(x)$. La combinación de ambas fuentes de información lleva a describir de una forma natural, la distribución de probabilidad en Ω_2 (la distribución de probabilidad que dirige el segundo experimento), por medio de una probabilidad superior (un modelo estándar de probabilidad, diferente al de segundo orden). De esta manera, se explica como la variable aleatoria difusa es construida con una variable aleatoria nítida y un conjunto difuso, en un ambiente finito. La noción de esperanza, también es estudiada bajo esta perspectiva.

Por último, se estableció la relación formal entre los tres modelos asociados a las tres interpretaciones (la medida de probabilidad asociada a las variables aleatorias borrosas, la distribución de probabilidad de segundo orden, y el modelo superior- inferior). Se muestra, que las probabilidades superiores e inferiores, son de hecho, ∞-capacidades de orden. Igualmente, se demostró que las probabilidades superiores e inferiores asociadas al enfoque de Cousoa y Sánchez (2010), admiten una interpretación alternativa bajo el enfoque de Kruse y Meyer (1987), mediante el método desarrollado por Walley, donde una probabilidad superior e inferior es derivada de cualquier medida de probabilidad de segundo orden, a través del uso de técnicas de extensión natural.

Por otra parte, el concepto de varianza y desviación estándar en subconjuntos aleatorios borrosos, está basado en el concepto de distancia euclídea borrosa entre números borrosos, tal como lo establecieron Dubois y Prade (1980). Sin embargo, diversos autores como Feng *et al.* (2001), consideran que aunque es razonable sostener que el valor esperado de una variable aleatoria borrosa es un número borroso, la varianza de una variable aleatoria borrosa no debe ser borrosa, ya que por la naturaleza del indicador varianza o desviación estándar, éstos deben ser índices ciertos. Así, la idea subyacente de este modelaje de varianza, es la utilización del concepto de distancia cierta entre números borrosos, como instrumento en la aproximación de números borrosos y su aplicación en la teoría clásica de probabilidades.

CAPITULO V

Conclusiones y Recomendaciones

Las conexiones, relaciones e ideas principales, tratadas en el enfoque interpretativo de capítulo anterior, da pie para concluir, que no obstante, la vaguedad y la imprecisión del mundo real, es posible descubrir conexiones importantes, entre dos teorías con principios y características distintas, que juntas pueden desentrañar el mundo real caracterizado por la imprecisión. Es por eso, que el mundo científico intenta conocer esta compleja realidad, para lo cual se crean y desarrollan nuevas teorías con el propósito de dar respuesta a este tipo de eventos de interés para la ciencia. Por lo tanto, no es extraño, que se intente impulsar teorías que sean capaces de funcionar en un contexto de extrema complejidad, generador de información vaga e imprecisa, como por ejemplo, el propio comportamiento humano. Como se ha establecido, a lo largo de esta investigación, la combinación de las bondades de la Teoría de los Conjuntos Borrosos y la teoría clásica de la probabilidad y estadística, parece ser una respuesta adecuada, ya que intenta dar “grados” de precisión a eventos y comportamientos que son imprecisos. Tal como lo establece Zadeh(1977): ¨supone una aproximación entre la precisión de la matemática clásica y la sutil imprecisión del mundo real¨.

La Teoría de los Conjuntos Borrosos, según Azorin (1979), investiga y trata que lo “borroso”, sea aceptado como algo real y susceptible de medición, con lo cual se abre un abanico de investigación en campos de alta complejidad desde el punto de vista de la medición, como la sociología, la economía, la lingüística, la programación, entre otros, donde juegan un papel importante las nociones de clasificación, agregación, partición, discriminación, jerarquización y naturalmente, en el campo de la Probabilidad y la Estadística, para fines de inferencia, predicción, proyección de eventos, toma de decisiones con información vaga y escasa.

Como resultado de esta investigación, se tienen las siguientes conclusiones:

1. La teoría de los conjuntos borrosos, con su lógica difusa, viene a complementar el modelo de Bayes, en el tratamiento de la vaguedad y ambigüedad de la información; para ello, como lo establecen Reyes y García (2005), identifica criterios que definen una relación de “asociación” y detectan patrones de comportamiento para la partición, agregación, discriminación y jerarquización de los datos, y posteriormente alimentar subsiguientes procesos de toma de decisiones. Un ejemplo de complementariedad, es el método de conjuntos de aritmética restringida utilizado por Klir y Pan (1998). Este método es recomendable para tratar las probabilidades, de un conjunto de valores difusos, en el cual la suma de todas las probabilidades individuales es uno y se conoce como la extensión generalizada del modelo clásico de la teoría de la probabilidad.

2. El conjunto o la teoría de la probabilidad difusa valorada no pretenden reemplazar, sino complementar y ampliar la noción clásica de la probabilidad bayesiana para enfocar la teoría de probabilidades, poniendo a su disposición herramientas para trabajar con los estados de información más débiles.

3. El concepto de variable aleatoria borrosas no es único, y cada definición en la literatura difiere de las otras en la estructura del espacio, la forma y de su posibilidad de medición. En ese orden de ideas, Puri y Ralescu (1986), establecieron que las observaciones de algunos experimentos aleatorios no consisten, necesariamente en salidas numéricas, sino que pueden estar representados por términos lingüísticos vagos y cuando en particular, la variable aleatoria difusa tiene un número finito de imágenes, los valores de probabilidad pueden ser identificados con diferentes "etiquetas difusas".

4. Se muestra que Kruse y Meyer (1987), propusieron una interpretación alternativa de variables aleatorias borrosas, en el caso de asignar valores a variables aleatorias desconocidas. Para ello, la variable aleatoria borrosa, asume una "función de aceptabilidad", definida sobre la clase de todas las variables aleatorias. En esta

configuración, se define una función de aceptabilidad sobre la clase de todas las posibles distribuciones de probabilidad, de una manera natural. Representa la información disponible, acerca de la verdadera distribución de probabilidad del experimento aleatorio objeto de estudio. Este modelo de segundo orden, representa una medida de posibilidad definida sobre la clase de todas las medidas de probabilidad, con una interpretación particular para este tipo de variables aleatorias borrosas, diferentes de los enfoques de Puri y Ralescu (1986). La diferencia esencial de este enfoque con respecto al enfoque de Kruse y Meyer (1987), es que se centra en la omisión de la suposición acerca de la existencia de una variable aleatoria subyacente.

5. Un sistema probabilístico sustentados en información vaga e imprecisa, puede ser formalizado mediante la teoría de conjunto difuso o variables aleatorias de valor, como lo confirma Stojakovic, en su trabajo “Esperanza de una Variable Aleatoria Difusa”, en 1994. Lo cual, fue ratificado posteriormente por Zadeh, en su trabajo sobre la teoría de probabilidades imprecisas en el 2002; y por Augustin y Coolen, en su trabajo sobre intervalos de probabilidad e inferencia predictiva no paramétrica, en el 2004. En estos trabajos se estableció, que aun con datos incompletos, se puede realizar un cálculo probabilístico para un subconjunto entre 0 y 1 [0, 1] en lugar de un número en específico, como lo exige la teoría clásica de probabilidades. Esto se conoce como probabilidad incierta, que con el tiempo se ha interpretado y desarrollado bajo diferentes enfoques.

6. Una crítica frecuente a la Teoría de Conjuntos Borrosos deriva de su arbitrariedad a la hora de elegir los operadores de unión e intersección. Pero ha detectado, que esto más bien puede resultar en una ventaja, puesto que permite flexibilidad a la hora de abordar estadísticamente, eventos que involucren conceptos e información vaga e imprecisa. Por otra parte, los operadores básicos para subconjuntos borrosos como el mínimo y el máximo, correspondientes a la intersección y unión de conjuntos están afectados por las leyes de la probabilidad, debido a que el nivel de asociación de un valor x a un subconjunto aleatorio borroso, viene dado por una ley de probabilidad. Es decir, si se opera con subconjuntos aleatorios borrosos, se obtiene

la probabilidad de que su nivel de asociación al conjunto unión, intersección y complementario tome un determinado valor.

7. Queda también establecido, que la definición de probabilidad de eventos difusos es una extensión de la probabilidad clásica propuesta por Zadeh. Desde la intersección y la unión de los conjuntos difusos que dependen de T Normas y T Conormas, considerando además, si los axiomas de Kolmogorov se mantienen o no; esto depende de la T Norma elegida. Zadeh, demostró que su probabilidad satisface los axiomas de Kolmogorov cuando la intersección y la unión se definen por medio de los operadores mínimo y máximo. Sin embargo, existen otras T Normas que no satisfacen los axiomas de Kolmogorov, razón por la cual, se caracterizaron los T Normas continuas, que permiten la probabilidad de eventos difusos definidos por Zadeh, para poder satisfacer los axiomas de Kolmogorov, y a la cuales llamamos las Normas T compatibles con la probabilidad Zadeh (PZ). Igualmente estableció, que cada T Norma estricta es compatible con la PZ, mientras que el único nilpotente compatible con las T Normas y compatibles con PZ, es el operador Łukasiewicz.

8. Se mostraron elementos teóricos que permiten acercarnos a la relación formal entre la medida de probabilidad asociada a las variables aleatorias borrosas, la distribución de probabilidad de segundo orden, y el modelo superior- inferior. Queda demostrado, que las probabilidades superiores e inferiores, son de hecho, ∞-capacidades de orden. Igualmente, se demostró que las probabilidades superiores e inferiores asociadas al enfoque de Cousoa y Sánchez (2010), admiten una interpretación alternativa bajo el enfoque de Kruse y Meyer (1987), mediante el método desarrollado por Walley, donde una probabilidad superior e inferior es derivada de cualquier medida de probabilidad de segundo orden, a través del uso de técnicas de extensión natural.

En atención, a lo anteriormente expuesto, se podría señalar que esta investigación alcanzo los objetivos propuestos. Particularmente, en cuanto a establecer una relación entre los elementos característicos de la teoría de los conjuntos borrosos y de la lógica difusa, con los procesos fundamentales de la teoría clásica de probabilidad y estadística. Toda esta revisión y discusión teórica, permitió construir un enfoque interpretativo, sustentado en las investigaciones de los creadores y expertos principales de estas teorías. La construcción del enfoque interpretativo, representa el aporte principal de este trabajo, porque allana el camino hacia la profundización de las conexiones que caracterizan estas dos importantes teorías, y la consiguiente facilitación del estudio de la vaguedad y de la imprecisión.

Finalmente, se recomienda continuar con el estudio de los elementos y operaciones de la lógica difusa, que pudieran estar relacionados con los conceptos y procesos básicos de la teoría clásica de probabilidad y estadística, a fin de identificar las conexiones entre ambas teorías, y eventualmente facilitar el abordaje de situaciones y eventos de interés caracterizados con una información vaga e imprecisa.

Referencias Bibilográficas

Augustin, T.; Coolen, F. (2004) Nonparametric predictive inference and interval probability. Journal of Statistical Planning and Inference. Vol. 124. p. 251–272.

Akbari, M.GH.; Rezaei, A.H. (2008).Order statistics using fuzzy random variables. Statistics and Probability Letters. p. 1 – 7.

Aranguren, S.; Muzachiodi, S. (2003). Implicancias del data mining. Tesis de grado – Lic. Sistemas de información.

Azorin, P. (1979). Algunas aplicaciones de los conjuntos borrosos a la estadística. Instituto Nacional de Estadística.

Balza, M. (1984).Una Introducción a la Teoría de Conjuntos Difusos (Fuzzy Sets) y su Aplicación a la Programación Difusa". Trabajo Ascenso Asistente. Facultad de Agronomía, UCV.

Cousoa, I.; Sánchez, L. (2010).Upper and lower probabilities induced by a fuzzy random variable. Fuzzy Sets and Systems. Publicado por Elsevier. Vol. 165, Issue 1. p. 1–2. http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2010.10.005

Dempster, Shaffer, (1976). A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University.

Dubois y Prade, (1980). Systems of linear fuzzy constraints. Fuzzy Sets and Systems. Publicado por Elsevier B.V. Vol. 3, p. 37– 48.

Feng et al. (2001). The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications. Fuzzy Sets and Systems. Vol. 120. p. 487–497.

Flaminioa, P.; Godo L.(2006). A logic for reasoning about the probability of fuzzy events. Fuzzy Sets and Systems. Publicado por Elsevier B.V. Vol. 158, p. 625–638. doi:10.1016/j.fss.2006.11.008.

Fruhwirth-Schnatter, S. (1992). On statistical inference for fuzzy data with applications to descriptive statistics. Fuzzy Sets and Systems 50. p. 143-165.

Hirota (1984). Characterization of fuzzy clustering algorithms in terms of entropy of probabilistic sets. Vol. 2. p. 213–216.

Kaufmann, A; Gil, A. (1990). Las matemáticas del azar y de la incertidumbre. Ed. Ceura. Madrid.

Kaufmann, A; Gil, A; Gil, M.(1994). Creatividad para la gestión de las empresas. Madrid. Ed. Pirámide.

Klir, G.; Pan, Y. (1998). Constrained fuzzy arithmetics: Basic questions and some answers. Soft Computing Vol.2. p.100–108.

Kruse, K; Meyer, D. (1987). Statistics with Vague Data. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht.

Kwakernaak, H.(1978). Fuzzy ramdom variables-I. Definition and theorems. Information Sciences 15.p. 1-29.

Loginov, A. (1966). Interval estimates in the presence of nuisance parameters. Theory of Probability and its applications.

Loquin, K.; Strauss, O. (2008). Histogram density estimators based upon a fuzzy partition. Statistics & Probability Letters. Vol. 78, Issue 13. p. 1863-1868.

Nahmias, S. (1978). Fuzzy variables. Fuzzy Sets and Systems. Vol. 1. p. 97–110.

Puri, M.; Ralescu, D. (1986). Fuzzy random variables. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 114. P. 409–422.

Ralescu, A.L.; Ralescu, D.A. (1984). Probability and fuzziness. Information Sciences Publicado por Elsevier Science Inc. Vol. 34, Issue 2, p. 85-92.

Reyes, J.; García, R. (2005). Tomas de decisión mediante técnicas de razonamiento incierto. Ingenierías. Vol. III, No. 28.

Stein, W.; Talati K. (1981). Convex fuzzy ramdon variables. Fuzzy Sets and Systems. Publicado por Elsevier Science B.V. Vol. 6, Issue 3, p. 271-283.

Stojaković, M. (1994). Fuzzy random variable, expectation, martingales. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 184. p. 594–606.

Stojaković, M. (2010). Imprecise set and fuzzy valued probability. Journal of Computational and Applied Mathematics. Publicado por Elsevier. Vol. 235, Issue 16. p. 4524-4531. http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2010.01.016

Tanaka, K. (1997). An introduction to Fuzzy Logic for practical aplications. Springer-Verlag, New York.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control 8. p. 338-353.

Zadeh, L.A. (1968). Probability measures of fuzzy events. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 10. p. 421–427.

Zadeh, L.A. (1977). Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems. Publicado por Elsevier Science B.V. Vol. 100, Suplemento 1. p.9-34.

Zadeh, L. (2002). Toward a perception-based theory of probabilistic reasoning with imprecise probabilities. Journal of Statistical Planning and Inference. Vol. 105. p. 233–264.

Zeng, X., Singh, M G. (1995). Approximation theory of fuzzy systems - MIMO case, IEEE Transactions on Fuzzy Systems. Vol. 3.

Zimmermann, J. (1976). Description and optimization of fuzzy systems. Int. J. General Systems. Vol. 2. p. 209-215.

Bibliografía Consultada

Balza; M. (1995) “Obtención de Conglomerados a través de la Teoría de Conjuntos Difusos”. Tesis Doctoral. Facultad de Agronomía, UCV.

Boswell, S.B.; Taylor M. S. (1987). A central limit theorem for fuzzy random variables. Fuzzy Sets and Systems. Vol. 24, Issue 3, p.331-344.

Chien-Wei Wu. (2009). Decision-making in testing process performance with fuzzy data. European Journal of Operational Research. Vol. 193, Issue 2. p. 499-509.

Martín, E.A. (1982). La teoría de los conjuntos borrosos y la toma de decisiones. Revista española de financiación y contabilidad. Vol. XI, n. 38 y 39 p. 405-430.

Montenegro, M.; Casals, M.R.; Lubiano M.A.; Gil, M.A. (2001). Two-sample hypothesis tests of means of a fuzzy random variable. Information Sciences. Vol. 133, Issues 1-2. p. 89-100.

Morales – Luna, G. (2002). Introducción a la lógica difusa. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN.

Saeidifarand, E. (2008). The possibilistic moments of fuzzy numbers and their applications. Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 223, Issue 2. p. 1028-1042.

Pedrycz, W. (2008). Statistically grounded logic operators in fuzzy sets. European Journal of Operational Research. Vol. 193, Issue 2. p. 520-529.

Glosario

Aquí se muestran algunas definiciones de términos que han ido apareciendo a lo largo de la investigación:

Conjunto: Es una colección de elementos (reales o imaginarios) considerados como un todo.

Conjunto borroso: Es aquél en que cada elemento tiene un grado de pertenencia asociado, dicho grado es un número real en el intervalo [0,1].

Conjunto clásico: Es aquél en que cada elemento tiene asignado un grado de pertenencia, 1 si el elemento pertenece al conjunto y 0, si el elemento no pertenece a dicho conjunto.

Función de asociación: Es una función que indica el grado de asociación de un elemento a un conjunto.

Grado de asociación: Es un valor numérico en el intervalo [0,1] con el cual se expresa la medida en que un elemento cumple un determinado predicado.

Lógica Difusa: Es un tipo de lógica que utiliza información de entrada vaga e imprecisa para extraer conclusiones. Mediante ella se definen conceptos que no pueden ser formulados de forma precisa.

Predicado: Lo que se afirma o niega del sujeto de una proposición.

Predicado vago o borroso: Es un predicado que al aplicarlo a un conjunto proporciona información imprecisa.

Universo: Conjunto de elementos cualesquiera en los cuales se consideran una serie de características a estudiar.

Nilpotente: un elemento x de un anillo R se dice que es **nilpotente** si existe algún entero positivo n tal que $x^n = 0$.

Anillo: un **anillo** es una estructura algebraica formada por un conjunto (A) y dos operaciones, llamadas usualmente suma y producto (A,+,*), de modo que (A,+) es un grupo conmutativo con elemento neutro (que designamos 0), y el producto * es asociativo y tiene la propiedad distributiva respecto de la suma.